

Enige aspecten van het discretiseren van randvoorwaarden in een elektrisch analogon voor grondwaterstroming

1. Inleiding

Voor de oplossing van tweedimensionale grondwaterstromingsproblemen kan gebruik worden gemaakt van een elektrisch analogon. De toepassing van een dergelijk analogon berust enerzijds op de analogie van de wet van Darcy voor de grondwaterstroming met de wet van Ohm voor de stroming van elektriciteit door een vlakke geleider, en anderzijds op de gelijkwaardigheid van de continuïteits-vergelijking voor beide verschijnselen (behoud van waterdeeltjes in de grondwaterstroming en behoud van elektronen in de elektrodynamica). In tabel I zijn de met elkaar overeenkomende grootheden weergegeven. De elektrische potentiaal V komt overeen met de grondwaterstijghoogte Φ , de elektrische stroomvector i met de specifieke debiet-vector q en de elektrische geleidbaarheid $1/\rho$ met de doorlatendheid κ (ρ is de specifieke weerstand van de geleider). Bij de toepassing van een elektrisch analogon, waarbij bijvoorbeeld gebruikt kan worden van geleidend papier (Teledeltos papier), dienen de randvoorwaarden in het model in overeenstemming met de randvoorwaarden van het grondwaterprobleem gekozen te worden. De veel voorkomende gevallen van een rand, die in het grondwaterprobleem een potentiaallijn respectievelijk een stroomlijn moet zijn, kunnen worden nagebootst door een elektrische potentiaallijn respectievelijk stroomlijn. Een elektrische potentiaallijn kan worden verkregen met behulp van een plaatselijk sterke verhoging van de geleidbaarheid (bv. met zilververf) waar ter plaatse een elektrische potentiaal wordt opgelegd. Een voorgeschreven stroomlijn kan eenvoudig worden verkregen door het papier volgens de vorm van de rand af te knippen.

Iets moeilijker voor de uitvoering in een analogon zijn de randvoorwaarden: een vrij oppervlak en een kwelijn van het grondwaterprobleem. Langs een vrij oppervlak, dat in het geval van stationaire stroming weliswaar een stroomlijn is, doch waarvan de positie niet bekend is, dient de stijghoogte gelijk te zijn aan de plaatshoogte. De gebruikelijke manier om de plaats van het vrij oppervlak te bepalen is een positie te schatten, het papier volgens de geschatte lijn af te knippen en dan na te gaan of daarlangs de elektrische potentiaal inderdaad ge-

TABEL I

Grondwater	Elektriciteit
Wet van Darcy: $q = -\kappa \nabla \Phi$	Wet van Ohm: $i = 1/\rho \nabla V$
q filtersnelheid (cm/sec.)	i stroomdichtheid (Ampère/cm ²)
κ doorlatendheidscoëfficiënt (cm/sec.)	ρ specifieke weerstand (Ohm cm)
Φ stijghoogte (cm)	V potentiaal (Volt)

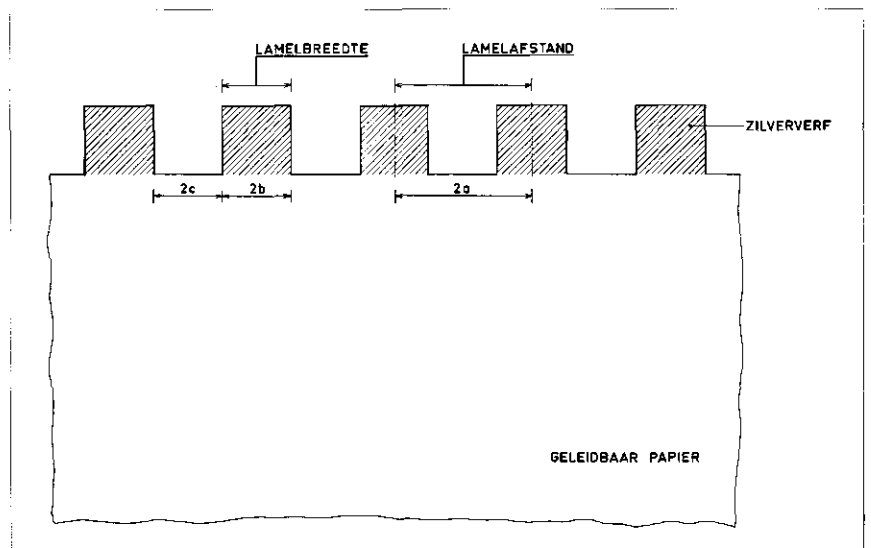
lijk is aan de plaatshoogte. Is dit niet het geval, dan dient een nieuwe positie van het vrije oppervlak aangenomen te worden (etc.). Langs een kwelijn, waar het grondwater uit de grond treedt, is eveneens de stijghoogte gelijk aan de plaatshoogte. De plaats van de kwelijn is bekend, en langs de ermee overeenkomende rand in het elektrische analogon dient dus een potentiaal te worden opgelegd gelijk aan de plaatshoogte. Aangezien deze plaatshoogte in het algemeen niet constant is, (een kwelijn treedt bv. op aan de benedenstroomse zijde van een dijktafsluiting) moet een verloopende potentiaal worden opgelegd. Een gebruikelijke manier om dit te verwezenlijken is om de rand van het model ter plaatse van de kwelijn te voorzien van een aantal sterk geleidende uitsteeksels (lamellen) en op elke lamel een bepaalde potentiaal op te leggen, overeenkomend met de plaatshoogte in het midden van de lamel ter plaatse van de rand. De randvoorwaarde wordt aldus benaderd opgelegd. Het is duidelijk dat de benadering beter wordt naarmate men meer (en aldus kleinere) lamellen kiest, doch

de uitvoerbaarheid zal het aantal lamellen beperken.

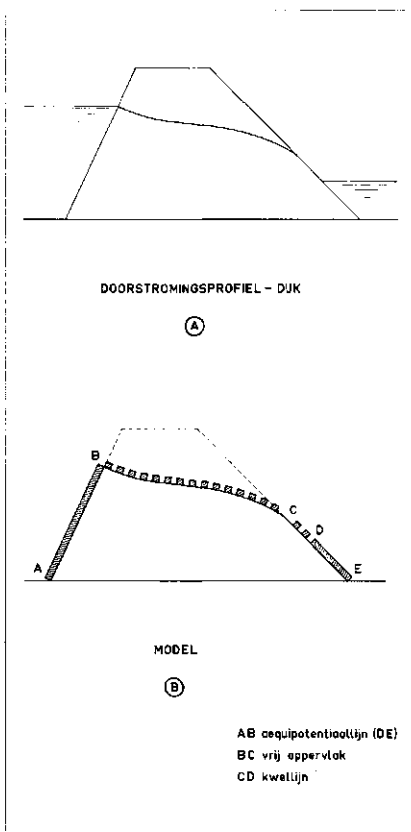
Bij de toepassing van boven genoemde lamellen rijst nog de vraag hoe men de verhouding van de breedte van de lamellen ten opzichte van hun onderlinge afstand moet kiezen. In dit artikel zal worden aangetoond dat het, om bepaalde nog aan te geven redenen, het beste is de verhouding lamelbreedte/lamelafstand gelijk van 1/2 te kiezen. Onder de lamelafstand wordt dan verstaan de h.o.h. afstand der lamellen (zie afb. 1). Voor het bewijs van deze stelling zal een tamelijk gecompliceerde wiskundige berekening te hulp worden geroepen. Echter zal tevens aangetoond worden dat de conclusie dat de gunstigste verhouding 1:2 is ook op eenvoudige wijze direct kan worden verkregen.

Opgemerkt moge nog worden dat de lamellen ook toegepast worden bij het nabootsen van een vrij oppervlak in het geval van tijdsafhankelijke stroming (bv. tengevolge van een getijbeweging). In dit geval wordt de vaste rand van het elektrische model gelegd op de phreatische middenstandslinje en de berging

Afb. 1



*) De schrijver is prof dr. ir. G. de Josselin de Jong en ir. A. Verruijt veel dank verschuldigd voor het tot stand komen van dit artikel.



Afb. 2

wordt gesimuleerd met behulp van condensatoren die op de lamellen aan de rand zijn aangesloten (Bisschoff van Heemskerck, 1961). Ook voor dit geval is de hier te geven oplossing voor het probleem van de verhouding lamelbreedte/lamelafstand van toepassing (zie afb. 2).

2. Probleemstelling

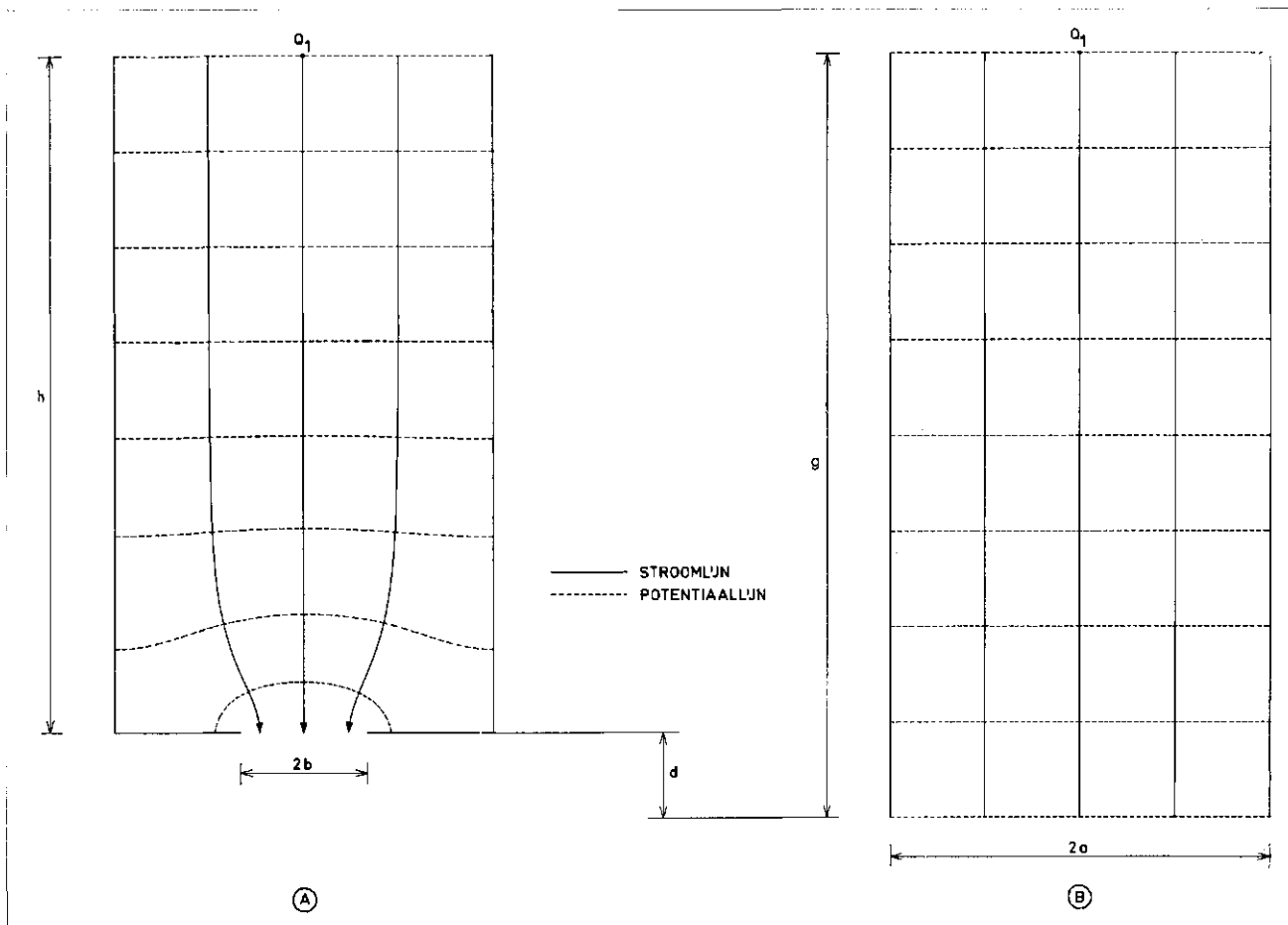
Het benaderen van de randvoorwaarde, zoals in paragraaf 1 uiteengezet, heeft een belangrijk gevolg. Men beschouwe afb. 3. Vergeleken worden de stromingen in twee halfoneindige strippen ter breedte $2a$. In het ene geval, afb. 3A, is de uitstroombreedte $2b$ en in het andere geval, afb. 3B, is de uitstroombreedte $2a$ ($b < a$). Ter plaatse van Q_1 wordt de potentiaal voor beide gevallen gelijk verondersteld. Bovendien veronderstellen we, dat het produkt van de snelheid en de uitstroombreedte voor beide gevallen gelijk is. Uit deze laatste veronderstelling volgt, dat in het geval van afb. 2A de snelheid groter is dan in het geval van afb. 2B. Dit laatste betekent dat het verhang in het geval van afb. 3A groter moet zijn dan het verhang in afb. 3B. Dit is, met de veronderstelling dat t.p.v. Q_1 de potentiaal voor beide gevallen dezelfde is, alleen mogelijk indien de afstand g groter is dan h .

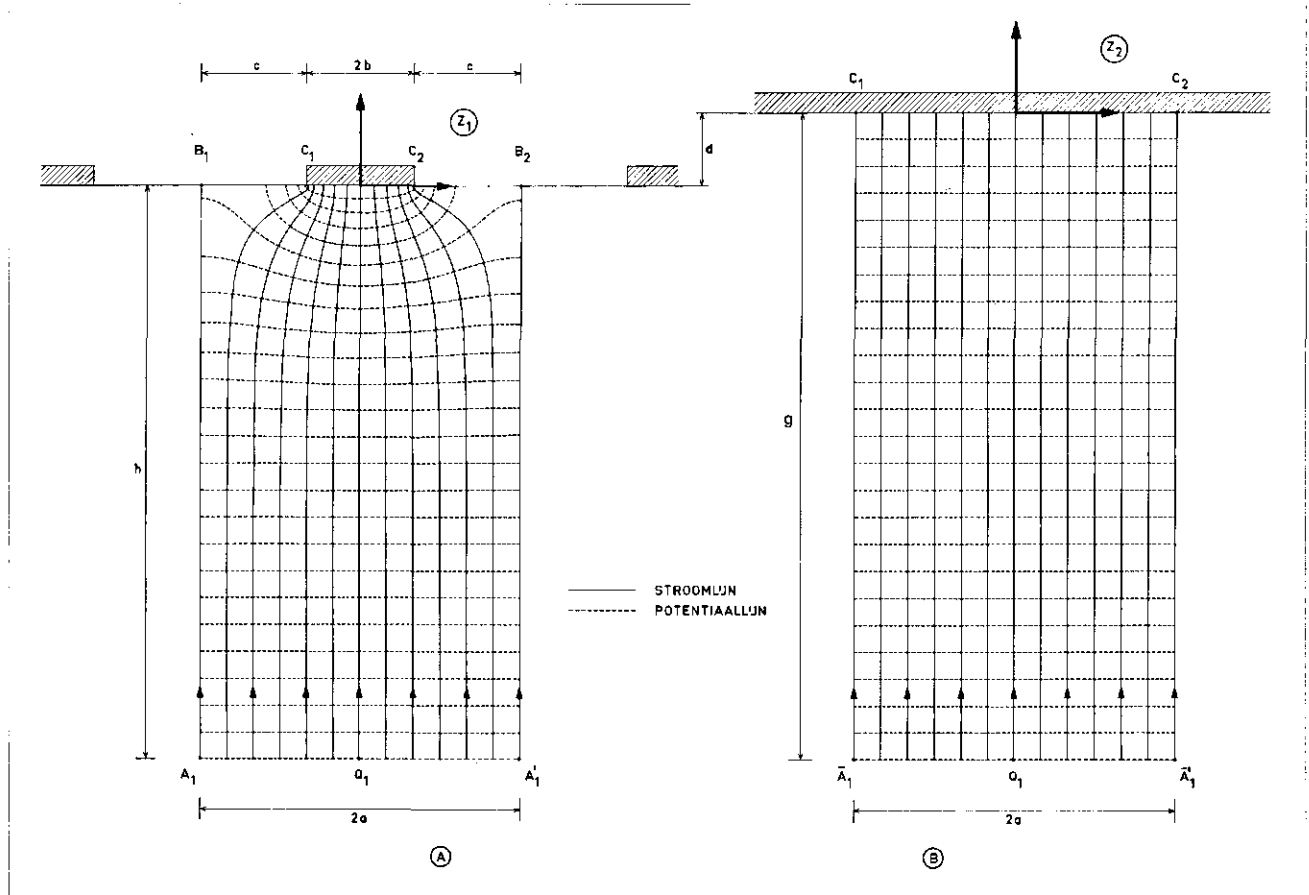
Een vernauwing van het uitstroomoppervlak ($2b$ i.p.v. $2a$), waardoor de stroomlijnen worden samengetrokken, heeft dus een verschuiving van de rand ($g-h$) ten opzichte van een vast punt Q_1 tot gevolg. Het punt Q_1 is hierbij de plaats waar de potentialen voor beide gevallen gelijk zijn. Deze verschuiving van de rand is door A. Verruijt de equivalente lengte van de vernauwing genoemd.

Bij het benaderen van de randvoorwaarden in een analogon worden ter plaatse van de rand de stroomlijnen samengetrokken, zoals nog nader uiteengezet zal worden. Er doet zich dan een zelfde situatie voor als in het gegeven voorbeeld: de potentiaalverdeling in het model komt overeen met die in een equivalent grondmassief, waarvan de rand buiten de rand van het model ligt. De grootte van de verschuiving van de rand, de equivalente lengte van de vernauwing, blijkt afhankelijk te zijn van de verhouding tussen lamelbreedte en lamelafstand enerzijds, en anderzijds de hoek waaronder de stroomlijnen de rand snijden.

De gedachte dat bij gebruik van lamellen de rand van het model is verschoven ten opzichte van de rand van het equivalente grondmassief is afkomstig van De Josselin de Jong. Hij heeft deze verschuiving van de rand tevens berekend

Afb. 3





Afb. 4

voor de gevallen van stroom evenwijdig en loodrecht op de rand.

Onder leiding van E. A. Bosman zijn bij de Rijkswaterstaat modelproeven uitgevoerd. Het betrof hier gevallen waarin de stroom alleen evenwijdig aan de rand was. Hierbij werd o.a. vastgesteld, dat de plaats van de eerste gediscretiseerde lamel van zeer grote invloed is op de verandering van de weerstand in het model. Het een en ander geschiedde naar aanleiding van een opmerking hierover van Huard de la Marre.

M. J. Mes heeft de berekeningen van De Josselin de Jong uitgewerkt en verifieerde de resultaten hiervan met modelproeven voor de gevallen van stroom evenwijdig aan en loodrecht op de rand. Tevens constateerde Mes dat in het geval van niet stationaire stroming bij het gebruik van gediscretiseerde lamel-randen de demping en naïjling kleiner is dan in werkelijkheid het geval is.

In dit artikel zal de berekening van de verschuiving van de rand worden weergegeven. Bovendien zal worden aangetoond dat men zonder enige berekening van de verhouding lamel-breedte-lamelafstand kan vaststellen hoe de verhouding lamelbreedte-lamelafstand moet zijn opdat de verschuiving van de rand onafhankelijk is van de richting van de stroomlijnen met de rand.

De lezer kan de van een kantlijn voorziene regels in eerste instantie overslaan.

3. Berekening van de plaats van de rand van het equivalente grondmassief

De onderstaande berekeningen gelden voor rechte randen. De resultaten zijn voor flauw gebogen randen als benadering zeer aanvaardbaar. Tevens wordt verondersteld dat het stroomprofiel voldoende groot is, opdat op enige afstand van de rand met benaderde randvoorwaarden, de invloed van het benaderen niet meer waar te nemen is. De berekening is exact voor halfoneindige vlakken.

a. stroom gericht volgens normaal op de rand.

In afb. 4 wordt stroom in het model (A) vergeleken met die in het equivalente massief (B). Hierbij wordt een strook ter breedte van $2a$ beschouwd. Deze strook herhaalt zich telkens. In de strook is over een breedte $2b$ een lamel aangebracht. De invloed van de storing aan de rand wordt verondersteld ter plaatse van A_1A_1' niet meer waar te nemen te zijn.

De verschuiving van de rand, de equivalente lengte van de vernauwing, is gelijk d .

Met behulp van een complexe rekenwijze is het Z_1 vlak conform af te beelden op het Z_2 vlak. De hierbij behorende transformatie formule is:

$$\sin(\pi Z_1/2a) = \sin(\pi b/2a) \cdot \sin(\pi Z_2/2a) \quad (1)$$

Deze formule laat zich verifiëren door bv. controle van het punt C_2 . Voor het punt C_2 geldt in Z_1 : $Z_1(C_2) = b$ en in Z_2 : $Z_2(C_2) = a$.

Stel nu dat ter plaatse van de lijnen A_1A_1' de potentialen in beide gevallen gelijk zijn, d.w.z. dat daar de invloed van de vernauwing niet meer merkbaar is. Het punt Q_1 is in het Z_1 vlak op een afstand h en in het Z_2 vlak op een afstand g van de rand gelegen.

Voor het punt Q_1 geldt:

$$\sin(-i\pi h/2a) = \sin(\pi b/2a) \sin(-i\pi g/2a) \quad (2)$$

of

$$\frac{[\exp(\pi h/2a) - \exp(-\pi h/2a)]/2i}{\sin(\pi b/2a)} = \frac{[\exp(\pi g/2a) - \exp(-\pi g/2a)]/2i}{\sin(\pi b/2a)} \quad (3)$$

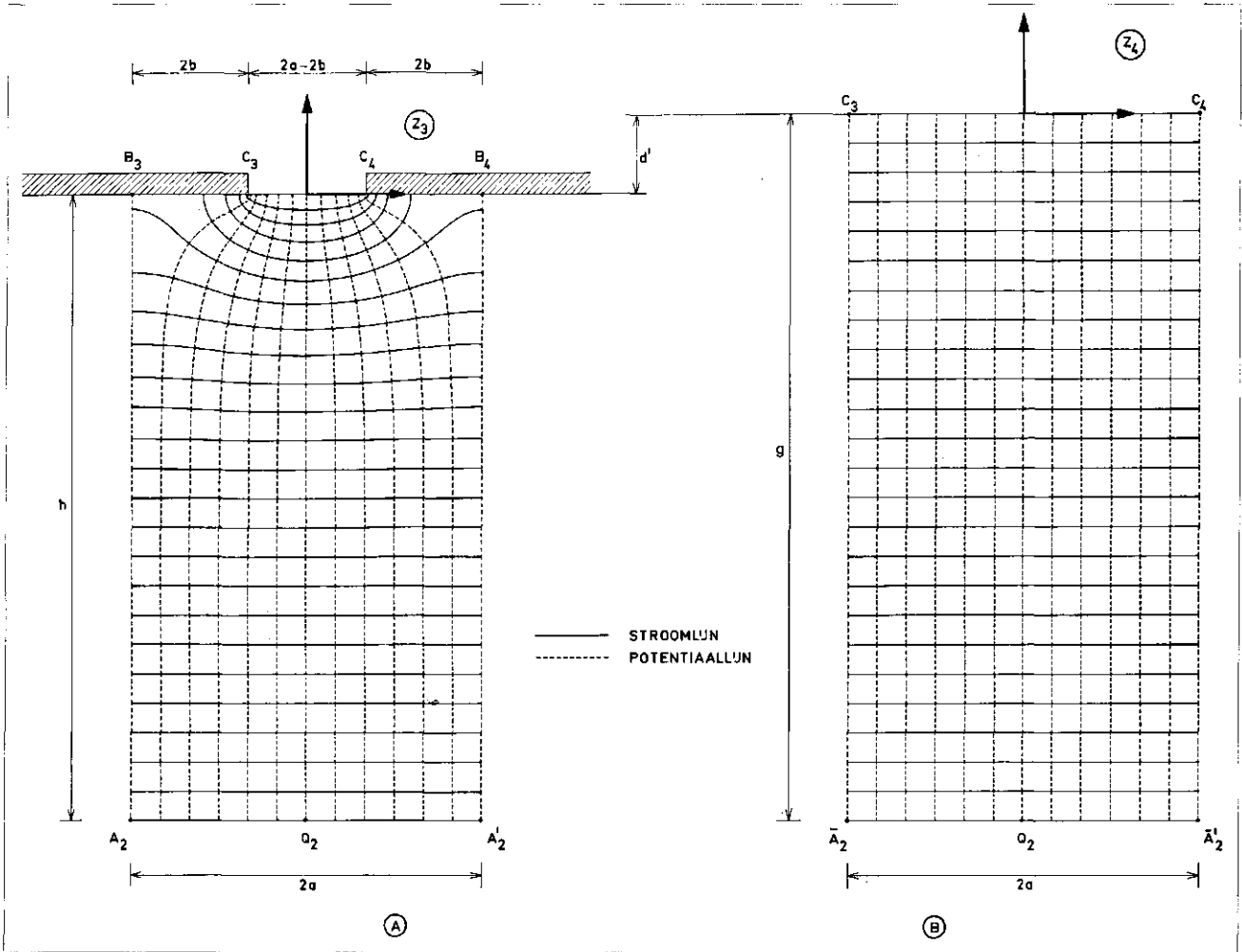
Voor g en h voldoende groot is vgl. 2 als benadering te vervangen door:

$$\exp(\pi h/2a) \approx \sin(\pi b/2a) \exp(\pi g/2a) \quad \text{of met } g - h = d: \\ \exp(-\pi d/2a) = \sin(\pi b/2a) \quad (4)$$

Hieruit volgt dat de equivalente lengte van de vernauwing gelijk is aan:

$$d = - (2a/\pi) \ln(\sin(\pi b/2a)) \quad (5)$$

Daar $\sin(\pi b/2a) < 1$ en de natuurlijke logaritme van een getal kleiner dan 1



Afb. 5

negatief is, is d positief. Dit is in overeenstemming met het gestelde in paragraaf 2.

We hebben dus nu de verschuiving van de rand gevonden als functie van de parameters a en b in het geval van stroomlijnen gericht volgens de normaal op de rand.

b. Stroom evenwijdig aan de rand.

In afb. 5 wordt de stroom in het model (5A) vergeleken met die in het equivalente massief. Ook in dit geval is de strookbreedte $2a$. Verder gelden dezelfde veronderstellingen als in het vorige geval.

De transformatieformule, welke de conforme afbeelding van Z_3 op Z_4 weer geeft, is in dit geval:

$$\sin(\pi Z_3/2a) = \sin(\pi(a-b)/2a) \sin(\pi Z_4/2a) \quad (6)$$

Voor het punt C_4 geldt in $Z_3:Z_3(C_4) = a-b$ en in $Z_4:Z_4(C_4) = a$ zodat aan vlg. 6 identiek wordt voldaan.

Op eenzelfde wijze als in het vorige geval voor Q_1 is nu voor het punt Q_2 af te leiden:

$$\exp(\pi h/2a) \approx \sin(\pi(a-b)) \exp(\pi g/2a) \quad (7)$$

Stel verder:

$$g - h = d' \quad (8)$$

Hieruit volgt dat de verschuiving d' van de rand gelijk is aan:

$$d' = -(2a/\pi) \ln(\sin(\pi(a-b)/2a)) \quad (9)$$

Ook in dit geval is de verschuiving van de rand positief. Immers door samentrekking der equipotentiallijnen wordt het verhang groter, dus het debiet per lengte-eenheid snelheid groter. Het produkt der doorsnede en de snelheid is in beide gevallen echter gelijk. Dit laatste is dan alleen mogelijk als $g > h$.

We hebben dus verschuiving van de rand als functie van de parameters a en b bepaald.

4. Het algemeen geval

Zoals in de vorige paragraaf is aange- toond, geldt voor de verschuiving van de rand in het geval van loodrecht op de rand gerichte stroming respectievelijk evenwijdig aan de rand gerichte stroming:

$$d = -(2a/\pi) \ln(\sin(\pi b/2a)) \quad (10)$$

$$d' = -(2a/\pi) \ln(\sin(\pi(a-b)/2a)) \quad (11)$$

In het geval dat geldt:

$$\begin{aligned} a - b &= b \text{ of} \\ a &= 2b \end{aligned} \quad (13)$$

is de verschuiving van de rand voor de stroom evenwijdig eraan gelijk aan de verschuiving, die ontstaat voor stroom loodrecht erop. Kiest men dus de breedte van de lamellen ($2b$) gelijk aan de afstand ($2a-2b$) ertussen, dan is de equivalente lengte van de vernauwing in de gevallen van stroom evenwijdig en loodrecht op de rand, gelijk.

Dat laatste kan ook direct worden ingezien, zonder berekeningen van de equivalente lengte en equivalente breedte. Het is bekend uit de berekeningen van stroom- en potentiaallijnen, dat verwisseling van stroom- en potentiaallijnen niet van invloed is op de wiskundige behandeling van het probleem. De stroomlijnen worden dan lijnen met gelijke potentiaal, terwijl de potentiaallijnen de stroomlijnen gaan vormen. Past men deze verwisseling toe in afb. 4A, dan ontstaat afb. 5A, indien geldt $a = 2b$. Op deze wijze is dus eenvoudig aange- toond, dat bij keuze van $a = 2b$ de verschuiving van de rand voor de twee onderling loodrechte stromingsgevallen gelijk is.

Indien het stromingsveld bron- en wervelvrij is, voldoet de potentiaal functie Φ aan de vergelijking van Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (14)$$

Stel dat Φ het reële deel is van de complexe potentiaal, met

$$\omega = \Phi + i\Psi \quad (15)$$

waarbij de functie Ψ op een imaginaire constante na bepaald wordt door de vergelijkingen van Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (16)$$

met $Z = x + iy$ als plaats-coördinaat. Deze functie Ψ heet de stroomfunctie en is langs de stroomlijnen constant. Uit vgl. 16 volgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

Vervang nu in deze laatste vergelijking Φ door $-\Psi$ en Ψ door Φ dan blijft aan vergelijking 16 en 17 voldaan.

Een Neuman probleem voor de potentiaal functie Φ is dus te vervangen door een Dirichlet probleem voor de stroomfunctie Ψ .

Opgemerkt wordt, dat bij de bepaling van de equivalente lengte zowel in het geval van stroom evenwijdig aan als stroom loodrecht op de rand er verondersteld is, dat de rand recht is en het stroombeeld zich periodiek ten aanzien van de plaats herhaalt. Deze laatste aanname brengt bv. in het geval van stroom loodrecht op de rand met zich mede dat het potentiaal verschil voor een strook ter breedte $2a$ voor iedere strook ter breedte $2a$ hetzelfde is. Er wordt dan ten aanzien van de potentiaal langs de lijnen B_3A_2 en $B_4A_2^1$ in afb. 5a of langs de lijnen C_3A_2 en $C_4A_2^1$ in afb. 5b een voorwaarde opgelegd. Hierdoor wordt het randvoorwaarden-probleem voor het gehele halfvlak teruggebracht tot dat van een strook ter breedte $2a$ en hiermede is de berekening van de equivalente lengte aanzienlijk vereenvoudigd.

In het geval van flauw gebogen randen is de aanname van periodiciteitsverschil niet juist, doch als benadering zeer aanvaardbaar.

Literatuur

1. Huard de la Marrer, *Résolution de Problèmes d'Infiltrations A Surface Libre au Moyen d'Analogies Electriques*. Publications Scientifiques et techniques du Ministère de L'Air, 1958.
2. Bischoff van Heemskerck, W. C., *Waterspanningen onder de asphaltbekleding van dijken*. Uitgave van de Vereniging voor Bitumineuze Werken BVV, 1962.

In het geval van stroming onder een willekeurige hoek met de rand, wordt de situatie nog iets gecompliceerder. In de potentiaaltheorie is het beginsel van superpositie geoorloofd, zij het onder bepaalde voorwaarden ten aanzien van de randvoorwaarden. Gaat men echter van het beginsel uit, dan is het zeer aangenaam, dat ook in het geval van stroming onder een willekeurige hoek met de rand, bij keuze van $b = 2a$, de equivalente lengte dezelfde is, als in de gevallen van stroom loodrecht op en stroom evenwijdig aan de rand.

Conclusie: Indien de verhouding tussen breedte en hart op hart afstand van twee op een volgende lamellen 1 en 2 gekozen wordt, dan is de hierbij behorende verschuiving van de rand van het equivalente grondmassief bij zeer goede benadering onafhankelijk van de richting van de stroom met de rand en is deze verschuiving d gelijk aan:

$$d = -(2a/\pi) \ln(\sin(\pi/4)) \text{ of } d = 0,222a$$