

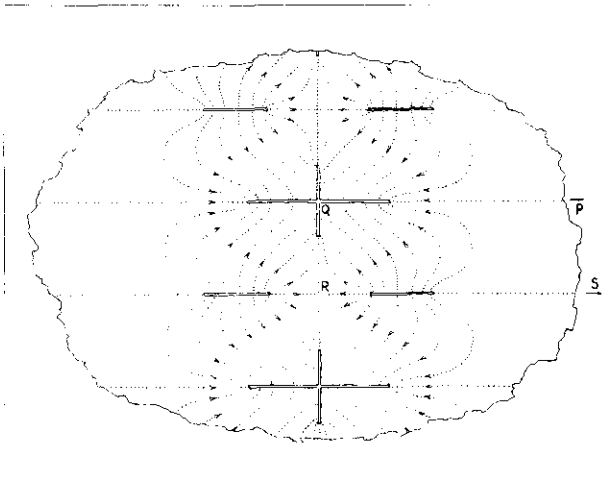
# Het kopeffect bij stroming naar drains

## Inleiding

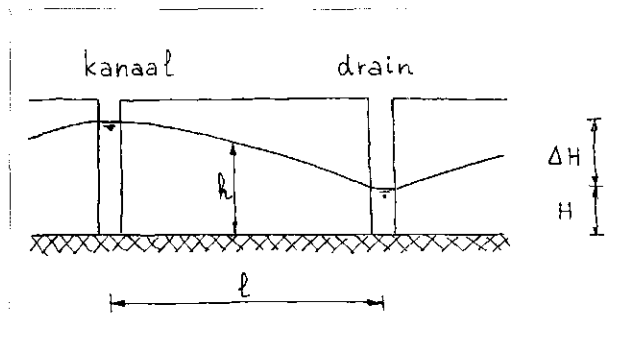
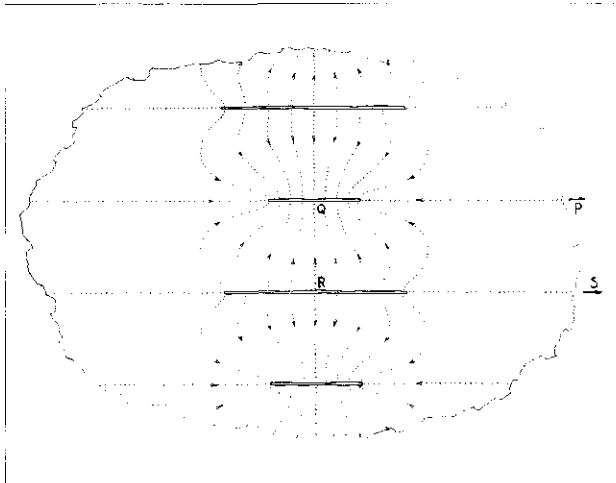
Bij kunstmatige infiltratie in de bodem ten behoeve van de drinkwatervoorziening wordt veelal gebruik gemaakt van kanaal-drainstelsels. De opbrengst van de drains wordt berekend onder verwaarlozing van de kromlijngheid der stroomlijnen. Als gevolg hiervan is de werkelijke opbrengst groter dan uit de berekening zou volgen. Dit staat bekend als het kopeffect [1].

Ter nadere bestudering van dit kopeffect zijn berekeningen uitgevoerd met behulp van de techniek der konforme afbeeldingen. Hierbij is uitgegaan van de aannamen van Dupuit. Er zijn gesloten oplossingen gevonden voor een symmetrisch patroon van kanalen en drains, dat zich periodiek herhaalt (zie afb. 1). De eindpunten van kanaal en drain liggen ergens op een rand PQRS. De afleiding van de algemene oplossing en ook de algemene oplossing zelf zullen in dit artikel niet worden gegeven. Voor belangstellenden zijn overdrukken van

Afb. 1.



Afb. 2.



Afb. 3.

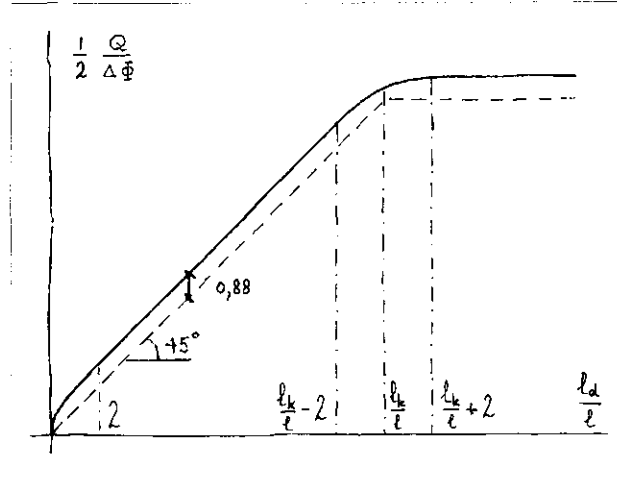
een intern rapport beschikbaar bij de schrijver. Wel zullen twee voor de praktijk belangrijke gevallen worden behandeld als voorbeeld van de verkregen resultaten. Het eerste geval is het hierboven reeds genoemde geval van parallelle kanalen en drains, en het tweede geval is dat van een serie drains loodrecht op een zeer lang kanaal.

## Evenwijdig kanaal-drain stelsel

Een van de gevallen die in de praktijk soms berekend worden onder verwaarlozing van de kromlijngheid der stroomlijnen is het geval, waarbij de kanalen en drains evenwijdig lopen (zie afb. 2). Hieronder nu zal de oplossing voor dit geval worden gepresenteerd, terwijl wel met deze kromlijngheid rekening is gehouden. De beschouwde situatie wordt vastgelegd door de volgende geometrische parameters (zie afb. 2 en 3):

- l — afstand tussen kanaal en drain
- H — hoogte van de watervoerende laag ter plaatse van de drain
- ΔH — verschil in waterhoogte tussen kanaal en drain
- $l_k$  — lengte van een kanaal
- $l_d$  — lengte van een drain

Afb. 4.



De doorlatendheidscoëfficiënt van de grond wordt aangegeven met  $k$ ; het debiet dat uitstroomt uit een kanaal of instroomt in een drain met  $Q$ . Men kan, met behulp van de theorie der conforme afbeeldingen, afleiden dat voor het debiet  $Q$  de volgende relatie geldt:

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = 4 \frac{K(\gamma)}{K(\gamma_1)} \quad (1)$$

waarin

$$\Delta\Phi = k H \Delta H \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{H} \right\} \quad (2)$$

$$\gamma = 1 - \gamma_1 = \operatorname{tgh}^2 \left( \frac{\pi}{4} \frac{l_k}{l} \right) \cdot \operatorname{tgh}^2 \left( \frac{\pi}{4} \frac{l_d}{l} \right) \quad (3)$$

en  $K(m)$  een volledige elliptische integraal is van de eerste soort, getabelleerd voor veranderlijke  $m$ . Ook de verhouding  $K(\gamma_1)/K(\gamma)$  is getabelleerd voor veranderlijke  $\gamma$ , zie bijv. Abramowitz & Segun [2] tabel 17.3.

Ofschoon het debiet per kanaal of drain volledig vastligt als functie van de geometrische parameters, is nog niet duidelijk hoe het verband (1) in elkaar zit. Er zullen dan ook enkele benaderingen voor (1) gegeven worden.

$$\text{Als } l_d = l_k = L \quad \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta\Phi} \approx \frac{L}{1} + \frac{2}{\pi} \ln 2$$

$$\text{Als } l_k > l_d + 2l \quad \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta\Phi} \approx \frac{l_d}{1} + \frac{4}{\pi} \ln 2$$

$$\text{Als } l_d > l_k + 2l \quad \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta\Phi} \approx \frac{l_k}{1} + \frac{4}{\pi} \ln 2$$

Een grafiek voor het verband tussen  $Q/2\Delta\Phi$  en  $l_d/l$  is voor één bepaalde waarde van  $l_k/l$  weergegeven in afb. 4. De grootte  $Q/2\Delta\Phi$  vertegenwoordigt het debiet dat afstroomt tussen één kanaal en één drain; dit is dus de helft van het totale debiet dat uitstroomt uit ieder kanaal of instroomt in iedere drain.

Zoals al vermeld is, wordt de berekening in de praktijk veelal geschematiseerd, door alleen een rechtlijnige stroming van kanaal naar drain te beschouwen, over een breedte gelijk aan de kleinste van de twee waarden  $l_d$  en  $l_k$ . Het resultaat van dergelijke berekeningen is

$$\text{Als } l_k > l_d \quad \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{l_d}{1}$$

$$\text{Als } l_k = l_d = L \quad \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{L}{1}$$

$$\text{Als } l_k < l_d \quad \frac{1}{2} \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{l_k}{1}$$

Het bovenstaande verband tussen  $Q/2\Delta\Phi$  en  $l_d/l$  voor

één bepaalde waarde van  $l_k/l$  is gestippeld weergegeven in afb. 4. Men ziet dat de grootste fout die gemaakt wordt bij de schematisering  $4 \ln 2/\pi \approx 0,88$  is. Vooral bij wat grotere  $l_d/l$  en  $l_k/l$  heeft deze faktor weinig invloed.

Een tweede grootte waarin men soms geïnteresseerd is, is de verdeling van het specifieke debiet over kanaal en drain, dat aangegeven zal worden met  $q_d$  voor de drain en  $q_k$  voor het kanaal. De richting van het specifiek debiet is loodrecht op de kanalen en drains. De volgende formules zijn afgeleid

$$q_d = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\Phi}{l} \frac{1}{K(\gamma)} \sqrt{\frac{\left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_k}{l} \right) + 1 \right\} \left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_d}{l} \right) + 1 \right\}}{\left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_k}{l} \right) + \operatorname{ch} \left( \pi \frac{x}{l} \right) \right\} \left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_d}{l} \right) - \operatorname{ch} \left( \pi \frac{x}{l} \right) \right\}}} \quad (4)$$

$$q_k = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta\Phi}{l} \frac{1}{K(\gamma)} \sqrt{\frac{\left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_k}{l} \right) + 1 \right\} \left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_d}{l} \right) + 1 \right\}}{\left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_k}{l} \right) - \operatorname{ch} \left( \pi \frac{x}{l} \right) \right\} \left\{ \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2} \frac{l_d}{l} \right) + \operatorname{ch} \left( \pi \frac{x}{l} \right) \right\}}} \quad (5)$$

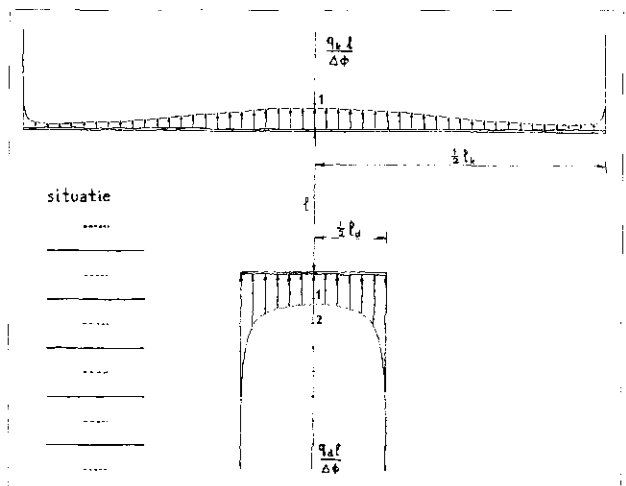
waarin  $x$  een variabele is, gemeten evenwijdig langs een kanaal of drain en  $x = 0$  het midden van een kanaal of drain voorstelt.

Om een indruk te krijgen van het verloop van het specifieke debiet over een kanaal en een drain zijn  $q_k l/\Delta\Phi$  en  $q_d l/\Delta\Phi$  uitgezet voor  $l_k/l = 4$  en  $l_d/l = 1$ ; zie afb. 5.

Tenslotte is er nog een grootte bepaald die van belang kan zijn voor de kwaliteit van het water, dat in de drain uitstroomt, namelijk de verblijftijd. Deze verblijftijd hangt af van de stroomlijn waarlangs het water van kanaal naar drain stroomt. De kortste verblijftijd is die welke behoort bij de stroomlijn van het midden van het kanaal naar het midden van de drain. Voor deze kortste verblijftijd  $T_0$  vindt men als kanaal en drain dezelfde lengte hebben en bovendien  $(\Delta H)^2$  voldoende klein is ten opzichte van  $H^2$ .

$$T_0 = n \frac{4}{\pi^2} \frac{l^2}{k \Delta H} K \left\{ \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{l}{l} \right) \right\} E \left\{ \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{l}{l} \right) \right\} \quad (6)$$

Afb. 5.



waarin  $K(m)$  de reeds hierboven vermelde volledige elliptische integraal van de eerste soort is en  $E(m)$  de volledige elliptische integraal van de tweede soort is, getabelleerd voor variabele  $m$ . In formule (6) is verder  $n$  de porositeit van de grond. Langs de andere stroomlijnen vindt men de volgende waarden voor de verblijftijd als functie van  $x$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)}{E\left\{\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)\right\}} \left[ \left\{ \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right) \right\} - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \frac{K\left\{\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)\right\}}{E\left\{\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)\right\}} \right] \quad (7)$$

waarin  $\Pi(n/m)$  de volledige elliptische integraal van de derde soort is, getabelleerd voor variabele  $m$  met als parameter  $n$ .

Een interessante grootte zou nog kunnen zijn de gemiddelde verblijftijd. Deze blijkt echter oneindig groot te zijn door de invloed van het kopeffect. Wel een eindige waarde vindt men voor de mediaan van de verblijftijden  $T_m$  (de helft van het water heeft een verblijftijd korter, de helft een langere dan de mediaan).

Hiervoor vindt men

$$\frac{T_m}{T_0} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{E\left\{\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)\right\}} \quad (8)$$

Voor betrekkelijk lange kanalen en drains ( $L > 1,5 \cdot l$ )

geldt  $E\left[\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi L}{2}\right)\right] \approx \pi/2$ , zodat er dan weinig verschil is tussen mediaan en de kortste verblijftijd. Voor de mediaan kunnen we nog schrijven

$$T_m = n \frac{2}{\pi} \frac{l^2}{k\Delta H} K\left\{\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)\right\} \quad (9)$$

In afb. 6 zijn waarden voor de mediaan en de kortste verblijftijd uitgezet tegen  $L/l$ , terwijl afb. 7 het verloop geeft van  $T/T_m$  over de halve kanaal- en drainlengte voor  $L/l = 1$ .

Voor  $T/T_m$  geldt de formule:

$$\frac{T}{T_m} = \frac{2}{\pi} \left[ \left\{ 1 + \operatorname{tgh}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)} \right\} \left[ \left\{ \frac{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right) \right\} - \operatorname{tgh}^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot K\left\{\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi l}{2}\right)\right\} \right] \right] \quad (9a)$$

vanwege het logaritmisch karakter van de verblijftijd voor kleine waarden van  $L/l$ , is voor deze grootte in afb. 6 in een logaritmische schaal gebruikt.

### Drains loodrecht op een kanaal

Een ander geval dat voor de praktijk interessant is, is het geval dat drains gesitueerd zijn loodrecht op een kanaal (zie afb. 8). Voor deze situatie is niet vereist dat de drains aan beide kanten van het kanaal voorkomen. Bij de oplossing van dit geval zal de kromlijnigheid der stroomlijnen een veel grotere rol spelen dan bij de voorgaande. De beschouwde situatie wordt vastgelegd door de volgende geometrische parameters.

$l$  — afstand tussen de drains

$H$  — hoogte van de watervoerende laag ter plaatste van de drain

$\Delta H$  — verschil in waterhoogte tussen kanaal en drain

$l_k$  — lengte van beginpunt van de drain tot het kanaal

$l_d$  — lengte van eindpunt van de drain tot het kanaal

Voor het debiet dat instroomt in een drain blijkt analogoos aan het eerste geval te gelden

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} = 2 \frac{K(\gamma)}{K(\gamma_1)} \quad (10)$$

waarin  $\gamma$  en  $\gamma_1$  echter andere waarden hebben

$$\gamma_1 = 1 - \gamma = \operatorname{tgh}^2\left(\frac{l_k}{l}\right) \operatorname{cotgh}^2\left(\frac{l_d}{l}\right) \quad (11)$$

Ook voor dit geval zijn voor het verband (10) benaderingen afgeleid.

Als  $l_k > 2/3 l$  en  $l_k < l_d - 1/2 l$  geldt

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} \approx \left\{ \frac{l_k}{l} + \frac{\ln 2}{\pi} \right\}^{-1} \quad (12)$$

Als  $l_k < 1/3 l_d$  en  $l_k < 0,1 l$  geldt

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} \approx \frac{4}{\pi} \left[ \ln\left\{\frac{4}{\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{l_k}{l}\right)\right\} - \ln\left(\frac{l_k}{l}\right) \right] \quad (13)$$

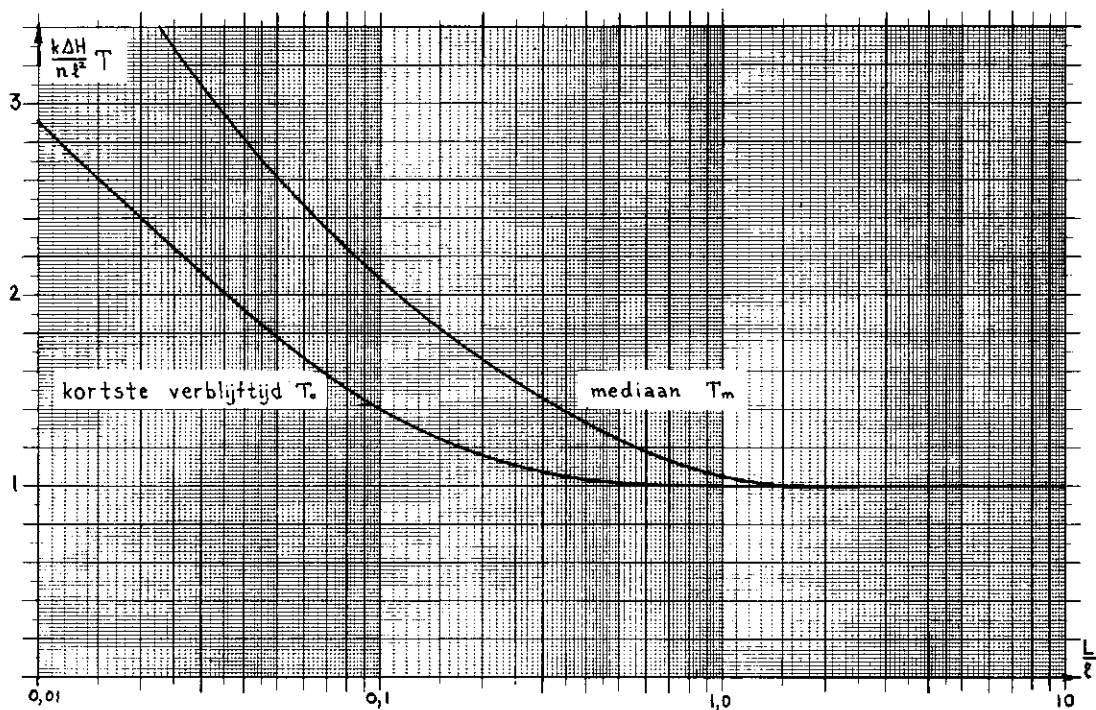
Als  $l_k < 1/3 l_d$  en  $l_d < 0,1 l$  geldt

$$\frac{Q}{\Delta\Phi} \approx \frac{4}{\pi} \ln\left(4 \frac{l_d}{l_k}\right) \quad (14)$$

Een grafiek voor het verband tussen  $Q/\Delta\Phi$  en  $l_k/l$  voor verschillende waarden van  $l_d/l$  is uitgezet in afb. 9.

Vanwege het logaritmisch karakter van dit verband voor kleine waarden van  $l_k/l$  is een logaritmische schaal gebruikt voor de grootte  $l_k/l$ . Voor  $l_d/l > 0,8$  vallen de krommen voor kleine  $l_k/l$  praktisch samen. De waarde van de parameter  $l_d/l$  is te herkennen aan het feit dat voor  $l_k/l = l_d/l$ :  $Q/\Delta\Phi = 0$ . Dus  $l_d/l$  heeft de waarde  $l_k/l$  waarvoor  $Q/\Delta\Phi$  nul is. Nog op te merken valt dat als  $l_d/l_k$  konstant is,  $Q/\Delta\Phi$  in formule (14) dit ook is.

De minimum waarde voor  $l_k/l$  voor een bepaalde waarde van  $l_d/l$  wordt bepaald door de waarde van de kortste verblijftijd  $T_0$  langs  $l_k$ , daar de kwaliteit van het water afhankelijk is van  $T_0$ . Voor de waarde van  $T_0$  is bepaald



Afb. 6.

$$T_o = \frac{n}{4\pi^2} \frac{l^2}{k\Delta H} K(m) \left[ m \frac{\gamma_1}{\gamma} \{ \Pi(\gamma|m) - K(m) \} + m_1 \{ K(m) - E(m) \} \right] \quad (15)$$

waarin  $\Delta H$  voldoende klein is t.o.v.  $H$  en

$$m_1 = 1 - m = \left\{ \frac{1 - \sqrt{\gamma_1}}{1 + \sqrt{\gamma_1}} \right\}^2 \quad (16)$$

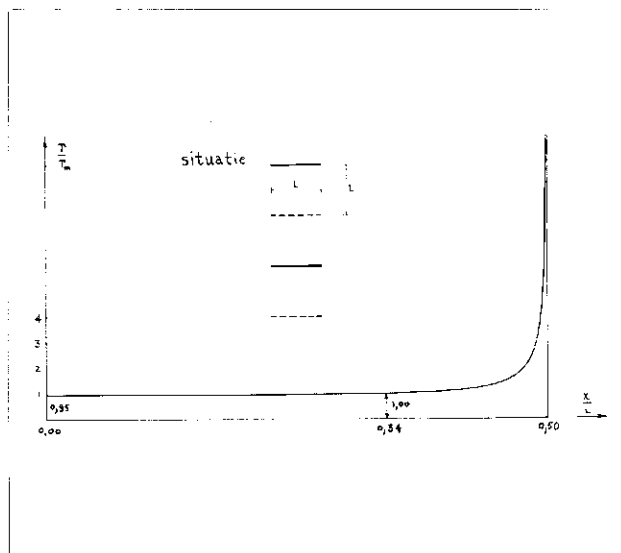
Voor niet te kleine kanaalafstand  $l_k/l$  kan (15) benaderd worden door

$$T_o = \frac{n}{4\pi^2} \frac{l^2}{k\Delta H} K^2(m) \quad (17)$$

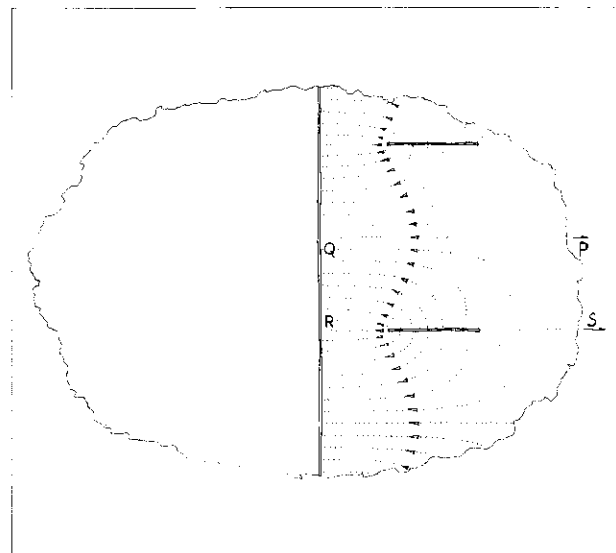
waarin

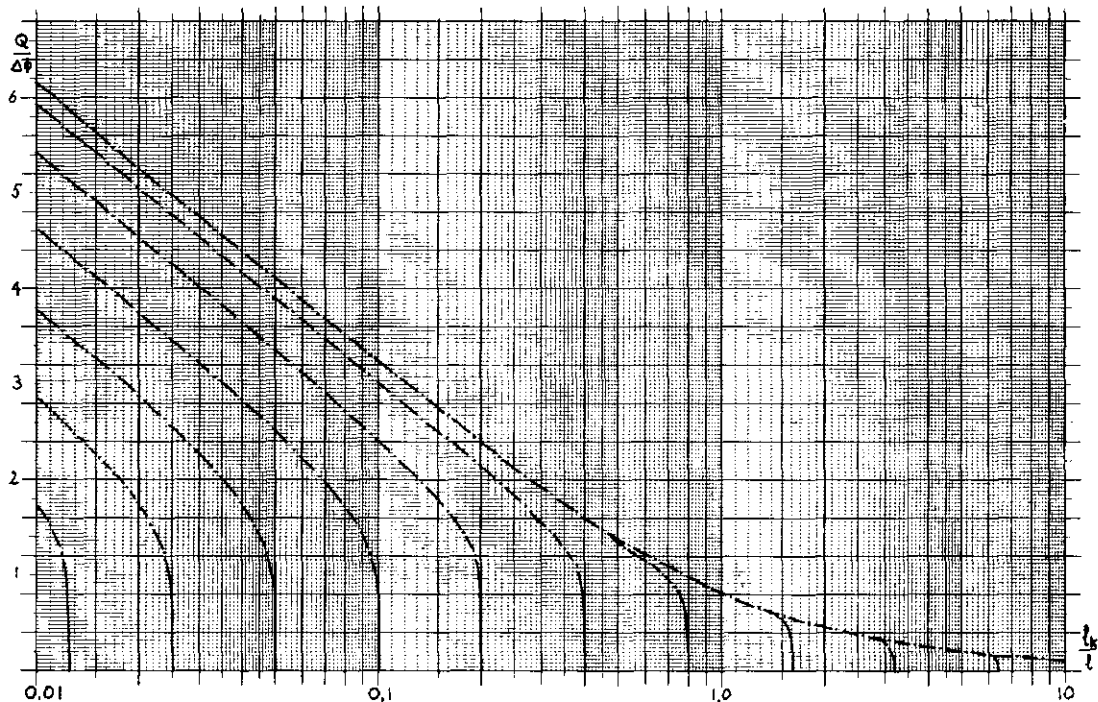
$$m_1 = 1 - m = \exp \left[ -2\pi \frac{l_k}{l} \right]$$

Afb. 7.



Afb. 8.





Afb. 9.

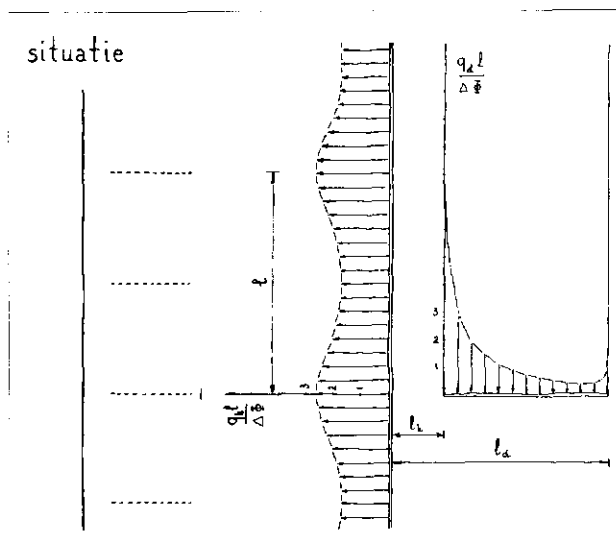
Formule (17) heeft het voordeel dat de minimum lengte voor  $l_k/l$  onmiddellijk volgt uit een eis omtrent  $T_0$ ;  $l_d/l$  volgt dan uit een eis omtrent het debiet per drain.

Ook voor dit geval is de verdeling van het specifieke debiet over kanaal en drain bepaald. De volgende waarden zijn afgeleid

$$q_k = \pi \frac{\Delta\Phi}{l} \frac{1}{K(\gamma_1)} \sqrt{\frac{\{\text{ch}(2\pi \frac{l_k}{l}) - 1\} \{\text{ch}(2\pi \frac{l_k}{l}) + 1\}}{\{\text{ch}(2\pi \frac{l_k}{l}) - \cos(2\pi \frac{y}{l})\} \{\text{ch}(2\pi \frac{l_k}{l}) - \cos(2\pi \frac{y}{l})\}}} \quad (18)$$

$$q_d = \pi \frac{\Delta\Phi}{l} \frac{1}{K(\gamma_1)} \sqrt{\frac{\{\text{ch}(2\pi \frac{l_d}{l}) - 1\} \{\text{ch}(2\pi \frac{l_d}{l}) + 1\}}{\{\text{ch}(2\pi \frac{l_d}{l}) - \text{ch}(2\pi \frac{x}{l})\} \{\text{ch}(2\pi \frac{l_d}{l}) - \text{ch}(2\pi \frac{x}{l})\}}} \quad (19)$$

Afb. 10.



waarin  $y$  een variabele is gemeten langs het kanaal. Om een indruk te krijgen van het verloop van het specifieke debiet zijn  $q_k l / \Delta\Phi$  en  $q_d l / \Delta\Phi$  uitgezet voor  $l_k/l = 1/4$  en  $l_d/l = 1$ ; zie afb. 10.

Slechts deze twee gevallen zijn behandeld, ofschoon er nog vele en belangrijke en interessante andere gevallen zijn. Elke situatie kan echter door invulling van de geometrische parameters in de basisformules, die hier echter niet behandeld zijn, volledig beschreven worden.

#### Literatuur

1. L. Huisman; *Het kopeffect van draineerleidingen*, H<sub>2</sub>O, vierde jaargang, nr. 3, blz. 50.
2. M. Abramowitz & I. A. Segun; *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, inc., New York (1965).