
Verrassende uitkomsten in stromingen

Te ver doorschietende stroomlijnen

Mark Bakker

Al drie keer eerder werden verrassende uitkomsten in stromingen gepresenteerd in dit blad. In deze korte notitie wordt nog een uitkomst besproken die wellicht als verrassend omschreven mag worden. Het betreft de vorm van het intrekgebied van een put in een uniforme stroming, waarbij de put achter een ondoorlatende cilinder ligt.

Inleiding

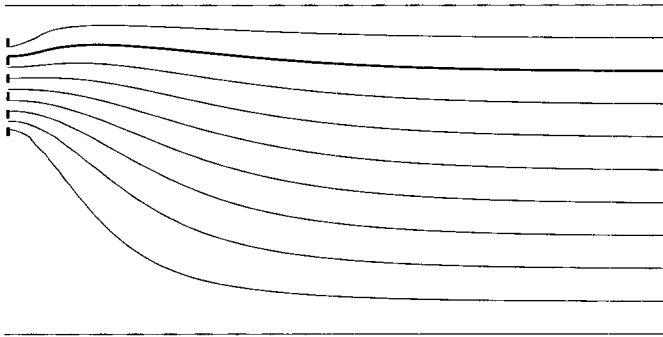
De stroming van grondwater in homogene, volledig afgesloten lagen gedraagt zich redelijk voorspelbaar. Er bestaan vele analytische oplossingen voor specifieke stromingsproblemen, en als analytische oplossingen niet mogelijk zijn, is een nauwkeurige numerieke oplossing vaak niet echt moeilijk. Een ervaren grondwatermodelleur zal aardig kunnen schatten hoe, voor gegeven randvoorwaarden, het grondwater zal stromen. Toch komen er (gelukkig) nog wel eens verrassende resultaten voor.

Of een stromingspatroon verrassend genoemd mag worden is natuurlijk nogal subjectief. Maar ik denk dat de verrassende resultaten die Bruggeman (1998, 1999) eerder beschreef in *Stromingen* door vele lezers zo ervaren zullen zijn. Een ander verrassend resultaat werd recentelijk beschreven door Bruggeman en Veling (2004). Dit laatste resultaat, waar ik het ook hier over wil hebben, was zelfs, naar ik mij heb laten vertellen, zo verrassend dat er een weddenschap over afgesloten werd of het resultaat wel klopte. Het stromingspatroon bleek inderdaad voor te komen, dus iemand verloor een kratje pils, maar pas na het uitwerken van een vrij diepgaand wiskundig bewijs.

Zoals al gemeld door Bruggeman en Veling (2004) kan de essentie van hun verrassende driedimensionale stromingspatroon ook worden verkregen met een meerlagenmodel (hier verkregen met het analytische meerlagenmodel Tim^{ML} (Bakker, 2004)). Er is driedimensionale stroming naar een onvolkomen put in een homogene, volledig afgesloten watervoevende laag; het putfilter zit in het bovenste gedeelte van de laag (de streepjeslijn). In figuur 1 is een verticale doorsnede door de put te zien. Er blijken nu stroomlijnen te zijn (bijvoorbeeld de vette stroomlijn in figuur 1) die langzaam omhoog lopen naar het putfilter maar op weg naar het filter iets te ver omhoog doorschieten, zodat ze daarna weer een stukje naar beneden moeten lopen voordat zij het putfilter in gaan. Dit doorschieten is voor dit geval analytisch bewezen door Bruggeman en Veling (2004) en dus geen bijkomstigheid

Mark Bakker is werkzaam bij het Department of Biological and Agricultural Engineering, University of Georgia, Athens, GA 30602, USA, e-mail: mbakker@enr.uga.edu.

van het gebruik van een meerlagenmodel. Het te ver doorschieten van stroomlijnen vond ik ook verrassend, maar blijkt toch wel vaker voor te komen. In deze notitie wordt een soortgelijk verschijnsel besproken.

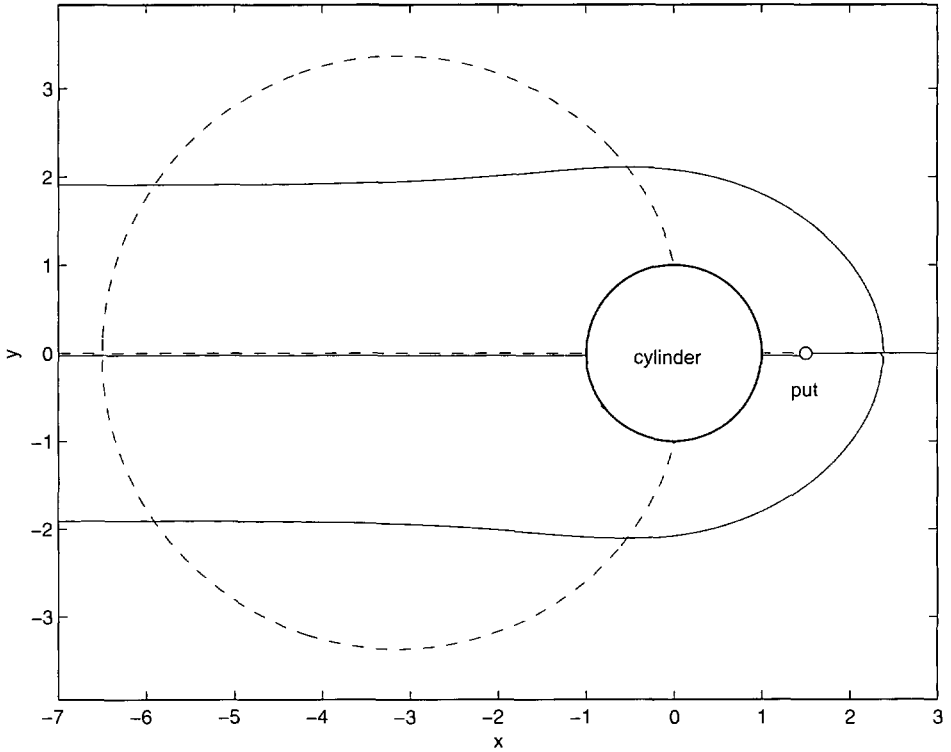


Figuur 1: Verticale doorsnede van driedimensionale stroming naar een onvolkomen put; de onderbroken lijn is het putfilter.

Uniforme stroming naar een put achter een cilinder

De oplossing voor een put in een uniforme stroming is bij hydrologen algemeen bekend. Als het debiet van de put Q (L^3/T) is, en de uniforme stroming q is kDj (L^2/T), waarbij j het verhang is, dan is de uiteindelijke breedte van het intrekgebied gelijk aan Q/q . (Het Engelse 'capture zone envelope' is eigenlijk wat ik bedoel: de envelop rond alle mogelijke intrekgebieden.) Als de put nu achter een ondoorlatend object geplaatst wordt, dan blijkt de breedte van het intrekgebied op een enigszins verrassende wijze te variëren.

Beschouw bijvoorbeeld een put die achter een ondoorlatende cilinder ligt. Voor het geval in figuur 2 zijn de parameters zo gekozen dat de uiteindelijke breedte van het intrekgebied Q/q gelijk is aan 4 (van $y = -2$ tot $y = +2$), en de diameter van de cilinder is 2, terwijl de afstand tussen de put en cilinder 0,5 is. Bovenstrooms van de put wordt de breedte van het intrekgebied eerst groter dan Q/q ; dit is logisch, want het grondwater moet om de cilinder heen stromen. Maar verder bovenstrooms wordt de breedte van het intrekgebied vervolgens *kleiner* dan Q/q ; pas ver bovenstrooms wordt de correcte breedte van Q/q bereikt (ver bovenstrooms van de figuur). Toegegeven, op het smalste punt is de breedte slechts 5% kleiner dan de uiteindelijke breedte, maar het was voor mij toch verrassend.



Figuur 2: Intrekgebied voor een put achter een ondoorlatende cilinder in een uniforme stroming. Q_y is nul langs de onderbroken lijn.

Laten we eerst eens even kijken of deze beschrijving wel klopt. De oplossing van dit probleem kan gevonden worden door de superpositie van oplossingen 325.21 en 336.11 in Bruggeman (1999), hetgeen resulteert in de complexe potentiaal

$$\begin{aligned} \Omega &= kDh + i\Psi = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{(z-d)(z-R^2/d)}{z}\right) - q\left(z + \frac{R^2}{z}\right) \end{aligned}$$

waarbij h de stijghoogte is, $z = x + iy$ de complexe coördinaat en Ψ de stroomfunctie. Het intrekgebied in figuur 2 is verkregen door het contouren van $\Psi = 0$. Als de breedte van het intrekgebied nu een minimum bereikt, dan geldt er op dat minimum dat er alleen stroming in de x richting is, en dat de stroming in de y richting dus gelijk is aan nul. Een vergelijking voor de stroming is eenvoudig verkregen door het differentiëren van de complexe potentiaal

$$Q_x - iQ_y = -\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z-R^2/d} - \frac{1}{z} \right) + q \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

De gestreepte contour in figuur 2 is voor $Q_y = 0$. De stroomlijnen binnen het intrekgebied

blijken dus eerst samen te trekken (ze stromen alle steeds dichter naar de x -as). Dichter bij de cilinder gaan de stroomlijnen dan weer uit elkaar zodat ze om de cilinder heen kunnen stromen. De kruising van de gestreepte contourlijnen en de stroomlijnen binnen het intrekgebied geven aan waar een stroomlijn het dichtst bij de x -as komt voordat zij rond de cilinder gaat stromen.

Nawoord

Wellicht zijn deze stromingspatronen voor te ver doorschietende stroomlijnen toch redelijk eenvoudig te verklaren. Wat betreft de stroming in figuur 2 kan er geredeneerd worden dat de stroming op grotere afstand gedomineerd wordt door de put en de uniforme stroming. Stroomlijnen zullen dus geneigd zijn enigszins richting put te stromen en dus samen te trekken. Dichter bij de put begint het effect van de cilinder voelbaar te worden en moeten de stroomlijnen weer uit elkaar om om de cilinder heen te kunnen stromen.

Een soortgelijke redenering, met inachtneming van lokale en regionale effecten, kan gemaakt worden voor de driedimensionale stroming naar een onvolkomen put (figuur 1). Dichtbij het putfilter wordt de stroming gedomineerd door het putfilter. Voor een putfilter in een oneindig dik pakket is de stroming naar het filter gericht. Dit betekent dat er nabij de bovenste helft van het filter dus ook stroming naar beneden toe gericht is. Verder weg van het putfilter moet de stroming echter gelijkmatig over het pakket verdeeld zijn, en dus moeten de stroomlijnen daar lager liggen.

Maar dat is allemaal achteraf gepraat. Had u dit nawoord ook geloofd als u niet eerst de plaatjes (en de wiskunde) had gezien?

Referenties

- Bakker, M. (2004)** *Tim^{ML}*, a multiaquifer analytic element model, version 2.1.
www.engr.uga.edu/~mbakker/timml.html
- Bruggeman, G.A. (1998)** Verrassende uitkomsten in stromingen; in: *Stromingen*, jrg 4, nr 4, pag 27–32.
- Bruggeman, G.A. (1999)** Verrassende uitkomsten in stromingen, Deel 2; in: *Stromingen*, jrg 5, nr 2, pag 35–42.
- Bruggeman, G.A., en E.J.M. Veling (2004)** Een opmerkelijk stromingspatroon?; in: *Stromingen*, jrg 10, nr 1, pag 5–14.