INSTITUUT VOOR LANDBOUWTECHNIEK EN RATIONALISATIE

Rapport nr. 52

LINEAIRE PROGRAMMERING

(korte cursus voor het I.L.R.)

door

Ir. E. van Elderen
S.P.J.H. van Hoven
R.K. Oving

Dr. S. L. Mansholtlaan 12 - Wageningen tel. 08370-3041

Niet voor publikatie bestemd

Handboek : 7 Besliskunde en
Begrotingstechniek

Rapport nr. 52

LINEAIRE PROGRAMMERING

(korte cursus voor het I.L.R.)

door

Ir. E. van Elderen
S.P.J.H. van Hoven
R.K. Oving

1599

INHOUD

Stno. 595-135-12/11-1965
Bm.

1. WISKUNDIGE ACHTERGROND VAN L.P.

1.1 Inleiding

In vele situaties moet worden gekozen uit een veelheid van mogelijkheden. Bovendien kan het van belang zijn de keuze zo te doen uitvallen dat een bepaald doel het beste wordt benaderd. Deze keuze-vraagstukken doen zich voor bij transporten van goederen van haven naar haven, bij de samenstelling van een veevoeder, bij het bepalen van een produktie-schema enz. Het oplossen van deze vraagstukken wordt o.a. verricht met behulp van de lineaire programmeringstechniek. Achtereenvolgens wordt nu behandeld:

a) een deel van de wiskundige achtergrond,

b) de praktische interpretatie van een landbouwkundig voorbeeld,

c) de mogelijkheden van een computerprogramma.

Literatuur:

1) Heady, E.O., W. Candler, Linear Programming Methods, Ames, 1958, X + 597 blz., fgn.,tbn.
2) I.B.M. General Information Manual. An Introduction to Linear Programming, White Plains, 1964, 64 blz., fgn., tbn.
3) I.B.M. Application Program. 1620 - 1311 Linear Programming System.
4) Kaufmann, A; R. Faure: Operationele Research.Marka-pocket no. 17, Utrecht, 1965, 295 blz. Hfst. XIII - Inleiding tot de lineaire programmering blz. 210 - 224.
5) Rootselaar, B. van, Lineaire programmering, College dictaat najaar 1964, Wageningen 1965, 56 blz.
6) Theil, H., J.C.G. Boot, T. Kloek. Voorspellen en beslissen. Inleiding tot de kwantitatieve economie en operationele research.Marka-pocket no. 9, Utrecht 1964, 379 blz.
7) Zijpp, I. van der,Lineaire programmering in het bedrijf. Kwantitatieve bedrijfseconomie dl 2, Leiden, 1964, X + 176 blz.,fgn., tbn., lt.

1.2 Het vraagstuk

De behandeling wordt voornamelijk gericht op maximeringsproblemen. Voor minimeringsproblemen zijn de oplossingen niet wezenlijk anders.

Stel dat er een aantal produkten wordt geproduceerd en wel de produkten p_1, p_2, ..., p_m, die bij verkoop een saldo opleveren van c_1, c_2, ..., c_m per verkochte eenheid. Het aantal eenheden is nog onbekend: x_1, x_2, ..., x_m. Deze aantallen moeten, als het doel bekend is, zo worden bepaald, dat het doel het dichtst wordt benaderd. Als doel wordt gesteld het maximeren van de rendements- of resultaten-functie:

$$R\ (x) = c_1\ x_1 + c_2\ x_2 + \cdots + c_m\ x_m = \sum_{i=1}^{m} c_i\ x_i \qquad (1)$$

Deze functie heeft bekende coëfficiënten (c_i) voor nog onbekende aantallen (x_i). De aantallen komen slechts in de lineaire vorm voor en niet in kwadraten of hogere machten; vandaar ook de naam: "lineaire programmering". Het maximum van R is oneindig ware het niet dat er beperkingen moeten worden gesteld bijv. wat één verkoper presteert, wat de fabriek kan leveren, de voorraad aan grondstoffen, opname vermogen van de markt, enz.

Zo'n voorwaarde luidt bijv.:

$$a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + \cdots + a_m\ x_m \leqq a_o \text{ óf } \sum_{i=1}^{m} a_i\ x_i \leqq a_o \qquad (2)$$

Dat wil zeggen a_1 maal het nog onbekende aantal x_1 + enz. enz. mag nooit groter worden dan a_o. Zo'n coëfficiënt a_i (voor i = 1, 2,........,m) kan alle waarden aannemen (neg., o, pos.). De coëfficiënt a_o is niet negatief. Stel nu dat er k van deze voorwaarden zijn dan is (2) te schrijven als

$$a_{j1}\ x_1 + a_{j2}\ x_2 + \cdots + a_{jm}\ x_m \leqq a_{jo} \quad \text{óf}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\ x_i \leqq a_{jo} \text{ voor } j = 1, \ldots, k \qquad (3)$$

Bovendien wordt hieraan de voorwaarde toegevoegd dat

$$x_i \geqq o \text{ voor } i = 1, \ldots, m \qquad (4)$$

omdat de mogelijkheden zijn beperkt tot het produceren van niets of van iets. Voor het stelsel (1), (3) en (4) moet nu de oplossing worden gezocht. Daartoe wordt aan de voorwaarden (3) een verschilvariabele t_j toegevoegd, zodat er gelijkheden ontstaan.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m + t_1 = a_{10}$$

$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots + a_{jm} x_m + t_j = a_{jo} \qquad (5)$$

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{km} x_m + t_k = a_{ko}$$

De voorwaarden (4) worden nu aangevuld met voorwaarden voor t_j:

$$x_i \geqq o \text{ voor } i = 1, \dots, m$$

$$t_j \geqq o \text{ voor } j = 1, \dots, k \qquad (6)$$

1.3 Een beginoplossing

In de eerste plaats wordt het streven gericht op één van de vele bruikbare ōf toelaatbare oplossingen om daarna van daaruit de oplossing stap voor stap te verbeteren.

Een beginoplossing bestaat hierin dat de aantallen $x_i = o$ worden gekozen (voldoet aan de voorwaarden (4)), zodat automatisch de verschil variabele t_j de waarde a_{jo} moet aannemen. Daar $a_{jo} \geqq o$ is ook $t_j \geqq o$ en wordt voldaan aan (6). De waarde van R = o omdat $x_i = o$ en t_j in (1) niet voor komt.

Veronderstel dat daarna aan x_5 een waarde wordt gegeven omdat dit produkt een goed rendement oplevert. Ongetwijfeld moet er naar worden gestreefd x_5 zo groot mogelijk te maken. Stel dat dit wordt beperkt door de 8-ste voorwaarde van (5)

$$a_{81} x_1 + a_{82} x_2 + \dots + a_{85} x_5 + \dots + a_{8m} x_m + \dots + t_8 = a_{80} \qquad (7)$$

De aantallen x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, ..., x_m zijn nog steeds nul dus blijft over

$$a_{85} x_5 + t_8 = a_{80} \qquad (8)$$

Het is nu duidelijk dat t_8 nul gemaakt moet worden om x_5 zo groot mogelijk te maken.

$x_5 = \frac{a_{80}}{a_{85}}$. Hierdoor is t_8 vervangen door x_5. Deze procedure moet systematisch worden verricht opdat de optimale oplossing (rendementsfunctie maximaal) wordt bereikt.

Een criterium om uit de nog niet opgenomen produkten die te kiezen die het meest bijdraagt tot verhoging van het reeds verkregen, maar nog niet maximale rendement is uiteraard het eigen rendement c vermindert met het rendement van de reeds opgenomen produkten die gedeeltelijk prijsgegeven moeten worden. Noem het tegengestelde van dit criterium δ.[1] Een overzichtelijk schema is het volgende:

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & \multicolumn{5}{l}{\text{Coëfficiënten van de niet opgenomen produkten } x_i} \\
\text{Opgenomen} & \text{aantal} & x_1 & x_2 & \cdots & x_i \cdots & x_m \\
t_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \cdots & a_{1m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
t_j & a_{jo} & a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} \cdots & a_{jm} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
t_k & a_{ko} & a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{ki} \cdots & a_{km} \\
 & R\ (=o) & \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_i \cdots & \delta_m
\end{array}
\qquad (9)
$$

Dit schema geeft in de eerste kolom de opgenomen produkten en in de tweede kolom de daarbij behorende geproduceerde aantallen. Dit is voor t_j op te vatten als een nog niet uitgeputte beperking met het nog beschikbare aantal. De laatste regel vermeldt het totale rendement en de δ_i (voor $i = 1, \ldots, m$). Zolang één van de laatsten negatief is, is nog verbetering mogelijk.

1.4 De volgende oplossing

Het bepalen van de volgende oplossing begint met het vinden van de kolom met δ_q die de grootste negatieve waarde heeft. De x_q zal nu worden opgenomen (deze verhoogt het rendement). Daartoe moet een tot nog toe opgenomen produkt (= rij) verdwijnen en wel datgene waarvoor

$\dfrac{a_{ro}}{a_{rq}}$ de kleinste niet negatieve waarde heeft (voor $r = 1, \ldots, k$). Kolom q wordt nu verwisseld met rij r. De coëfficiënten in het schema wijzigen nu eveneens en wel volgens het volgende rekenvoorschrift:

Noem: a_{rq} de spil
kolom q de spilkolom
rij r de spilrij

$$a'_{ri} = a_{ri}/a_{rq} \quad (\text{voor } i = 0, 1, \ldots, m) \qquad (10)$$

spilrij

$i \neq q$

[1] δ = letter: delta

$a'_{rq} = 1/a_{rq}$ spil (11)

$a'_{ji} = a_{ji} - a_{jq} * a'_{ri}$ (voor $j = 1, \ldots, k, k+1$ elementen buiten

$j \neq r$ en $i = 0, 1, \ldots, m$) spilrij en spilkolom

$i \neq q$

met inbegrip van R en δ_i (12)

$a'_{jq} = a_{jq} / (-a_{rq}) = a_{jq} * (-a'_{rq})$ spilkolom (13)

$j \neq r$ (voor $j = 1, \ldots k, k+1$)

Nadat het gehele schema zo opnieuw is vastgesteld begint opnieuw de bepaling van een volgende oplossing, totdat geen enkele δ_i negatief meer is. Dan heeft R het maximum bereikt en wordt in de beide eerste kolommen afgelezen welk produkt en hoeveel van elk is opgenomen.

1.5 De Simplex methode

De in het voorgaande toegepaste techniek wordt wel aangeduid met de naam: "Simplex-methode". Hoe is nu in te zien dat deze methode een verantwoorde procedure vormt ? Om de procedure aannemelijk te maken wordt het schema beschouwd als een verzameling getallen afgeleid uit vergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn zo opgesteld dat de produkten(in de beginoplossing t_j)met bekende hoeveelheden (a_{jo}) zijn uitgedrukt in de bekende hoeveelheid (a_{jo}) en in de niet opgenomen produkten (in de beginoplossing x_i).
De vergelijking wordt dan gelezen als volgt:

$$t_j = a_{jo} - a_{j1} x_1 - a_{j2} x_2 \ldots - a_{jm} x_m \qquad (14)$$

Hieruit blijkt, dat het gewoonte is om in schema (9) het teken van de coëfficiënten a_{ji} te veranderen in het tegengestelde ten opzichte van het teken in de vergelijkingen (14) met uitzondering van het teken a_{jo} ōf (9) is afgeleid uit:

$$a_{jo} = t_j + a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 \ldots + a_{jm} x_m$$

Bovendien blijkt hier dat a_{jo} de hoeveelheid is die behoort bij t_j (in de beginoplossing de beschikbaarheden; later een hoeveelheid produkt x), want in de vergelijking zijn naast a_{jo} slechts a_{ji} ($i \neq o$) aanwezig van niet opgenomen produkten m.a.w. $x_i = o$ en vergelijking (14) wordt nu $t_j = a_{jo}$ ōf als t_j vervangen wordt door een x dan is $x = a_{jo}$.

Het gehele schema (9) is nu te lezen als

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{jo} \\ \vdots \\ a_{ko} \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} \cdots\cdots - x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{jm} \\ \vdots \\ a_{km} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

m.a.w. t_j is een lineaire combinatie van de coëfficiënten a_{ji} (voor i = o, 1, , m). De "volgende-oplossing" is beschreven als het opnemen van x_q ten koste van t_r.

Het nieuwe schema is dan !

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ x_q \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{10} \\ \vdots \\ a'_{jo} \\ \vdots \\ a'_{ro} \\ \vdots \\ a'_{ko} \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{ji} \\ \vdots \\ a'_{21} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix} \cdots\cdots - t_r \begin{pmatrix} a'_{1q} \\ \vdots \\ a'_{jq} \\ \vdots \\ a'_{rq} \\ \vdots \\ a'_{kq} \end{pmatrix} \cdots\cdots - x_m \begin{pmatrix} a'_{1m} \\ \vdots \\ a'_{jm} \\ \vdots \\ a'_{rm} \\ \vdots \\ a'_{km} \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Hoe zien nu deze coëfficiënten a'_{ji} eruit ?

Uit schema (15) volgt dat voor de spilrij geldt:

$$t_r = a_{ro} - x_1 a_{r1} \cdots - x_q a_{rq} \cdots - x_m a_{rm} = a_{ro} - \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ri} \qquad (17)$$

Het nieuwe schema (16) heeft x_{rq} uitgedrukt in onder andere t_r; met behulp van (17) wordt dit nu uitgerekend:

$$x_q = \frac{a_{ro} - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i a_{ri} - t_r \cdot 1}{a_{rq}} \qquad (18)$$

$$x_q = \frac{a_{ro}}{a_{rq}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \cdot \frac{a_{ri}}{a_{rq}} - t_r \cdot \frac{1}{a_{rq}} \qquad (19)$$

Hier staat dat alle coëfficiënten van de spilrij worden gedeeld door de spil a_{rq}, behalve dan de coëfficiënt behorend bij t_r, waar het omgekeerde van de spil komt te staan. Hetzelfde staat ook in het rekenvoorschrift onder (10) en is hiermede dus gerechtvaardigd.

Uitgedrukt in de nieuwe coëfficiënten wordt (19):

$$x_q = a'_{ro} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \cdot a'_{ri} - t_r \cdot a'_{rq} \qquad (20)$$

. De overige rijen in schema (15) luiden:

$$\underset{j \neq r}{t_j} = a_{jo} - \sum_{i=1}^{m} x_i \, a_{ji} \qquad (21)$$

Hieruit moet x_q nu worden verwijderd

$$\underset{j \neq r}{t_j} = a_{jo} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \, a_{ji} - x_q \, a_{jq}$$

vervang x_q door (20)

$$= a_{jo} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \, a_{ji} - a_{jq} \left[a'_{ro} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \, . \, a'_{ri} - t_r \, . \, a'_{rq} \right]$$

$$= a_{jo} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \, a_{ji} - a_{jq} \, a'_{ro} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \, . \, a'_{ri} \, . \, a_{jq} + t_r \, . \, a'_{rq} \, . \, a_{jq}$$

$$= a_{jo} - a_{jq} \, a'_{ro} - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i (a_{ji} - a'_{ri} \, . \, a_{jq}) + t_r \, (- a'_{rq} \, . \, a_{jq}) \right] \qquad (22)$$

Buiten de spilrij worden de coëfficiënten verminderd met het produkt van de coëfficiënt in de spilkolom(a_{jq}) en de coëfficiënt in de nieuwe spilrij; behalve dan de coëfficiënten in de spilkolom (dat zijn de coëfficiënten van t_r), waar de coëfficiënt wordt vermenigvuldigd met het tegengestelde van de nieuwe coëfficiënt op de plaats van de spil. Hetzelfde is in het rekenvoorschrift onder (12) en (13) vermeld en is hiermede gerechtvaardigd. Uitgedrukt in de nieuwe coëfficiënten wordt (22):

$$\underset{j \neq r}{t_j} = a'_{jo} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{m} x_i \, a'_{ji} - t_r \, . \, a'_{jq} \qquad (23)$$

1.6 De keuze van de spilrij

Vervolgens kan nu aandacht worden besteed aan de keuze van de spilrij. Daarvan is nl. gesteld dat het die rij is waarvoor geldt dat het quotient van a_{ro} en a_{rq} het kleinste niet negatieve getal is.

Dit wordt geëist in verband met de a'_{jo} die niet negatief mogen worden.

Stel dat $\frac{a_{ro}}{a_{rq}}$ het kleinste niet negatieve quotiënt is van alle quotiënten $\frac{a_{jo}}{a_{jq}}$.

$$a'_{jo} = \begin{cases} \dfrac{a_{ro}}{a_{rq}} & \text{voor } j = r \\ a_{jo} - a_{jq}\, a'_{ro} & \text{voor } j = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots k \end{cases}$$

$a'_{ro} = \frac{a_{ro}}{a_{rq}}$ is als nieuwe hoeveelheid $\geqq o$ daar dit het kleinste niet negatieve quotiënt is.

Stel $\underset{j \neq r}{a_{jq}} > o$ dan is $\frac{a_{jo}}{a_{jq}} \geqq \frac{a_{ro}}{a_{rq}}$ (als kleinste)

$$\frac{a_{jo}}{a_{jq}} \geqq a'_{ro}$$

$$a_{jo} \geqq a'_{ro} \cdot a_{jq}$$

$$a_{jo} - a_{jq} \cdot a'_{ro} \geqq o$$

$a'_{jo} \geqq o \rightarrow$ voldoet aan de voorwaarde

Stel $\underset{j \neq r}{a_{jq}} < o$ dan is $\frac{a_{jo}}{a_{jq}} < \frac{a_{ro}}{a_{rq}} = a'_{ro}$

$a_{jo} > a_{jq} \cdot a'_{ro}$ (nl. vermenigvuldigd met een neg. getal: a_{jq})

$$a_{jo} - a_{jq} \cdot a'_{ro} > o$$

$a'_{jo} > o \rightarrow$ voldoet aan de voorwaarde

Hiermede is aangetoond dat iedere $a'_{jo} \geqq o$ en is de eis dat de spilrij het het kleinste niet negatieve quotiënt $\frac{a_{ro}}{a_{rq}}$ moet bevatten aannemelijk gemaakt.

Bevat de kolom q uitsluitend niet positieve getallen (nul en negatief) dan is $\frac{a_{jo}}{a_{jq}}$ negatief en zal de nieuwe hoeveelheid in de spilkolom $a'_{ro} = \frac{a_{ro}}{a_{rq}}$ negatief zijn, hetgeen niet voldoet aan de voorwaarde (zie tevens onder "Ontaarding").

1.7 De keuze van de spilkolom

De rendementsfunctie luidt volgens (1) $R(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$. In verband met de toevoeging van k nieuwe variabelen t_j is deze aan te vullen tot:

$$R = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{k} d_j t_j \tag{24}$$

waarin d_j voorstelt het saldo behorende bij t_j. Veelal zal $d_j = o$ worden gekozen zodat het nog beschikbaar blijven van produktiemiddelen geen invloed heeft op het rendement. Het is echter ook mogelijk er een zeer groot negatief saldo d_j aan toe te voegen, waardoor er terwille van een rendementsverbetering zeer veel aan is gelegen dit produktiemiddel volledig te benutten nl. niet beschikbaar te houden.

Het nieuwe rendement is nu

$$R' = \sum_{i=1}^{m} c_i x'_i + \sum_{j=1}^{k} d_j t_j' \tag{25}$$

Hiervan doen slechts k produkten mee (x_i of t_j); de overigen zijn niet opgenomen en doen dus niet mee in de rendementsfunctie.

Worden x_i en t_j nu vervangen door α_j [1] en c_i en d_j door γ_j [2] dan luidt (24)

$$R = \sum_{j=1}^{m+k} \gamma_j \alpha_j \tag{26}$$

Op dezelfde wijze wordt (25) $R' = \sum_{j=1}^{m+k} \gamma_j \alpha'_j$ (27)

De k hoeveelheden α_j en α'_j worden weergegeven in het schema door a_{jo} resp. a'_{jo} althans voorzover ze zijn opgenomen, anders is $\alpha_{jo} = o$.

Uitwerken van (27) levert

$$R' = \sum_{j=1}^{m+k} \gamma_j \alpha'_j \quad \text{(beperking tot de k opgenomen produkten)}$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} \gamma_j \alpha'_j + \gamma_q \alpha'_r \quad (\gamma_r \text{ komt er niet meer in voor})$$

$$(\alpha'_j = a'_{jo} = a_{jo} - a_{jq} a'_{ro} = \alpha_j - a_{jq} \frac{\alpha_r}{a_{rq}} \text{ voor } j\neq r)$$

$$(\alpha'_r = a'_{ro} = \frac{a_{ro}}{a_{rq}} = \frac{\alpha_r}{a_{rq}} \qquad)$$

1) α = letter: alpha
2) γ = letter: gamma

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{k} \gamma_j (\alpha_j - a_{jq} \frac{\alpha_r}{a_{rq}}) + \gamma_q \frac{\alpha_r}{a_{rq}} + (\gamma_r \alpha_r - \gamma_r \frac{\alpha_r}{a_{rq}} a_{rq})$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \alpha_j + \frac{\alpha_r}{a_{rq}} (\gamma_q - \gamma_r a_{rq} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{k} \gamma_j a_{jq})$$

$$= R \qquad + \frac{\alpha_r}{a_{rq}} (\gamma_q - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j a_{jq}) \tag{28}$$

Hiermede is R' volledig uitgedrukt in de coëfficiënten van het oude schema en kan een verhoging van het rendement worden afgelezen uit

$$\frac{\alpha_r}{a_{rq}} (\gamma_q - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j a_{jq})$$

Hierin is α_r de hoeveelheid a_{ro} behorend bij produkt r en dus zeker niet - negatief. Onder "De keuze van de spilrij" is vermeld dat a_{rq} alleen maar positief mag zijn om te zorgen dat de nieuwe hoeveelheden $a'_{jo} \geq o$ worden. Moet nu het rendement worden verbeterd dan is noodzakelijk dat

$$(\gamma_q - \sum_{j=1}^{k} \gamma_j a_{jq}) > o$$

òf $$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j a_{jq} - \gamma_q < o$$

Dit nu is bij de beginoplossing δ_q genoemd en hiermede is aannemelijk gemaakt dat er wordt gezocht naar $\delta_i < o$ (voor i = 1,..................., m).

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j a_{ji} - \gamma_i \text{ (voor } i = 1, \ldots, m) \tag{29}$$

Is geen enkele $\delta_i < o$ dan is het rendement niet meer te verbeteren en is het optimum bereikt en tevens de eindoplossing.
Komt er in de eindoplossing een $\delta_i = o$ voor dan blijkt dat het optimum door opname van produkt i niet verandert, m.a.w. hetzelfde optimum is bereikbaar met verschillende produktieplannen. Noem deze plannen P_1 en P_2. Elk produktieplan dat voldoet aan $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$

met $\mu_1 + \mu_2 = 1$

levert het optimum resultaat.

1.8 De nieuwe R en δ_i rij

Voor R' is reeds bewezen (28) en (29) dat

$$R' = R - \frac{\alpha_r}{a_{rq}}\ \delta_q \tag{30}$$

hetgeen dezelfde procedure is als tot nog toe is toegepast buiten de spilrij en spilkolom nl. het element R verminderen met het quotiënt van het produkt van element in spilrij met element in spilkolom en spil (zie o.a. (12)).

Voor de elementen δ'_i

$$\delta'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} \gamma_j\, a'_{ji} + \gamma_q\, a'_{ri} - \gamma_i \quad \left(\text{voor } \begin{matrix} i = 1, \ldots\ldots, m, r \\ i \neq q \end{matrix}\right)$$

$j \neq r$ en γ_q omdat γ_q de γ_r vervangt in de nieuwe oplossing
$i \neq q$ (buiten de spilkolom)

$$\delta'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} \gamma_j \left(a_{ji} - a_{jq}\frac{a_{ri}}{a_{rq}}\right) + \gamma_q \frac{a_{ri}}{a_{rq}} - \gamma_i$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} \gamma_j\, a_{ji} + \left(\gamma_r\, a_{ri} - \gamma_r\, a_{ri}\frac{a_{rq}}{a_{rq}}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} \gamma_j\, a_{jq}\frac{a_{ri}}{a_{rq}} + \gamma_q \frac{a_{ri}}{a_{rq}} - \gamma_i$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \gamma_j\, a_{ji} - \gamma_i - \frac{a_{ri}}{a_{rq}}\left\{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{k} \gamma_j\, a_{jq} + \gamma_r\, a_{rq} - \gamma_q\right\}$$

$$= \quad \delta_i \quad - \frac{a_{ri}}{a_{rq}}\left\{\sum_{j=1}^{k} \gamma_j\, a_{jq} - \gamma_q\right\}$$

$$= \quad \delta_i \quad - \frac{a_{ri}}{a_{rq}}\ \delta_q \tag{31}$$

m.a.w. dezelfde procedure als in (12)

$i = q$ (spilkolom)

$$\delta'_q = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{k} \gamma_j \frac{a_{jq}}{-a_{rq}} + \gamma_q \frac{1}{a_{rq}} - \gamma_r$$ (γ_r en niet γ_q omdat deze in de nieuwe oplossing is vervangen door γ_r)

$$= \frac{1}{-a_{rq}} \left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{k} \gamma_j a_{jq} + \gamma_r a_{rq} - \gamma_q \right]$$

$$= \frac{1}{-a_{rq}} \left[\sum_{j=1}^{k} \gamma_j a_{jq} - \gamma_q \right] = \frac{\delta_q}{-a_{rq}} \tag{32}$$

m.a.w. dezelfde procedure als in (13).
Hiermede is aangetoond dat de nieuwe R en δ_i rij op dezelfde wijze wordt gevonden als iedere andere rij buiten de spilrij en derhalve is het terecht dat in (12) en (13) de index j door loopt tot k + 1.

1.9 Ontaarding

Bij het zoeken van een spilrij is het minimum van $\frac{a_{ro}}{a_{rq}}$ gehanteerd. Tot nog toe is stilzwijgend verondersteld dat hierdoor spilrij r éénduidig is bepaald. Dit is echter uitsluitend het geval als dit minimum zich voordoet voor slechts één rij. Wordt hetzelfde minimum gevonden in meer dan één rij dan moet er worden gekozen. Stel dat er wordt gekozen voor rij r en niet voor rij s. De bepaling van de nieuwe oplossing levert dan een hoeveelheid = o voor produkt s.
Blijkt de eindoplossing bereikt te zijn dan is er niets ernstigs gebeurd. Is de eindoplossing nog niet bereikt en blijkt produkt (kolom) v nog te moeten worden opgenomen dan zijn er twee mogelijkheden:

1) $a_{sv} < o$ d.w.z. rij s komt niet in aanmerking om te worden verwijderd ten gunste van v. Een andere rij t wordt verwijderd, waarbij tevens $a_{so} = o$ verandert in $a'_{so} = a_{so} - \frac{a_{to}}{a_{tv}} a_{sv} = - \frac{a_{to}}{a_{tv}} a_{sv} > o$ want $a_{to} > o$, $a_{tv} > o$ en $a_{sv} < o$.

2) $a_{sv} > o$ dan levert $\frac{a_{so}}{a_{sv}} = \frac{o}{a_{sv}} = o$ steeds het kleinste niet negatieve quotiënt en dus wordt produkt s vervangen door produkt v en blijft de hoeveelheid = o, nu voor produkt v. Het rendement verbeterd niet want $R' = R - \frac{o}{a_{sv}} \delta_v = R$.

Nu begint een en ander weer opnieuw, zoals boven is beschreven voor produkt s met hoeveelheid = c. Omdat het rendement niet verandert in toestand 2) bestaat tevens het gevaar dat als produkt v is opgenomen ten koste van produkt s dat de daaropvolgende meest gewenste wijziging is vervang produkt v door produkt s, waarmee een reeds eerder bereikte oplossing nogmaals verschijnt. M.a.w. er wordt in een kringetje rondgedraaid. Deze situatie doet zich zelden voor en door kunstgrepen is er eveneens aan te ontkomen mocht het zich voordoen.

Een ander probleem is gelegen in de mogelijkheid dat in de spilkolom geen positieve coëfficiënten voorkomen. Dit houdt in dat dit produkt q onbeperkt kan worden opgenomen, waardoor tevens de mogelijkheden van sommige reeds opgenomen produkten worden verruimd en wel eveneens onbeperkt. Het rendement zal dan ook onbeperkt toenemen.

1.10 Het construeren van een beginoplossing

Het schema (9) onder "Een beginoplossing" is er vanuit gegaan dat er ongelijkheden (3) bestaan met $a_{jo} \geqq o$ (voor $j = 1, \ldots, k$). In de praktijk komen echter bij het maximeringsvraagstuk eveneens voor: a) gelijkheden $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i = a_{jo}$; b) ongelijkheden $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i \geqq a_{jo}$; c) $a_{jo} < o$

De vraag luidt nu hoe deze situaties te herleiden tot de situatie van (5) ?

Situatie		Beginoplossing
$a_{jo} \geqq o$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i \leqq a_{jo}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i + t_j = a_{jo}$ met $x_i = o$ en $t_j = a_{jo}$
	$= a_{jo}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i + t_j = a_{jo}$ met $x_i = o$ en $t_j = a_{jo}$ en de rendementsfunctie aanvullen tot $R = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_i + o\,.t_1 + \cdots + (-M)t_j + \cdots + o\,.t_k$ zodat de aanwezigheid van t_j een zeer nadelige invloed heeft op het rendement (M is zeer groot positief getal) en er dus naar wordt gestreefd $t_j = o$ te maken. Bij voldoend grote M wordt dit steeds bereikt.

	$\geqq a_{jo}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i - x_{i+1} = a_{jo}$ en $R = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_i + o\, .\, x_{i+1}$ en daarna de gelijkheid behandelen als boven ōf vermenigvuldig de gelijkheid of ongelijkheid met - 1 en zorg dat de nu negatieve a_{jo} verdwijnt door hier bij een gelijkheid op te tellen.
$a_{jo} \leqq o$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\, x_i \geqq a_{jo}$	Vermenigvuldig de vergelijking of ongelijkheid met - 1. Bij een ongelijkheid moet dan tevens het symbool worden omgedraaid: > wordt < en omgekeerd. Vervolgens beginoplossing vervaardigen als boven onder $a_{jo} \geqq o$ vermeld.
	$\leqq a_{jo}$	Laat de negatieve a_{jo} verdwijnen door bij de vergelijking een gelijkheid op te tellen.

1.11 Het minimeringsprobleem

Dit komt voor bij het minimeren van kosten. Het oplossen van het vraagstuk is gelijk aan dat bij het maximeren met uitzondering van het bepalen van de spilkolom. Nu wordt nl. afgegaan op de grootste positieve δ_i, daar deze de grootste bijdrage levert om de kosten te verkleinen.

Het samenstellen van een begintableau bij een minimeringsvraagstuk is eveneens iets anders. De vergelijkingen zullen in het algemeen een minimale hoeveelheid eisen, zodat er in ieder geval kosten gemaakt moeten worden m.a.w. $a_{ji}\, x_i \geqq a_{jo}$. Hiervan worden eerst gelijkheden gemaakt door er per ongelijkheid een variabele x_k van af te trekken. Dit levert op: $a_{ji}\, x_i - x_k = a_{jo}$. Deze x_k kunnen helaas niet worden benut voor het kiezen van de beginoplossing daar dan $x_k = - a_{jo}$ (nl. $x_i = o$) een negatieve beginhoeveelheid oplevert. Dit is niet toegestaan. Derhalve moet de gelijkheid worden aangepakt op dezelfde wijze als boven omschreven nl. het toevoegen van een t_j, die door het opnemen in de kostenfunctie van + M . t_j naar nul wordt gedreven.

Door de uitbreiding van het tableau met k nieuwe kolommen kan de oplossing soms met voordeel worden verkregen uit het duale probleem.

Toegepast op voren vermeld kostenvraagstuk stelt het oorspronkelijk probleem de vraag naar de hoeveelheden produkt onder minimum voorwaarden van de samenstellende delen en minimale kosten; het duale probleem stelt de vraag welke waarde heeft elk samenstellend element onder maximum voorwaarden van de prijzen van de produkten en maximale waarde van het totaal.

Bij de toepassing zal blijken dat de eindoplossingen van beide problemen hetzelfde resultaat opleveren en dat de coëfficiënten dezelfde interpretaties toe laten. Hiermede is het oplossen van het oorspronkelijke òf van het duale probleem teruggebracht tot een kwestie van voorkeur in verband met de beschikbare ruimte in de computer en van de rekentijd.

2. EEN LANDBOUWKUNDIG VOORBEELD VAN LINEAIRE PROGRAMMERING

2.1 De gegevens

Als voorbeeld is gekozen een theoretische situatie, waarbij niet de arbeid een beperkende factor vormt maar de beschikbare maaidorstijd. Ook is de planning niet betrokken op het gehele bedrijf maar slechts bedoeld om de verhouding tussen de verschillende graansoorten vast te stellen, met als doel een zo hoog mogelijke geldelijke opbrengst.

De gegevens zijn als volgt:

Bedrijf 60,-- ha.

Hiervan is 30,-- ha vastgelegd voor hakvruchten, waarvoor geen programmering noodzakelijk is.

De overige 30,-- ha moet worden verdeeld over 3 graansoorten.

t.w.: z. gerst, w. tarwe en x. tarwe.

Voor de oogst zijn 3 perioden belangrijk, waarin het volgende aantal maaidoruren beschikbaar is:

aug. 1, 42 uur.
aug. 2, 42 uur.
sept. 1, 36 uur.

De verdere gegevens t.a.v. de gewassen zijn de volgende:

		Aantal benodigde maaidorsuren/ha:		
Gewas	Saldo/ha	aug. 1	aug. 2	sept. 1
zomergerst	ƒ 1.200,--	3	0	0
wintertarwe	ƒ 1.800,--	0	3	0
zomertarwe	ƒ 1.500,--	0	1	2

2.2 Het opstellen van de beginoplossing

Stel de opp. z. gerst $= x_1$
" " w. tarwe $= x_2$
" " z. tarwe $= x_3$

Ten aanzien van de beschikbare oppervlakte grond geldt dan de volgende vergelijking.

$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 \leq 30$

Voor het maaidorsen in aug. 1 geldt dat 42 uur niet mag worden overschreden.

Dus: $x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 \leqq 42$

Analoog voor:

aug. 2. $\quad x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 3 + x_3 \cdot 1 \leqq 42$

sept. 1. $\quad x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 2 \leqq 36$

Ten aanzien van het rendement is het volgende gegeven:

$x_1 \cdot 1200 + x_2 \cdot 1800 + x_3 \cdot 1500 = R$ maximaal.

In al deze vergelijkingen komen steeds dezelfde onbekenden voor zodat het vraagstuk in de zgn. vectorvorm kan worden beschreven. Hierbij is de betekenis van de rijen en kolommen aangegeven. De rendementscijfers zijn voor het gemak gedeeld door 100.

$$\begin{array}{l} \text{Rendement} \\ \text{grond} \\ \text{mnd. aug. 1} \\ \text{mnd. aug. 2} \\ \text{mnd. sept. 1} \end{array} \begin{pmatrix}12\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}18\\1\\0\\3\\0\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}15\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} x_3 \begin{array}{c} = \\ \\ \leqq \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} R \text{ maximaal.} \\ 30\\42\\42\\36\end{pmatrix}$$

Men moet zich voorstellen dat aan bovenstaande ongelijkheden nog enkele vectoren worden toegevoegd om de ongelijkheden over te doen gaan in gelijkheden. Deze vectoren hebben de waarde 1 (één) voor de rij waarbij ze horen en de waarde 0 voor alle overige rijen. De betekenis van deze vectoren is dat ze aangeven welk deel van de restricties niet is benut. In de beginoplossing nemen ze dus automatisch de waarde aan van de getallen aan de andere zijde van het = teken. Voor de oplossing van het probleem is het niet nodig deze kolommen toe te voegen.

Het probleem wordt nu geschreven in de vorm van een matrix, waarbij de wiskundige tekens tussen de kolommen worden weggelaten.

Verder treedt er nog een verandering op ten aanzien van de rendementscijfers. Om een uniforme berekeningswijze voor de getallen van de matrix buiten de spilrij en de spilkolom mogelijk te maken dienen de getallen die het rendement aangeven te worden voorzien van een tegengesteld teken, dus: + wordt - , en - wordt + . Dit geldt uitsluitend voor de rij die het rendement aangeeft.

1

		zomer-gerst	winter-tarwe	zomer-tarwe	omvang v/d restricties
		1	2	3	4
Rendement	1	-12	$\boxed{-18}$	-15	-
grond	2	1	1	1	30
md. aug. 1	3	3	0	0	42
md. aug. 2	4	0	3	1	42
md. sept. 1	5	0	0	2	36

De interpretatie van deze matrix is vrij eenvoudig. De kolommen geven de alternatieve mogelijkheden weer, die verondersteld worden en de rijen hebben betrekking op de beperkingen of restricties die in acht moeten worden genomen.

De getallen in de matrix geven het verband weer dat er bestaat tussen de betreffende rij (restrictie) en de betreffende kolom (activiteit). Zo betekent het cijfer in rij 1, kolom 1 dat zomergerst een bijdrage geeft aan het doel, de maximalisering van het rendement, van 12 geldeenheden (in dit geval 12 x ƒ 100,--). Het getal op de 2e rij in de 1e kolom (a_{21}; lees a twee één) geeft aan dat een eenheid zomergerst aanspraak maakt op een eenheid grond. a_{31} geeft aan dat zomergerst 3 maaidorsuren vraagt in aug. 1. Zowel a_{41} als a_{51} zijn gelijk nul, d.w.z. dat zomergerst geen aanspraak maakt op maaidorsuren in aug. 2 en in sept. 1, althans in ons probleem niet.

2.3 De berekening door middel van maximeren

De matrix moet nu zodanig bewerkt worden dat de oplossing van het probleem, de samenstelling van een gewassenassortiment waarbij het rendement maximaal is, wordt verkregen.

De eerste bewerking hierbij, is de keuze van de spilkolom. Dat is de kolom met het laagste getal in de rij die het rendement aangeeft. De activiteit in deze kolom geeft nl. per eenheid de hoogste positieve bijdrage aan het doel wat gesteld is. In de matrix wordt dit getal omgeven door een rechthoek. De keuze valt in dit geval op kolom 2 die de activiteit wintertarwe voorstelt.

Nu de keuze van de spilkolom vaststaat moet de spilrij worden opgespoord. Hiervoor worden de getallen van de 4e kolom (restricties) gedeeld door de getallen van de 2e kolom (spilkolom) met een gemeenschappelijk rijnummer.

Voert men deze bewerking uit dan worden de volgende getallen verkregen:

$$\frac{a_{24}}{a_{22}} = \frac{30}{1} = 30$$

$$\frac{a_{34}}{a_{32}} = \frac{42}{0} = \infty$$

$$\frac{a_{44}}{a_{42}} = \frac{42}{3} = 14$$

$$\frac{a_{54}}{a_{52}} = \frac{36}{0} = \infty$$

De spilrij wordt bepaald door het laagste positieve quotiënt. Dit quotiënt geeft nl. het maximum aan tot waar nog geen overschrijding van enige restrictie optreedt.

Rij 4 is dus de spilrij. Het getal dat zowel in de spilkolom als in de spilrij voorkomt heet de spil. In de matrix is de spil met een cirkel omgeven.

Nu zowel de spilrij als de spilkolom zijn bepaald kan begonnen worden met de omwerking van de matrix naar de eerste verbeterde oplossing.

Hierbij kunnen 4 groepen getallen worden onderscheiden nl.

a De spil.

b De overige getallen van de spilrij.

c De overige getallen van de spilkolom.

d De overige getallen van de matrix.

De berekeningswijze voor deze 4 groepen loopt iets uiteen.

ad. a. In de onderhavige matrix is de spil het getal op de 4^e rij in de 2^e kolom (a_{42}). a'_{42} is nu het omgekeerde van a_{42}.
We kunnen dus zeggen: $a'_{42} = \frac{1}{a_{42}} = \frac{1}{3}$

ad. b. De overige getallen van de spilrij worden alle gedeeld door de spil. dus:

$$a'_{41} = \frac{a_{41}}{a_{42}} = \frac{0}{3} = 0$$

$$a'_{43} = \frac{a_{43}}{a_{42}} = \frac{1}{3} = 1/3$$

$$a'_{44} = \frac{a_{44}}{a_{42}} = \frac{42}{3} = 14$$

ad. c. De overige getallen van de spilkolom worden berekend door het oorspronkelijke getal te delen door de spil en vervolgens met (-1) te vermenigvuldigen.

$$a'_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{42}} = -\frac{-18}{3} = 6$$

$$a'_{22} = -\frac{a_{22}}{a_{42}} = -\frac{1}{3} = -1/3$$

$$a'_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{42}} = -\frac{0}{3} = 0$$

$$a'_{52} = -\frac{a_{52}}{a_{42}} = -\frac{0}{3} = 0$$

ad. d. De overige elementen van de matrix worden berekend volgens formule 12 uit het eerste deel van de cursus of in woorden: nieuw getal = oude getal $-$ $\frac{\text{getal in zelfde kolom op spilrij}}{\text{spil}}$ * getal op dezelfde rij in spilkolom.

Dus:

$$a'_{11} = a_{11} - \frac{a_{41}}{a_{42}} \cdot a_{12} = -12 - \frac{0}{3} \cdot -18 = -12$$

$$a'_{21} = a_{21} - \frac{a_{41}}{a_{42}} \cdot a_{22} = 1 - \frac{0}{3} \cdot 1 = 1$$

$$a'_{31} = a_{31} - \frac{a_{41}}{a_{42}} \cdot a_{32} = 3 - \frac{0}{3} \cdot 0 = 3$$

$$a'_{51} = a_{51} - \frac{a_{41}}{a_{42}} \cdot a_{52} = 0 - \frac{0}{3} \cdot 0 = 0$$

$$a'_{13} = a_{13} - \frac{a_{43}}{a_{42}} \cdot a_{12} = -15 - \frac{1}{3} \cdot -18 = -9$$

$$a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{43}}{a_{42}} \cdot a_{22} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 2/3$$

$$a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{43}}{a_{42}} \cdot a_{32} = 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$a'_{53} = a_{53} - \frac{a_{43}}{a_{42}} \cdot a_{52} = 2 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 2$$

$$a'_{14} = a_{14} - \frac{a_{44}}{a_{42}} \cdot a_{12} = 0 - \frac{42}{3} \cdot -18 = 252$$

$$a'_{24} = a_{24} - \frac{a_{44}}{a_{42}} \cdot a_{22} = 30 - \frac{42}{3} \cdot 1 = 16$$

$$a'_{34} = a_{34} - \frac{a_{44}}{a_{42}} \cdot a_{32} = 42 - \frac{42}{3} \cdot 0 = 42$$

$$a'_{54} = a_{54} - \frac{a_{44}}{a_{42}} \cdot a_{52} = 36 - \frac{42}{3} \cdot 0 = 36$$

Door bovenstaande bewerkingen zijn alle getallen van de oorspronkelijke matrix omgezet in getallen die samen een nieuwe matrix vormen. In de betekenisaanduiding kan men zien dat rij 4 dezelfde benaming heeft als oorspronkelijk kolom 2 en dat kolom 2 dezelfde naam draagt als oorspronkelijk rij 4.

2

		z. gerst	md. aug. 2	z. tarwe	
		1	2	3	4
Rendement	1	$\boxed{-12}$	6	-9	252
grond	2	1	-1/3	2/3	16
md. aug. 1	3	3	0	0	42
w. tarwe	4	0	1/3	1/3	14
md. sept. 1	5	0	0	2	36

Deze uit de voorgaande berekende matrix vormt nu weer het uitgangspunt voor de verdere berekeningen.
Achtereenvolgens worden opnieuw de volgende bewerkingen uitgevoerd:

1 De keuze van de spilkolom

2 De keuze van de spilrij

3 De omzetting van de matrix in een nieuwe matrix, waarbij achtereenvolgens nieuwe getallen worden berekend volgens de gegeven methode voor:

a. de spil

b. de overige getallen van de spilrij

c. de overige getallen van de spilkolom

d. de overblijvende elementen van de matrix.

Voor ons voorbeeld betekent dit dat kolom 1 spilkolom is en rij 3 de spilrij. De nieuwe matrix ziet er als volgt uit:

3

		md. aug. 1	md. aug. 2	z. tarwe	
		1	2	3	4
Rendement	1	4	6	$\boxed{-9}$	420
grond	2	-1/3	-1/3	2/3	2
z. gerst	3	1/3	0	0	14
w. tarwe	4	0	1/3	1/3	14
md. sept. 1	5	0	0	2	36

Ook deze matrix is weer uitgangspunt voor verdere berekeningen totdat op de eerste rij geen negatieve getallen meer voorkomen enz. enz.

4

		md. aug. 1	md. aug. 2	grond	
		1	2	3	4
Rendement	1	$\boxed{-1/2}$	3/2	27/2	447
z. tarwe	2	-1/2	-1/2	3/2	3
z. gerst	3	1/3	0	0	14
w. tarwe	4	1/6	1/2	-1/2	13
md. sept. 1	5	1	1	-3	30

5

		md. sept. 1	md. aug. 2	grond	
		1	2	3	4
Rendement	1	1/2	2	12	462
z. tarwe	2	1/2	0	0	18
z. gerst	3	-1/3	-1/3	1	4
w. tarwe	4	-1/6	1/3	0	8
md. aug. 1	5	1	1	-3	30

In tabel 5 is de eindoplossing weergegeven. Geen der getallen die het rendement aangeven is negatief. Dit is het kenmerk dat de eindoplossing is bereikt.

2.4 Interpretatie van de eindoplossing

De belangrijkste gegevens verschaft kolom 4. Het getal op de eerste rij geeft aan het totale rendement wat verkregen is, nl. een "saldo" van 462 x 100 = ƒ 46.200,--.

De rijnummers 2, 3 en 4 worden ingenomen door in de eindoplossing opgenomen activiteiten. In kolom 4 staat vermeld tot welke oppervlakte de verschillende graansoorten zijn opgenomen.

Dus:	z. tarwe	18,-- ha	saldo	18 x 15 = 270
	z. gerst	4,-- ha	"	4 x 12 = 48
	w. tarwe	8,-- ha	"	8 x 18 = 144
	samen	30,-- ha	totale saldo	462

Door sommering leveren de oppervlakten van de verschillende gewassen de totale oppervlakte op waarvan is uitgegaan.

Dezelfde beschouwing kunnen we toepassen op de maaidorstijd in de perioden aug. 2 en sept. 1. Deze restricties zijn ook volledig benut.

18 ha z. tarwe houdt in 18 x 2 = 36 maaidorsuren in sept. 1

18 ha z. tarwe houdt in	18 x 1 = 18	maaidorsuren	in	aug.	2
8 ha w. tarwe houdt in	8 x 3 = 24	"	"	"	2
	Totaal 42	"	"	"	2

Tevens staat in kolom 4 te lezen dat nog 30 maaidorsuren over zijn in aug. 1 (rij 5). De verklaring is als volgt:

Er is 4 ha z. gerst opgenomen. Elke ha z. gerst vraagt 3 maaidorsuren in aug. 1. De andere granen vragen geen maaidorsuren in aug. 1. Het aantal maaidorsuren in aug. 1 waarvan is uitgegaan bedraagt 42.

Nu is 42 - 4 x 3 = 30 = de niet benutte maaidorstijd in aug. 1.

De beschouwingen rond de eindoplossing zijn hiermee echter nog niet beëindigd.

Op de eerste rij die het rendement van de activiteiten aangaf in de oorspronkelijke probleemstelling staat nu in iedere kolom een positief getal. Dit getal geeft aan de grenswaarde van één eenheid van de volledig benutte restricties. Ook kan het zijn dat hiermee de grenswaarde van een niet opgenomen activiteit wordt aangegeven.

Het is zonder meer duidelijk dat uitbreiding van het aantal maaidorsuren in aug. 1 geen zin heeft. De hiervoor beschikbare tijd is nog niet volledig benut en uitbreiding van nog niet volledig benutte produktiefactoren geeft geen hoger rendement. We kunnen dan zeggen dat de marginale waarde van die produktiefactor = 0.

Anders is het voor de wel volledig benutte produktiefactoren. Uitbreiding van de capaciteit zou hier bepaalde gevolgen hebben voor de uitkomst van de berekeningen. Bij deze produktiefactoren is dus wel sprake van een marginale waarde. De hoogte hiervan is afhankelijk van de veranderingen die zouden moeten worden doorgevoerd in het geval de omvang van de restrictie zou veranderen. Deze veranderingen worden per kolom aangegeven en gelden uitsluitend t.a.v. de restrictie die in die kolom wordt genoemd. De veranderingen kunnen in twee richtingen plaats vinden nl.

<u>a</u>. een verruiming van de restrictie of

<u>b</u>. een verscherping van de eisen die de restrictie stelt.

<u>a</u>. Nemen we als voorbeeld kolom 1 dan moet deze als volgt gelezen worden:

<u>rij 1</u> Uitbreiding van het aantal maaidorsuren in sept. 1 met y uur doet het totale rendement toenemen tot

$$462 + y \cdot 1/2 = 462 + 1/2\ y$$

<u>rij 2</u> De oppervlakte zomertarwe wordt uitgebreid tot

$$18 + y \cdot 1/2 = 18 + 1/2\ y$$

<u>rij 3</u> De oppervlakte zomergerst wordt ingekrompen tot

$$4 + y \cdot -1/3 = 4 - 1/3\ y$$

<u>rij 4</u> De oppervlakte wintertarwe wordt ingekrompen tot

$$8 + y \cdot -1/6 = 8 - 1/6\ y$$

<u>rij 5</u> Het overschot aan maaidorsuren in augustus wordt uitgebreid tot

$$30 + 4 \cdot 1 = 30 + y$$

<u>b</u>. Nu het geval waarbij de eisen van de restrictie worden verscherpt. Stel, het aantal maaidorsuren in sept. 1 <u>daalt</u> met y uur.

<u>rij 1</u> Het totale rendement neemt af tot

$$462 - y \cdot 1/2 = 462 - 1/2\ y$$

<u>rij 2</u> De oppervlakte zomertarwe neemt af tot

$$18 - y \cdot 1/2 = 18 - 1/2\ y$$

<u>rij 3</u> De oppervlakte zomergerst neemt toe tot

$$4 - y \cdot -1/3 = 4 + 1/3\ y$$

<u>rij 4</u> De oppervlakte wintertarwe neemt toe tot

$$8 - y \cdot -1/6 = 8 + 1/6\ y$$

<u>rij 5</u> Het overschot aan maaidorsuren in aug. 1 neemt af tot

$$30 - y \cdot 1 = 30 - y$$

Het traject waarbinnen het aantal maaidorsuren in sept. 1 kan veranderen, terwijl het correctiepatroon van kolom 1 geldig blijft, wordt aangegeven door de verzameling van waarden die y kan aannemen, onder voorwaarde dat de waarde van geen der bovenstaande vergelijkingen kan dalen beneden nul.

Bij de toename onder a. wordt de hoogst mogelijke waarde van y bepaald door de vorm 4 - 1/3 y in rij 3.

Deze vorm kan slechts dalen tot de waarde 0 dus:

$$4 - 1/3\ y \geq 0$$
$$y \leq 12$$

Bij de afname van het aantal maaidorsuren onder b. wordt de hoogst mogelijke waarde van y gevonden in de vorm 30 - y in rij 5:

$$30 - y \geq 0$$
$$y \leq 30$$

Het aantal maaidorsuren in september 1 bedroeg in de uitgangssituatie 36. Dit aantal is volledig benut.

Nu kan uit kolom 1 in de eindoplossing worden afgelezen dat het traject waarover de gegevens in kolom 1 geldig blijven loopt van (36 - 30) uur tot (36 + 12) uur. Dus van 6 tot 48 maaidorsuren in september 1. Dit houdt in dat zonder een nieuwe programmering uit te voeren het aantal maaidorsuren in sept. 1 willekeurig tussen 6 en 48 uur kan worden vastgesteld en dat dan op eenvoudige wijze de consequenties van deze beslissing kunnen worden doorberekend in het eindresultaat. De overige omstandigheden gelijkblijvend verondersteld. Het is wel duidelijk dat voor de gehele kolom dezelfde y moet worden gehanteerd.

In de diverse kolommen bestaat ook een verticaal verband tussen de gegevens.

We lezen in kolom 1 dat bij uitbreiding van het aantal maaidorsuren, de oppervlakte z. tarwe dient te worden uitgebreid en de oppervlakte z. gerst en w. tarwe wordt ingekrompen. Over meer of minder benutte grond wordt niet gesproken. De uitbreiding en de inkrimping hebben nl. betrekking op dezelfde oppervlakte.

Dus: $1/2 - 1/3 - 1/6 = 3/6 - 2/6 - 1/6 = 0$

Echter niet alleen voor de grond, maar ook voor de overige benutte produktiefactoren kan deze beschouwing worden toegepast. Het aantal maaidorsuren in aug. 2 dat vrijkomt is gelijk aan het aantal maaidorsuren dat gevraagd wordt.

De correcties bestaan uit:

+ 1/2 z. tarwe - 1/3 z. gerst - 1/6 w. tarwe.

We vullen voor z. tarwe enz. het aantal maaidorsuren in uit de beginoplossing.

$$1/2\ .\ 1 - 1/3\ .\ 0 - 1/6\ .\ 3 = 1/2 \qquad - 1/2 = 0$$

De maaidorsuren in aug. 2 blijven dus volledig benut.

Vervolgens het ontstaan van de marginale waarde, bijv. van één maaidorsuur in sept. 1. Laten we veronderstellen dat dit aantal met één uur wordt uitgebreid.

De gevolgen zijn dan financieel:

1/2 ha z. tarwe meer	→	rendementsverbetering	7,5 geldeenheden
1/3 ha z. gerst minder	→	rendementsdaling	4,0 geldeenheden
1/6 ha w. tarwe minder	→	rendementsdaling	3,0 geldeenheden
per saldo een rendementsverbetering van			0,5 geldeenheid.

Dit laatste wordt aangegeven in rij 1, eerste getal in kolom 1.

Uit de eindoplossing kan ook worden berekend tussen welke grenzen de saldo's zich kunnen wijzigen zonder de uitkomst van de programmering aan te tasten. Deze grenzen gelden alleen wanneer alle overige omstandigheden gelijk blijven.

In de gevonden eindoplossing zijn alle waarden in de rendementsfunctie groter of gelijk nul. Dit is een eis voor de optimale oplossing. De saldo's kunnen nu veranderen, zonder dat nieuwe berekeningen nodig zijn totdat één van de functiewaarden in de rendementsrij nul wordt. Nu kan per kolom worden bepaald onder welke voorwaarden dit het geval is.

<u>Kolom 1</u>

Hierin staat:

1/2 (zt) - 1/3 (zg) - 1/6 (wt) = 1/2 geldeenheid.

We stellen het rechterlid nul, stellen één van de saldo's onbekend en berekenen met behulp van de bekende coëfficiënten de maximum- of minimumgrens van het als onbekend veronderstelde saldo.

1/2 (zt) - 1/3 (12) - 1/6 (18) = 0 → minimum saldo zt. = 14

1/2 (15) - 1/3 (zg) - 1/6 (18) = 0 → maximum saldo zg. = 13 1/2

1/2 (15) - 1/3 (12) - 1/6 (wt) = 0 → maximum saldo wt. = 21

<u>Kolom 2</u>

0 (zt) - 1/3 (zg) + 1/3 (wt) = 2

stel rechterlid nul.

- 1/3 (zg) + 1/3 (18) = 0 → maximum saldo zg = 18
- 1/3 (12) + 1/3 (wt) = 0 → minimum saldo wt = 12

Kolom 3

0 (zt) + 1 (zg) + 0 (wt) = 12

stel rechterlid nul.

1 (zg) = 0 → minimum saldo zg = 0

De meest beperkende grenzen geven tenslotte de marge aan die het saldo heeft. Deze kunnen in een schema als volgt worden weergegeven.

gewas	minimum kolom	minimum saldo	maximum kolom	maximum saldo
Wintertarwe	2	12	1	21
Zomertarwe	1	14	-	∞
Zomergerst	3	0	1	13 1/2

2.5 Een duale oplossing

Ieder l.p. vraagstuk kan omgezet worden in een zgn. duaal vraagstuk. Dit betekent dat ieder maximumprobleem omgezet kan worden in een minimumprobleem en ieder minimumprobleem in een maximumprobleem.

Als voorbeeld nemen we een bemestingsvraagstuk.

De uitgangspunten voor de opdracht luiden als volgt:

Benodigd: 105 kg N.
45 kg P_2O_5
80 kg K_2O

Beschikbare kunstmeststoffen met gehalten N, P_2O_5 en K_2O.

Mengmest	15 - 15 - 15	à ƒ 30,--	per 100 kg
"	10 - 5 - 10	à ƒ 20,--	per 100 kg
Kalksalpeter	15 - 0 - 0	à ƒ 18,--	per 100 kg
Kali 40	0 - 0 - 40	à ƒ 12,--	per 100 kg

Het oorspronkelijke probleem luidt nu:

Welke hoeveelheden van de 4 kunstmestsoorten moeten er worden gebruikt om de kosten te minimaliseren ?

$$\begin{aligned} 15\,x_1 + 10\,x_2 + 15\,x_3 &\geq 105 \text{ kg N} \\ 15\,x_1 + 5\,x_2 &\geq 45 \text{ kg } P_2O_5 \\ 15\,x_1 + 10\,x_2 + 40\,x_4 &\geq 80 \text{ kg } K_2O \end{aligned} \qquad (A)$$

onder de voorwaarde x_1, x_2, x_3 en $x_4 \geq 0$

en $30\,x_1 + 20\,x_2 + 18\,x_3 + 12\,x_4 = \text{K minimaal}$

Dit oplossen betekent eerst gelijkheden maken door er een aantal variabelen vanaf te trekken:

$$
\begin{array}{lr}
15\,x_1 + 10\,x_2 + 15\,x_3 - x_5 = 105 & \\
15\,x_1 + 5\,x_2 - x_6 = 45 & \text{(B)} \\
15\,x_1 + 10\,x_2 + 40\,x_4 - x_7 = 80 & \\
30\,x_1 + 20\,x_2 + 18\,x_3 + 12\,x_4 + 0\,.\,x_5 + 0\,.\,x_6 + 0\,.\,x_7 = R \text{ minimaal} &
\end{array}
$$

De variabele x_5 hieruit opgelost ten behoeve van een beginoplossing levert $x_5 = -105$ ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$). Dit nu mag niet voorkomen; de beginoplossing moet starten met positieve waarden. Derhalve zit er niets anders op dan het laatste stelsel gelijkheden op te lossen. Dit proces wordt begonnen door $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ te kiezen en de beginhoeveelheden 105, 45 en 80.

In de kostenfunctie komen nu voor x_1 t/m x_7 en bovendien nog $+ M\,.\,t_1 + M\,.\,t_2 = M\,.\,t_3$, waarbij M een groot positief getal is dat de kosten zeer ongunstig beïnvloedt, zodat t_1, t_2 en t_3 niet opgenomen zullen worden en dus de gelijkheden (B) ontstaan.

In schema luidt het probleem:

	waarde →	30	20	18	12	0	0	0	
↓		mengmest 15-15-15	mengmest 10-5-10	kalk salpeter	kali 40	overmaat aan N	overmaat aan P_2O_5	overmaat aan K_2O	
	Kosten	45 M - 30	25 M - 20	15 M - 18	40 M - 12	- M	- M	- M	230 M
M	N	15	10	15		- 1			105
M	P_2O_5	15	5				- 1		45
M	K_2O	15	10					- 1	80

Nu het kiezen van de hoogste kosten; deze zullen de beginkosten van 230 M zoveel mogelijk verlagen. De hoogste kosten zijn bij 45 M - 30

Dit levert het volgende schema:

	P_2O_5	mengmest 10-5-10	Ks	K_{40}	overmaat aan N	overmaat aan P_2O_5	overmaat aan K_2O	
Kosten	- 3 M + 2	10 M - 10	15 M - 18	40 M - 12	- M	2 M - 2	- M	35 M +90
N	- 1	5	15		- 1	1		60
mengmest 15-15-15	1/15	1/3				-1/15		3
K_2O	- 1	5		40		1	- 1	35

	P_2O_5	10-5-10	Ks	K 40	overmaat N	overmaat P_2O_5	overmaat K_2O	
Kosten	- 2 M	5 M	15 M	- M	- M	M	0	60 M
	+ 1,7	- 8,5	- 18	+ 0,3		- 1,7	- 0,3	+ 100,5
N	- 1	5	15		- 1	1		60
15-15-15	1/15	1/3				-1/15		3
K 40	-1/40	1/8		1/40		1/40	-1/40	7/8

	P_2O_5	10-5-10	N	K	overmaat N	overmaat P_2O_5	overmaat K_2O	
Kosten	- M	0	- M	- M	0	0	0	0
	+ 0,5	- 2,5	+ 1,2	+ 0,3	- 1,2	- 0,5	- 0,3 +	172,5
Ks	-1/15	1/3	1/15		-1/15	1/15		4
15-15-15	1/15	1/3				-1/15		3
K 40	-1/40	1/8		1/40		1/40	-1/40	7/8

De kolommen in deze eindoplossing waarin geen M voorkomt zijn op het teken na gelijk aan de rijen van de eindoplossing die in het volgende duale probleem zal worden gevonden.

Het duale probleem geeft niet meer informatie. Wel kan de eindoplossing eventueel sneller worden bereikt öf zoals hier het geval is kan het aantal rijen of kolommen geringer zijn, hetgeen ruimte spaart in het geheugen van de computer en tevens minder berekeningen nodig maakt.

Bij de duale oplossing moet de opdracht zo worden opgevat dat de kosten van resp. N, P_2O_5 en K_2O zo laag mogelijk zijn.

Stel de kosten van 1 kg N $= w_1$

" 1 kg $P_2O_5 = w_2$

" 1 kg $K_2O = w_3$

Uit de prijs van kalksalpeter is gemakkelijk af te leiden dat 1 kg N hoogstens ƒ 1,20 mag kosten. Evenzo uit kali 40 dat voor 1 kg K_2O hoogstens ƒ 0,30 mag worden uitgegeven.

Uit de prijzen en de gehalten aan N, P_2O_5 en K_2O kan nu het volgende stelsel van ongelijkheden worden afgeleid.

$$15\,w_1 + 15\,w_2 + 15\,w_3 \leqq 30$$

$$10\,w_1 + 5\,w_2 + 10\,w_3 \leqq 20$$

$$15\,w_1 \leqq 18$$

$$40\,w_3 \leqq 12$$

Verder geldt: $w_1, w_2, w_3 \geqq 0$

en $105\,w_1 + 45\,w_2 + 80\,w_3 = R$ maximaal.

Uit deze opstelling kan op de bekende wijze een matrix worden afgeleid, deze matrix wordt met behulp van de simplex-methode bewerkt totdat de optimale oplossing is bereikt.

1

	N	P_2O_5	K_2O	
Kosten	$\boxed{-105}$	-45	-80	max.
Mengm. 15-15-15	15	15	15	30
Mengm. 10- 5-10	10	5	10	20
Ks	15	0	0	18
Kali 40	0	0	40	12

2

	Ks	P_2O_5	K_2O	
Kosten	7	-45	$\boxed{-80}$	126
Mengm. 15-15-15	-1	15	15	12
Mengm. 10- 5-10	-2/3	5	10	8
N	1/15	0	0	1,2
Kali 40	0	0	40	12

3

	Ks	P_2O_5	Kali 40	
Kosten	7	$\boxed{-45}$	2	150
Mengm. 15-15-15	-1	15	-3/8	7 1/2
Mengm. 10- 5-10	-2/3	5	-1/4	5
N	1/15	0	0	1,2
K_2O	0	0	1/40	0,3

4

	Ks	mengmest 15-15-15	Kali 40	
Kosten	4	3	7/8	172,50
P_2O_5	-1/15	1/15	-1/40	0,5
Mengm. 10- 5-10	-1/3	-1/3	-1/8	2,5
N	1/15	0	0	1,2
K_2O	0	0	1/40	0,3

2.6 Interpretatie van de duale oplossing

Bij de interpretatie van de eindoplossing moeten we er rekening mee houden dat het hier een duale oplossing betreft.

Op de eerste rij die de vereiste samenstelling aangaf staan nu de hoeveelheden meststof die in de eindoplossing zijn opgenomen. Dus het bemestingsplan bestaat uit:

400 kg kalksalpeter	ƒ 72,--
300 kg mengmest 15-15-15	ƒ 90,--
87½ kg kali 40	ƒ 10,50

De totale kosten bedragen ƒ 172,50

In de laatste kolom staan de informaties omtrent de grenswaarden per eenheid van de gestelde eisen en de niet opgenomen grondstoffen.

1 kg P_2O_5 kost ƒ 0,50

1 kg N kost ƒ 1,20

1 kg K_2O kost ƒ 0,30

Mengmest 10-5-10 is, in vergelijking met de andere kunstmeststoffen ƒ 2,50 duurder dan op grond van het gehalte aan N, P_2O_5 en K_2O zou mogen worden verwacht.

Als mengmest 10-5-10 meer dan ƒ 2,50 per 100 kg goedkoper wordt kan zij in het bemestingsplan worden opgenomen. Zij vervangt dan per 100 kg een combinatie van:

	N	P_2O_5	K_2O
1/3 . 100 kg kalksalpeter	5	0	0
1/3 . 100 kg mengmest 15-15-15	5	5	5
1/8 . 100 kg kali 40	0	0	5
	10	5	10

Er wordt dan weer precies voldaan aan de eisen van de samenstelling omdat de bijgekomen hoeveelheden N, P_2O_5 en K_2O gelijk zijn aan de vervangen hoeveelheden. Deze vervanging kan worden herhaald totdat één van de opgenomen kunstmeststoffen geheel is vervangen. Het maximum wordt dus aangegeven door het kleinste qoutiënt van de getallen op de eerste rij gedeeld door de getallen op de 3^{e} rij met hetzelfde kolomnummer. (Hierbij moeten de - tekens in rij 3 worden omgekeerd).

We krijgen dan de volgende uitkomst:

kolom 1 $\frac{4}{1/3} = 12$

kolom 2 $\frac{3}{1/3} = 9$

kolom 3 $\frac{7/8}{1/8} = 7$

Hieruit kunnen we afleiden dat de vervanging maximaal tot de volgende omvang kan worden uitgevoerd:

700 kg mengmest 10-5-10 in de plaats van:
7 x 1/3 . 100 kg = 233 1/3 kg kalksalpeter
7 x 1/3 . 100 kg = 233 1/3 kg mengmest 15-15-15
7 x 1/8 . 100 kg = 87 1/2 kg kali 40

Dit zouden dus de gevolgen zijn wanneer mengmest 10-5-10 met meer dan ƒ 2,50 /100 kg in prijs daalde.

De eindoplossing kan ook verandering ondergaan door prijsstijging van de opgenomen kunstmeststoffen. Als deze prijsstijging een bepaald niveau te boven gaat zal vervanging door een goedkopere combinatie plaats moeten vinden.

Deze grens kan uit de eindoplossing worden berekend. Regel 3 in de eindoplossing moet dan als volgt worden gelezen:

De waarde van 100 kg mengmest 10-5-10, minus de waarde van 1/3 . 100 kg Ks, minus de waarde van 1/3 . 100 kg mengmest 15-15-15, minus de waarde van 1/8 . 100 kg kali 40 = ƒ 2,50. Verandering treedt op als het rechterlid wordt < o. In deze vergelijking kan ieder der termen om beurten als onbekend worden verondersteld zodat de waarde wordt gevonden waarbij verandering optreedt.

Voor kalksalpeter is dit:

mengm. 10-5-10   1/3 mengm. 15-15-15   1/8 K 40
ƒ 20,00 - ƒ 10,00 - 1/3 . 100 kg Ks - ƒ 1,50 < o → 100 kg Ks > ƒ 25,50

Voor mengmest 15-15-15 geldt:

ƒ 20,00 - 1/3 . 100 kg mengm. - ƒ 6,00 - ƒ 1,50 < o → 100 kg mengm. > ƒ 37,50

Voor kali 40 geldt:

ƒ 20,00 - ƒ 10,00 - ƒ 6,00 - 1/8 . 100 kg kali 40 < o → 100 kg kali 40 > ƒ 32,00

Achteraf kan worden bepaald dat in het bemestingsplan meer of minder N, P_2O_5 of K_2O moet voorkomen dan aanvankelijk was bepaald. De gevolgen van een dergelijke veronderstelling kunnen eveneens uit de eindoplossing worden gelezen.

De bemestingseisen worden bijv. achteraf bepaald op:

90 kg zuiver N
50 kg zuiver P_2O_5
70 kg zuiver K_2O

Dit betekent t.o.v. de oude situatie:

90 - 105 = 15 kg N minder.

50 - 45 = 5 kg P_2O_5 meer.

70 - 80 = 10 kg K_2O minder.

De hoeveelheden meststoffen in de nieuwe situatie zijn dan:
(zie bovenstaande correctie en het betreffende element in de eindoplossing)
kalksalpeter;

4 + (-15) . 1/15 + (5) . (-1/15) + (-10) . 0 + (0) . (-1/3) = 2 2/3

mengmest 15-15-15;

3 + (5) . (1/15) = 3 1/3

kali 40;

7/8 + (-10) . 1/40 + (5) . (-1/40) = 1/2

Ter controle het volgende:

2 2/3 . 100 kg Ks geeft:	40 kg N,	0 kg P_2O_5,	0 kg K_2O.
3 1/3 . 100 kg mengmest 15-15-15 geeft:	50 kg N,	50 kg P_2O_5,	50 kg K_2O.
1/2 . 100 kg kali 40 geeft:	0 kg N,	0 kg P_2O_5,	20 kg K_2O.
Totaal	90 kg N,	50 kg P_2O_5,	70 kg K_2O.

De nieuwe samenstelling kost ƒ 154,-- nl.

172,5 + 1,2 . (-15) + 0,5 . (5) + 0,3 . (-10) + 2,5 . (0) = 154,--

Ook deze afgeleide oplossing is optimaal, d.w.z. er is bij de gegeven keuze-mogelijkheid geen voordeliger oplossing. Dit blijkt uit het feit dat geen enkele nieuwe coëfficiënt in rij R negatief wordt nl. 2 2/3, 3 1/3 en 1/2. Zou dit wel het geval zijn geweest, dan is deze oplossing niet meer optimaal.

3. "DE MOGELIJKHEDEN VAN EEN COMPUTER-PROGRAMMA" VOOR LINEAIRE PROGRAMMERING

3.1 Inleiding

Uit hetgeen u door de beide andere inleiders is verteld, zal het u duidelijk zijn dat juist de computer met zijn rekensnelheid een enorme bijdrage heeft gegeven in de ontwikkeling van diverse planningstechnieken. Om te kunnen "plannen" moet immers veel gerekend worden en lineaire programmering is één van de hierbij toegepaste rekentechnieken. Rekentechnisch gezien is L.P. een schijnbaar eindeloze herhaling van een paar "eenvoudige" rekenregels en dus daardoor uitermate geschikt voor uitvoering op een elektronische rekenmachine.

In "handwerk" uitgevoerd betekent een eenvoudig tableau van bijv. 15 regels en 20 kolommen al gauw een dag of vier cijferen, ook al maken we gebruik van een tafelrekenmachine. Als we bedenken dat grote problemen een paar honderd regels en een paar duizend kolommen kunnen omvatten, dan zult u inzien dat de optimalisering van een dergelijk stelsel van vergelijkingen in handwerk volslagen ondoenlijk is en maanden rekenwerk vergt !
(Bij olie-raffinaderijen - of in het algemeen bij chemische processen - komt men inderdaad problemen van deze omvang tegen. Er moet dan bijv. uit een zeer groot aantal grondstoffen met verschillende prijzen, en/of mogelijkheden van bereiding, op de goedkoopste wijze een bepaald eindprodukt geproduceerd worden, dat aan nauwkeurig omschreven eigenschappen voldoet).

Een computer zal dikwijls binnen enige minuten of hoogstens na enige uren een optimale oplossing bereiken. Een en ander hangt af van de grootte van het probleem, de gebruikte computer en het gebruikte computer-programma. Door de rekensnelheid van de computer krijgt lineaire programmering dan ook veel meer betekenis als hulpmiddel bij de bedrijfsvoering. Het kost nl. weinig tijd om een aantal <u>alternatieve</u> bedrijfsplannen te berekenen, zodat de bedrijfsleiding mogelijkheden tot kiezen heeft en niet alleen genoegen hoeft te nemen met één "optimale" oplossing.

3.2 Het computer-programma voor L.P.

In het onderstaande wordt u iets naders verteld over de be- en verwerking van gegevens door een computer. Voor de eenvoud en de duidelijkheid zal de werking van dit computer-programma u uitgelegd worden aan de hand van een van de voorbeelden die in het vorige cursusgedeelte behandeld zijn. (zie blz.21 e.v.)

Op sommige punten zult u dus derhalve herhalingen aantreffen, maar dat is onvermijdelijk en hopelijk niet hinderlijk. In eerste instantie echter dient u te bedenken, dat er twee facetten van de lineaire-programmering bestaan, waarbij de computer u beslist niet behulpzaam is nl.:

1^{e} het samenstellen van het begintableau, of m.a.w. het in getallen formuleren van de activiteiten en de restricties.

2^{e} het interpreteren van de door de computer geleverde resultaten - d.w.z. het kennen van de juiste "gewichten" die de uiteindelijke resultaten bezitten.

Ten behoeve van deze inleiding wordt hier, ter illustratie, teruggegrepen op een bestaand computer-programma dat geschreven is voor de (hier ook in Wageningen aanwezige) I.B.M. 1620, uitgebreid met een schijvengeheugen.

3.3 De opbouw en de werking van het programma

Zonder al te zeer in te gaan op details, volgt hier allereerst een globale beschrijving van het programma, dat geregistreerd staat onder I.B.M. no. 1620-CO-04X.

Opbouw: Het totale rekenprogramma is opgebouwd uit een 30 stukken, de zgn. subroutines, die elk een eigen "naam" hebben (en ook elk een bepaald gedeelte van het rekenprogramma uitvoeren) en die door middel van zgn. agenda-kaarten als het ware opgeroepen kunnen worden uit het schijvengeheugen, waar de stukken eerder opgeborgen zijn. Bijv. de agenda-kaart INPUT: deze kaart brengt de invoersubroutine van het schijvengeheugen naar de "werkruimte" van de computer. De INPUTKAART zal dan ook gevolgd moeten worden door invoergegevens (d.w.z. matrix-elementen die op ponskaarten gebracht zijn). De opgeroepen subroutine zal dan deze gegevens gaan inlezen en opbergen op een bepaalde serie plaatsen in het geheugen van de computer. Na afloop van dit deel kunt u zich voorstellen dat er opnieuw een agenda-kaart wordt gelezen bijv. met de naam: L.P. 1620. Deze kaart zal de feitelijke lineaire programmerings rekensubroutine oproepen, waardoor de zojuist ingelezen matrix wordt geoptimaliseerd - hetgeen tenslotte het doel is ! Evenzo zijn er agenda-kaarten die de uitvoersubroutines oproepen en uitvoeren, waardoor de gevonden oplossing wordt geponst of getypt op de schrijfmachine van de I.B.M. 1620 computer.

Dit is in zeer grove lijnen de werkwijze van het programma, dat overigens nog veel andere ingebouwde mogelijkheden heeft met betrekking tot het aanbrengen van wijzigingen in een bestaand probleem, dat reeds in een vroeger stadium op het schijvengeheugen is ingelezen.

Bijvoorbeeld:

1) Een kolom kan vervangen worden door een andere;
2) idem een rij;
3) bepaalde rijen en/of kolommen kunnen voor de berekening van een alternatief plan worden uitgesloten (er wordt dus niet mee gerekend);
4) willekeurige elementwaarden uit de matrix kunnen vervangen worden door andere.

Hiermede eindigt de globale beschrijving van de opbouw van het programma en wordt in het onderstaande een voorbeeld uitgewerkt, te beginnen met het begintableau:

3.4 Het opzetten van een voorbeeld:

		← Kolomnamen →			RHS	
	Rijnamen	ZOGE	WITA	ZOTA	PLAN 1	
object →) functie)	REND.	-12	-18	-15		Beperkingen
	GROND	1	1	1	$\leqq$ 30	
↑	M.AUG. 1	3	0	0	$\leqq$ 42	
beperkingen	M.AUG. 2	0	3	1	$\leqq$ 42	
↓	M.SEP. 1	0	0	2	$\leqq$ 36	
bovengrens						
benedengrens						

In dit begintableau herkent u het behandelde voorbeeld van pagina . Ten behoeve van de verdere verwerking met de computer zijn de rijen en de kolommen voorzien van enige zinvolle afkortingen, zodat we in de uitvoer zonder moeite kunnen herkennen wat er staat.

Enige zeer belangwekkende facetten van dit rekenprogramma worden aangegeven door de woorden bovengrens, benedengrens en beperkingen (zie begintableau). Het is bijv. mogelijk in de kolom ZOGE (zomergerst) bij "bovengrens" en "benedengrens" te schrijven: 10 respectievelijk 5 en het eindprogramma zal te zien geven dat er minstens 5 ha gerst in het plan verschijnen en maximaal 10 ha ! Evenzo kan bij de "beperkingen" bijv. aangegeven worden dat het aantal Maaidorsuren in aug. 1 (MAUG 1) moet liggen tussen 42 en 50. Ook dan zal het rekenprogramma hier op letten en een eindoplossing met minstens 42 maaidorsuren en hoogstens 50 produceren.

3.5 Opstellen der ponskaarten

Als de probleemformulering tot en met het opstellen van het begin-tableau gereed is volgt de fase van het aanmaken der benodigde ponskaarten, die in hoofdzaak bestaan uit 3 soorten nl.:

1e) Een paar programma-besturingskaarten;
2e) een aantal van de genoemde agenda-kaarten;
3e) de feitelijke datakaarten, waarop dus de matrixelementwaarden (al of niet voorzien van boven- of benedengrens of beperking) genoteerd zijn.

De datakaarten zijn in feite nog onder te verdelen in:

1e) Rij-indicatorkaart, gevolgd door kaarten met de namen der rijen;
2e) kolom-indicatorkaart, gevolgd door kaarten met de namen der kolommen;
3e) matrix-indicatorkaart, gevolgd door kaarten met rij- en kolomnamen alsmede de elementwaarden;
4e) RHS-indicatorkaart (ook wel FIRST.B-kaart genoemd), gevolgd door kaarten met rij-namen en de omvang van de beperkingen.

Overigens is de kaartindeling gebonden aan nauwkeurig bepaalde "grenzen", zodat de computer een bepaald soort gegeven steeds in dezelfde kaartkolommen vindt.

3.6 Indeling ("FORMAT") der ponskaarten:

1	7	13	19	31	43	55 → 80
INDI-CATOR	KOLOM-NAAM	RIJ-NAAM	WAARDE V/H ELEMENT	BOVEN-GRENS	BENEDEN-GRENS	COMMENTAAR

Hierboven is schematisch de kaartindeling weergegeven, die bestaat uit 3 kaartvelden van 6 kolommen breed, gevolgd door 3 kaartvelden van 12 kolommen breed. De overige kaartkolommen mogen gebruikt worden om (ter eigen verduidelijking bijv.) verklaringen m.b.t. de getallen te plaatsen in de ponskaart.

Keren we nu terug naar het begintableau van het voorbeeld, dan zal in geponste vorm (en vervolgens afgedrukt) ons probleem er als volgt uitzien:

3.7

```
TESTVOORBEELD VOOR DE LINEAIRE PROGRAMMERING:                     (zie bijlage 1)
ZZJOB   5                                          } BESTURINGSKAARTEN
ZZXEQ   LP1620                                     }
INPUT.  C02000.  PLANA                               AGENDAKAART
ROW.ID                                               RIJ-IDENTIFICATOR
                 REND..                              GEVOLGD DOOR
               + GROND.                              RIJ-NAMEN
               + MAUG1.                              0 BETEKENT =
               + MAUG2.                              -     "    ≥
               + MSEP1.                              +     "    ≤
COL.ID                                               KOLOM-IDENTIFICATOR
                 ZOGE..
                 WITA..
                 ZOTA..
MATRIX                                               MATRIX-IDENTIFICATOR
        ZOGE..   REND..-    12.                      GEVOLGD DOOR ELEMENTEN
        ZOGE..   GROND.      1.
        ZOGE..   MAUG1.      3.
        WITA..   REND..-    18.
        WITA..   GROND.      1.
        WITA..   MAUG2.      3.
        ZOTA..   REND..-    15.
        ZOTA..   GROND.      1.
        ZOTA..   MAUG2.      1.
        ZOTA..   MSEP1.      2.
FIRST.  BPLAN1
                 GROND.     30.
                 MAUG1.     42.
                 MAUG2.     42.
                 MSEP1.     36.
ENDATA
ASSIGN             1
MAX.... PLAN1    REND..                            ) AGENDA-KAARTEN
OUTPUT                                             | TEN BEHOEVE VAN
CHECK.                                             | UITVOERING REKEN-
COSTR.                                             > PROGRAMMA EN
DO.D/J                   3                         | UITVOER VAN DE
ENDJOB                                             ) RESULTATEN
1       7        13      19          31            43              55
```

Deze invoerkaarten zijn nu dus gereed voor bewerking door de computer. We plaatsen ze dan ook in de ponskaartenlezer van de computer, (waarbij ik u er nogmaals aan herinner, dat het volledige verwerkingsprogramma reeds in een eerder stadium "permanent" is opgeborgen op het schijvengeheugen van de computer) die vervolgens kaart voor kaart leest en naar gelang de inhoud van de kaart hetzij bepaalde programma-onderdelen naar de "werkruimte" haalt, dan wel matrix-elementwaarden tijdelijk opbergt.

Via de schrijfmachine op de computer-console, blijven we op de hoogte van datgene waar de computer mee bezig is, doordat regelmatig "boodschappen" uitgetypt worden. (Ook eventuele fouten die door de computer ontdekt worden in het te lezen kaartenbestand worden via de schrijfmachine gemeld. Het inlezen stopt dan en dikwijls is het mogelijk om onmiddellijk de fout op te sporen, te verbeteren en het programma te vervolgen).

Na het lezen van de kaart "ENDATA" zijn de matrix-elementen allemaal opgenomen in het computergeheugen en kan de afwerking van de laatste agenda-kaarten beginnen, waarvan de voornaamste is de kaart:

MAX.... PLAN1REND.

Deze kaart start het feitelijke optimaliseringsproces, waar alles om begonnen is en daarna resteren alleen nog de agenda-kaarten: OUTPUT, CHECK, COST.R en DO.D/J, die ieder een bepaald soort uitvoertabel verzorgen, waarvan hierna voorbeelden volgen. Het allerlaatste volgt de kaart "ENDJOB", die voor zichzelf spreekt en alleen dient om de besturing weer naar het begin van het programma te dirigeren, zodat een volgend probleem ingelezen kan worden.

3.8 De uitvoertabellen van de computer en hun betekenis

Onderstaand volgen voorbeelden van uitvoertabellen, die allen gebaseerd zijn op hetzelfde rekenvoorbeeld (zie hoofdstuk 2, pag.22)
Dit vergemakkelijkt de leesbaarheid en de vergelijkbaarheid.

a) Eerste indicatie via schrijfmachine: (zie bijlage 2)

ITER	VARBL. EXIT	VARBL. ENTR	CNT	OBJ. FUNCTION	zie ook:
FEASIBLE					
ØØØ1	MAUG2.	WITA..	ØØØ3	251.999-	(tableau 2)
ØØØ2	MAUG1.	ZOGE..	ØØØ2	419.999-	(" 3)
ØØØ3	GROND.	ZOTA..	ØØØ1	447.ØØØ-	(" 4)
ØØØ4	MSEP1.	MAUG1.	ØØØ1	461.999-	(" 5)
OPTIMUM					

Als eerste gegeven verschijnt via de schrijfmachine een regel met een "tabelkop". De computer test nu eerst of de set vergelijkingen inderdaad oplosbaar is en geeft dan, als dat zo is, het woord "feasible" op de schrijfmachine en pas daarna begint het "zoeken" naar de optimale oplossing.

Per iteratie wordt de stand bijgehouden en in de bovenstaande vijf kolommen verschijnt respectievelijk: een getal dat het nummer van de iteratie weergeeft, een codewoord voor de beperking die uit de basis verdwijnt (v.g.l. spilrij) en een codewoord voor de activiteit die opgenomen wordt (v.g.l. spilkolom). Daarna volgen nog twee getallen, waarvan het eerste getal aangeeft hoeveel niet-positieve getallen er bij het begin van de iteratie in de rendementsrij voorkomen en het laatste getal is de functie-waarde aan het eind van de eerste iteratie. Na 4 iteraties blijkt het optimum (*f* 461.999) te zijn bereikt (v.g.l. de getallen in het voorbeeld van de vorige inleider !!) en door de computer wordt dit kenbaar gemaakt door het uittypen v/h woord: <u>optimum</u>. Hierna verschijnen (afhankelijk van de gebruikte agendakaarten) de feitelijke uitvoertabellen:

b) <u>De output-tabel</u>: (zie bijlage 3)

```
 OUTPUT
 BASIS.               MANTISSA Ø7        TOLERANCES  Ø5   Ø3   Ø3   Ø3   Ø4
VARBLS   TYPE NAME   ACTIVITY LEVEL
            FZOGE..          4.ØØØ
            FWITA..          8.ØØØ
            FZOTA..         18.ØØØ
SLACKS   TYPE NAME   ACTIVITY LEVEL      SIMPLEX MULT.
            FREND..        462.ØØØ-
          +WGROND.                              12.ØØØ
          +FMAUG1.          30.ØØØ
          +WMAUG2.                               2.ØØØ
          +WMSEP1.                                .5ØØ
```

Deze tabel (die door de computer getypt en/of geponst kan worden) levert de gezochte eindoplossing in twee delen: onder het kopje <u>basisvariabelen</u> volgen de namen van de opgenomen activiteiten 4 eenheden zomergerst, 8 eenheden wintertarwe en 18 eenheden zomertarwe. Onder het kopje "slacks" staat op de eerste regel de optimale "winst" en vervolgens de volledige lijst van oorspronkelijke beperkingen (zie begintableau) met <u>hetzij</u> onder de kop "activity level" een getal dat aangeeft de hoogte van de <u>niet</u> benutte hoeveelheid van de betreffende beperking, <u>hetzij</u> onder de kop "simplex multiplier" een getal dat de waarde aangeeft van de winstfunctiestijging indien de betreffende beperking met een eenheid uitgebreid zou worden (vergelijk hoofdstuk 2.4: Interpretatie van de eindoplossing).

Ten overvloede dus:

de getallen van de outputtabel onder de kop <u>simplex mult</u>: 12, 2 en 0,5 vinden we dus terug in de rendementsrij van de <u>eindoplossing</u> van het eerder gegeven voorbeeld. Ook de betekenis ervan is hetzelfde.

c) De check-tabel: (zie bijlage 4)

CHECK.	ROW NAME	UPPER LIMIT	SOL.VALUE	LOWER LIMIT	ROW ERROR
	REND..		462.ØØØ-	.ØØØ	.ØØØØØØØØ
	GROND.	3Ø.ØØØ	3Ø.ØØØ		.ØØØØØØØØ
	MAUG1.	42.ØØØ	12.ØØØ		.ØØØØ2ØØØ
	MAUG2.	42.ØØØ	42.ØØØ		.ØØØØ1ØØØ-
	MSEP1.	36.ØØØ	36.ØØØ		.ØØØØ4ØØØ
* MAX ERROR =		.ØØØØ4ØØØ			

Deze tabel is alleen voor nadere controle op de elders verstrekte gegevens en als voornaamste aanduiding wordt de "row error" gegeven. De maximale fout mag niet boven bepaalde grenzen uitkomen (hierop wordt door het computer-programma getest, dus overschrijding van de foutgrens zal niet voorkomen). Als we kijken naar de regel maug 1, dan is de bovengrens 42; (= het oorspronkelijke aantal beschikbare uren volgens begintableau) de oplossingswaarde = 12. Van elkaar afgetrokken is dit 42 - 12 = 30. De waarde 30 is dus de niet benutte hoeveelheid uren, die ook voorkomt bij de slacks van de outputtabel (zie aldaar), eveneens op de regel maug 1.

Het zal lang niet altijd noodzakelijk zijn om de check-tabel te bezitten en dit kan eenvoudig bereikt worden door de betreffende agenda-kaart niet te gebruiken.

d) De DO.D/J -tabel: (zie bijlage 5)

DO.D/J
NOISE DIGIT Ø
MANTISSA LENGTH Ø7
SUBR SET Ø2

VBLS	TYPE NAME	CURRENT COST	REDUCED COST	BASIS VALUE
ROWS	TYPE NAME	INCR B VALUE	DECR B VALUE	
	+GROND.	12.ØØØ	....	
	+MAUG1.	...	....	
	+MAUG2.	2.ØØØ	....	
	+MSEP1.	.5ØØ	....	

Deze tabel bestaat in feite ook uit twee delen (zie ook de outputtabel). Onder het kopje "VBLS" "TYPE" "NAME" enz. staan normaliter de namen van niet in de eindoplossing opgenomen activiteiten (in ons voorbeeld zijn de activiteiten zomergerst, zomertarwe en wintertarwe echter allemaal in de eindoplossing opgenomen, dus komt in de tabel DO.D/J op deze plaats niets voor).

Indien er wel een activiteit gestaan zou hebben, dan verschijnt er onder het woord CURRENT COST een waarde, die gelijk is aan de waarde van die activiteit in het begintableau (rendementsrij). REDUCED COST geeft een getal dat weergeeft hoeveel de activiteit in waarde moet"stijgen" (dalen) om wel in de eindoplossing te worden opgenomen. Tot welke waarde de "stijging" (daling) dan moet plaatsvinden wordt weergegeven onder BASIS VALUE, m.a.w.: current cost - reduced cost = basis value.

Het tweede tabelgedeelte vinden we onder het kopje: "ROWS" "TYPE" "NAME" enz. Onder het woord NAME verschijnt de volledige lijst met RIJNAMEN (zoals die voorkomen in het begintableau). Daarachter verschijnen twee kolommen met gegevens resperctievelijk aangevende de grootte v/d stijging of daling van de functiewaarde bij uitbreiding van de genoemde beperking met 1 eenheid. In ons voorbeeld staan onder "INCR B-VALUE" de getallen 12.0, 2.0 en 0.5 en we herkennen hierin dezelfde gegevens als onder het hoofd "simplex multiplier" van de outputtabel (zie aldaar). De feitelijke betekenis is dan ook dezelfde. De regel M aug 1 vertoont geen waardedaling of -stijging: dat klopt immers want er waren maaidorsuren over en de grond volledig benut: dus stijging of daling met een maaidorsuur in aug 1 heeft geen enkel effect.

e) De cost-range tabel (zie bijlage 6)

```
COST.R
NOISE DIGIT Ø
MANTISSA LENGTH Ø7
SUBR SET Ø2
COST.R NAME   CURRENT COST   HIGHEST COST   HI-VAR   LO-VAR   LOWEST COST
    ZOGE..          12.ØØØ           .ØØØ   GROND.   MSEP1.        13.5ØØ
    WITA..          18.ØØØ         12.ØØØ   MAUG2    MSEP1.        21.ØØØ
    ZOTA..          15.ØØØ         14.ØØØ                        INFINITY
ENDJOB
END OF JOB
```

Als laatste tabel de COST.R-TABEL, die achter de namen van de activiteiten (in ons voorbeeld, zomergerst, wintergerst en zomertarwe) allereerst in de kolom current cost een opsomming geeft van de waarde zoals we die vinden in de rendementsrij van het begintableau (zie aldaar). De kolommen highest cost en lowest cost geven, na optimalisering, aan wat de hoogste respectievelijk laagste waarde is die de activiteit mag aannemen om toch nog tot het huidige niveau in de eindoplossing opgenomen te blijven.

Dit gegeven verteld ons dus in de eerste plaats hoe gevoelig de gevonden oplossing is voor veranderingen. (Stel nl. dat de opbrengst van 1 ha bieten 1800 gulden zou zijn en een programmering geeft aan: 20 ha bieten telen. Een tweede plan stelt 1805 gulden opbrengst per ha en we vinden dan: 40 ha bieten telen. Een dergelijke labiele situatie zou de waarde van een oplossing sterk nadelig beïnvloeden !) De kolommen HI-VAR en LO-VAR geven tenslotte nog aan welke variabele of activiteit (althans gedeeltelijk) in de plaats zal treden van de activiteit die de genoemde boven- of benedengrens overschrijdt.

Tot slot zij opgemerkt, dat de bovengenoemde tabellen dus voor zover nodig opgeleverd kunnen worden. Is de betreffende agenda-kaart niet aanwezig, dan wordt ook de tabel niet gegeven. Men is dus vrij in de keuze van wat nodig geacht wordt.

3.9 Bijlagen 1 t/m 6

Totaal overzicht van gebruikte invoerkaarten en door computer opgeleverde tabellen.

```
INPUT.CO2000.PLANA                                  TESTVOORBEELD LP 1620
ROW.ID
           REND..
          +GROND.
          +MAUG1.
          +MAUG2.
          +MSEP1.
COL.ID
           ZOGE..
           WITA..
           ZOTA..
MATRIX
     ZOGE..REND..    12.
     ZOGE..GROND.     1.
     ZOGE..MAUG1.     3.
     WITA..REND..    18.
     WITA..GROND.     1.
     WITA..MAUG2.     3.
     ZOTA..REND..    15.
     ZOTA..GROND.     1.
     ZOTA..MAUG2.     1.
     ZOTA..MSEP1.     2.
FIRST.BPLAN1
           GROND.    30.
           MAUG1.    42.
           MAUG2.    42.
           MSEP1.    36.
ENDATA
```

UITVOERGEGEVENS

(BIJLAGE 2)

```
‡‡JOB

‡‡XEQ LP1620                 03
EXECUTION

NOISE DIGIT 0
MANTISSA LENGTH 08
SUBR SET 02
UPPER LIMIT DIM = 07999
LP1620-1621
INPUT.C0200.PLANA                                   TESTVOORBEELD LP 1620
INPUT.
ROW.ID
COL.ID
MATRIX
FIRSTB
ASSIGN         1
MAX....PLAN1REND..
LP1621 TO INVERT

NOISE DIGIT 0
MANTISSA LENGTH 07
SUBR SET 02
LP1621 TO DUAL
NOISE DIGIT 0
MANTISSA LENGTH 07
SUBR SET 02
 ITER  VARBL. EXIT  VARBL. ENTR  CNT  OBJ. FUNCTION
FEASIBLE
 0001  MAUG2.       WITA..       0003     251.999
 0002  MAUG1.       ZOGE..       0002     419.999
 0003  GROND.       ZOTA..       0001     447.000
 0004  MSEP1.       MAUG1.       0001     461.999
```

```
OPTIMUM                                                                      (BIJLAGE 3)
OUTPUT
NOISE DIGIT Ø
MANTISSA LENGTH Ø7
SUBR SET Ø2
OUTPUT
BASIS.                  MANTISSA Ø7    TOLERANCES  Ø5 Ø3 Ø3 Ø3 Ø4
VARBLS  TYPE  NAME ACTIVITY LEVEL
           FZOGE..        4.ØØØ
           FWITA..        8.ØØØ
           FZOTA..       18.ØØØ
SLACKS  TYPE  NAME ACTIVITY LEVEL  SIMPLEX MULT.
           FREND..      462.ØØØ
          +WGROND.                         12.ØØØ
          +FMAUG1.       3Ø.ØØØ
          +WMAUG2.                          2.ØØØ
          +WMSEP1.                           .5ØØ
CHECK.                                                                       (BIJLAGE 4)
NOISE DIGIT Ø
MANTISSA LENGTH Ø7
SUBR SET Ø2
CHECK.   ROW  NAME   UPPER LIMIT    SOL. VALUE   LOWER LIMIT     ROW ERROR
            REND..                   462.ØØØ           .ØØØ     .ØØØØØØØØØ
            GROND.       3Ø.ØØØ       3Ø.ØØØ                    .ØØØØØØØØØ
            MAUG1.       42.ØØØ       12.ØØØ                    .ØØØØ2ØØØ
            MAUG2.       42.ØØØ       42.ØØØ                    .ØØØØ1ØØØ-
            MSEP1.       36.ØØØ       36.ØØØ                    .ØØØØ4ØØØ
* MAX ERROR =         .ØØØØ4ØØØ
DO.D/J            3                                                          (BIJLAGE 5)
NOISE DIGIT Ø
MANTISSA LENGTH Ø7
SUBR SET Ø2
 VBLS    TYPE  NAME  CURRENT COST  REDUCED COST   BASIS VALUE
 ROWS    TYPE  NAME  INCR B VALUE  DECR B VALUE
           +GROND.       12.ØØØ
           +MAUG1.
           +MAUG2.        2.ØØØ
           +MSEP1.         .5ØØ
COST.R                                                                       (BIJLAGE 6)
NOISE DIGIT Ø
MANTISSA LENGTH Ø7
SUBR SET Ø2
COST.R  NAME    CURRENT COST    HIGHEST COST  HI-VAR   LO-VAR   LOWEST COST
      ZOGE..          12.ØØØ            .ØØØ  GROND.   MSEP1.        13.5ØØ
      WITA..          18.ØØØ          12.ØØØ  MAUG2.   MSEP1.        21.ØØØ
      ZOTA..          15.ØØØ          14.ØØØ  MSEP1.               INFINITY
ENDJOB
END OF JOB
```