

Winning van grondwater uit een pakket, bestaande uit twee watervoerende lagen gescheiden door een minder doorlatende laag

Inleiding

Bij de kunstmatige infiltratie van rivierwater in de duinen wordt onder normale omstandigheden in de kanalen een constant peil gehandhaafd. In geval van calamiteiten (onbruikbaar rivierwater, bv. door verontreinigingen; stagnatie in de aanvoer door buisbreuk e.d.) wordt water onttrokken aan de voorraad, die zich in de kanalen bevindt. Hierdoor treedt in die kanalen een spiegeldaling op. Ook in het aangrenzende grondpakket zal de waterstand dan dalen.

In 1947 promoveerde Edelman op een dissertatie [1], waarin hij onder meer formules afleidde voor de niet-stationaire onttrekking van grondwater door middel van kanalen. Hij ging hierbij uit van één enkele watervoerende laag met een vrije grondwaterspiegel en een ondoorlatende basis (afb. 1).

De formules zijn ontwikkeld voor vier gevallen, te weten (afb. 2):

- een plotselinge spiegeldaling in het kanaal ten tijde $t = 0$, waarna deze spiegel constant wordt gehouden ($n = 0$);
- de waterstand in het kanaal wordt zodanig verlaagd, dat de hoeveelheid water die aan het grondpakket wordt onttrokken constant in de tijd is ($n = 1$);
- de waterstand in het kanaal wordt recht evenredig met de tijd verlaagd ($n = 2$);
- het kanaalpeil wordt zodanig verlaagd, dat de hoeveelheid water die aan het grondpakket wordt onttrokken recht evenredig met de tijd toeneemt ($n = 3$).

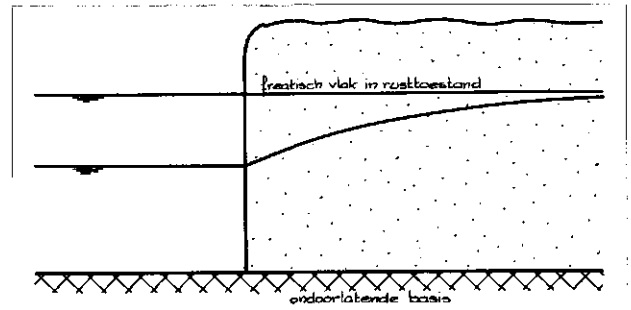
Omdat de differentiaalvergelijking die alle bovengenoemde situaties beschrijft, lineair is, mogen de gevallen onderling worden gesuperponeerd, waardoor een heel scala van mogelijkheden ontstaat.

In het volgende wordt een oplossing uitgewerkt voor het geval genoemd onder a ($n = 0$) in een tweelagensysteem (afb. 3). Daarna zal aan de hand van een rekenvoorbeeld worden nagegaan of de invloed van de tweede watervoerende laag zodanig is dat het zinvol is om er rekening mee te gaan houden.

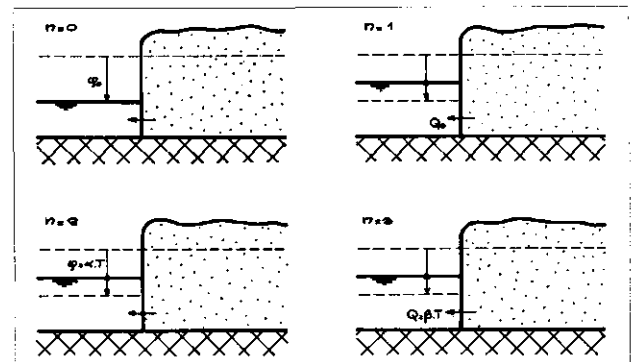
Beschrijving van het geschematiseerde profiel

Het geschematiseerde profiel (afb. 3) bestaat uit 4 lagen, te weten van boven naar beneden:

- laag I: een watervoerend pakket met een doorlatendheidscoëfficiënt k_1 . De (vrije) grondwaterspiegel in dit pakket wordt in rusttoestand gesteld op $\Phi = 0$. De onderkant van de laag bevindt zich op een diepte H_1 onder dit vlak.
- laag II: een minder doorlatende laag met een weerstand c tegen verticale doorstroming. Deze weerstand is:

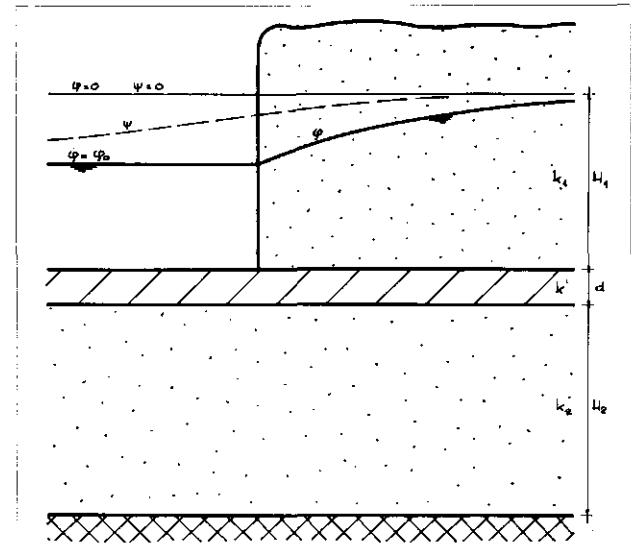


Afb. 1 - Geschematiseerd profiel volgens Edelman.



Afb. 2 - Randvoorwaarden aan het kanaal volgens Edelman.

Afb. 3 - Geschematiseerd profiel met twee watervoerende lagen.



$$c = \frac{d}{k'}$$

waarin:

d = de dikte van de laag;

k' = de doorlatendheidscoëfficiënt in verticale richting van deze laag.

c. laag III: een watervoerend pakket met een doorheidscoëfficiënt k_2 . In deze laag bevindt zich spanningswater, waarvan de stijghoogte in de rusttoestand is gesteld op $\psi = 0$. De dikte van laag III is H_2 genoemd.

De vlakken $\Phi = 0$ en $\psi = 0$ vallen per definitie samen (rust).

d. laag IV: de ondoorlatende basis.

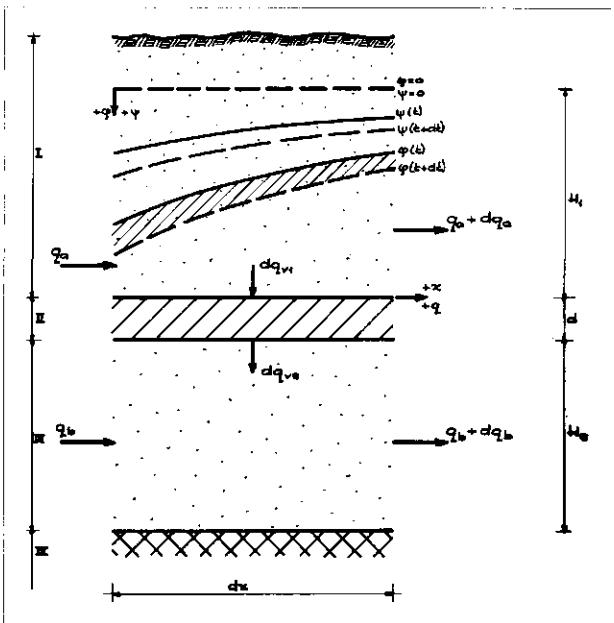
De 4 lagen zijn verder alle homogeen en isotroop verondersteld. In laag I is de aanwezigheid van een kanaal verondersteld, waarvan de bodem samenvalt met de bovenkant van laag II. De begrenzing tussen het grondpakket van laag I en het open water is verticaal gedacht. Opm. Wanneer de weerstand c van laag II tot ∞ nadert, is het profiel gelijk aan dat van Edelman, immers stroming door laag II is dan onmogelijk geworden, waardoor deze voor laag I als een ondoorlatende basis gaat fungeren.

Afleiding van de differentiaalvergelijking

Afb. 4 stelt een mootje uit het grondpakket voor. Dit mootje heeft een lengte dx , terwijl de vergelijkingen worden opgesteld voor de eenheid van breedte. Dit houdt in, dat is aangenomen, dat het kanaal oneindig lang is, want de beide evenwijdige vlakken op afstand 1 moeten dan stroombanen zijn.

Verder is in de watervoerende lagen de verticale component van de stroming verwaarloosd en in de slecht doorlatende laag de horizontale component. Het stromingsbeeld is hiermee één-dimensionaal geworden. In elk der lagen kan de stroming worden beschreven met de wet van Darcy en de continuïteitswet.

Afb. 4 - Parameters van de differentiaalvergelijking.



In laag I geldt dan:

$$\text{Darcy: } q_a = k_1 (H_1 - \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\text{Kontinuïteit: } \frac{\partial q_a}{\partial x} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial q_{v1}}{\partial x} \quad (2)$$

In deze laatste vergelijking is $\mu \frac{\partial \phi}{\partial t}$ de hoeveelheid die uit de berging vrijkomt, in de afb. aangegeven met een arcering. Hierin is μ een constante, die aangeeft welk gedeelte van het totale volume bestaat uit vrijkomend water. Deze factor μ is gelijk verondersteld voor stijgende en dalende waterspiegel.

Voor laag II geldt:

$$\text{Darcy: } dq_v = v \cdot dx = k' \frac{\psi - \Phi}{d} \cdot dx$$

$$\text{of: } \frac{\partial q_v}{\partial x} = - \frac{\phi - \psi}{c} \quad (3)$$

$$\text{Kontinuïteit: } \frac{\partial q_{v1}}{\partial x} = \frac{\partial q_{v2}}{\partial x} \quad (4)$$

Tenslotte voor laag III:

$$\text{Darcy: } q_b = k_2 H_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

$$\text{Kontinuïteit: } \frac{\partial q_b}{\partial x} = \frac{\partial q_{v2}}{\partial x} \quad (6)$$

Uit vergelijking (1) volgt door differentiatie:

$$\frac{\partial q_a}{\partial x} = k_1 (H_1 - \phi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \quad (7)$$

Op dezelfde manier volgt uit vergelijking (5):

$$\frac{\partial q_b}{\partial x} = k_2 H_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (8)$$

Door combinatie van de vergelijkingen (2), (3), (4) en (7) ontstaat de volgende differentiaalvergelijking:

$$k_1 (H_1 - \phi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi - \psi}{c} \quad (9)$$

terwijl uit de vergelijkingen (3), (4), (6) en (8) volgt:

$$k_2 H_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = - \frac{\phi - \psi}{c} \quad (10)$$

Uit de beide simultane differentiaalvergelijkingen (9) en (10) is niet zonder meer een gesloten oplossing te vinden. Op twee manieren is nu toch tot een oplossing te komen en wel:

1e door de vergelijkingen numeriek op te lossen.

Dit betekent dat men voor de verschillende constanten, die in de vergelijkingen voorkomen (k_1 , H_1 , k_2 , H_2 , c , μ), waarden moet aannemen. Iedere combinatie van deze constanten geeft dan een andere oplossing, waardoor het alleen redelijk te doen zou zijn met behulp van een computer.

2e door de werkelijke oplossing te benaderen. Hiertoe moet men de vergelijkingen vereenvoudigen door geschikte verwaarlozingen in te voeren.

Deze laatste methode kan wel een gesloten oplossing geven, die dan echter een benadering vormt van de werkelijke oplossing.

In werkelijkheid zal men overigens toch geen nauwkeurige uitkomsten krijgen, ook al heeft men een exacte oplossing, omdat de in het terrein voorkomende lagen niet homogeen en isotroop zijn. Het benaderen van de oplossing is dus geen groot bezwaar. Wanneer nu de hoogte H_1 van de bovenste watervoerende laag groot wordt verondersteld ten opzichte van de grootte van de afmaling (dit zal meestal het geval zijn), dan kan deze afmaling verwaarloosd worden ten opzichte van de hoogte.

Dat wil zeggen, als:

$$\Phi \ll H_1, \text{ dan is } H_1 - \Phi \simeq H_1 = \text{constant}$$

Wordt dit toegepast, dan gaat (1) over in:

$$q_a = k_1 H_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (11)$$

Na differentiëren volgt hieruit (in plaats van (7)):

$$\frac{\partial q_a}{\partial x} = k_1 H_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (12)$$

Door combinatie van (12) met (2), (3) en (4), wordt de differentiaalvergelijking veel eenvoudiger:

$$k_1 H_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi - \psi}{c} \quad (13)$$

Zonder deze vereenvoudiging zou (9) gelden. Door de verwaarlozing van Φ ten opzichte van H_1 is de differentiaalvergelijking dus lineair geworden. Een belangrijk voordeel daarvan is, dat de uitkomsten nu gesuperponeerd mogen worden.

De vergelijking (10) die al lineair was, verandert niet door de aangebrachte wijziging.

De gelineariseerde differentiaalvergelijking (13) kan nog verder worden vereenvoudigd. De potentiaalverlaging ψ in laag III zal namelijk veel kleiner zijn dan de afmaling Φ in laag I, als tenminste de weerstand c van laag II en de doorlatendheid $k_2 H_2$ van laag III voldoende groot zijn.

Wanneer c groot is, is er een vrij groot potentiaalverschil nodig, voor er een verticale stroming van betekenis door laag II zal optreden en wanneer $k_2 H_2$ groot is, zal het door het perkoleren uit laag III verloren gegane water gemakkelijk aangevuld worden. Wanneer aan deze voorwaarden wordt voldaan, kan:

$$\psi \ll \Phi$$

gesteld worden, hetgeen betekent dat:

$$\Phi - \psi \simeq \Phi$$

Worden verder beide leden van (13) vermenigvuldigd met c en stelt men

$$k_1 \cdot H_1 \cdot c = \lambda_1^2$$

dan kan (13) worden geschreven als:

$$\lambda_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi + \mu c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (14)$$

In deze lineaire differentiaalvergelijking komt de potentiaalverlaging in laag III niet meer voor. Daardoor kan deze vergelijking dus opgelost worden zonder (10) op te lossen. (De vergelijking kan nu worden beschouwd uit te drukken hoe de gedragingen van de grondwaterspiegel in laag I bij relatief kleine afmalingen zullen zijn, wanneer in laag III de potentiaal constant is.)

Oplossing van de differentiaalvergelijking

Bij de uitwerking van (14) zal worden uitgegaan van de randvoorwaarden zoals Edelman voor $n = 0$ heeft gesteld:

$$\begin{aligned} \text{beginvoorwaarde: voor } t = 0 : \Phi = 0 \text{ (voor elke } x) \\ \text{randvoorwaarden: voor } x \rightarrow \infty : \Phi = 0 \text{ (voor elke } t) \\ \text{voor } x = 0 : \Phi = \Phi_0 \text{ (constant in de} \\ \text{tijd, voor } t > 0). \end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking (14) is niet zonder meer op te lossen.

Het is echter mogelijk met behulp van de Laplacetransformatiemethode een oplossing te vinden. Bij deze transformatiemethode worden de randvoorwaarden direct ingevoerd en kan men door terugzoeken in een tabellenboek (bv. [2]) in bepaalde gevallen een oplossing vinden, die dan geldt voor de differentiaalvergelijking tezamen met de bijbehorende randvoorwaarden. In de oplossing komen dus geen integratieconstanten voor.

Wordt deze methode toegepast op (14), gecombineerd met de randvoorwaarden zoals bovenstaand beschreven, dan volgt daaruit als oplossing:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{-x/\lambda_1} \cdot \text{Erfc} \left(\frac{x\sqrt{\mu c}}{2\lambda_1\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{t}{\mu c}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{x/\lambda_1} \cdot \text{Erfc} \left(\frac{x\sqrt{\mu c}}{2\lambda_1\sqrt{t}} + \sqrt{\frac{t}{\mu c}} \right) \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

Deze functie, die er in eerste oogopslag nogal onvriendelijk uitziet, blijkt erg mee te vallen, omdat er voor Erfc (Complementary Error Function) uitgebreide tabellenboeken bestaan (bv. [3]). Zoals in het volgende zal worden aangetoond is (15) nauw verwant met de door Edelman gevonden oplossing.

Een volledige afleiding valt buiten het raam van dit artikel en is daarom aan het eind als aanhangsel opgenomen.

Reeds eerder is opgemerkt, dat de situatie die door Edelman werd beschreven een bijzonder geval van de hier behandelde is.

Wanneer de weerstand c van laag II oneindig groot wordt, zijn de beide situaties identiek geworden. Wordt nu van (15) de limietwaarde voor $c \rightarrow \infty$ bepaald, dan blijkt de uitkomst inderdaad de oplossing van Edelman te zijn:

Voor $c \rightarrow \infty$ gaat (15) over in:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{-o} \cdot \text{Erfc} \left(\frac{x\sqrt{\mu}}{2\sqrt{t}\sqrt{k_1 H_1}} - o \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{o} \cdot \text{Erfc} \left(\frac{x\sqrt{\mu}}{2\sqrt{t}\sqrt{k_1 H_1}} + o \right) \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

Dit wordt na uitwerken:

$$\phi = \phi_0 \cdot \text{Erfc} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\mu}{k_1 H_1 t}} \right) \quad (17)$$

Omdat:

$$\text{Erfc}(u) = 1 - \text{E}(u),$$

mag voor (17) ook worden geschreven:

$$\phi = \phi_0 \left\{ 1 - \text{E} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\mu}{k_1 H_1 t}} \right) \right\} \quad (18)$$

Wanneer dezelfde transformaties worden toegepast, die ook Edelman heeft gebruikt, nl.:

$$T = \frac{kH}{\mu} \cdot t \text{ en } u = \frac{x}{2\sqrt{T}}$$

dan volgt uit (18):

$$\phi = \phi_0 \left\{ 1 - \text{E}(u) \right\} \quad (19)$$

Dit is de oplossing van Edelman voor het geval $n = 0$. Wordt in de oplossing van Edelman de vergelijking voor u geschreven zonder transformaties te gebruiken, dan volgt:

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{kH}} \cdot \frac{x}{\sqrt{t}} \quad (20)$$

Doet men hetzelfde voor het argument van de Erfc in (15) dan volgt:

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{kH}} \cdot \frac{x}{\sqrt{t}} \pm \sqrt{\frac{t}{\mu c}} \quad (21)$$

Ook hieruit blijkt de sterke overeenkomst van de beide oplossingen.

Een vereenvoudigde schrijfwijze van (15) kan worden verkregen, door de volgende transformaties in te voeren:

$$X = \frac{x}{\lambda_1} \text{ en } T = \frac{t}{\mu c}$$

N.B. X en T zijn dimensieloos.

Hierdoor gaat (15) over in:

$$\phi = \phi_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{-X} \cdot \text{Erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{T}} - \sqrt{T} \right) + \frac{1}{2} e^X \cdot \text{Erfc} \left(\frac{X}{2\sqrt{T}} + \sqrt{T} \right) \right\} \quad (22)$$

Worden nu verder nog ingevoerd:

$$u_1 = \frac{X}{2\sqrt{T}} - \sqrt{T}$$

en

$$u_2 = \frac{X}{2\sqrt{T}} + \sqrt{T}$$

dan blijft uiteindelijk over:

$$\phi = \phi_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{-X} \cdot \text{Erfc} (u_1) + \frac{1}{2} e^X \cdot \text{Erfc} (u_2) \right\} \quad (23)$$

Voor de berekening van het debiet van het naar het kanaal afstromende water is het nodig $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ te bepalen,

immers:

$$q = -kH \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Door differentiatie en na invoering van de in het voorgaande beschreven transformaties volgt uit (15):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{-\phi_0}{2\lambda_1} \left[e^{-X} \left\{ \frac{e^{-u_1}}{\sqrt{\pi T}} + \text{Erfc} (u_1) \right\} + e^X \left\{ \frac{e^{-u_2}}{\sqrt{\pi T}} - \text{Erfc} (u_2) \right\} \right] \quad (24)$$

TABEL 1 - Waarden van Erfc(u)

u	Erfc(u)	Erfc(-u)	u	Erfc(u)	Erfc(-u)	u	Erfc(u)	Erfc(-u)
0,0000	1,0000	1,0000	0,1800	0,7991	1,2009	0,7750	0,2731	1,7269
0,0025	0,9972	1,0028	0,1900	0,7882	1,2118	0,8000	0,2579	1,7421
0,0050	0,9944	1,0056	0,2000	0,7773	1,2227	0,8250	0,2433	1,7567
0,0075	0,9915	1,0085	0,2250	0,7503	1,2497	0,8500	0,2293	1,7707
0,0100	0,9887	1,0113	0,2500	0,7237	1,2763	0,8750	0,2159	1,7841
0,0150	0,9831	1,0169	0,2750	0,6973	1,3027	0,9000	0,2031	1,7969
0,0200	0,9774	1,0226	0,3000	0,6714	1,3286	0,9250	0,1908	1,8092
0,0250	0,9718	1,0282	0,3250	0,6458	1,3542	0,9500	0,1791	1,8209
0,0300	0,9662	1,0338	0,3500	0,6206	1,3794	0,9750	0,1679	1,8321
0,0350	0,9605	1,0395	0,3750	0,5959	1,4041	1,0000	0,1573	1,8427
0,0400	0,9549	1,0451	0,4000	0,5716	1,4284	1,0500	0,1376	1,8624
0,0450	0,9493	1,0507	0,4250	0,5478	1,4522	1,1000	0,1198	1,8802
0,0500	0,9436	1,0564	0,4500	0,5245	1,4755	1,1500	0,1039	1,8961
0,0600	0,9324	1,0676	0,4750	0,5017	1,4983	1,2000	0,0897	1,9103
0,0700	0,9211	1,0789	0,5000	0,4795	1,5202	1,2500	0,0771	1,9229
0,0800	0,9099	1,0901	0,5250	0,4578	1,5422	1,3000	0,0660	1,9340
0,0900	0,8987	1,1013	0,5500	0,4367	1,5633	1,3500	0,0562	1,9438
0,1000	0,8875	1,1125	0,5750	0,4161	1,5839	1,4000	0,0477	1,9523
0,1100	0,8764	1,1236	0,6000	0,3961	1,6039	1,4500	0,0403	1,9597
0,1200	0,8652	1,1348	0,6250	0,3768	1,6232	1,5000	0,0339	1,9661
0,1300	0,8541	1,1459	0,6500	0,3580	1,6420	1,6000	0,0237	1,9763
0,1400	0,8431	1,1569	0,6750	0,3398	1,6602	1,7000	0,0162	1,9838
0,1500	0,8320	1,1680	0,7000	0,3222	1,6778	1,8000	0,0109	1,9891
0,1600	0,8210	1,1790	0,7250	0,3052	1,6948	1,9000	0,0072	1,9928
0,1700	0,8100	1,1900	0,7500	0,2888	1,7112	2,0000	0,0047	1,9953

De Erfc (afb. 5)

Zoals gezegd is de Erfc de complementaire foutenintegraal. Deze kan worden afgeleid uit de gewone foutenintegraal. Deze laatste is als volgt gedefinieerd:

$$\text{Erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \quad (25)$$

De waarden, die deze integraal bij verschillende waarden van u aanneemt, zijn in diverse tabellenboeken te vinden ([3] zeer uitgebreid, 15 decimalen; [4] minder uitgebreid). Het verband tussen deze en de complementaire functie is:

$$u > 0 : \text{Erfc}(u) = 1 - \text{Erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2} dt \quad (26)$$

$$u < 0 : \text{Erfc}(u) = 1 + \text{Erf}(-u) = 2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-t^2} dt \quad (26')$$

De waarden van deze integraal zijn dus eenvoudig uit de waarden gegeven in voornoemde tabellenboeken te berekenen.

In tabel I zijn een aantal waarden opgenomen, zowel voor u positief als negatief.

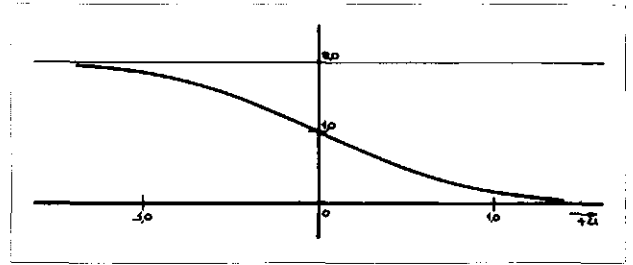
De functie Erfc(u) heeft als limietwaarden (afb. 5):

voor $u \rightarrow -\infty$: Erfc(u) $\rightarrow 2$
 voor $u \rightarrow +\infty$: Erfc(u) $\rightarrow 0$

Deze limietwaarden worden echter al praktisch bereikt voor resp. $u = -2$ en $u = +2$. Dan zijn de afwijkingen van de limietwaarden al kleiner dan 1% geworden.

Vergelijking van de uitkomsten van beide methoden

Het werken met de in het voorgaande afgeleide formules



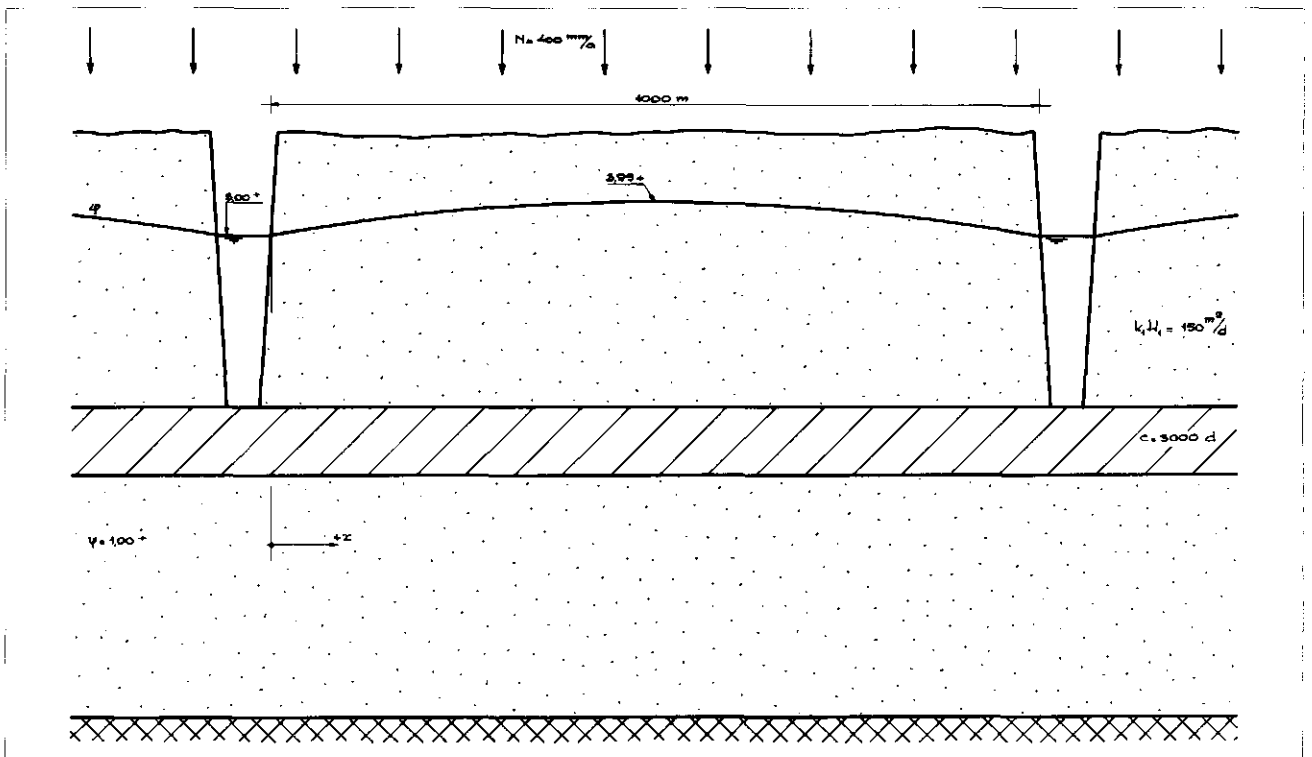
Afb. 5 - Erfc(u).

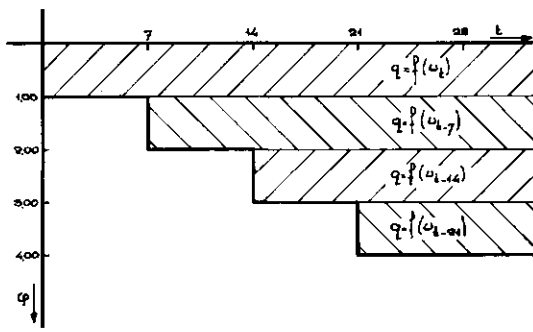
zal waarschijnlijk meer tijd vergen, dan wanneer de berekening gemaakt zou worden volgens Edelman.

Om te kunnen beoordelen of het in de praktijk zinvol kan zijn om met het bestaan van de tweede watervoerende laag rekening te gaan houden, zijn in een praktisch voorbeeld de uitkomsten van beide berekeningen aan elkaar getoetst. Gekozen is een voorbeeld, waarin de getalwaarden zodanig zijn aangenomen, dat de situatie voor zou kunnen komen in de infiltratiegebieden in de duinen (afb. 6).

Twee kanalen op een onderlinge afstand van 1000 m in een watervoerende laag met $kH = 150 \text{ m}^2/\text{d}$ reiken tot op een minder doorlatende laag met $c = 3000 \text{ d}$. Onder deze minder doorlatende laag is een tweede watervoerende laag gedacht, waarin zich grondwater bevindt met een potentiaal $\psi = 1,00 \text{ m}^+$, terwijl de waterstand in de kanalen op $3,00 \text{ m}^+$ is aangenomen. In de stationaire toestand, bij een nuttige neerslag $N = 400 \text{ mm/a}$ gelijkmatig verdeeld gedacht over het jaar, bevindt zich het freatisch vlak, midden tussen de kanalen, op $3,29 \text{ m}^+$. Aangenomen is nu dat het kanaalpeil in het linker kanaal 4 maal plotseling 1 meter wordt verlaagd, steeds met een tussenruimte van 1 week. Dus bij het begin van de 1e, de 8e, de 15e en de 22e dag steeds 1 m peilverlaging (afb. 7).

Afb. 6 - Geschematiseerd profiel van het rekenvoorbeeld.





Afb. 7 - Verloop van de daling van het kanaalpeil.

De dalingen van het freatisch vlak op verschillende afstanden van het kanaal en de hoeveelheid water die aan het pakket tussen beide kanalen op deze wijze wordt onttrokken zijn met beide formules op verschillende tijdstippen berekend. Omdat de vier verlagingen hetzelfde zijn, is het voldoende om de gevolgen van de eerste te berekenen, immers de 22e dag na de eerste verlaging bijvoorbeeld geldt voor de tweede verlaging als 15e dag, voor de derde als 8e en voor de vierde als 1e dag. Telt men dus de waarden gevonden voor de verlagingen aan het einde van de 1e, de 8e, de 15e en de 22e dag bij elkaar op, dan is de uitkomst de totale verlaging aan het einde van de 22e dag tengevolge van de 4 spiegel­dalingen tezamen (superpositiebeginsel). De gegevens die nodig zijn voor deze berekening zijn samengevat in afb. 8.

A. Berekening volgens de oplossing van Edelman

Voor de berekening met de formules van Edelman wordt de minder doorlatende laag als ondoorlatend verondersteld.

De daling van het freatisch vlak wordt nu berekend op afstanden:

$x = 1, 5, 10, 50, 100, 500$ en 1000 m vanaf het kanaal en wel voor:

$t = 1, 7, 8, 14, 15, 21, 22, 28$ en 35 dagen gerekend vanaf het moment van de eerste spiegelverlaging. Vervolgens wordt de hoeveelheid afstromend op het kanaal berekend op dezelfde tijdstippen.

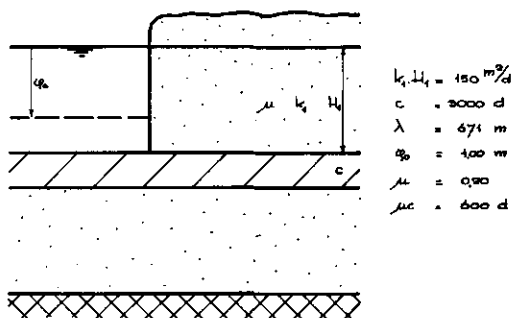
Door transformatie vinden we uit t:

$$T' = \frac{kH}{\mu} \cdot t = \frac{150}{0,2} \cdot t = 750 \cdot t$$

Dit houdt dus in, dat de verlangde waarden moeten worden berekend voor:

$T' = 750, 5250, 6000, 10500, 11250, 15750, 16500, 21000$ en 26250 m^2 .

Afb. 8 - Getalwaarden voor het rekenvoorbeeld.



Voor het geval $n = 0$ vond Edelman:

$$\phi = \phi_0 \{ 1 - E(u) \} \quad (19)$$

Uit deze formule en met behulp van de tabellen die Edelman in zijn werk heeft opgenomen zijn de getallen verkregen die in tabel II zijn opgenomen.

TABEL II - Daling van het freatisch vlak volgens Edelman (in m)

$\downarrow x/t \rightarrow$	1	7	8	14	15	21	22	28	35
1	0,979	0,992	1,972	1,987	2,967	2,982	3,962	3,978	3,983
5	0,897	0,961	1,861	1,934	2,835	2,911	3,813	3,892	3,913
10	0,796	0,922	1,724	1,867	2,671	2,822	3,627	3,783	3,826
50	0,197	0,626	0,845	1,356	1,585	2,134	2,369	2,942	3,143
100	0,010	0,329	0,372	0,819	0,877	1,393	1,460	2,018	2,353
500	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,005	0,007	0,021	0,051
1000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

De formule die Edelman vond voor q voor het geval $n = 0$ luidt:

$$q_E = - \phi_0 \cdot \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi T'}} \cdot kH \quad (27)$$

Aan het kanaal is $x = 0$ en dus $u = 0$; dus gaat (27) over in:

$$q_{E0} = - \frac{\phi_0 \cdot k \cdot H}{\sqrt{\pi T'}} \quad (28)$$

Uit (28) vindt men de in tabel IV vermelde debieten.

B. Berekening volgens de oplossing zoals vermeld in het voorgaande

De daling van het freatisch vlak en de afstroming op het kanaal worden berekend op dezelfde plaatsen en tijdstippen als in de berekening onder A.

Door de andere manier van transformeren wordt de berekening uitgevoerd voor:

$X = 0,0015; 0,0075; 0,0149; 0,0745; 0,149; 0,745$ en $1,49$.

en:

$T = 0,0017; 0,0117; 0,0133; 0,233; 0,0250; 0,0350; 0,0366; 0,0466$ en $0,0583$.

Wanneer men uit deze X - en T -waarden de verschillende waarden voor u_1 en u_2 berekent, kan men met behulp van de reeds genoemde tabellenboeken de grootte van de betreffende spiegel­dalingen berekenen met:

$$\phi = \phi_0 \left\{ \frac{1}{2} e^{-X} \cdot \text{Erfc}(u_1) + \frac{1}{2} e^X \cdot \text{Erfc}(u_2) \right\} \quad (23)$$

Ook voor de berekening van e^X en e^{-X} bestaan tabellenboeken (bv. [5]).

De uitkomsten voor het hier behandelde voorbeeld vindt men terug in tabel III.

TABEL III - Daling van het freatisch vlak in het 2-lagensysteem (in m)

$\downarrow x/t \rightarrow$	1	7	8	14	15	21	22	28	35
1	0,979	0,992	1,972	1,986	2,967	2,982	3,962	3,978	3,982
5	0,902	0,960	1,865	1,932	2,837	2,908	3,814	3,887	3,908
10	0,798	0,922	1,724	1,866	2,670	2,820	3,624	3,780	3,822
50	0,201	0,623	0,846	1,349	1,580	2,122	2,357	2,917	3,113
100	0,010	0,329	0,372	0,819	0,877	1,393	1,460	2,018	2,353
500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,006	0,018	0,045
1000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

In het voorgaande is een formule afgeleid voor $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, die

nodig is om de hoeveelheid water, die op het kanaal afstroomt, te kunnen bepalen (formule (24)).

Aan het kanaal geldt de limietwaarde van (24) voor $x \rightarrow 0$.

Door $x = 0$ in te vullen in (24) vinden we:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{-\phi_0}{\lambda_1} \left\{ \text{Erf}(\sqrt{T}) + \frac{e^{-T}}{\sqrt{\pi T}} \right\} \quad (29)$$

Omdat:

$$q = -kH \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

wordt dus:

$$(q)_{x=0} = \frac{k_1 H_1 \phi_0}{\lambda_1} \left\{ \text{Erf}(\sqrt{T}) + \frac{e^{-T}}{\sqrt{\pi T}} \right\} \quad (30)$$

Door invullen van de verschillende, in het voorgaande genoemde, waarden van T worden de uitkomsten, als q_0 vermeld in tabel IV, verkregen.

TABEL IV - Afstromingen op het kanaal (in $m^3/m' \cdot d$)

t	1	7	8	14	15	21	22	28	35
q_{E_0}	3,09	1,17	4,18	2,00	4,98	2,67	5,64	3,26	2,60
q_0	3,10	1,18	4,21	2,03	5,02	2,72	5,70	3,34	2,71

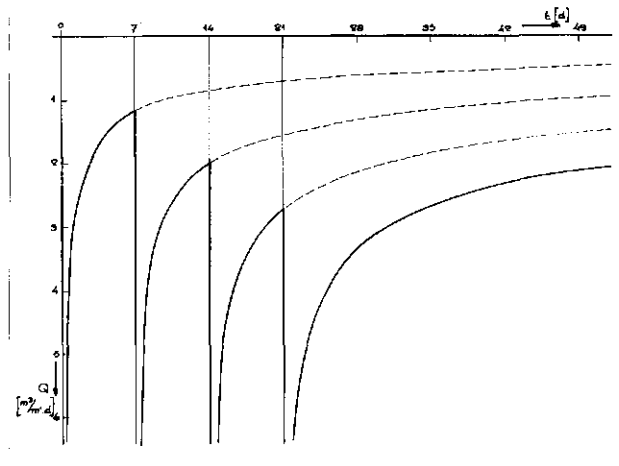
Het verloop van q_0 met de tijd is aangegeven in afb. 9. Hieruit blijkt duidelijk de plotselinge toename van q_0 bij het begin van elke nieuwe onttrekking.

Om te kunnen zien wat de procentuele afwijking is, moeten we de gevolgen van één enkele verlaging bekijken. De berekende debieten q_{E_0} en q_0 voor één verlaging van 1 m zijn opgenomen in tabel V, tezamen met hun verschil en dit verschil uitgedrukt in procenten van q_{E_0} .

TABEL V - Afstromingen op het kanaal t.g.v. één verlaging (in $m^3/m' \cdot d$)

t	1	7	14	21	28	35
q_{E_0}	3,090	1,169	0,827	0,674	0,584	0,522
q_0	3,100	1,180	0,846	0,698	0,611	0,552
versch.	0,010	0,011	0,019	0,024	0,027	0,030
rel. versch. in %	0,3	0,9	2,3	3,6	4,6	5,7

Afb. 9 - Verloop van de onttrekking in de tijd.



Uit deze getallen blijkt, dat pas na geruime tijd het verschil zodanig groot is geworden, dat het zin heeft er rekening mee te gaan houden. Voor andere concrete gevallen kan dit tijdstip eerder of later vallen.

Dit tijdstip is slechts afhankelijk van de grootte van c .

De verhouding α van q_{E_0} en q_0 is nl. een functie van $\frac{t}{\mu c}$.

Uit (28) en (30) volgt:

$$\alpha = \frac{q_0}{q_{E_0}} = \frac{\frac{\phi_0}{\sqrt{kHc}} \cdot \left\{ \frac{e^{-t/\mu c}}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{t/\mu c}} + \text{Erf}(\sqrt{t/\mu c}) \right\}}{\frac{\phi_0 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi} kH} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}} \quad (31)$$

Na uitwerking volgt hieruit:

$$\alpha = e^{-t/\mu c} + \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{t/\mu c} \cdot \text{Erf}(\sqrt{t/\mu c}) \quad (32)$$

In tabel VI is voor verschillende waarden van $\frac{t}{\mu c}$ de

grootte van α berekend. Hieruit blijkt, dat pas voor $t > 0,10 \mu c$ het verschil tussen de uitkomsten van beide methoden groter wordt dan 10%. Voor $t > 0,20 \mu c$ wordt het verschil groter dan 20%.

TABEL VI - Waarden van α

$t/\mu c$	0,001	0,005	0,01	0,05	0,10	0,25	0,50
α	1,001	1,005	1,010	1,050	1,098	1,240	1,462

Voor lagere waarden van c vindt men met de in het voorgaande omschreven methode al voor kleinere t een beduidend verschil met de methode van Edelman. Wel moet men dan in het oog houden, dat ψ niet constant blijft zoals in het voorgaande is aangegeven.

Tot slot wil ik graag de heren prof. ir. L. Huisman, prof. dr. ir. J. C. van Dam en ir. N. Booy danken voor hun waardevolle adviezen, waardoor het mij mogelijk werd een oplossing voor het onderhavige probleem te vinden.

Aanhangsel

Oplossing van de differentiaal vergelijking met behulp van de transformatiemethode van Laplace.

De differentiaalvergelijking luidde:

$$\lambda_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi + \mu c \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (14)$$

Als beginvoorwaarde geldt hierbij:

$$t = 0 \rightarrow \Phi = 0 \text{ (voor elke } x \text{)}$$

Na transformatie van $t \rightarrow s$, waarbij Φ overgaat in Y , volgt uit (14), rekening houdend met bovenstaande beginvoorwaarde:

$$\lambda_1^2 \cdot \frac{d^2 Y}{dx^2} = Y (1 + \mu c s) \quad (33)$$

De algemene oplossing van deze 2e orde differentiaalvergelijking in Y is:

$$Y = C_1 \cdot e^{x/\lambda_1 \sqrt{1 + \mu c s}} + C_2 \cdot e^{-x/\lambda_1 \sqrt{1 + \mu c s}} \quad (34)$$

• Slot van pagina 490

De integratieconstanten volgen uit de randvoorwaarden:

voor $x \rightarrow \infty$ gaat $\Phi \rightarrow 0$, dus $Y \rightarrow 0$

Ingevuld in (34) geeft dit: $C_1 = 0$

Verder geldt: voor $x = 0$ en $t > 0$: $\Phi = \Phi_0$

$$\text{dus: } Y = \frac{\Phi_0}{s} \text{ voor } x = 0$$

$$\text{Ingevuld in (34) geeft dit } C_2 = \frac{\Phi_0}{s},$$

waardoor als oplossing voor (33) wordt gevonden:

$$Y = \frac{\phi_0}{s} \cdot e^{-x/\lambda_1} \cdot \sqrt{\mu c} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mu c} + s} \quad (35)$$

Met behulp van [2] (p. 255; nr. 3.2.80) vinden we (15) als oplossing.

Literatuur

1. Edelman, J. H., „Over de berekening van grondwaterstromingen”. Dissertatie Delft 1947.
2. Roberts, G. E. and Kaufman, H., „Table of Laplacetransforms”. W. B. Saunders Cy, Philadelphia.
3. „Table of the Error Function and its Derivate”. US Dep. of Comm, Nat. Bur. of Stand.; Appl. Math. Series 41, Washington.
4. Jahnke-Emde, „Tafeln Höherer Funktionen”. Dover Publ. New York.
5. Wijdenes, P., „Noordhoff's wiskundige tafels in 5 decimalen”. P. Noordhoff, Groningen.