
Een niet-lineair tijdreeksmodel voor grondwaterstandsfluctuaties in gedraineerde gebieden

Wilbert Berendrecht, Hans Gehrels,
Frans van Geer en Arnold Heemink

Bij de toepassing van tijdreeksanalyse op grondwaterreeksen wordt de respons van grondwater op neerslagoverschot over het algemeen lineair verondersteld. In gedraineerde gebieden is deze aanname echter niet meer te rechtvaardigen. Dit komt doordat de drainage leidt tot een veranderd grondwaterregime. Om grondwaterstandsfluctuaties in dergelijke gebieden goed te kunnen beschrijven zijn niet-lineaire modellen onontbeerlijk. In dit artikel beschrijven we de ontwikkeling van een niet-lineair tijdreeksmodel dat rekening houdt met veranderingen in het regime ten gevolge van drainagesystemen. Belangrijke eigenschap van het model is dat het drainageniveau wordt geschat uit de grondwaterstandsdata. Daarnaast kan, onafhankelijk van de meetfrequentie van de grondwaterreeksen, gebruik worden gemaakt van hoogfrequente invoergegevens (bijvoorbeeld dagcijfers van neerslag en verdamping). Dit is van wezenlijk belang voor ondiepe, snel reagerende, systemen. De werking en toepasbaarheid van het niet-lineaire model wordt verder geïllustreerd aan de hand van twee voorbeelden.

1 Inleiding

In de loop der jaren zijn er in Stromingen geregeld artikelen verschenen over tijdreeksanalyse. Veel van deze publicaties richtten zich op het probleem van niet-equidistante tijdreeksen, wat zich voordoet bij de min of meer standaard 'Box-Jenkins modellen' (Box en Jenkins, 1970). Bierkens e.a. (1999) hebben dit probleem aangepakt door het Box-Jenkins model om te schrijven in vectorvorm (zogenaamde toestandsbeschrijving) en dit in te bedden in een Kalman-filter. In Berendrecht e.a. (2003) is deze aanpak verder gegeneraliseerd en is aangetoond dat het gebruik van hoogfrequente invoerdata – veelal dagcijfers van neerslag en verdamping – voor het modelleren van laagfrequente grondwaterstandmetingen (bijvoorbeeld 14-daagse of maandelijke metingen) leidt tot betere modelresultaten. Daarnaast vormt de toestandsbeschrijving een flexibel en generiek raamwerk om tijdreeksmodellen uit te breiden voor toepassing in complexere situaties. Ook kan op eenvoudige wijze fysische kennis in het model verwerkt worden. Parallel aan deze ontwikkelingen hebben Von Asmuth, e.a. (2001, 2002) het PIRFICT-model ontwikkeld. Dit model lost het probleem van niet-equidistantie op vanuit een continue-tijd benadering. Om het aantal modelparameters te beperken wordt een vooraf vastgestelde functie opgelegd die de respons van grondwater op neerslagoverschot beschrijft.

Opvallend is dat tot nu toe de meeste publicaties uitgaan van een lineaire respons van

grondwater op neerslagoverschot. Hoewel er in discussies over tijdreeksmodellen vaak gesproken wordt over niet-lineaire relaties is er, op het proefschrift van Martin Knotters (2001) na, nog weinig gepubliceerd over dit onderwerp.

In gedraineerde gebieden komt in natte perioden vaak een ander grondwaterregime voor dan in droge perioden. 's Winters staat er ten gevolge van de hoge grondwaterstand water in de greppels, terwijl 's zomers de greppels droog staan. De respons van grondwater op neerslag is in de zomer dus anders dan in de winter. Dit niet-lineaire gedrag kan worden gemodelleerd met een zogenaamd *threshold* model: boven een bepaalde drempelwaarde reageert het systeem anders dan er onder.

In dit artikel ontwikkelen we een niet-lineair tijdreeksmodel voor gedraineerde gebieden vanuit de toestandsbeschrijving ingebed in een Kalman-filter. Zoals reeds genoemd, is een groot voordeel hiervan dat hoogfrequente invoergegevens gebruikt kunnen worden. Dit is essentieel voor ondiepe reeksen, omdat de piekrespons veelal in één of enkele dagen optreedt. Modellen die op basis van 14-daagse (of zelfs maandelijks) gegevens zijn opgesteld, zullen in dat geval geen nauwkeurige beschrijving van de grondwaterstandsfluctuaties kunnen geven (zie Berendrecht e.a., 2003). Daarnaast kunnen fysische processen eenvoudig verwerkt worden in het model. Dit geeft de mogelijkheid om het model te gebruiken voor het bepalen en voorspellen van het effect van ingrepen (Knotters en Bierkens, 1999). Hierdoor wordt ook extra inzicht verkregen in de hydrologische processen ter plaatse. In de volgende paragraaf leiden we een model af voor grondwaterstandsfluctuaties in een wisselend grondwaterregime. Hoewel dit model uitgaat van twee regimes (één boven en één onder het drainageniveau), is het eenvoudig om meerdere regimes te modelleren. Het drainageniveau (moment waarop het regime verandert) wordt geschat uit de data en hoeft dus niet op voorhand bekend te zijn. Neerslag en verdamping worden gebruikt als modelinvoer. Paragraaf 3 beschrijft twee praktijkvoorbeelden. Hierin wordt de werking van het model duidelijk gemaakt en blijkt de invloed van de niet-lineariteit op de modelresultaten. Tevens worden enkele toepassingen van het gekalibreerde model behandeld.

2 Beschrijving van grondwaterstandsfluctuaties in gedraineerde gebieden

Waterbalans

Figuur 1 toont een typische schematisatie van een grondwatersysteem dat wordt beïnvloed door drainage. Voor dit systeem geldt de volgende waterbalans:

$$\varphi \frac{dh(t)}{dt} = f_i P(t) - f_c E_r(t) - q_b(t) - q_v(t) - q_l(t), \quad (1)$$

waarin:

$h(t)$	=	grondwaterstand ter plaatse van het waarnemingspunt [L],
$P(t)$	=	neerslag [LT^{-1}],
$E_r(t)$	=	Makkink-referentieverdamping [LT^{-1}],
f_i	=	interceptiefactor [-],
f_c	=	gewasfactor [-], bergingscoëfficiënt [-],

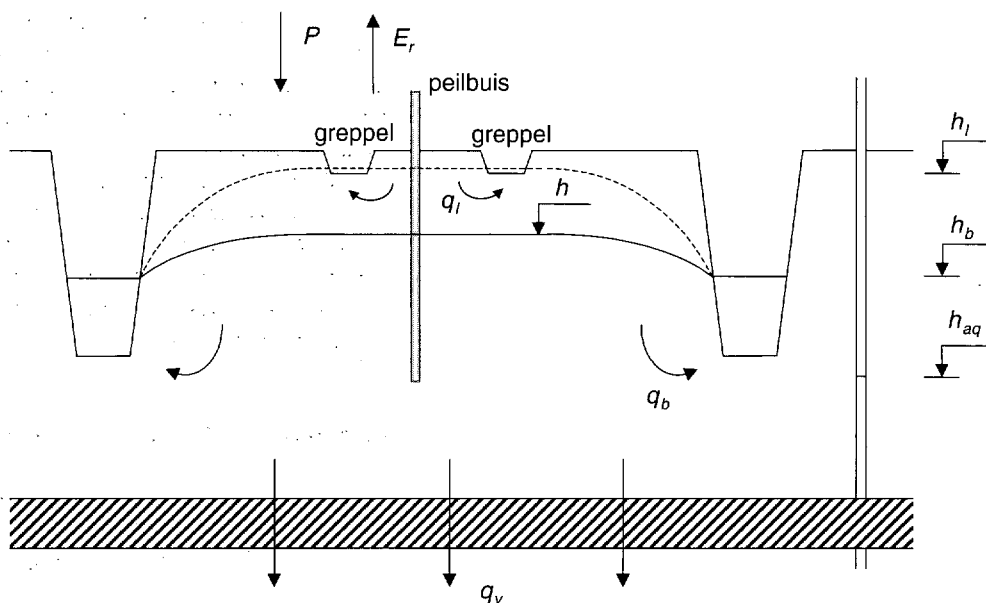
- $q_b(t)$ = flux naar 'regionaal' drainagesysteem [LT^{-1}],
- $q_l(t)$ = flux naar 'lokaal' drainagesysteem [LT^{-1}],
- $q_v(t)$ = verticale flux naar onderliggend watervoerend pakket [LT^{-1}].

De verticale flux $q_v(t)$ kan worden geschreven als een functie van de grondwaterstand:

$$q_v(t) = \frac{h(t) - h_{aq}(t)}{\gamma_v}, \quad (2)$$

met $h_{aq}(t)$ [L] de stijghoogte in het onderliggende watervoerend pakket en γ [T] de weerstand van de tussenliggende laag. Op gelijke wijze wordt de flux naar het regionale drainagesysteem geschreven als

$$q_b(t) = \frac{h(t) - h_b(t)}{\gamma_b}, \quad (3)$$



Figuur 1: Schematisatie van een gedraineerd grondwatersysteem.

met $h_b(t)$ [L] het 'regionale' drainageniveau en γ_b [T] is de weerstand tussen het waarnemingspunt en het regionale drainagesysteem. Het drainageniveau wordt onafhankelijk verondersteld van zowel de grondwaterstand als de invoer.

Aangezien zowel $q_v(t)$ als $q_b(t)$ linear afhankelijk zijn van de grondwaterstand $h(t)$, kunnen ze worden samengevoegd tot één variabele $q_r(t)$ [LT^{-1}] die de regionale stromingscomponent beschrijft:

$$q_r(t) = \frac{h(t) - h_r(t)}{\gamma_r} \quad (4)$$

Afhankelijk van de opgelegde randvoorwaarden kunnen $h_r(t)$ [L] en γ [T] worden gedefinieerd in termen van vergelijking (2) en (3). De meest voorkomende randvoorwaarden zijn:

- 1 een vaste stijghoogte (Dirichlet-voorwaarde) voor zowel $h_b(t)$ als $h_{aq}(t)$. In dit geval kunnen γ en $h_r(t)$ geschreven worden als

$$\gamma_r = \frac{\gamma_b \gamma_v}{\gamma_b + \gamma_v} \quad \text{en} \quad h_r(t) = \frac{\gamma_b h_{aq}(t) + \gamma_v h_b(t)}{\gamma_b + \gamma_v}, \quad (5)$$

- 2 een vaste stijghoogte (Dirichlet-voorwaarde) voor $h_b(t)$ en een vaste flux (Neumann-voorwaarde) voor q_v :

$$\gamma_r = \gamma_b \quad \text{en} \quad h_r(t) = h_b(t) - \gamma_b q_v. \quad (6)$$

Het belangrijkste onderdeel van het systeem in figuur 1 is de lokale drainage (de greppels). Er kunnen zich twee situaties voordoen: als de grondwaterstand zich onder het 'lokale' drainageniveau h_l [L] bevindt dan is de drainage niet actief – er vindt geen afvoer via de drains plaats. Als de grondwaterstand echter boven het drainageniveau komt, is er wel afvoer via de drains. Er is dus sprake van een geknikte q - h relatie. De drainageflux $q_l(t)$ [LT⁻¹] wordt daarom beschreven door de volgende twee vergelijkingen:

$$q_l(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } h(t) \leq h_l, \\ \frac{h(t) - h_l}{\gamma_l} & \text{als } h(t) > h_l, \end{cases} \quad (7)$$

met γ de lokale drainage weerstand [T].

Op basis van de gegeven vergelijkingen kan vergelijking (1) geschreven worden als de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi} \left[f_i P_t - f_c E_r(t) - \frac{h(t) - h_r(t)}{\gamma_r} - q_l(t) \right]. \quad (8)$$

Toestandsbeschrijving

Om het model beschreven met vergelijking (8) te ijken op een grondwaterstandsreeks, kan vergelijking (8) geschreven worden in een toestandsbeschrijving. De voordelen van deze aanpak staan uitgebreid beschreven in Berendrecht e.a. (2003). De toestand op tijdstip t , h_t , wordt geschreven als een discrete (niet-lineaire) functie van de toestand h op tijdstip $t-1$, de invoervector \mathbf{u}_t – deze bevat de invoervariabelen P_t en $E_{r,t}$ – en een additief ruisproces w_t :

$$h_t = F[h_{t-1}, \mathbf{u}_t] + G[h_{t-1}]w_t. \quad (9)$$

De ruisterm w_t (met gemiddelde nul, variantie $\sigma_{w,t}$ en ongecorrleerd in de tijd) beschrijft alle niet-gemodelleerde processen, fouten ten gevolge van modelaannamen en fouten in invoergegevens. Zowel $F[\cdot, \cdot]$ als $G[\cdot]$ zijn een niet-lineaire functie. De invoervector \mathbf{u}_t kan,

naast P_t en $E_{r,t}$, ook nog andere invoervariabelen bevatten, zoals interventies. Zo kan het referentieniveau h_r in de tijd variëren volgens

$$h_{r,t} = \text{constante} + \beta \Delta h_{r,t}. \quad (10)$$

Hierin is β [-] een schaalfactor die afhangt van het type randvoorwaarde – zie vergelijkingen (5) en (6).

Vergelijking (8) dient nu opgelost te worden voor grondwaterstanden zowel boven als onder het drainageniveau.

Indien $h(t) \leq h_r$ ($q_i(t) = 0$) kan vergelijking (8) worden benaderd door de volgende vergelijking (zie ook Knotters en Bierkens, 1999):

$$h(t) = h(t - \Delta t) e^{-\Delta t / \varphi_r} + \int_{t - \Delta t}^t e^{-(t-\tau) / \varphi_r} \frac{1}{\varphi} \left(f_i P(t) - f_c E_r(t) + \frac{h_r(t)}{\gamma_r} \right) d\tau. \quad (11)$$

Als we nu aannemen dat $P(t)$, $E_r(t)$ en $h_r(t)$ constant zijn binnen het interval $[t - \Delta t, t]$, dan kan bovenstaande vergelijking worden geschreven als (met $\Delta t = 1$)

$$h(t) = h(t - 1) e^{-1 / \varphi_r} + \gamma_r \left(1 - e^{-1 / \varphi_r} \right) \left(f_i P(t) - f_c E_r(t) + \frac{h_r(t)}{\gamma_r} \right). \quad (12)$$

De structuur van vergelijking (12) komt overeen met die van een transfermodel:

$$h_t = \delta_r h_{t-1} + \omega_r (f_i P_t - f_c E_{r,t}) + \mu_{r,t}, \quad (13)$$

met

$$\delta_r = e^{-1 / \varphi_r} \quad [-], \quad (14a)$$

$$\omega_r = \gamma_r (1 - \delta_r) \quad [\text{T}], \quad (14b)$$

$$\mu_{r,t} = h_{r,t} (1 - \delta_r) \quad [\text{L}]. \quad (14c)$$

Op gelijke wijze wordt vergelijking (8) voor $h(t) > h_r$ geschreven als

$$h_t = \delta_s h_{t-1} + \omega_s (f_i P_t - f_c E_{r,t}) + \mu_{s,t}, \quad (15)$$

met

$$\delta_s = e^{-1 / \varphi_r} \quad [-], \quad (16a)$$

$$\omega_s = \Gamma (1 - \delta_s) \quad [\text{T}], \quad (16b)$$

$$\mu_{s,t} = H_t (1 - \delta_s) \quad [\text{L}]. \quad (16c)$$

Hierin zijn – op dezelfde wijze als bij vergelijking (5) – h_r , $h_{r,t}$, γ_i en γ_r samengevoegd tot

$$\Gamma = \frac{\gamma_l \gamma_r}{\gamma_l + \gamma_r} \text{ [T]} \text{ en } H_t = \frac{\gamma_r h_t + \gamma_l h_{r,t}}{\gamma_l + \gamma_r} \text{ [L]}. \quad (16d)$$

We hebben nu twee vergelijkingen voor h_t : één voor als de grondwaterstand zich boven het lokale drainageniveau bevindt (vergelijking (13)) en één voor als de grondwaterstand zich onder het lokale drainageniveau bevindt (vergelijking (15)). Om tot één vergelijking te komen worden vergelijkingen (13) en (15) geschreven als functie van de lokale drainageflux $q_{l,t}$:

$$h_t = \delta_r h_{t-1} + \omega_r (f_i P_t - f_c E_{r,t} - q_{l,t}) + \mu_{r,t}. \quad (17)$$

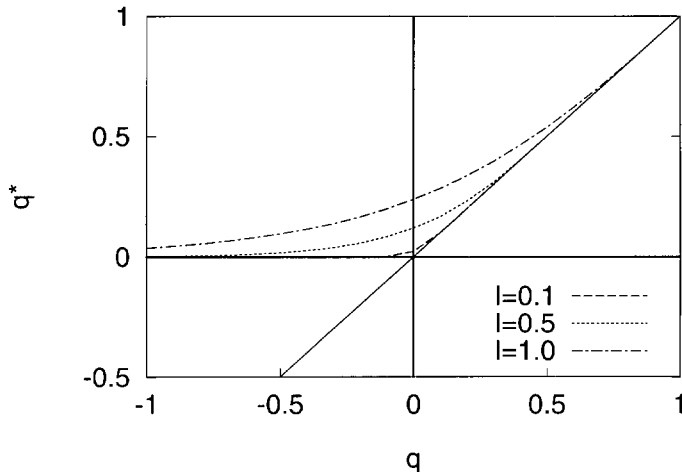
met

$$q_{l,t} = \begin{cases} 0 & \text{als } h_t \leq h_l, \\ \frac{1}{\omega_r} [(\delta_r - \delta_s) h_{t-1} + (\omega_r - \omega_s)(f_i P_t - f_c E_{r,t}) + \mu_{r,t} - \mu_{s,t}] & \text{als } h_t > h_l. \end{cases} \quad (18)$$

Om straks de toestandsbeschrijving te kunnen combineren met een niet-lineair Kalman-filter, dient vergelijking (18) continu en differentieerbaar te zijn in $h_t = h_l$. Aangezien $q_{l,t}$ wel continu maar niet differentieerbaar is, passen we de volgende transformatie toe:

$$q_{l,t}^* = \begin{cases} \frac{2\lambda e^{2(q_{l,t}-\lambda)/\lambda}}{1 + e^{2(q_{l,t}-\lambda)/\lambda}} & \text{als } q_{l,t} < \lambda, \\ q_{l,t} & \text{als } q_{l,t} \geq \lambda, \end{cases} \quad (19)$$

waarin λ ($\lambda > 0$) een klein getal is (bijvoorbeeld 0,01) en $q_{l,t}$ is gedefinieerd als in vergelijking (18). Deze getransformeerde q -waarde is wel differentieerbaar. Enkele voorbeelden van $q_{l,t}^*$ als functie van $q_{l,t}$ voor verschillende waarden van λ zijn weergegeven in figuur 2.



Figuur 2: Voorbeelden van $q_{l,t}^*$ als functie van $q_{l,t}$.

Naast dat $q_{i,t}$ niet-lineair gerelateerd is aan h_t , nemen we aan dat het ruisproces w_t ook niet-lineair afhangt van h_t . De variantie van het ruisproces verandert dus als het regime verandert. De ruiscomponent $\xi_t = G[h_{t-1}]w_t$ wordt daartoe beschreven door een S-kromme:

$$\xi_t = \left\{ 1 + (g - 1) \frac{e^{\kappa(h_t - h_{t-1})}}{1 + e^{\kappa(h_t - h_{t-1})}} \right\} w_t, \quad (20)$$

waarin κ een schalingsfactor is die de 'gladheid' van vergelijking (20) bepaalt. De parameter g bepaalt de verhouding tussen de invloed van w_t boven en de invloed van w_t onder het drainageniveau h_i : boven het drainageniveau is ξ_t asymptotisch gelijk aan w_t en onder het drainageniveau is ξ_t asymptotisch gelijk aan gw_t .

De toestandvergelijking (9) kan nu geschreven worden door samenvoeging van vergelijkingen (17), (19) en (20):

$$h_t = \delta_r h_{t-1} + \omega_r (f_i P_t - f_c E_{r,t} - q_{i,t}^*) + \mu_{r,t} + \xi_t, \quad (21a)$$

$$z_t = h_t + v_t. \quad (21b)$$

Hierin is z_t de gemeten grondwaterstand en v_t de meetfout (gemiddelde nul en variantie $\sigma_{v,t}$).

Schatten van de modelparameters

Vergelijking (21) bevat een aantal onbekende parameters. Deze parameterset nemen we op in de vector $\alpha = [f_i, f_c, \gamma_l, h_i, \varphi, \gamma_r, h_r, \beta, g, \sigma_w^2]$. De variantie van de meetfout, σ_v^2 , wordt bekend verondersteld. Overigens zijn f_i en f_c meestal ook bekend. De vector α schatten we met behulp van een *maximum-likelihood* criterium. Aangezien de te modelleren tijdreeksen niet op elk tijdstip een meting hebben, berekenen we de *maximum likelihood* met behulp van een Kalman-filter. Het Kalman-filter geeft een optimale schatting van de toestand h_t gegeven h_{t-1} . Een uitgebreidere beschrijving hiervan is te vinden in vorige artikelen in *Stromingen* (bijv. Bierkens e.a., 1999; Berendrecht e.a., 2003) en tekstboeken zoals Schweppe (1973) en Bryson en Ho (1975). Omdat in vergelijking (21) de relatie tussen zowel h_t en h_{t-1} als tussen h_t en w_t niet-lineair is, gebruiken we het zogenaamde *truncated first-order filter* (TFOF). Dit niet-lineaire filter geeft een goede eerste-orde schatting van de toestand op tijdstip t . In dit artikel zal het filter zonder verder bewijs worden gepresenteerd. Een beschrijving van het niet-lineaire Kalman-filter wijkt niet veel af van de eerdere beschrijvingen in *Stromingen* van het lineaire Kalman-filter. Degenen die geïnteresseerd zijn in een meer gedetailleerde beschrijving worden verwezen naar Maybeck (1982).

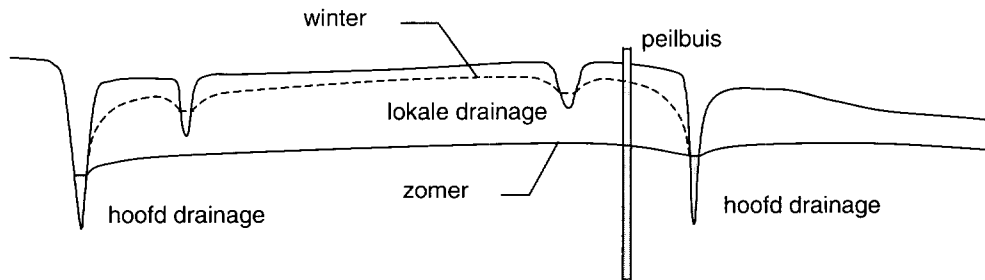
Toepassing van het model

Het model zoals beschreven in paragraaf 1 hebben we getest op diverse tijdreeksen. In dit artikel zullen we hier twee voorbeelden van bespreken. Tevens hebben we de resultaten van het niet-lineaire model vergeleken met die van een lineair tijdreeksmodel. Om dit arti-

kel echter niet te uitgebreid te maken, zullen de resultaten hiervan niet beschreven worden. Geïnteresseerden worden verwezen naar Berendrecht (2004).

Peilbuis 1 – Mortelen

Het eerste voorbeeld heeft betrekking op een tijdreeks die is waargenomen in de Mortelen. Figuur 3 geeft een situatieschets van de peilbuislocatie. In de winter stijgt de grondwaterstand tot boven het lokale drainageniveau, terwijl in de zomer de greppels droogvallen. In 1988 is de bodem van de linker sloot verlaagd met circa 75 cm. De exacte datum van de verlaging is echter niet bekend. We hebben daarom aangenomen dat het referentieniveau lineair daalt van h in 1988 tot $h - \beta \Delta h$ in 1989 met $\Delta h = 1$ cm. De parameter β [-] schat-



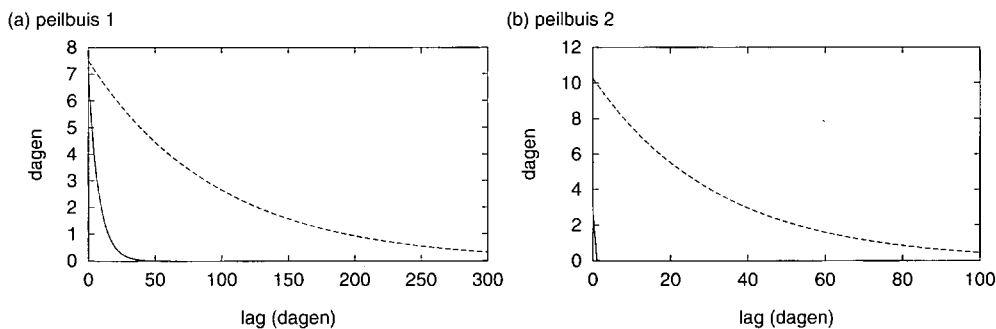
Figuur 3: Situatieschets ter plaatse van peilbuis 1, locatie Mortelen

Grondwaterstandsmetingen zijn beschikbaar vanaf september 1967 met een gemiddelde meetfrequentie van 2 maal per maand. De variantie van de meetfout wordt gesteld op $\sigma_e^2 = 0,5$ cm². Voor de invoer wordt gebruik gemaakt van dagcijfers van neerslag (KNMI-station Dinther) en verdamping (o.b.v. KNMI-stations De Bilt en Beek). Het landgebruik ter plaatse van de peilbuis is grasland. Bijbehorende interceptie- en gewasfactoren zijn respectievelijk $f_i = 1,0$ en $f_c = 1,0$. Om het gekalibreerde model te kunnen valideren is de tijdreeks gesplitst in een kalibratie set (1975–2000) en een validatieset (1967–1975).

Tabel 1: Gekalibreerde parameters met standaardfouten van het niet-lineaire model voor peilbuis 1.

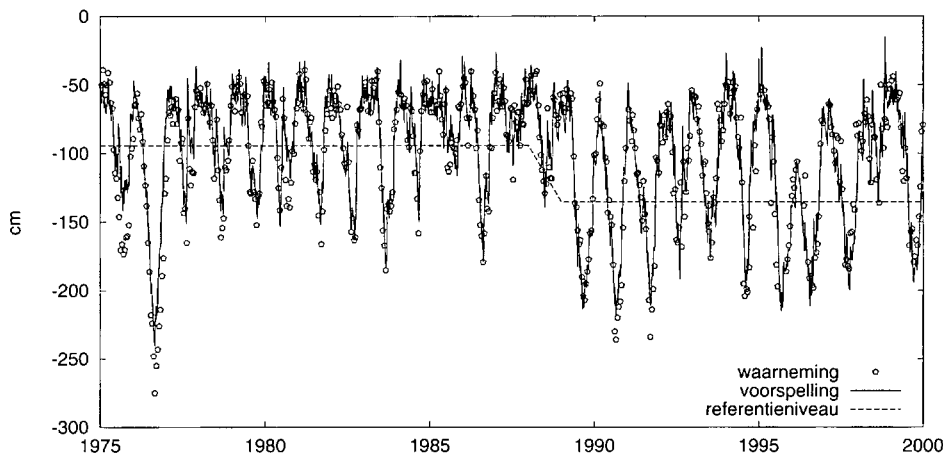
Parameter	Schatting	Standaardfout
μ (d)	62,4	4,10
h_l (cm)	-66,4	0,366
ϕ	0,131	0,00158
μ (d)	724	44,5
h_r (cm)	-95,2	1,93
β	39,6	2,55
g	1,07	0,0562
σ_w^2 (cm ²)	10,4	0,967

Tabel 1 geeft de gekalibreerde parameters met bijbehorende standaardafwijkingen. Zowel het niveau als de weerstand van het lokale drainagesysteem kunnen met een behoorlijke mate van zekerheid worden geschat (standaardafwijking van respectievelijk 0,4 cm en 4 dagen). Uit de tabel blijkt tevens dat de wegingsfactor g niet significant afwijkt van 1. Dit betekent dat de invloed van de ruis boven en onder het lokale drainageniveau gelijk is. Op basis van de modelparameters kunnen impuls-respons functies afgeleid worden. Figuur 4a toont deze functies voor beide regimes (boven en onder het lokale drainageniveau). Uit de figuur blijkt duidelijk de invloed van de lokale drainage op de responstijd.



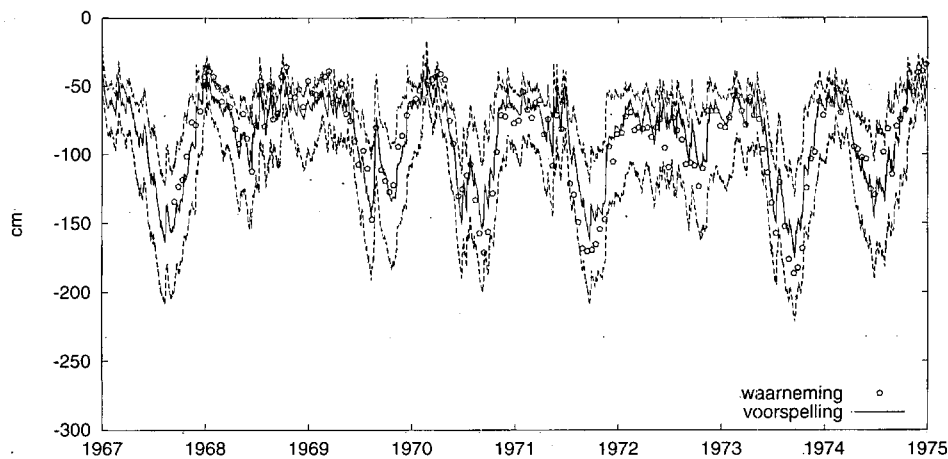
Figuur 4: Impuls-respons functies voor (a) peilbuis 1 en (b) peilbuis 2; de doorgetrokken lijn representeert de respons boven de lokale drainagebasis, de stippelijntje er onder.

Figuur 5 geeft de voorspelling van de grondwaterstand voor de kalibratieperiode (1975–2000). Dit is dus het deel van de grondwaterstandsfluctuaties dat kan worden verklaard door neerslag, verdamping en de verlaging van de slotbodem. De figuur laat zien dat het model de waargenomen fluctuaties goed beschrijft. Ook het effect van de lokale drainage is goed waarneembaar: boven het drainageniveau is de responstijd korter en de amplitude van de fluctuaties geringer. De verlaging van de slotbodem in het hoofd-drainagesysteem heeft ertoe geleid dat de greppels (lokale drainage) 's winters ook vaak droog blijven staan.



Figuur 5: Voorspelde ($w_t = 0$) en waargenomen grondwaterstand voor peilbuis 1 in de kalibratieperiode 1975–2000; de stap in het referentieniveau toont het geschatte effect van de interventie in 1988.

In figuur 6 zijn de resultaten van de validatie weergegeven. De 2,5% en 97,5% betrouwbaarheidsbanden zijn geschat op basis van een set van 1000 gesimuleerde tijdreeksen. De simulatie is uitgevoerd door 1000 normaal verdeelde ruisreeksen te genereren met gemiddelde nul en variantie $\sigma_w^2 = 10,4 \text{ cm}^2$. De reeksen zijn vervolgens gebruikt als invoer (w) voor het gekalibreerde model. Het is duidelijk te zien dat het betrouwbaarheidsinterval boven het lokale drainageniveau kleiner is dan onder het lokale drainageniveau. Het percentage waarnemingen dat buiten het betrouwbaarheidsinterval valt is 6,3%. Dit ligt dichtbij de theoretische waarde van 5%.

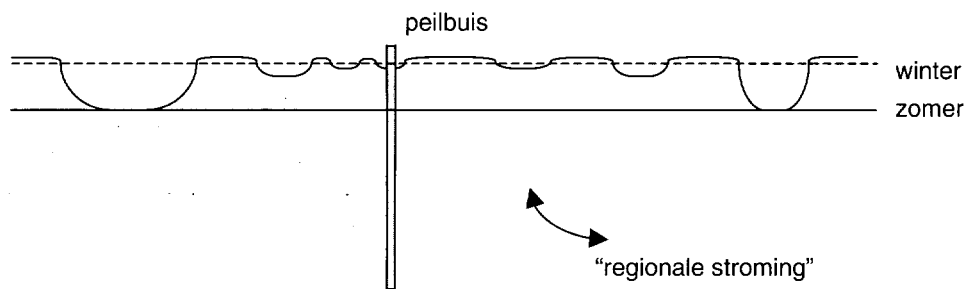


Figuur 6: Voorspelde ($w_t = 0$) en waargenomen grondwaterstand voor peilbuis 1 in de validatie-periode 1967-1975; de stippellijnen tonen het 95%-betrouwbaarheidsinterval.

Samenvattend kan worden geconcludeerd dat zowel de verificatie (vergelijking van voorspellingen en metingen in de kalibratieperiode) als de validatie laten zien dat het niet-lineaire model een goede representatie geeft van de grondwaterstandsfluctuaties.

Peilbuis 2 – Meetkerkse Moeren

Peilbuis 2 is gesitueerd in De Meetkerkse Moeren, net over de Belgische grens. Ook hier is het landgebruik grasland: $f_i = 1,0$ en $f_c = 1,0$. Aangezien de grondwaterstand automatisch wordt geregistreerd, hebben we hier de beschikking over dagwaarnemingen vanaf december 2000. Vanwege de relatief korte periode gebruiken we alle data voor de kalibratie. De variantie van de meetfout wordt weer op $\sigma_v^2 = 0,5 \text{ cm}^2$ gesteld. Verder nemen we aan dat het referentieniveau h_r constant is in de tijd. Voor neerslag- en verdampingscijfers maken we gebruik van data van KNMI-station Vlissingen. Een situatieschets is gegeven in figuur 7. Ter plaatse van de peilbuis bevindt zich een aantal greppeltjes. Iets verderop liggen twee wat diepere sloten.



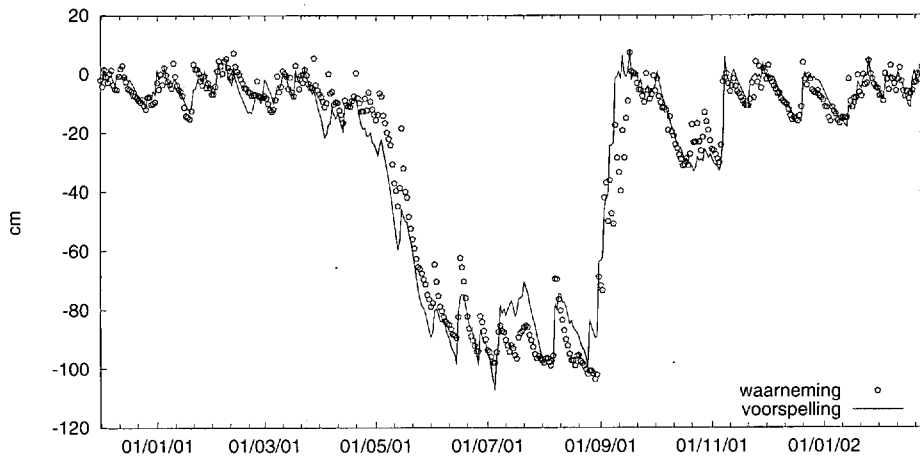
Figuur 7: Situatieschets van de locatie De Meetkerkse Moeren (peilbuis 2).

Tabel 2 toont de gekalibreerde modelparameters. Het geschatte lokale drainageniveau is 1,2 cm onder maaiveld. Hierdoor is de lokale drainageweerstand laag: circa 3 dagen. Dit komt goed tot uitdrukking in de impuls-respons functies in figuur 4b. Het neerslagoverschot wordt vrijwel direct afgevoerd via de drainage. In tegenstelling tot bij peilbuis 1 is de parameter g nu wel significant groter dan 1: $g = 1,80$. Dit betekent dat de invloed van de ruis voor $h_t \leq h_r$ 1,8 maal groter is dan voor $h_t > h_r$.

Tabel 2: Gekalibreerde parameters met standaardfouten van het niet-lineaire model van peilbuis 2.

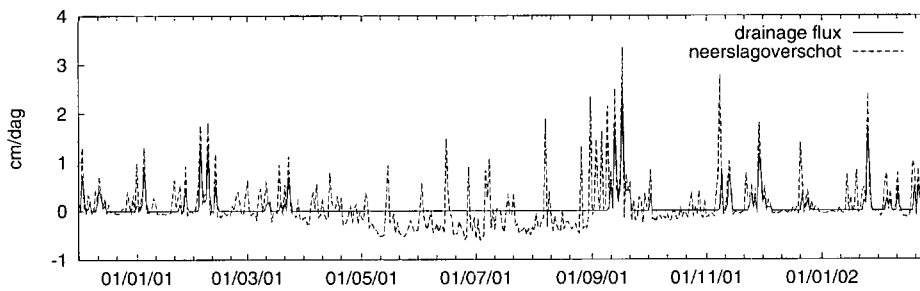
Parameter	Schatting	Standaardfout
μ (d)	2,96	0,03
h_l (cm)	-1,20	0,130
ϕ	0,0957	0,00317
μ (d)	337	39,1
h_r (cm)	-34,7	4,03
g	1,80	0,160
σ_w^2 (cm ²)	3,94	0,644

Figuur 8 geeft voorspellingen en waarnemingen van de grondwaterstand voor de gehele periode. De voorspellingen volgen het seizoenspatroon heel goed. Vanaf de herfst tot aan het voorjaar wordt de grondwaterstand gecontroleerd door de greppeltjes. Dit is ook te zien in figuur 9a, waarin de drainageflux is weergegeven samen met het neerslagoverschot ($f_t P_t - f_e E_{r,t}$). Uit de figuur blijkt dat de greppels vrijwel direct het neerslagoverschot afvoeren. In de periode van hoge grondwaterstand (herfst tot voorjaar) wordt gemiddeld ongeveer 50% van het neerslagoverschot afgevoerd via de greppels. In mei treedt er een sterke daling van de grondwaterstand op van bijna een meter. Tot september blijft de grondwaterstand rond de 1 m onder maaiveld – de greppeltjes liggen dus droog. Aangezien in deze periode de grondwaterstand onder het referentieniveau $h_r = -34,7$ cm ligt, vindt er een toestroming plaats vanuit de omgeving van circa $1,5 \text{ mm.dag}^{-1}$ (zie figuur 9b). Tegen het einde van de zomer stijgt de grondwaterstand weer sterk en vindt er wegzijging plaats ter grootte van circa 1 mm.dag^{-1} .

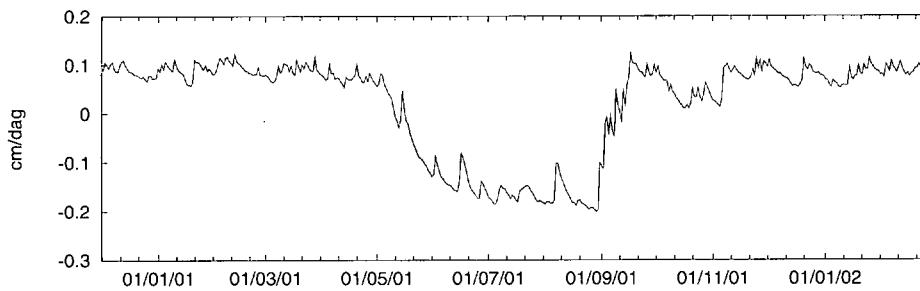


Figuur 8: Voorspelde ($w_t = 0$) en waargenomen grondwaterstand voor peilbuis 2.

(a) lokale drainage flux



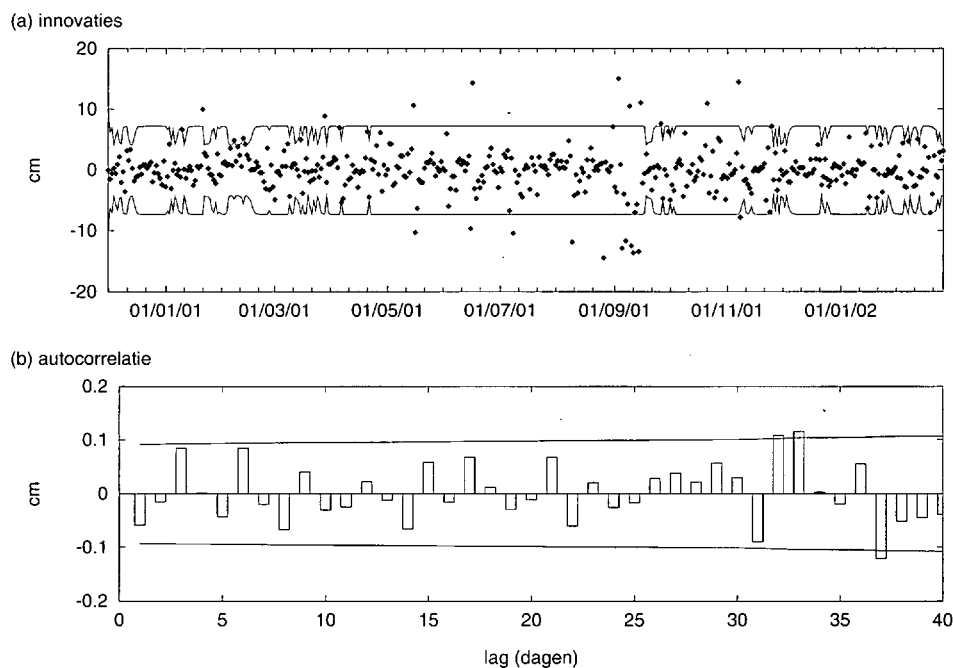
(b) regionale drainage flux



Figuur 9: (a) Lokale drainageflux en (b) regionale drainageflux.

Omdat we geen data beschikbaar hebben voor de validatie, bepalen we de juistheid van het model door het analyseren van de innovaties. Deze volgen direct uit het Kalman-filter, evenals het bijbehorende betrouwbaarheidsinterval. Uitgangspunt bij het opstellen van de toestandsbeschrijving was dat w_t ongecorrleerd is in de tijd. Om te toetsen of het model aan deze aanname voldoet, toont figuur 10 een plot van de innovaties in de tijd met 95%-betrouwbaarheidsinterval en de autocorrelatie van de innovaties tot en met een *lag* van 40 dagen. De fractie innovaties buiten het betrouwbaarheidsinterval is 0,052. De variatie in

de grootte van het betrouwbaarheidsinterval toont overigens duidelijk de invloed van de parameter g : het betrouwbaarheidsinterval wordt kleiner als de grondwaterstand boven het lokale drainageniveau uitkomt. Het overgrote deel van de correlaties zoals weergegeven in figuur 10b valt binnen het betrouwbaarheidsinterval en wijkt dus niet significant af van 0. Dit maakt het zeer aannemelijk dat het model een statistisch correcte beschrijving geeft van de tijdreeks.



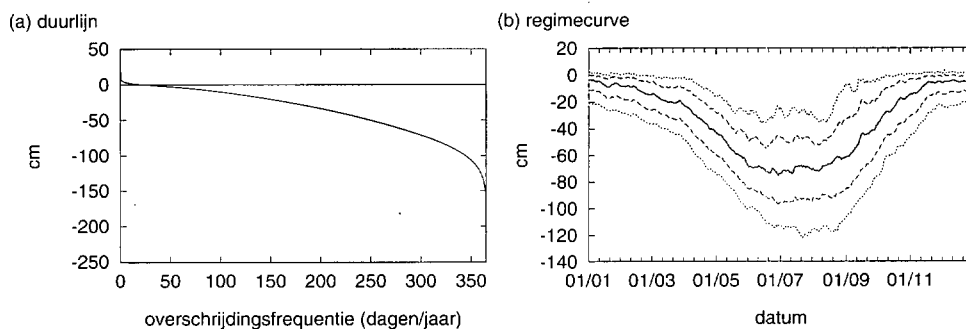
Figuur 10: (a) Innovaties met 2,5 en 97,5 percentielen en (b) autocorrelatie van de innovaties met 2,5 en 97,5 percentielen.

Een nuttige toepassing van het gekalibreerde model is de karakterisering van de grondwaterstandsfluctuaties aan de hand van statistieken als gemiddelde, standaardafwijking en percentielen. Deze statistieken kunnen echter niet bepaald worden uit een reeks van slechts 1,5 jaar. Om een goede representatie van de weersinvloeden te krijgen is een periode van minimaal 30 jaar nodig (Knotters, 2001). We hebben daarom voor de periode 1957–2003 1000 realisaties van de grondwaterstand gegenereerd met behulp van het gekalibreerde model, dagcijfers van neerslag en verdamping en het ruisproces. De op basis hiervan berekende statistieken zijn weergegeven in tabel 3. De geschatte duurlijn van de grondwaterstand is weergegeven in figuur 11a. Deze duurlijn kan gebruikt worden voor bijvoorbeeld een risicoanalyse. Zo kan uit de grafiek worden afgeleid dat naar verwachting 24 dagen per jaar het grondwater tot aan maaiveld komt. Figuur 11b toont de geschatte regimecurve met bijbehorende percentielen. De vetgedrukte lijn (mediaan) representeert de grondwaterstand die gemiddeld 2 maal per jaar wordt overschreden. Gemiddeld 1 maal per 10 jaar komt de grondwaterstand boven de bovenste lijn (90-percentiel) en 1 maal per 10 jaar onder de laagste lijn (10-percentiel). Beide figuren geven duidelijk het asymmetrische karakter van de grondwaterdynamiek weer. Tenslotte laat figuur 11b duidelijk zien

dat de kansverdeling van de grondwaterstand in de zomer een aanzienlijk grotere variantie heeft dan in de winter.

Tabel 3: Statistieken van de grondwaterstand (cm) ter plaatse van peilbuis 2 voor de periode 1957–2003 op basis van het gekalibreerde model (kalibratieperiode loopt van december 2001 tot februari 2003),

Statistiek	Waarde
Gemiddelde	-32,0
Standaardafwijking	34,0
25-percentiel	-59,1
50-percentiel	-28,4
75-percentiel	-8,6



Figuur 11: (a) Duurlijn van de grondwaterstand voor de periode 1957–2003, en (b) de regimecurve (vetgedrukte lijn) met 10-, 25-, 75- en 90-percentielen. Beide grafieken zijn gebaseerd op 1000 simulaties van dagelijkse grondwaterstanden met behulp van het gekalibreerde model.

Samenvatting en conclusies

Met het niet-lineaire model dat in dit artikel is gepresenteerd is het mogelijk om grondwaterstandsfluctuaties in gedraineerde gebieden te modelleren. De modelberekeningen kunnen worden uitgevoerd met een tijdstap die gelijk is aan het meetinterval van de invoergegevens – in het algemeen een dag. Op deze wijze kunnen grondwaterreeksen met 14-daagse waarnemingen toch op dagbasis gemodelleerd worden. Dit is van groot belang, omdat reeksen in gedraineerde gebieden vaak een zeer korte responstijd hebben. Niet-lineariteit ontstaat wanneer de grondwaterstand het drainageniveau ‘passeert’: drains voeren pas af als de grondwaterstand boven het drainageniveau uitkomt. Er is dus sprake van een geknikte afvoerrelatie.

Het model is getest op twee grondwaterreeksen. De eerste reeks had een lengte van 33 jaar met 14-daagse waarnemingen. Kalibratie van het niet-lineaire model leverde een goede fit. Ook het effect van een ingreep die had plaatsgevonden, kon goed worden geschat door het model. Validatie van het model leverde bevredigende resultaten en toonde aan dat het model een goede beschrijving geeft van de grondwaterstandsfluctuaties. De tweede reeks was aanzienlijk korter: slechts 1,5 jaar. Het meetinterval was echter 1 dag, dus er waren voldoende metingen beschikbaar om het model te kalibreren. De periode was alleen

te kort om ook nog een validatie uit te voeren. Wel konden we met behulp van enkele andere tests laten zien dat het model in ieder geval statistisch gezien correct is. Dit maakt het aannemelijk dat het model als geheel een goede beschrijving geeft van de grondwaterstandsfluctuaties.

Samenvattend kunnen we concluderen dat het niet-lineaire model een flexibel en krachtig instrument is voor het beschrijven van grondwaterstandsfluctuaties in gedraineerde gebieden. De methode kan dienen als hulpmiddel bij de karakterisering en analyse van grondwaterdynamica en voor het beschrijven of voorspellen van ingrepen. Gezien het recursieve karakter van het Kalman-filter, is het model ook uitermate geschikt voor *real-time* voorspellen van grondwaterstandsfluctuaties, maar daarover later meer!

Referenties

- Asmuth, J. von, C. Maas en M.F.P. Bierkens (2001)** Waarom doen alsof de neerslag eens per jaar valt? Het discrete Box-Jenkins- versus het continue PIRFICT-tijdreeksmodel, in theorie; *Stromingen* jrg 7, nr 4, pag. 33–44.
- Asmuth, J. von, M.F.P. Bierkens en C. Maas (2002)** Soms is weten beter dan meten (tenzij je verkeerd zit natuurlijk): Het discrete Box-Jenkins- versus het continue PIRFICT-tijdreeksmodel, in praktijk; in: *Stromingen*, jrg 8, nr 1, pag. 5–14.
- Berendrecht, W.L. (2004)** State space modeling of groundwater fluctuations, proefschrift, Technische Universiteit Delft, Delft.
- Berendrecht, W.L., J.C. Gehrels, F.C. van Geer en A.W. Heemink (2003)** Tijdreeksanalyse kan veel beter door kleiner modelinterval; in: *Stromingen*, jrg 9, nr 1, pag. 5–22.
- Bierkens, M.F.P., M. Knotters en F.C. van Geer (1999)** Tijdreeksanalyse nu ook toepasbaar bij onregelmatige meetfrequenties; in: *Stromingen*, jrg 5, nr 2, pag. 43–54.
- Box, G.E.P. en G.M. Jenkins (1970)** Time series analysis: forecasting and control; Holden Day, San Francisco.
- Bryson, A.E. en Y.C. Ho (1975)** Applied optimal control: optimization, estimation, and control; Hemisphere Publishing Corp., New York.
- Knotters, M. (2001)** Regionalised time series models for water table depths, proefschrift, Universiteit Wageningen, Wageningen.
- Knotters, M. en M.F.P. Bierkens (1999)** Tijdreeksmodellen voor de grondwaterstand – een kijkje in de black box; in: *Stromingen*, jrg 5, nr 3, pag. 35–49.
- Maybeck, P.S. (1979)** Stochastic models, estimation and control: vol. 1, 141-1 in Math. in science and engineering; Academic Press, New York.
- Maybeck, P.S. (1982)** Stochastic models, estimation and control: vol. 2, 141-1 in Math. in science and engineering; Academic Press, New York.
- Schweppe, F.C. (1973)** Uncertain dynamic systems; Prentice-Hall, New Jersey.

