

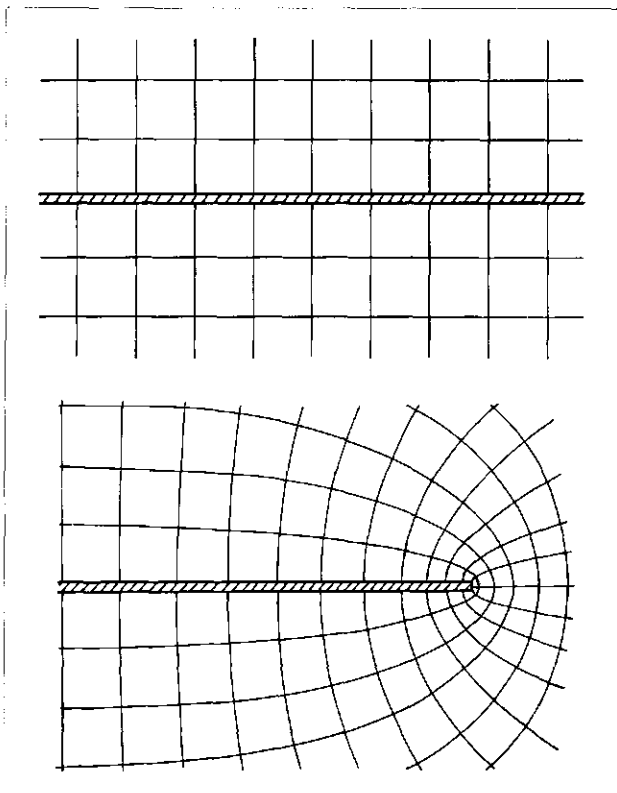
Het kopeffect van draineerleidingen

1. Inleiding

Bij de berekening van wateronttrekking door middel van draineerleidingen kan de hierdoor veroorzaakte grondwaterstroming steeds in 3 componenten worden ontbonden, waarvan 2 in een vlak loodrecht op de leiding zijn gelegen en de derde evenwijdig aan deze leiding verloopt. Voor het middengedeelte van een lange draineerleiding mag de laatstgenoemde componente intussen worden verwaarloosd en kan de berekening worden beperkt tot de waterstromingen in de normale doorsnede. Doorgaans zijn de horizontale afmetingen van het pakket groot ten opzichte van de dikte en kunnen ook de verticale stromingscomponenten buiten beschouwing worden gelaten, terwijl bij een waterstandsverlaging welke klein is ten opzichte van de watervoerende hoogte, de horizontale doorlatendheid tenslotte als een constante grootheid mag worden aangenomen.

Met de bovengemaakte onderstellingen wordt de berekening van de door waterwinning met een draineerleiding veroorzaakte grondwaterstromingen, wel bijzonder eenvoudig. Nimmer mag echter worden vergeten, dat de verkregen resultaten alleen gelden voor het middengedeelte van een lange draineerleiding, waar de langscomponenten van de grondwaterstroming inderdaad mogen worden verwaarloosd. Meer naar de uiteinden van de beschouwde lange draineerleiding — en van een korte leiding over de gehele lengte — is dit niet het geval en zullen de langscomponenten van de grondwaterbeweging

Afb. 1 - Stroomlijnen en equipotentiaallijnen voor een lange en voor een korte draineerleiding met eenzelfde waterstandsverlaging.



juist een extra toestroming veroorzaken (afb. 1). Deze extra toestroming is vooral op de uiteinden van de leiding gericht. Dit is het zogenaamde kopeffect waaraan dit artikel zijn naam ontleent.

2. Phreatisch water boven een moeilijk doorlatende laag

In afb. 2 is de dwarsdoorsnede over een oneindig lange draineerleiding in phreatisch water boven een moeilijk doorlatende laag getekend. Mag de stijghoogte van het spanningsgrondwater beneden de moeilijk doorlatende laag als constant worden aangenomen, dan wordt de toestroming van grondwater op de draineerleiding beheerst door de betrekkingen:

$$\text{bewegingsvergelijking } q = -kH \cdot \frac{dx}{dh}$$

$$\text{continuïteitsvergelijking } \frac{dq}{dx} = N + \frac{\Phi - h}{c}$$

gecombineerd

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{h}{kHc} + \frac{N \cdot c + \Phi}{kHc} = 0$$

$$\text{oplossing } h = C_1 \cdot e^{-x/\lambda} + C_2 \cdot e^{+x/\lambda} + N \cdot c + \Phi$$

$$q = C_1 \cdot \frac{kH}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} - C_2 \cdot \frac{kH}{\lambda} \cdot e^{+x/\lambda}$$

$$\text{met } \lambda = \sqrt{kHc}$$

en C_1 en C_2 als integratieconstanten, te bepalen uit de randvoorwaarden. Voor een pakket van grote uitgestrektheid geldt:

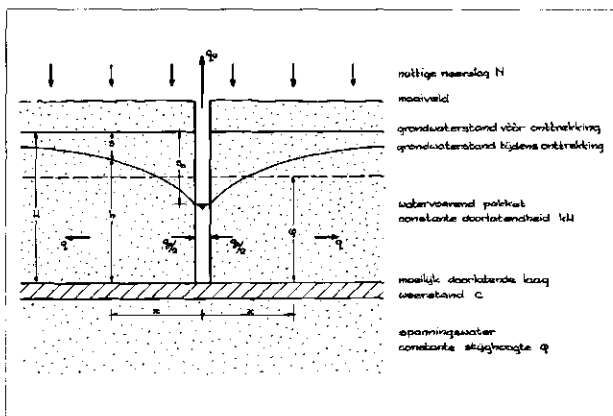
$$x \rightarrow \infty, \quad q = 0 = -C_2 \frac{kH}{\lambda} \cdot \infty \quad \text{of } C_2 = 0$$

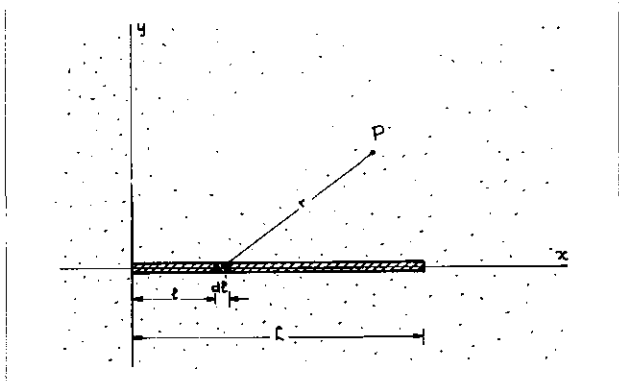
$$x \rightarrow 0, \quad q = -\frac{q_0}{2} = C_1 \cdot \frac{kH}{\lambda} \quad \text{of } C_1 = -\frac{\lambda}{2kH} \cdot q_0$$

$$\text{gesubstitueerd } h = N \cdot c + \Phi - \frac{\lambda}{2kH} \cdot q_0 \cdot e^{-x/\lambda}$$

$$q = -\frac{q_0}{2} \cdot e^{-x/\lambda}$$

Afb. 2 - Draineerleiding in een pakket boven een moeilijk doorlatende laag.





Afb. 3 - Draineerleiding van beperkte lengte.

Zonder onttrekking, $q_o = 0$, geldt

$$h = N \cdot c + \Phi$$

De waterstandsverlaging tengevolge onttrekking is dus gelijk

$$s = \frac{\lambda}{2kH} \cdot q_o \cdot e^{-x/\lambda}$$

waaruit als verband tussen opbrengst en afmaling volgt

$$q_o = \frac{2kH}{\lambda} \cdot s_o$$

Tengevolge van het kopeffect zal voor een leiding van beperkte lengte de opbrengst groter zijn dan met bovenstaande formule overeenkomt, c.q. voor eenzelfde opbrengst de afmaling geringer zijn. De laatstgenoemde omstandigheid is gemakkelijk voor berekening toegankelijk, waartoe in afb. 3 de plattegrond van de draineerleiding van afb. 2 met een nu echter beperkte lengte L is getekend. Met een constante opbrengst q_o wordt over een lengte dl een hoeveelheid $q_o \cdot dl$ gewonnen. Volgens de putformule van de Glee geeft dit een willekeurig punt P op een afstand r een waterstandsverlaging ds_p gelijk:

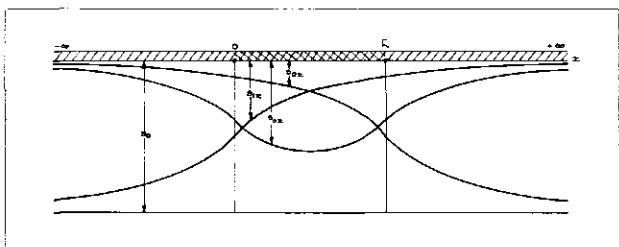
$$ds_p = \frac{q_o \cdot dl}{2\pi kH} \cdot K_o\left(\frac{r}{\lambda}\right) \text{ met}$$

$$r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

en K_o als gemodificeerde Besselfunctie van de tweede soort, orde nul. De totale waterstandsverlaging in het punt P ten gevolge van de onttrekking $q_o \cdot L$ wordt hiermede

$$s_p = \frac{q_o}{2\pi kH} \int_0^L K_o\left(\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\lambda}\right) \cdot dl$$

Afb. 4 - Waterstandsverlaging door bemaling van een oneindig lange draineerleiding in phreatisch water boven een moeilijk doorlatende laag.



Voor een punt op de draineerleiding, $y = 0$, vereenvoudigt deze formule zich tot

$$s_x = \frac{q_o}{2\pi kH} \int_0^L K_o\left(\frac{x-1}{\lambda}\right) \cdot dl \quad \text{Met}$$

$$s_o = \frac{\lambda}{2kH} \cdot q_o$$

als afmaling van een oneindig lange leiding met dezelfde opbrengst q_o per strekkende meter en de substitutie

$$\alpha = \frac{x-1}{\lambda}, \quad d\alpha = -\frac{dl}{\lambda} \quad \text{volgt}$$

$$s_x = -\frac{s_o}{\pi} \int_{\frac{x}{\lambda}}^{\frac{x-L}{\lambda}} K_o(\alpha) \cdot d\alpha \quad \text{of}$$

$$s_x = \frac{s_o}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{x}{\lambda}} K_o(\alpha) \cdot d\alpha + \int_{-\frac{L-x}{\lambda}}^0 K_o(\alpha) \cdot d\alpha \right\}$$

$$\text{Met} \quad F_1(\alpha) = -F_1(-\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} K_o(\alpha) \cdot d\alpha$$

kan het verkregen resultaat ook worden geschreven als

$$s_x = \frac{s_o}{2} \left\{ F_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) + F_1\left(\frac{L-x}{\lambda}\right) \right\}$$

De waarden van de functie F_1 zijn in tabel I weergegeven.

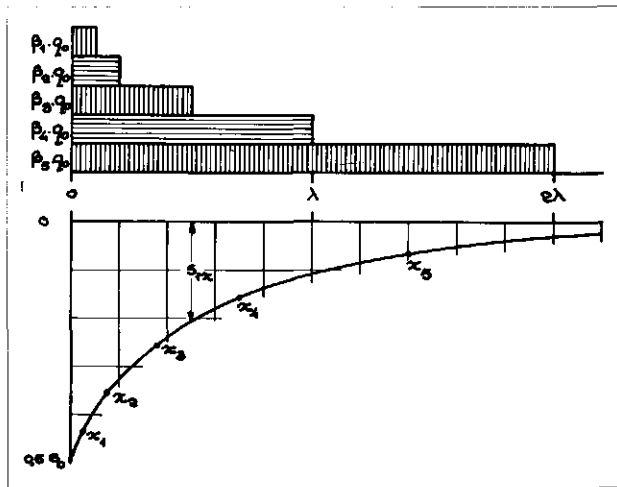
Wordt als voorbeeld aangenomen $L = \lambda$, dan geldt voor

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	$x\lambda$
s_x	0,396	0,490	0,539	0,568	0,585	0,590	$x s_o$

d.w.z. dat de waterstandsverlaging aan de uiteinden slechts 39,6% en in het midden niet meer dan 59,0% van de verlaging bij een oneindig lange leiding met dezelfde opbrengst q_o bedraagt.

De boven onderstelde situatie van een constante op-

Afb. 5 - Extra toestroming op het uiteinde van een half-oneindige draineerleiding in phreatisch water boven een moeilijk doorlatende laag.



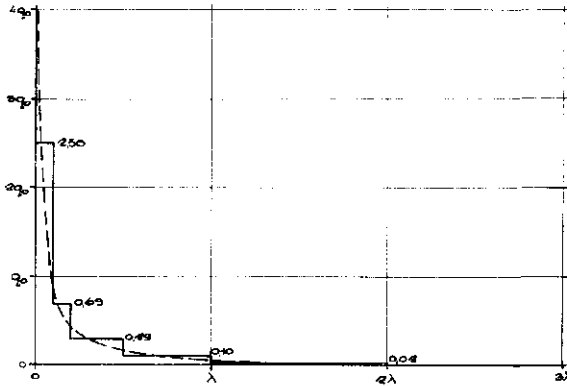
TABEL I

$$F_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha K_0(\alpha) \cdot d\alpha$$

$$F_2(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{2}{\pi} \operatorname{bgtg} \alpha$$

$$F_3(\alpha) = \frac{4}{\pi} \int_0^\alpha \ln \frac{e^{\pi\alpha} + 1}{e^{\pi\alpha} - 1} \cdot d\alpha$$

α	F1 (α)	F2 (α)	F3 (α)	α	F1 (α)	F2 (α)	F3 (α)	α	F1 (α)	F2 (α)	F3 (α)
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.64	0.66336	0.61421	0.89125	3.70	0.99101	0.91499	1.00000
0.01	0.03642	0.03568	0.06562	0.65	0.66795	0.61811	0.89463	3.80	0.99195	0.91718	1.00000
0.02	0.06402	0.06254	0.11359	0.66	0.67247	0.62194	0.89790	3.90	0.99279	0.91925	1.00000
0.03	0.08829	0.08607	0.15490	0.67	0.67692	0.62570	0.90107	4.00	0.99354	0.92123	1.00000
0.04	0.11040	0.10744	0.19190	0.68	0.68130	0.62940	0.90414	4.10	0.99422	0.92312	1.00000
0.05	0.13091	0.12720	0.22568	0.69	0.68560	0.63303	0.90711	4.20	0.99482	0.92491	1.00001
0.06	0.15014	0.14568	0.25691	0.70	0.68984	0.63660	0.90999	4.30	0.99536	0.92663	1.00001
0.07	0.16831	0.16311	0.28602	0.71	0.69402	0.64011	0.91278	4.40	0.99584	0.92827	1.00001
0.08	0.18558	0.17962	0.31332	0.72	0.69812	0.64356	0.91549	4.50	0.99627	0.92984	1.00001
0.09	0.20206	0.19534	0.33903	0.73	0.70216	0.64695	0.91811	4.60	0.99665	0.93134	1.00001
0.10	0.21783	0.21035	0.36336	0.74	0.70614	0.65029	0.92064	4.70	0.99700	0.93278	1.00001
0.11	0.23298	0.22474	0.38642	0.75	0.71006	0.65357	0.92310	4.80	0.99731	0.93416	1.00001
0.12	0.24756	0.23855	0.40835	0.76	0.71392	0.65679	0.92549	4.90	0.99758	0.93548	1.00001
0.13	0.26162	0.25184	0.42924	0.77	0.71772	0.65996	0.92780	5.00	0.99783	0.93676	1.00001
0.14	0.27519	0.26465	0.44918	0.78	0.72145	0.66308	0.93003	5.10	0.99806	0.93798	1.00001
0.15	0.28833	0.27701	0.46824	0.79	0.72514	0.66615	0.93220	5.20	0.99826	0.93916	1.00001
0.16	0.30105	0.28896	0.48648	0.80	0.72876	0.66917	0.93430	5.30	0.99843	0.94029	1.00001
0.17	0.31339	0.30051	0.50395	0.81	0.73234	0.67214	0.93634	5.40	0.99859	0.94139	1.00001
0.18	0.32536	0.31171	0.52071	0.82	0.73585	0.67507	0.93831	5.50	0.99874	0.94244	1.00001
0.19	0.33700	0.32256	0.53680	0.83	0.73932	0.67795	0.94022	5.60	0.99887	0.94346	1.00001
0.20	0.34831	0.33308	0.55225	0.84	0.74273	0.68078	0.94207	5.70	0.99898	0.94444	1.00001
0.21	0.35932	0.34330	0.56711	0.85	0.74609	0.68356	0.94386	5.80	0.99909	0.94539	1.00001
0.22	0.37004	0.35323	0.58141	0.86	0.74941	0.68631	0.94560	5.90	0.99918	0.94630	1.00001
0.23	0.38048	0.36289	0.59517	0.87	0.75267	0.68901	0.94729	6.00	0.99926	0.94719	1.00001
0.24	0.39067	0.37228	0.60842	0.88	0.75589	0.69167	0.94892	6.10	0.99934	0.94805	1.00001
0.25	0.40060	0.38142	0.62118	0.89	0.75905	0.69429	0.95050	6.20	0.99941	0.94888	1.00001
0.26	0.41030	0.39032	0.63349	0.90	0.76218	0.69687	0.95203	6.30	0.99947	0.94968	1.00001
0.27	0.41977	0.39899	0.64536	0.91	0.76525	0.69941	0.95352	6.40	0.99952	0.95046	1.00001
0.28	0.42901	0.40744	0.65681	0.92	0.76828	0.70191	0.95495	6.50	0.99957	0.95122	1.00001
0.29	0.43805	0.41568	0.66785	0.93	0.77127	0.70437	0.95635	6.60	0.99961	0.95195	1.00001
0.30	0.44689	0.42372	0.67851	0.94	0.77421	0.70680	0.95770	6.70	0.99965	0.95267	1.00001
0.31	0.45553	0.43156	0.68881	0.95	0.77712	0.70919	0.95901	6.80	0.99969	0.95336	1.00001
0.32	0.46398	0.43922	0.69875	0.96	0.77997	0.71155	0.96028	6.90	0.99972	0.95403	1.00001
0.33	0.47226	0.44669	0.70836	0.97	0.78279	0.71387	0.96151	7.00	0.99975	0.95468	1.00001
0.34	0.48035	0.45399	0.71764	0.98	0.78557	0.71616	0.96270	7.10	0.99977	0.95531	1.00001
0.35	0.48828	0.46113	0.72661	0.99	0.78831	0.71841	0.96385	7.20	0.99980	0.95593	1.00001
0.36	0.49605	0.46810	0.73527	1.00	0.79101	0.72064	0.96497	7.30	0.99982	0.95653	1.00001
0.37	0.50366	0.47491	0.74365	1.00	0.79101	0.72064	0.96497	7.40	0.99984	0.95712	1.00001
0.38	0.51112	0.48157	0.75176	1.10	0.81600	0.74121	0.97442	7.50	0.99985	0.95768	1.00001
0.39	0.51843	0.48809	0.75959	1.20	0.83774	0.75915	0.98132	7.60	0.99987	0.95824	1.00001
0.40	0.52559	0.49447	0.76717	1.30	0.85670	0.77491	0.98636	7.70	0.99988	0.95878	1.00001
0.41	0.53262	0.50070	0.77450	1.40	0.87328	0.78885	0.99004	7.80	0.99989	0.95930	1.00001
0.42	0.53951	0.50681	0.78159	1.50	0.88782	0.80124	0.99273	7.90	0.99991	0.95981	1.00001
0.43	0.54627	0.51279	0.78846	1.60	0.90059	0.81233	0.99469	8.00	0.99992	0.96031	1.00001
0.44	0.55290	0.51864	0.79510	1.70	0.91183	0.82229	0.99612	8.10	0.99992	0.96080	1.00001
0.45	0.55941	0.52437	0.80152	1.80	0.92172	0.83129	0.99717	8.20	0.99993	0.96128	1.00001
0.46	0.56580	0.52998	0.80774	1.90	0.93046	0.83945	0.99793	8.30	0.99994	0.96174	1.00001
0.47	0.57207	0.53548	0.81376	2.00	0.93817	0.84689	0.99849	8.40	0.99995	0.96219	1.00001
0.48	0.57823	0.54086	0.81958	2.10	0.94500	0.85369	0.99890	8.50	0.99995	0.96264	1.00001
0.49	0.58428	0.54614	0.82522	2.20	0.95104	0.85992	0.99920	8.60	0.99996	0.96307	1.00001
0.50	0.59022	0.55132	0.83068	2.30	0.95639	0.86566	0.99942	8.70	0.99996	0.96349	1.00001
0.51	0.59605	0.55639	0.83597	2.40	0.96114	0.87096	0.99958	8.80	0.99997	0.96391	1.00001
0.52	0.60178	0.56136	0.84109	2.50	0.96536	0.87587	0.99969	8.90	0.99997	0.96431	1.00001
0.53	0.60741	0.56624	0.84604	2.60	0.96910	0.88043	0.99978	9.00	0.99997	0.96470	1.00001
0.54	0.61294	0.57102	0.85084	2.70	0.97243	0.88466	0.99984	9.10	0.99998	0.96509	1.00001
0.55	0.61838	0.57572	0.85549	2.80	0.97439	0.88862	0.99988	9.20	0.99998	0.96547	1.00001
0.56	0.62372	0.58032	0.85999	2.90	0.97802	0.89232	0.99992	9.30	0.99998	0.96584	1.00001
0.57	0.62897	0.58484	0.86435	3.00	0.98036	0.89578	0.99994	9.40	0.99998	0.96620	1.00001
0.58	0.63413	0.58927	0.86857	3.10	0.98245	0.89903	0.99996	9.50	0.99999	0.96656	1.00001
0.59	0.63921	0.59362	0.87266	3.20	0.98432	0.90209	0.99997	9.60	0.99999	0.96690	1.00001
0.60	0.64420	0.59789	0.87662	3.30	0.98598	0.90497	0.99998	9.70	0.99999	0.96724	1.00001
0.61	0.64911	0.60208	0.88045	3.40	0.98746	0.90768	0.99999	9.80	0.99999	0.96758	1.00001
0.62	0.65394	0.60620	0.88417	3.50	0.98878	0.91025	0.99999	9.90	0.99999	0.96790	1.00001
0.63	0.65869	0.61024	0.88776	3.60	0.98996	0.91268	1.00000	10.00	0.99999	0.96822	1.00001



Afb. 6 - Extra toestroming op het uiteinde van een half-oneindige draineerleiding in phreatisch water boven een moeilijk doorlatende laag.

brengt q_0 , en een variabele afmaling s_x zou met een puttenreeks kunnen worden gerealiseerd. Bij een draineerleiding is dit echter onmogelijk. Afhankelijk van de waterbeweging in de leiding, stelt zich hier immers een bepaald verloop van de afmaling in, waaraan de toestroming van grondwater zich moet aanpassen. Is de leiding uitgevoerd als een open kanaal met een ruim profiel van de natte doorsnede, dan zijn de waterstandsvariëaties over de lengte van de leiding verwaarloosbaar en is de afmaling constant, gelijk s_0 . Om voor dit geval de grootte en het verloop van de toestroming q_x gemakkelijker te kunnen berekenen, zal een trucje worden toegepast, waartoe in afb. 4 de waterstandsverlaging s_0 van een oneindig lang kanaal met constante opbrengst

$$q_0 = \frac{2kH}{\lambda} \cdot s_0$$

in drie delen is gesplitst:

- de verlaging s_{0x} ten gevolge van de onttrekking q_0 over het traject $0 < x < L$
- de verlaging s_{1x} ten gevolge van de onttrekking q_0 over het traject $-\infty < x < 0$
- de verlaging s_{2x} ten gevolge van de onttrekking q_0 over het traject $L < x < +\infty$

met steeds de betrekking

$$s_0 = s_{0x} + s_{1x} + s_{2x}$$

Voor een half-oneindig kanaal, $0 < x < +\infty$, is de waterstandsverlaging gelijk $s_{0x} + s_{2x}$. Om nu toch een constante verlaging s_0 te verkrijgen, moet aan het kanaal meer water worden onttrokken en wel zodanig verdeeld, dat de hierdoor veroorzaakte waterstandsverlaging gelijk is aan s_{1x} . Om de hoeveelheid rekenwerk te beperken, zijn deze extra onttrekkingen op de in afb. 5 aangegeven wijze geschematiseerd. Uit de eis dat de totale hieruit voortvloeiende waterstandsverlaging in de punten x_1 tot en met x_5 gelijk is aan de overeenkomstige waarde van s_{1x} , volgen 5 lineaire vergelijkingen met 5 onbekenden. De oplossing is in afb. 6 weergegeven en toont inderdaad bij het uiteinde van het kanaal een extra toestroming van aanzienlijke omvang.

Om de extra toestroming op het kanaaluiteinde nauwkeuriger te bepalen, zou in afb. 5 een fijnere verdeling van de additionele onttrekkingen $\beta \cdot q_0$ kunnen worden toegepast. In verband met de daaraan verbonden hoeveelheid rekenwerk, is nu de hulp van een computer onmisbaar. Het in afb. 6 met een stippellijn aangegeven

verloop is door de groep Numerieke Analyse van de Technische Hogeschool Delft bepaald. Deze berekening laat ook toe de extra toestroming te schrijven in de vorm

$$q_{1x} = q_0 \cdot F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

De waarden van de functie F_4 zijn in tabel 2 weergegeven. Voor $x > 1,5\lambda$ is de extra toestroming q_{1x} verwaarloosbaar ten opzichte van q_0 . Aangezien de waterstandsverlagingen s_{1x} en s_{2x} elkaars spiegelbeeld zijn, betekent dit dat voor een draineerleiding van eindige lengte $L > 1,5\lambda$ en constante waterstandsverlaging, de toestroming

$$q_x = q_0 + q_{1x} + q_{2x}$$

gelijk is aan

$$q_x = q_0 \left\{ 1 + F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right) + F_4\left(\frac{L-x}{\lambda}\right) \right\}$$

Geldt bv. $L = 2\lambda$, dan bedraagt de toestroming:

x	0	0,1	0,2	0,5	1,0	$x \lambda$
q_0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	$x q_0$
q_{1x}	∞	0,98	0,52	0,17	0,05	$x q_0$
q_{2x}	0,01	0,01	0,01	0,02	0,05	$x q_0$
q_x	∞	1,99	1,53	1,19	1,10	$x q_0$

welk resultaat in afb. 7 nog eens grafisch is weergegeven.

Is de leidinglengte L kleiner dan $1,5\lambda$, dan kan de bovenaangegeven spiegelmethode in principe niet worden gebruikt. Toepassing van deze methode is intussen nog wel mogelijk, wanneer de functie F_4 voor de onderhavige verhouding $L/\lambda < 1,5$ wordt gecorrigeerd. Bij benadering kan dit geschieden met de gegevens van tabel 2, waarin voor enkele waarden van L/λ de gecorrigeerde functie F_4 is weergegeven.

De totale toestroming over de lengte L kan tenslotte worden berekend als

$$Q_L = \int_0^L q_x \cdot dx = q_0 \int_0^L \left\{ 1 + 2 \cdot F_4\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\} \cdot dx$$

$$Q_L = n (q_0 \cdot L)$$

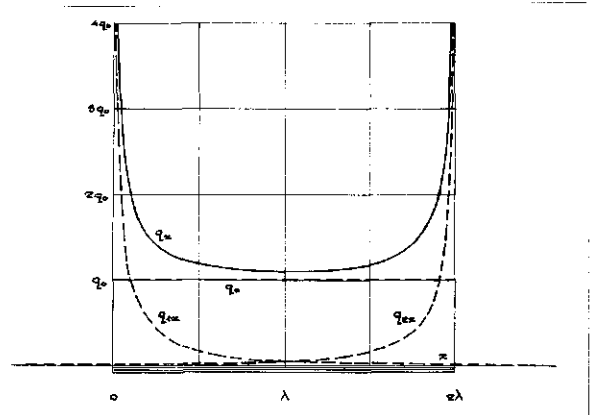
waarin n een functie van de verhouding L/λ :

L	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0	$x \lambda$
Q_L	5,02	3,00	2,06	1,57	1,25	1,13	$x q_0 \cdot L$

Met behulp van de gegevens van tabel II kan de toestroming op een draineerleiding in phreatisch water boven een moeilijk doorlatende laag gemakkelijk worden berekend, zowel wat betreft de totale opbrengst als ten aanzien van de verdeling over de lengte der leiding. Aan deze berekeningen ligt echter wel de veronderstelling ten grondslag dat de waterstandsverlaging over de gehele leidinglengte L constant is, gelijk s_0 . Dit behoeft intussen niet het geval te zijn en zowel door een helling van de waterspiegel vóór als tijdens onttrekking kan een variatie in de peilverlaging langs de draineerleiding optreden. De waterspiegel vóór onttrekking is doorgaans bekend, doch de waterspiegel tijdens onttrekking hangt mede af van de wrijvings- en vertragsverliezen welke de stroming van het gewonnen water door de leiding zelf begeleiden. Vooral bij gesloten draineerleidingen met kleine diameter en grote stroomsnelheid kunnen deze verliezen aanzienlijk zijn, waardoor de toestroming op het benedenstroomse leidinggedeelte aanzienlijk zal toenemen. Wordt het

TABEL II - $F_A \left(\frac{x}{\lambda} \right)$

$\frac{x}{\lambda}$	$L = 3\lambda$	$L = \lambda$	$L = 0.5\lambda$	$L = 0.2\lambda$
0.00	∞	∞	∞	∞
0.005	10	10	10	10
0.01	6	6	6	6
0.02	3.3	3.3	3.3	3.3
0.03	2.5	2.5	2.5	2.6
0.04	2.0	2.0	2.0	2.1
0.05	1.7	1.7	1.7	1.8
0.06	1.47	1.47	1.47	1.57
0.07	1.31	1.31	1.31	1.43
0.08	1.18	1.18	1.18	1.31
0.09	1.07	1.07	1.07	1.22
0.10	0.983	0.983	0.985	1.13
0.11	0.903	0.903	0.907	1.07
0.12	0.838	0.838	0.842	1.00
0.13	0.780	0.780	0.785	0.96
0.14	0.729	0.729	0.734	0.94
0.15	0.683	0.683	0.689	0.94
0.16	0.642	0.642	0.649	0.97
0.17	0.605	0.605	0.613	1.04
0.18	0.572	0.572	0.580	1.15
0.19	0.542	0.542	0.550	1.75
0.195	0.527	0.527	0.536	3
0.20	0.514	0.514	0.524	∞
0.22	0.465	0.465	0.480	
0.24	0.424	0.424	0.441	
0.26	0.388	0.388	0.407	
0.28	0.356	0.356	0.376	
0.30	0.328	0.328	0.349	
0.32	0.303	0.303	0.329	
0.34	0.281	0.281	0.315	
0.36	0.262	0.262	0.302	
0.38	0.245	0.245	0.293	
0.40	0.229	0.229	0.288	
0.42	0.214	0.214	0.289	
0.44	0.201	0.202	0.299	
0.46	0.188	0.190	0.327	
0.48	0.177	0.179	0.404	
0.49	0.172	0.174	0.6	
0.50	0.167	0.169	∞	
0.55	0.145	0.147		
0.60	0.126	0.129		
0.65	0.111	0.115		
0.70	0.097	0.103		
0.75	0.086	0.094		
0.80	0.076	0.087		
0.85	0.068	0.082		
0.90	0.061	0.094		
0.95	0.054	0.120		
0.98	0.051	∞		
1.00	0.049			
1.1	0.039			
1.2	0.032			
1.3	0.026			
1.4	0.022			
1.5	0.018			
1.6	0.014			
1.7	0.012			
1.8	0.010			
1.9	0.008			
2.0	0.007			
2.1	0.005			
2.2	0.004			
2.3	0.003			
2.4	0.003			
2.5	0.002			
2.6	0.001			
2.7	0.001			
2.8	0.000			
2.9	0.000			
3.0	0.000			



Afb. 7 - Toestroming op een draineerleiding in phreatisch water boven een moeilijk doorlatende laag.

uit beide variaties voortvloeiende verloop van de peilverlaging s_x voorlopig geschat, dan kan in eerste aanleg worden getracht dit verloop te benaderen met

$$s_x = \gamma_0 \cdot s_{0x} + \gamma_1 \cdot s_{1x} + \gamma_2 \cdot s_{2x}$$

d.w.z. met een toestroming

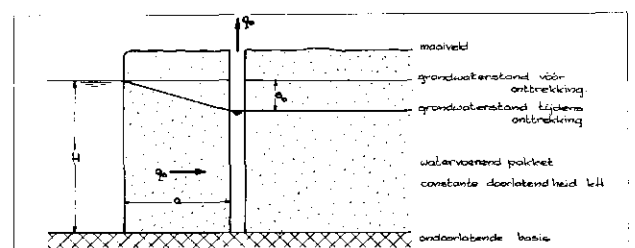
$$q_x = \gamma_0 \cdot q_0 + \gamma_1 \cdot q_{1x} + \gamma_2 \cdot q_{2x}$$

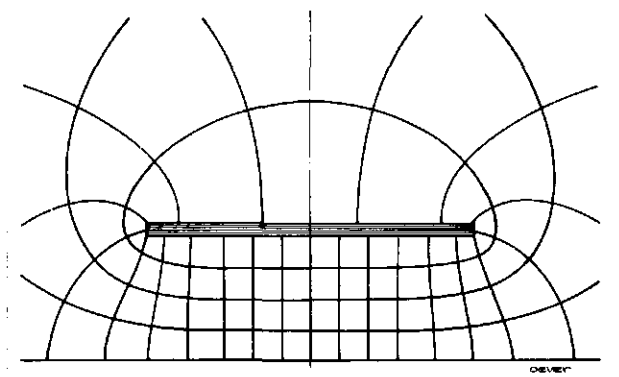
Door een geschikte keuze van de 3 parameters γ zal doorgaans wel een voldoende nauwkeurige benadering van de verwachte peilverlaging kunnen worden verkregen. Is dit niet het geval, bv. wanneer de draineerleiding door stuwen in panden met verschillend peil is onderverdeeld, dan moet de in afb. 5 geschetste rekenwijze worden gevolgd. De hieraan verbonden hoeveelheid rekenwerk is op zichzelf niet onoverkomelijk, doch door de invloed van de onttrekking op het waterstandsverloop in de leiding zelf, zal deze berekening enkele malen moeten worden herhaald om een goede overeenstemming tussen de grondslag voor en het resultaat van de berekening te verkrijgen.

3. Phreatisch water boven een ondoorlatende basis

Wanneer in de situatie van afb. 2 de nuttige neerslag ontbreekt, dan behoudt de waterstandsverlaging s dezelfde waarde en is de onttrekking door de draineerleiding geheel van het artesische water beneden de moeilijk doorlatende laag afkomstig. Deze voeding van beneden af verdwijnt echter wanneer de moeilijk doorlatende laag een oneindig grote weerstand heeft, d.w.z. wanneer het watervoerende pakket boven een ondoorlatende basis is gelegen. Een voeding van de zijkanten af is nu onmisbaar en daarom is in afb. 8 een half-oneindig pakket ondersteld, dat aan de linkerzijde door open water met constant peil wordt begrensd. Wordt nu op een afstand a evenwijdig aan dit open water een oneindig lange drai-

Afb. 8 - Waterwinning in een half-oneindig pakket boven een ondoorlatende basis.





Afb. 9 - Grondwaterstroming naar een draineerleiding evenwijdig aan open water.

neerleiding aangelegd, dan geeft de wet van Darcy als verband tussen opbrengst en afmaling

$$q_0 = kH \cdot \frac{s_0}{a}$$

Zoal reeds uit afb. 9 blijkt zal voor een kanaal van beperkte lengte met dezelfde afmaling s_0 , de opbrengst groter zijn of omgekeerd voor eenzelfde opbrengst q_0 de afmaling geringer zijn. De laatstgenoemde omstandigheid laat zich het gemakkelijkst berekenen, waartoe in afb. 10 de plattegrond van zulk een draineerleiding is getekend. Met behulp van de spiegelmethode volgt voor de waterstandsverlaging in een willekeurig punt P ten gevolge van een onttrekking q_0 over een lengte dl:

$$ds_p = \frac{q_0 \cdot dl}{2\pi kH} \cdot \ln \frac{r'}{r}$$

$$r = \sqrt{(x-1)^2 + (y-a)^2}$$

$$r' = \sqrt{(x-1)^2 + (y+a)^2}$$

De totale waterstandsverlaging in P ten gevolge van de onttrekking q_0 over de volle lengte L wordt hiermede:

$$s_p = \frac{q_0}{4\pi kH} \int_0^L \ln \frac{(x-1)^2 + (y+a)^2}{(x-1)^2 + (y-a)^2} \cdot dl$$

Voor een punt op de draineerleiding geldt $y = a$ en vereenvoudigt deze formule zich tot:

$$s_x = \frac{q_0}{4\pi kH} \int_0^L \ln \left\{ 1 + \left(\frac{2a}{x-1} \right)^2 \right\} \cdot dl$$

$$\text{Met } s_0 = \frac{a}{kH} \cdot q_0$$

als afmaling van een oneindig lange leiding met dezelfde opbrengst q_0 per m' en de substitutie:

$$\alpha = \frac{x-1}{2a}, \quad d\alpha = \frac{-dl}{2a} \quad \text{volgt}$$

$$s_x = -\frac{s_0}{2\pi} \int_{\frac{x}{2a}}^{\frac{x-L}{2a}} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \cdot d\alpha$$

De oplossing van deze integraal kan worden geschreven als

$$s_x = \frac{s_0}{2} \left\{ F_2 \left(\frac{x}{2a} \right) + F_2 \left(\frac{L-x}{2a} \right) \right\} \quad \text{waarin}$$

$$F_2(\alpha) = -F_2(-\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{2}{\pi} \text{bg tg } \alpha$$

De waarden van de functie $F_2(\alpha)$ zijn in tabel I weergegeven. Geldt bv. $L = 5a$, dan volgt uit deze tabel voor de verdeling van de waterstandsverlaging:

$x =$	0	0,25	0,5	1	2,5	$x a$
$s_x =$	0,439	0,557	0,622	0,699	0,767	$x s_0$

Om voor een constante afmaling s_0 de verdeling van de toestroming over de lengte L van de leiding te leren kennen, kan de reeds in 2. geïntroduceerde en in afb. 11 nog eens voorgestelde drie-deling van de potentiaalverlaging worden toegepast

$$s_0 = s_{0x} + s_{1x} + s_{2x}$$

waarin s_{0x} de verlaging ten gevolge een constante onttrekking q_0 en $s_{1x} + s_{2x}$ de verlaging voortvloeiende uit de extra toestroming op de uiteinden van de leiding. Voor een half-oneindig kanaal is de verlaging s_{1x} in afb. 12 weergegeven, welke afb. tevens de additionele onttrekkingen β . q_0 toont waarmede deze peilverlaging zal worden nagebootst. Uit de eis dat in de punten x_1 tot en met x_6 overeenstemming bestaat tussen de benodigde en de uit de extra onttrekking voortvloeiende peilverlagingen, resulteren 6 lineaire vergelijkingen met 6 onbekenden, waarvan de oplossing in afb. 13 is weergegeven. Bij een oneindig fijne verdeling van de extra toestromingen zou het met een stippellijn in deze afb. aangegeven resultaat zijn verkregen. Dit resultaat kan nu ook worden voorgesteld als

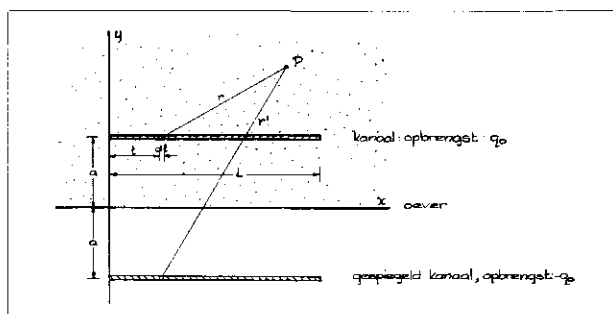
$$q_{1x} = q_0 \cdot F_5 \left(\frac{x}{2a} \right)$$

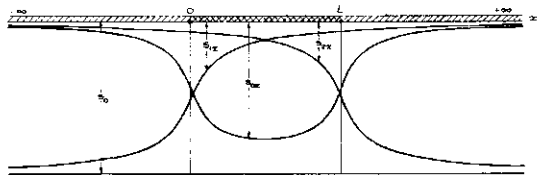
waarin de waarden van de functie F_5 in tabel III zijn weergegeven. Voor grotere leidinglengten, in dit geval voor $L > 15a$ heeft deze functie een eenduidige waarde, terwijl voor kleinere lengten de waarde mede van de verhouding L/a afhankelijk is. Zonodig door interpolatie kan echter met behulp van deze tabel voor elke leidinglengte L de verdeling van de toestroming q_x worden bepaald

$$q_x = q_{0x} + q_{1x} + q_{2x} \quad \text{of}$$

$$q_x = q_0 \left\{ 1 + F_5 \left(\frac{x}{2a} \right) + F_5 \left(\frac{L-x}{2a} \right) \right\}$$

Afb. 10 - Draineerleiding van beperkte lengte op constante afstand evenwijdig aan open water met vast peil.





Afb. 11 - Waterstandsverlaging door bemaling van een oneindig lange draineerleiding in phreatisch water met zijdelingse voeding.

Geldt bv. $L = 5a$, dan bedraagt deze toestroming

$x = 0$	0,1	0,2	0,5	1	2,5	$x a$
$q_{0x} = 1,00$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	$x q_0$
$q_{1x} = \infty$	2,0	1,0	0,44	0,22	0,094	$x q_0$
$q_{2x} = \infty$	0,11	0,087	0,071	0,067	0,094	$x q_0$
$q_x = \infty$	3,1	2,09	1,51	1,29	1,19	$x q_0$

welk resultaat nog eens grafisch in afb. 14 is weergegeven. De totale toestroming over de lengte L volgt tenslotte uit

$$Q_L = \int_0^L q_x \cdot dx = q_0 \int_0^L \left\{ 1 + 2 \cdot F_5 \left(\frac{x}{2a} \right) \right\} \cdot dx$$

of

$$Q_L = n (q_0 \cdot L)$$

waarin n een functie van de verhouding L/a :

$L = 2$	5	10	20	50	100	$x a$
$Q_L = 2,29$	1,70	1,33	1,23	1,13	1,07	$x q_0 \cdot L$

4. Kunstmatige infiltratie

Een interessante toepassing van de theorie betreffende het koeffect wordt gevonden bij de kunstmatige infiltratie. Voor de in afb. 15 geschetste situatie met één kanaal voor watertoevoer en één kanaal voor onttrekking, mogen de in de vorige paragraaf gevonden resultaten zelfs onverkort worden toegepast. Het hierbij optredende stroombeeld is immers gelijk aan dat van afb. 9, mits het laatste ten opzichte van de oeverlijn wordt gespiegeld. Door het koeffect zal de capaciteit van de kunstmatige infiltratie aanzienlijk groter zijn dan met het evenredige deel van een oneindig lange leiding overeenkomt. Volgens de tabel aan het einde van de vorige paragraaf is dit vooral het geval naarmate langere verblijftijden worden gewenst en de onderlinge afstand van beide leidingen toeneemt.

Kunstmatige infiltratie wordt intussen doorgaans gerealiseerd met een aantal voedings- en draineerleidingen, welke elkaar in regelmatige volgorde afwisselen, zoals in afb. 16 schematisch is weergegeven. Het hierbij optredende stroombeeld wijkt echter af van hetgeen in de vorige paragrafen is behandeld en voor de bepaling van het koeffect is dan ook een nieuwe berekening noodzakelijk. Hierbij kan gebruik gemaakt worden van de omstandigheid, dat de symmetrielijnen A-A en B-B eenzelfde potentiaal bezitten. Dit maakt het mogelijk om de berekening te beperken tot de in afb. 17 aangegeven terreinstrook, welke als het ware aan beide zijden door open water met constant peil wordt begrensd.

Wanneer de leiding in het midden van de in afb. 17 getekende terreinstrook een oneindig grote lengte heeft, dan is de opbrengst constant, gelijk

$$q_0 = 2 \cdot kH \cdot \frac{s_0}{b}$$

waarin s_0 het peilverschil tussen buitenwater en leiding voorstelt. Heeft de leiding echter slechts een beperkte lengte L , dan is voor eenzelfde opbrengst q_0 de peilverlaging kleiner. Voor een punt op de leiding bedraagt de bijdrage aan deze verlaging ten gevolge van een onttrekking q_0 over een lengte dl

$$ds_x = \frac{q_0 \cdot dl}{2\pi kH} \cdot \ln \frac{1 + e^{-\frac{\pi(x-1)}{2b}}}{1 - e^{-\frac{\pi(x-1)}{2b}}}$$

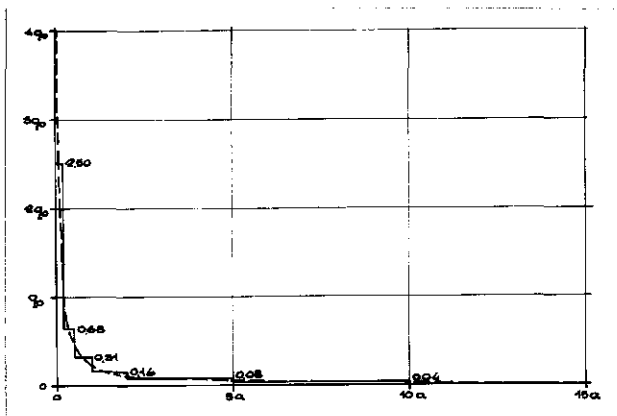
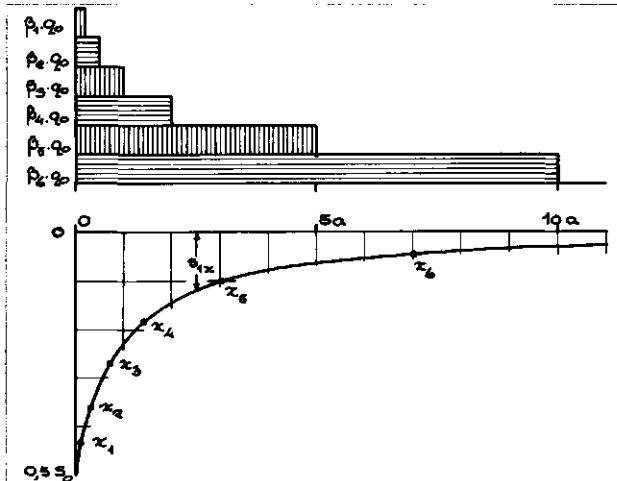
TABEL III - $F_5 \left(\frac{x}{2a} \right)$

$\frac{x}{2a}$	$L = 20a$	$L = 10a$	$L = 5a$	$L = 2a$
0.00	∞	∞	∞	∞
0.02	4	4	4	4
0.05	2	2	2	2
0.1	1.0	1.0	1.0	1.0
0.15	0.71	0.71	0.71	0.71
0.2	0.55	0.55	0.55	0.55
0.25	0.44	0.44	0.44	0.44
0.3	0.37	0.37	0.37	0.37
0.35	0.31	0.31	0.31	0.32
0.4	0.27	0.27	0.27	0.28
0.45	0.24	0.24	0.24	0.25
0.5	0.22	0.22	0.22	0.23
0.55	0.199	0.199	0.199	0.210
0.6	0.183	0.183	0.183	0.193
0.65	0.169	0.169	0.169	0.181
0.7	0.158	0.158	0.158	0.173
0.75	0.148	0.148	0.149	0.171
0.8	0.139	0.139	0.140	0.173
0.85	0.131	0.131	0.132	0.181
0.9	0.125	0.125	0.126	0.196
0.95	0.119	0.119	0.120	0.288
0.98	0.115	0.115	0.116	0.48
1.0	0.113	0.113	0.114	∞
1.1	0.103	0.103	0.105	
1.2	0.095	0.095	0.097	
1.3	0.089	0.089	0.091	
1.4	0.083	0.083	0.085	
1.5	0.078	0.078	0.080	
1.6	0.073	0.074	0.076	
1.7	0.069	0.070	0.073	
1.8	0.065	0.066	0.071	
1.9	0.062	0.063	0.069	
2.0	0.059	0.060	0.067	
2.1	0.056	0.057	0.067	
2.2	0.053	0.055	0.068	
2.3	0.051	0.053	0.073	
2.4	0.049	0.051	0.087	
2.45	0.048	0.050	0.11	
2.5	0.047	0.049	∞	
2.75	0.042	0.044		
3	0.039	0.041		
3.25	0.036	0.038		
3.50	0.033	0.036		
3.75	0.030	0.033		
4.00	0.028	0.032		
4.25	0.026	0.031		
4.50	0.025	0.030		
4.75	0.023	0.033		
4.9	0.022	0.041		
5.00	0.022	∞		
5.5	0.020			
6	0.018			
6.5	0.016			
7	0.015			
7.5	0.014			
8	0.013			
8.5	0.012			
9	0.011			
9.5	0.011			
10	0.010			

(Steady flow of ground-water towards wells, Commissie voor Hydrologisch Onderzoek TNO, Verslagen en Mededelingen no. 10, blz. 137).

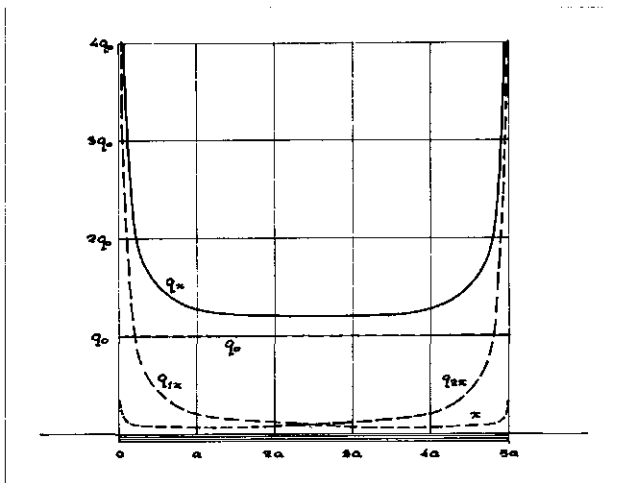
Met $s_0 = \frac{b}{2kH} \cdot q_0$

Afb. 12 - Extra toestroming op het uiteinde van een half-oneindige draineerleiding bij zijdelingse voeding.



Afb. 13 - Extra toestroming op het uiteinde van een half-oneindige draineerleiding bij zijdelingse voeding.

Afb. 14 - Toestroming op een draineerleiding evenwijdig aan open water.



als afmaling van een oneindig lange leiding met dezelfde opbrengst q_0 per m' en de substitutie:

$$\alpha = \frac{x-1}{2b}, \quad d\alpha = \frac{-dl}{2b}$$

volgt als totale potentiaalverlaging ten gevolge een ont-trekking q_0 over de lengte L

$$s_x = -\frac{2s_0}{\pi} \int_{\frac{x}{2b}}^{\frac{x-L}{2b}} \ln \frac{e^{\pi\alpha} + 1}{e^{\pi\alpha} - 1} \cdot d\alpha$$

De oplossing van deze integraal kan worden geschreven in de vorm

$$s_x = \frac{s_0}{2} \left\{ F_3\left(\frac{x}{2b}\right) + F_3\left(\frac{L-x}{2b}\right) \right\} \text{ waarin}$$

$$F_3(\alpha) = -F_3(-\alpha) = \frac{4}{\pi} \int_0^\alpha \ln \frac{e^{\pi\alpha} + 1}{e^{\pi\alpha} - 1} \cdot d\alpha$$

weergegeven in tabel I.

Om voor een constante afmaling s_0 de verdeling van de toestroming te leren kennen, kan dezelfde methode worden gebruikt als in de vorige paragrafen is ontwikkeld. Voor de half-oneindige draineerleiding van afb. 18 volgt hieruit als extra toestroming

$$q_{1x} = q_0 \cdot F_6\left(\frac{x}{2b}\right)$$

waarmede voor een leiding met beperkte lengte L de verdeling van de toestroming wordt gegeven door

$$q_x = q_0 \left\{ 1 + F_6\left(\frac{x}{2b}\right) + F_6\left(\frac{L-x}{2b}\right) \right\}$$

Voor $L > 1,2 b$ heeft de functie F_6 een eenduidige waarde. Kortere leidinglengten zullen in de praktijk van de kunstmatige infiltratie wel niet worden toegepast. Volledigheidshalve is in tabel IV de functie F_6 echter ook voor kleinere waarden weergegeven. De totale voeding over de volle lengte L wordt tenslotte

$$q_L = \int_0^L q_x \cdot dx = n (q_0 \cdot L)$$

waarin n een functie van de verhouding L/b:

L =	0,2	0,5	10	20	50	100	200	x b
q_L =	5,42	3,00	2,05	1,56	1,21	1,16	1,08	x q_0 \cdot L

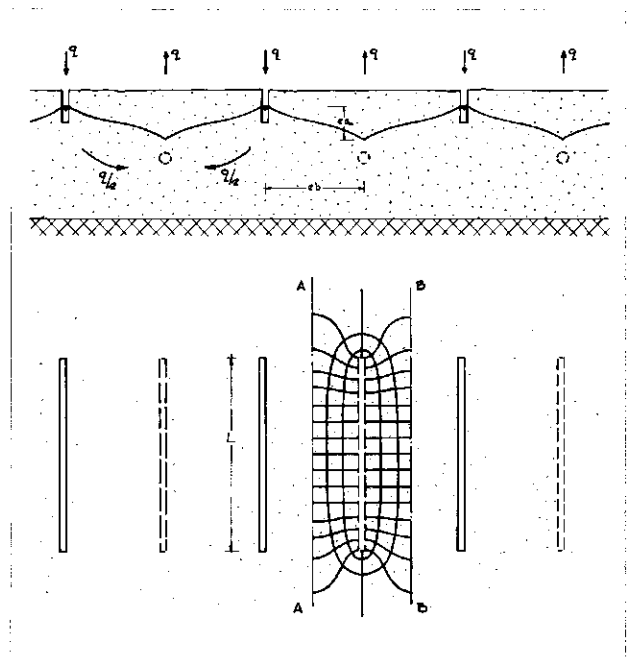
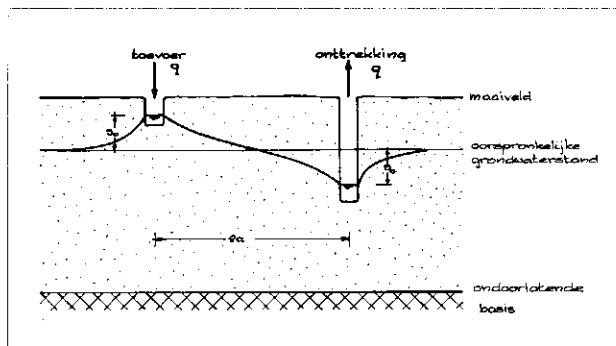
Tengevolge van het symmetrische stromingsbeeld is het koeffect minder uitgesproken dan in paragraaf 3 voor de situatie van afb. 15 werd afgeleid.

De computerberekeningen voor dit artikel zijn mogelijk gemaakt door medewerking van prof. dr. E. van Spiegel van de Technische Hogeschool Delft, Afdeling der Algemene Wetenschappen, groep Numerieke Analyse. Zij zijn uitgevoerd door de wetenschappelijk medewerker ir. J. J. I. M. van Kan van deze groep. De schrijver van dit artikel betuigt hiervoor gaarne zijn hartelijke dank, in het bijzonder aan ir. van Kan voor de prettige samenwerking en de hulp bij de definitieve opzet verleend.

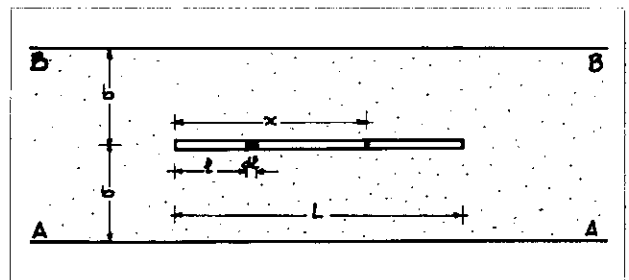
TABEL IV - $F_6 \left(\frac{x}{2b}\right)$

$\frac{x}{2b}$	$L = 3b$	$L = b$	$L = 0.5b$	$L = 0.2b$
0.00	∞	∞	∞	∞
0.0025	10	10	10	10
0.005	6	6	6	6
0.010	3.3	3.3	3.3	3.3
0.015	2.4	2.4	2.4	2.5
0.020	1.96	1.96	1.96	2.04
0.025	1.66	1.66	1.66	1.74
0.030	1.44	1.44	1.44	1.52
0.035	1.28	1.28	1.28	1.36
0.040	1.14	1.14	1.14	1.25
0.045	1.04	1.04	1.04	1.15
0.050	0.944	0.944	0.944	1.07
0.055	0.866	0.866	0.866	1.00
0.060	0.799	0.799	0.799	0.93
0.065	0.740	0.740	0.740	0.88
0.070	0.688	0.688	0.688	0.86
0.075	0.644	0.644	0.644	0.85
0.080	0.603	0.603	0.603	0.87
0.085	0.566	0.566	0.566	0.92
0.090	0.532	0.532	0.532	1.01
0.095	0.501	0.501	0.502	1.51
0.0975	0.486	0.486	0.487	2.3
0.10	0.472	0.472	0.475	∞
0.11	0.422	0.423	0.430	
0.12	0.380	0.380	0.389	
0.13	0.343	0.344	0.353	
0.14	0.311	0.311	0.320	
0.15	0.283	0.283	0.293	
0.16	0.259	0.259	0.272	
0.17	0.237	0.237	0.255	
0.18	0.217	0.217	0.240	
0.19	0.200	0.200	0.228	
0.20	0.184	0.184	0.219	
0.21	0.170	0.170	0.214	
0.22	0.157	0.157	0.216	
0.23	0.145	0.145	0.230	
0.24	0.134	0.134	0.276	
0.2475	0.126	0.126	0.67	
0.250	0.124	0.124	∞	
0.275	0.103	0.103		
0.300	0.086	0.086		
0.325	0.072	0.073		
0.350	0.060	0.062		
0.375	0.050	0.053		
0.400	0.042	0.046		
0.425	0.036	0.040		
0.450	0.030	0.037		
0.475	0.025	0.038		
0.495	0.022	0.09		
0.500	0.021	∞		
0.6	0.010			
0.7	0.004			
0.8	0.001			
0.9	0.000			
1.0	0.000			

Afb. 15 - Kunstmatige infiltratie.



Afb. 16 - Kunstmatige infiltratie.



Afb. 17 - Draineerleiding in het midden van een strook, aan beide zijden begrensd door open water met constant peil.

Afb. 18 - Extra toestroming op het uiteinde van een half-oneindige draineerleiding bij een ligging volgens afb. 17.

