LANDBOUW-ECONOMISCH INSTITUUT

'S-GRAVENHAGE

Alleen voor intern gebruik

22008826

LANDBOUW-ECONOMISCH INSTITUUT
DEN HAAG – CONRADKADE 175 – TELEFOON 61.41.61 – GIRO 41.22.35

INTERNE LEVERINGEN IN DE INZET-AFZETANALYSE

door H. Neudecker

0.1 Inleiding (1)

Het wordt in de inzet-afzetanalyse [1] niet essentieel geacht of interne leveringen [2] mee in beschouwing worden genomen of niet. Het is een kwestie van afwisselende conventie of deze interne leveringen al of niet gemeten worden.

Het doel van deze studie is te laten zien in welke mate de produktiemeting gevoelig is voor beiderlei conventies.

Het gaat ons er om te constateren hoe de relatieve en absolute produktieveranderingen ten gevolge van variatie in de interindustriële structuur gekarakteriseerd door de leontief matrix, en de autonome vraag[3] zich gedragen in geval in de inzet-afzetanalyse de interne leveringen worden verwaarloosd.

Wij gaan ervan uit dat er een "echte" inzet-afzetstructuur is met interne leveringen, en bezien dan de consequenties van variaties in

1. de niet-diagonale inzetcoëfficiënten[4]
2. de diagonale inzetcoëfficiënten[4]
3. de autonome vraag[4]

0.2 Inleiding (2)

Wij definiëren allereerst de conventionele inzet-afzet grootheden en relaties:

A is de leontief matrix

p is de productievector

c is de vector van de autonome vraag, waartussen de band $p = (I-A)^{-1}c$ bestaat. In dit stelsel zijn er interne leveringen, dus de elementen a_{ii} van A zijn $\neq$ o.

Als wij de interne leveringen non-existent verklaren -- dus produktie en externe leveringen identiek stellen, terwijl wij aanvankelijk produktie zagen als de som van interne en externe leveringen -- verkrijgen wij:

D is de leontief matrix

q is de produktievector

c is de vector van de -- gelijkgebleven -- autonome vraag, waartussen

---

1) In navolging van P. Venekamp spreken wij van inzet-afzetanalyse, in plaats van input-outputanalyse.

2) Onder"interne leveringen" verstaan wij de leveringen van een produktiesector aan zichzelf. Onder "externe leveringen" verstaan wij de leveringen van een produktiesector aan een andere.

3) "Autonome vraag" is identiek met de uiteindelijke consumptie door de "consumenten".

4) Deze hebben te maken met respectievelijk de externe leveringen, de interne leveringen en de autonome vraag.

de band $q = (I-D)^{-1}c$ bestaat. Omdat er in dit stelsel geen interne leveringen zijn, zijn de elementen d_{ii} van $D = o$.

Voor de volgende uiteenzetting is het nuttig ons de twee stelsels in scalarvorm voor ogen te stellen.

In het eerste stelsel geldt:

$$p_i = \sum^{j} x_{ij} + c_i$$

waar x_{ij} de levering van produktiesector i aan sector j is. Als wij x_{ii} niet als een vorm van produktie willen zien dan komen wij tot de definitie:

$$q_i = \sum^{j \neq i} x_{ij} + c_i = p_i - x_{ii}$$

Deze definitie-verschillen werken door op de definitie van A.
In het eerste stelsel geldt:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{p_j}$$

In het tweede geldt:

$$d_{ij} = \frac{x_{ij}}{q_j} \qquad \text{met } d_{ii} = o$$

Voor q_i kunnen wij dan schrijven:

$$q_i = p_i - x_{ii} = p_i - a_{ii}p_i = (1 - a_{ii})\, p_i$$

Wij schrijven dan $q = (I-B)p$, als B het diagonale stuk van A is.[1)]

Wij definiëren de matrices P en Q, dat zijn de als diagonale matrices geschreven vectoren p en q.

In het stelsel $p = (I-A)^{-1}c$ geldt dat de aangroeiing in p -- te schrijven als Δp -- als volgt is te noteren bij constante c:

$$\Delta p = (I-A- \Delta A)^{-1} (\Delta A)\, p$$

$$\text{omdat } \Delta c = \left(\Delta(I-A)\right) p + (I-A)\ \Delta p + \left(\Delta (I-A)\right)\ \Delta p$$

Omdat er geldt: $q = (I-B)p$

en $p = (I-A)^{-1}c$,

kunnen wij schrijven $q = (I-B)(I-A)^{-1}c$.

De analyse in de drie besproken gevallen verloopt nu als volgt.

---

1) Er geldt dan ook $B = I - (I-D)^{-1}\ (I-A)$
hetwelk volgt uit:
$p = (I-A)^{-1}c$, $q = (I-D)^{-1}c$, $q = (I-B)p$.

1. Relatieve produktieveranderingen

1.1 Variatie in niet-diagonale inzet coëfficiënten

$$q = (I-B)p$$

$$\Delta q = \left(\Delta (I-B)\right) p + (I-B)\ \Delta p + \left(\Delta (I-B)\right) \Delta p =$$

$$= -(\Delta B)p + (I-B)\ \Delta p - (\Delta B)\ \Delta p\ .$$

$\Delta B = 0$, immers de diagonale inzetcoëfficiënten zijn constant.

$$\therefore\ \Delta q = (I-B)\ \Delta p$$

Boven vonden wij:

$$Q = (I-B)P$$

$$\therefore\ Q^{-1}\ \Delta q = P^{-1}(I-B)^{-1}(I-B)\ \Delta p = P^{-1}\ \Delta p$$

De relatieve produktieveranderingen zijn dus gelijk.

De conclusie is dus: indien bij gelijkblijvende autonome vraag variaties optreden in de niet-diagonale inzetcoëfficiënten, dan is de relatieve verandering van de produktie onafhankelijk van de keuze van de twee genoemde definitiestelsels. Men kan de diagonale inzetcoëfficiënten dus op nul stellen en bijgevolg de interne leveringen verwaarlozen.

1.2 Variatie in diagonale inzetcoëfficiënten

$$q = (I-B)p$$

$$\Delta q = -(\Delta B)p + (I-B)\ \Delta p - (\Delta B)\ \Delta p\ .$$

$\Delta B = (\Delta A)$ immers de niet-diagonale inzetcoëfficiënten zijn constant.

$$\therefore\ \Delta q = -(\Delta A)p + (I-B)\ \Delta p - (\Delta A)\ \Delta p =$$

$$= -(I-A-\Delta A)\ \Delta p + (I-B)\ \Delta p - (\Delta A)\ \Delta p =$$

$$= (A-B)\ \Delta p$$

$$\therefore Q^{-1}\ \Delta q = P^{-1}\ (I-B)^{-1}\ (A-B)\ \Delta p =$$

$$= P^{-1}\ (I-B)^{-1}\ (I-B-I+A)\ \Delta p =$$

$$= P^{-1}\ \Delta p - P^{-1}\ (I-B)^{-1}\ (I-A)\ \Delta p$$

De noodzakelijke voorwaarde voor $P^{-1}\ \Delta p = Q^{-1}\ \Delta q$ is: $\left| P^{-1}\ (I-B)^{-1}\ (I-A) \right| = o$

Aan deze voorwaarde wordt nooit voldaan.

De relatieve produktieveranderingen zijn dus nooit gelijk.

1.3 Variatie in de autonome vraag

$$q = (I-B)p = (I-B)\ (I-A)^{-1}c$$

$$\begin{aligned}\Delta q &= \big(\Delta(I-B)\big)(I-A)^{-1}c + \big(\Delta(I-B)\big)\big(\Delta(I-A)^{-1}\big)\ \Delta c\ + \\ &+ (I-B)\big(\Delta(I-A)^{-1}\big)c + \big(\Delta(I-B)\big)\big(\Delta(I-A)^{-1}\big)c + (I-B)\big(\Delta(I-A)^{-1}\big)\Delta c\ + \\ &+ (I-B)\ (I-A)^{-1}\ \Delta c\ + \big(\Delta(I-B)\big)\ (I-A)^{-1}\ \Delta c\ .\end{aligned}$$

$$\Delta(I-B) = 0$$

$$\Delta(I-A)^{-1} = 0$$

$$\therefore\ \Delta q = (I-B)(I-A)^{-1}\ \Delta c$$

Om dezelfde reden: $\Delta p = (I-A)^{-1}\ \Delta c$

$$\therefore\ Q^{-1}\ \Delta q = P^{-1}\ (I-B)^{-1}\ (I-B)\ (I-A)^{-1}\ \Delta c =$$

$$= P^{-1}\ (I-A)^{-1}\ \Delta c = P^{-1}\ \Delta p$$

De relatieve produktieveranderingen zijn dus gelijk.

De conclusie is dus: indien bij gelijkblijvende interindustriële struktuur variaties optreden in de autonome vraag, dan is de relatieve verandering van de produktie onafhankelijk van de keuze van de twee definitiestelsels.Men kan de diagonale inzetcoëfficiënten dus op nul stellen en de interne leveringen verwaarlozen.

De algemene conclusie is dat, indien er variaties optreden in de autonome vraag en/of in de niet-diagonale inzetcoëfficiënten, de relatieve verandering van de produktie onafhankelijk is van de keuze van de twee genoemde definitiestelsels. Wij willen nu nagaan hoe het zit met de absolute produktieveranderingen in de drie bestudeerde gevallen.

2. Absolute produktieveranderingen

2.1 Variatie in niet-diagonale inzetcoëfficiënten

De noodzakelijke voorwaarde voor $\Delta q = \Delta p$ is:

$$|B| = 0$$

Aan deze voorwaarde wordt voldaan als een $a_{ii} = 0$, m.a.w. als er een sector is die geen interne leveringen heeft.

Een voldoende voorwaarde is: $B = 0$. Geen sector dient dan interne leveringen te hebben.

2.2 Variatie in diagonale inzetcoëfficiënten

De noodzakelijke voorwaarde voor $\Delta q = \Delta p$ is:

$$|I-A+B| = 0$$

A-B zou dus de karakteristieke wortel 1 moeten hebben.

Er wordt bewezen dat dit niet mogelijk is.

Zij: $u'(A-B) = lu'$ de karakteristieke vergelijking van A-B.

Wij ordenen de elementen van u':

$$|u_1| \geq |u_2| \geq \cdots\cdots \geq |u_I|.$$

Voor het eerste element van lu' geldt dan:

$|l|.|u_1| = |lu_1| = |u_2 a_{21} + \ldots + u_I a_{I1}| \leqslant |u_2| a_{21} + \ldots + |u_I| a_{I1} \leqslant$
$|u_1| (a_{21} + \ldots + a_{I1})$.

Slechts als alle $u_2, \ldots, u_I$ hetzelfde teken hebben geldt er :

$|u_2 a_{21} + \ldots + u_I a_{I1}| = |u_2| a_{21} + \ldots + |u_I| a_{I1}$. Slechts als $|u_1| = \ldots$
$\ldots = |u_I|$ geldt er:

$|u_2| a_{21} + \ldots + |u_I| a_{I1} = u_1 | (a_{21} + \ldots + a_{I1})$. De laatste bewering laat zich eenvoudig bewijzen. Zij $|u_2| a_{21} + \ldots + |u_I| a_{I1} =$
$|u_1| (a_{21} + \ldots + a_{I1})$, dan geldt er: $(|u_1| - |u_2|) a_{21} + \ldots +$
$(|u_1| - |u_I|) a_{I1} = o$. Door de ordening van de u_i zijn de uitdrukkingen binnen de ( ) tekens alle niet-negatief; tevens zijn de inzetcoëfficiënten niet-negatief. De uitdrukking links van het = teken is dus slechts = o als de u_i identiek zijn. Hieruit volgt dat slechts als $|u_1| = \ldots |u_I|$ en ze alle hetzelfde teken hebben, er geldt:

$|l| . |u_1| = |u_1| (a_{21} + \ldots + a_{I1})$

of wel $|l| = a_{21} + \ldots + a_{I1}$.

Laat nu gelden $|l| = 1$ dus $a_{21} + \ldots + a_{I1} = 1$

Voor het tweede element van lu' geldt dan:

$|l| . |u_2| = |lu_2 = |u_1 a_{12} + u_3 a_{32} + \ldots + u_I a_{I2}| =$
$= |u_1| a_{12} + |u_3| a_{32} + \ldots + |u_I a_{I2}) =$
$= |u_2| (a_{12} + a_{32} + \ldots + a_{I2})$.

Hieruit volgt: $a_{12} + a_{32} + \ldots + a_{I2} = 1$.

Voor het I^{de} element van lu' geldt evenzo:

$|l| . |u_I| = |lu_I| = |u_1 a_{1I} + \ldots + u_{I-1} a_{I-1,I}| =$
$= |u_1| a_{1I} + \ldots + |u_{I-1}| a_{I-1,I} =$
$= |u_I| (a_{1I} + \ldots + a_{I-1,I})$, waaruit volgt $a_{1I} + \ldots + a_{I-1,I} = 1$

Omdat $\sum_{j=1}^{I} a_{ji} \leqslant 1$, volgt er dus dat alle $a_{ii} = o$, m.a.w.
$B = 0$, dus $|I-A| = o$ wat uitgesloten is [1].

2.3 Variatie in de autonome vraag

De noodzakelijke voorwaarde voor $\Delta q = \Delta p$ is: $|B| = o$.

Zoals we in ad 2.1 zagen kan er aan deze voorwaarde worden voldaan.
Een voldoende voorwaarde is dat $B = 0$

---

1) $I-A \neq o$ impliceert dat minstens eén sector waarde toevoegt.

3. Aanhangsel

Wij bewijzen de volgende stelling:

Als bij gelijkblijvende autonome vraag de inzetcoëfficiënten a_{ij} veranderen in a_{ij}^{x} zodanig dat $\sum_{i} a_{ij}^{x} = \sum_{i} a_{ij}$ (voor $j = 1 \ldots J$) hetwelk inhoudt dat de totaliteit van leveringen aan sector j evenredig blijft met de produktie van die sector

dan betekent dit dat de produktie van tenminste een sector absoluut constant is of afneemt.

Bewijs:

weer geldt:

$$p = (I-A)^{-1}c, \text{ ofwel } c = (I-A)p$$

Dan: $\Delta c = (I-A)\,\Delta p - (\Delta A).(\Delta p + p) = 0$

$\therefore (I-A).\Delta p = (\Delta A)\,\Delta p + (\Delta A)p$

Hieruit volgt: $e'\,(I-A)\,\Delta p = 0$

- als e de sommatievector is - , wegens

$$\sum^{i} a_{ij}^{x} = \sum^{i} a_{ij}$$

De vector $e'(I-A)$ bestaat uit elementen ≥ 0, waarvan er tenminste een > 0 is.[1)]

Dit impliceert de juistheid van de stelling.

1) De fundamentele veronderstelling van de inzet-afzetanalyse is immers dat tenminste een sector waarde toevoegt.

's-Gravenhage, 20 februari 1963.