

Het oplossen van grondwaterstromingsproblemen met de eindige elementen-methode als handig en effectief gereedschap

Het oplossen van grondwaterstromingsproblemen wil veelal zeggen het voorspellen van veranderingen in stijghoogten en stromingen ten gevolge van (toekomstig) menselijk ingrijpen in het grondwatersysteem. Om tot een oplossing te kunnen komen is enerzijds kennis omtrent het grondwatersysteem vereist (kD-waarden, c-waarden, randvoorwaarden, voeding en onttrekking) terwijl anderzijds vooral bij iets gecompliceerde problemen al snel veel wiskundige kennis vereist is. De enorme vlucht die de computer in de samenleving heeft genomen,



IR. Th. N. OLSHOORN
hydroloog bij het KIWA

heeft tevens een grote ontwikkeling van de numerieke wiskunde tot gevolg gehad. Momenteel zijn rekenmethoden beschikbaar waarmee het moeizame zoeken van algemene analytische oplossingen van stromingsproblemen kan worden omzeild en de meest uiteenlopende vraagstukken op een uniforme wijze kunnen worden opgelost. De methode die hiertoe bij uitstek geschikt is is die van de 'eindige elementen' (finite elements), waarvoor in principe geen probleem te ingewikkeld is, en zelfs driedimensionale niet-stationaire stromingsvraagstukken met willekeurige randvoorwaarden snel kunnen worden opgelost.

Uiteraard zullen de antwoorden nooit betrouwbaarder kunnen zijn dan de uitgangsggegevens. Wel is het echter mogelijk de uitgangsggegevens, d.w.z. kD, c-waarde enz. met behulp van de methode beter te leren kennen. In een aantal gevallen zal namelijk een gemeten isohypsenbeeld (krommen van gelijke stijghoogte van het grondwater) kunnen worden nagerekend waarna de uitgangsggegevens zolang aangepast kunnen worden tot het berekende beeld met de gemeten situatie in voldoende mate overeenstemt. Uitgaande van de verbeterde kennis van de situatie kan nu de invloed van willekeurige ingrepen en veranderingen op het systeem worden becijferd. In het algemeen zal hiervoor slechts een beperkt aantal invoergegegevens behoeven te worden gewijzigd.

Principe van de eindige elementen-methode

Bij toepassing van de eindige elementen-methode wordt het grondwatersysteem in een (groot) aantal deelgebieden opgesplitst, de elementen, welke in principe ongelijk van grootte en vorm kunnen zijn. In driedimensionale gevallen kan men hiervoor

tetraeders kiezen terwijl voor tweedimensionale problemen zowel rechthoekige als driehoekige elementen worden toegepast.

Terwille van eenvoud en persoonlijke voorkeur zal de navolgende beschrijving — voor zover noodzakelijk — worden beperkt tot het stationaire tweedimensionale eenlaagsgeval, met driehoekige elementen.

Het stijghoogteverloop wordt binnen ieder element benaderd door een eenvoudige wiskundige functie. Bij driehoekige elementen wordt voor deze functie een plat vlak gekozen, dat binnen ieder element een andere hoogte en stand inneemt, doch zodanig dat aan de voorwaarde van de continuïteit langs de elementranden wordt voldaan. Als parameters worden de stijghoogten in de hoekpunten van de elementen gekozen. De vlakjes worden dus a.h.w. tussen deze punten opgespannen. Het uiteindelijke oplossingsvlak komt er dan ongeveer uit te zien als een soort tentdak zoals toegepast in het Olympia-stadion te München. Dit oplossingsvlak moet nu het werkelijke stijghoogteverloop zo goed mogelijk benaderen.

De basis van de elementenmethode is de 'functional' of 'Funktionenfunktion', welke is op te vatten als een soort energievergelijking die eist dat de totale kinetische energie ('Lebendige Kraft', Forchheimer, Hydrauliek 1930) van het grondwater binnen de grenzen van het grondwatersysteem minimaal is. Deze vergelijking van de functie $\varphi(x, y)$ ziet er, indien geen stroming over de randen plaatsvindt, in ons geval als volgt uit:

$$V = \iint_G \left\{ kD \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + kD \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} \partial x \partial y$$

De minimum voorwaarde luidt:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

waarin:

V = maat voor de totale kinetische energie
x, y = coördinaten in het beschouwde veld
kD = doorlatendheid
G = het gebied waarbinnen V wordt berekend

Indien wél stroming over een deel van de randen plaatsvindt moet aan de vergelijking nog een lijn-integraal worden toegevoegd. Indien nu de stijghoogte op een of andere plaats binnen het systeem niet in overeenstemming is met wat men zou kunnen noemen de 'evenwichtsstromingstoestand', heeft V altijd een hogere waarde dan indien dit wel zo was. De beste benadering wordt verkregen door de parameters (dit zijn zoals gezegd de stijghoogten in de knooppunten $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n$) zodanig te kiezen

dat de waarde van V zo klein mogelijk wordt

$$V = V(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n)$$

zodat voor iedere i (i = 1, ..., n) moet gelden:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right) = 0$$

hetgeen resulteert in een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden. Het oplossen van zo'n stelsel vergelijkingen vormt tegenwoordig met gebruik van geavanceerd rekentuig geen probleem meer

Het gebruik van de methode

Een numerieke methode is altijd een benadering welke de exacte oplossing dichter benadert naarmate stapgrootte kleiner en onderverdeling fijner worden gekozen. Bij de onderhavige methode betekent dit, dat een betere benadering wordt verkregen naarmate het aantal elementen toeneemt. Tegelijkertijd betekent dit evenwel een enorme toename van een aantal op te geven gegevens die de machine moet 'kennen' alvorens te kunnen rekenen. In het stationaire tweedimensionale geval zijn dit:

- de x- en y-coördinaat van ieder knooppunt alsmede een waarde welke aangeeft of het knooppunt al dan niet deel uitmaakt van de gebiedsrand of dat zich in dit knooppunt al dan geen 'onttrekking' bevindt
- voor ieder element moet een kD-waarde worden opgegeven;
- aan ieder knooppunt en element moet een rangnummer worden toegekend, daar de machine moet 'weten' bij welk knooppunt en element de opgegeven coördinaten en kD-waarden behoren;
- de hoekpunten van ieder element krijgen rangnummers 1, 2 en 3, terwijl van ieder hoekpunt van ieder element moet worden opgegeven met welk knooppunt dit overeenkomt;
- tenslotte moeten nog getallen betreffende randvoorwaarden en onttrekkingen worden ingevoerd.

In het geval dat 300 elementen met 200 knooppunten worden toegepast behelzen c punten a t/m d reeds ca. 2000 getallen. Deze enorme 'administratie' kan als een zwaarwegend nadeel van de methode worden gezien, daar het zeer veel energie kost om:

- het grondwatergebied uit te tekenen en in elementen te verdelen;
- de coördinaten van de knooppunten op te meten;

- c. de knooppunten en elementen van een (handige) nummering te voorzien;
- d. zich hierin niet te vergissen;
- e. aan ieder element apart een kD-waarde toe te kennen, alhoewel deze op slechts enkele punten bekend zal zijn;
- f. ingesloten fouten op te sporen en te elimineren;
- g. wijzigingen in de elementen configuratie aan te brengen.

Ten einde genoemde problemen te onder-
vangen en het 'administratieve' voorberei-
dingswerk tot een minimum te beperken,
is een programma geschreven dat dit werk
automatisch uitvoert. Uitgaande van 48, op
een willekeurig gevormde rand gelegen,
randpunten en een 'centraal' punt, verdeelt
dit programma het binnengelegen gebied
volgens een bepaald systeem in 384 elemen-
ten, waarbij inclusief de 48 randpunten
217 knooppunten ontstaan. Het berekent de
coördinaten van de 217 knooppunten en
verzorgt alle noodzakelijke nummeringen.
In een tweede stap wordt het verkregen
elementenbeeld aangepast aan de (opge-
geven) ligging van de onttrekkingspunten,
waarbij het knooppunt dat het dichtst bij
een bepaalde 'put' is gelegen op de plaats
van deze onttrekking wordt gelegd.
Toekenning van de kD aan ieder element
geschiedt om boven, onder e. genoemde
reden, d.m.v. een functie. Men kan de kD
veelal goed benaderen door ze in bepaalde
regio's konstant te houden dan wel geleide-
lijk via een functie te laten verlopen,
zodanig dat de bekende waarden gedekt
worden (zie voorbeelden). In het algemeen
zal men hiervoor een programma van
enkele regels moeten schrijven, waarna het
werk foutloos en snel door de machine kan
worden uitgevoerd.

Verfijning van de elementen-configuratie in
een bepaalde regio waarin bijv. meer
pompstations zijn gelegen en een nauw-
keuriger beeld gewenst is, kan met het
programma op zeer eenvoudige wijze
geschieden, door verplaatsing van het
centrale punt' in de gewenste richting.
Nog grotere verfijning kan worden bereikt
door een verschuiving van een (beperkt)
aantal randpunten, zodanig dat de concentra-
tie van de randpunten in de gewenste
regio toeneemt. De machine past hieraan
de elementenverdeling vanzelf aan.
Bovenstaande werkwijze heeft ertoe geleid
dat de tijd die nodig is om een geheel nieuw
probleem voor te bereiden, de invoer-
gegevens te ponsen en het programma te
laten draaien, tot globaal een halve dag kan
worden beperkt. In het algemeen heeft men
binnen 24 uur de uitkomsten op tafel
waarbij een groot deel van deze 24 uur in

beslag wordt genomen door het wachten op
(plot-)uitvoer van de computer.

Presentatie van de resultaten

De berekeningsresultaten kunnen op twee
verschillende manieren worden weergegeven:
a. in de vorm van een reeks getallen en
b. in de vorm van een situatietekening,
vervaardigd door de computer.
Het is duidelijk dat de voorkeur uit zal gaan
naar de laatste methode, temeer daar de uit-
komsten gegeven kunnen worden in de
vorm van een kant en klaar op schaal
getekend isohypsenpatroon, waarna geen
verdere verwerking noodzakelijk is en
eventuele invoerfouten i.h.a. op een teke-
ning direkt opvallen. De eigenlijke elemen-
ten kan men in de tekening laten vallen,
daar zij slechts hulpmiddel zijn om tot de
oplossing te geraken.

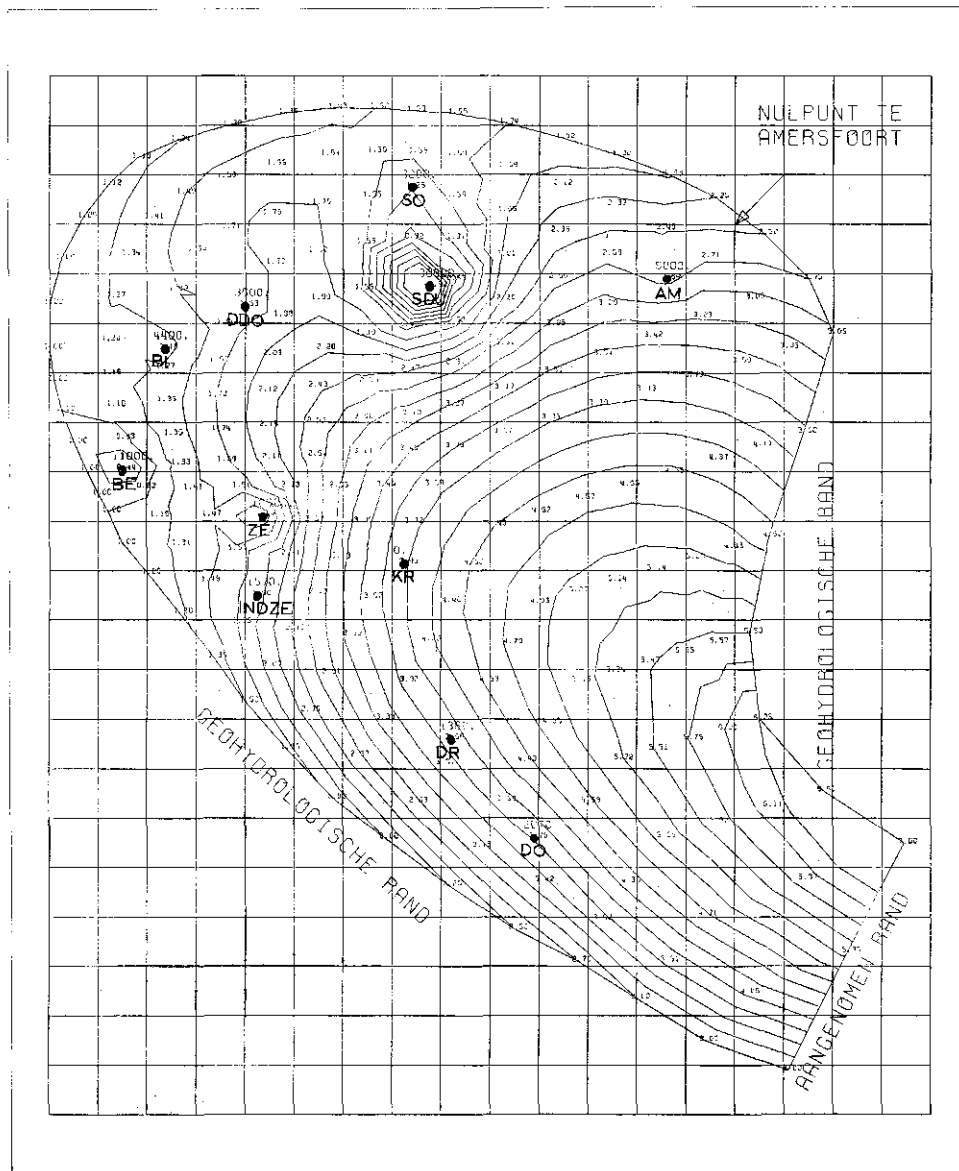
Voorbeelden

Voorbeeld 1

In het kader van het afstuderen van de
schrijver aan de Technische Hogeschool te
Delft [1] is een studie gemaakt naar de
mogelijkheid welke kunstmatige infiltratie
in de Utrechtse Heuvelrug zou bieden als
compenserende maatregel voor de lage
grondwaterstanden welke sedert 1971 (door
het uitblijven van voldoende neerslag) zijn
opgetreden. Om te kunnen demonstreren
dat op deze wijze aan problemen — als de
drooggevallen vijvers te Zeist — goeddeels
tegenwoordig kan worden gekomen zijn isohyp-
senbeelden berekend voor het Heuvelrug-
complex als geheel (140 km²) met en zonder
de geprojecteerde infiltratie.

Afb. 1 geeft een tekening welke door de
computer is geproduceerd. Dit voorbeeld
geeft de situatie weer voor een nuttige

Afb. 1 - Isohypsen Utrechtse Heuvelrug.



neerslag van 280 mm/jaar, welke voor dit gebied als langjarig gemiddelde mag worden aangehouden. Rekening is gehouden met in de beschouwde regio aanwezige onttrekkingen, t.w.: 8 pompstations van het Waterleidingbedrijf Midden Nederland, de pompstations van Amersfoort en Doorn en industriële onttrekkingen. De puttenvelden van de pompstations werden hierbij tot puntonttrekkingen geschematiseerd. Voor de motivatie van de plaats van en stijghoogte op de aangehouden gebiedsrand wordt verwezen naar lit. [1].

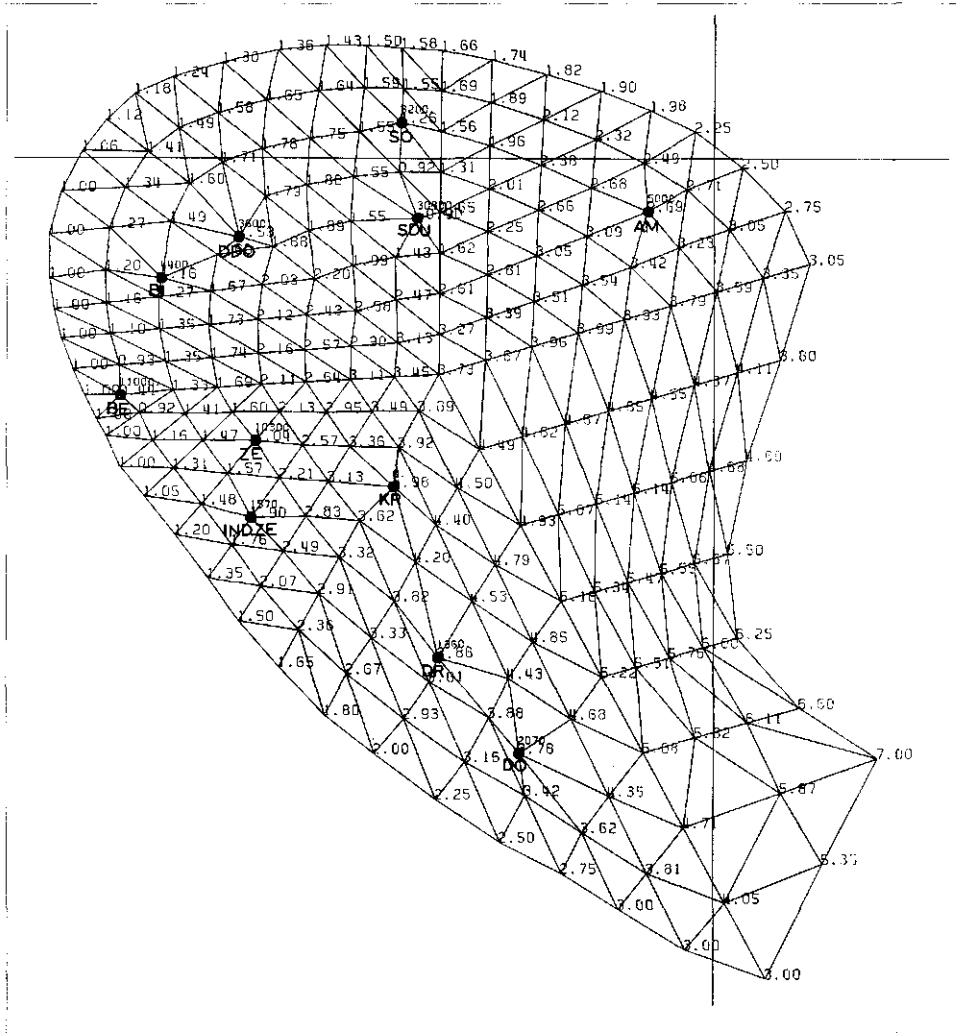
De oorspronkelijke tekening (plot) heeft een schaal van 1 : 50.000 en past hiermede direct op bestaande geografische kaarten. Tevens werd door de machine een rooster getekend zodanig dat één punt hiervan overeenkomt met de oorsprong van 's Rijks Driehoeksmeting te Amersfoort en ieder vierkantje 1 km² bestrijkt. De knikjes welke in de isohypsen voorkomen worden veroorzaakt doordat het grondwatervlak binnen een element door een plat vlakje wordt benaderd, met als gevolg dat iedere isohypse is opgebouwd uit een aantal lijnstukjes.

De elementen welke voor de interpretatie van geen belang zijn, zijn uit deze tekening weggelaten. Alleen ter demonstratie van de wijze waarop het regeneratieprogramma het beschouwde gebied in elementen verdeelt, is afb. 2 toegevoegd, die in één 'run' tezamen met afb. 1 door de machine werd geplotted. Aan de plaatselijke afwijkingen van het regelmatige patroon is te zien op welke wijze de machine de elementen-configuratie aan de ligging van de onttrekkingen heeft aangepast: het knooppunt dat het dichtst bij een onttrekking lag is naar deze onttrekking verplaatst. Naast de betrokken knooppunten staan de berekende stijghoogten bijgeschreven, uitgedrukt in m + NAP. De kD-waarde welke door de computer is gehanteerd is voor elk element in principe anders. Aan de hand van in het verleden verrichte pompproeven en uit analyse van bestaande gegevens werd een globaal beeld verkregen van het verloop van de kD in het gebied [1]. Op grond hiervan kan de kD worden ingebracht als functie van x. Met andere woorden, de kD is op een noord-zuid lijn konstant en varieert uitsluitend in oost-west richting, waardoor het kD-verloop van afb. 3 kan worden ingebracht middels het programmeren van onderstaande eenvoudige formules:

$$kD = 1000 \cdot (\bar{x} + 3000)^2 / (3000)^2 + 3000 \quad \text{voor } (x < 0)$$

$$kD = \bar{x} / 3 \quad \text{voor } (x > 0)$$

Hierin is x de x-coördinaat van het zwaartepunt van het betrokken element.



Afb. 2 - Machinaal gegenereerde elementen.

Voorbeeld 2

In het kader van het putverstopingsonderzoek dat door de grondwaterprojectgroep van het KIWA wordt verricht onder leiding van de Werkgroep Putverstopping — een en ander in nauwe samenwerking met het RID en de betrokken bedrijven — is met het programma een geheel ander stromingsprobleem uitgewerkt.

Ten behoeve van een case-study naar de oorzaken van putverstopping in het water-

wingebied van het Provinciaal Waterleidingbedrijf van Noord-Holland te Castricum moest worden nagegaan welk deel van het via de infiltratiekanalen geïnfiltreerde water door de diverse lagen met onderling verschillende doorlaateigenschappen naar de winningsmiddelen stroomt.

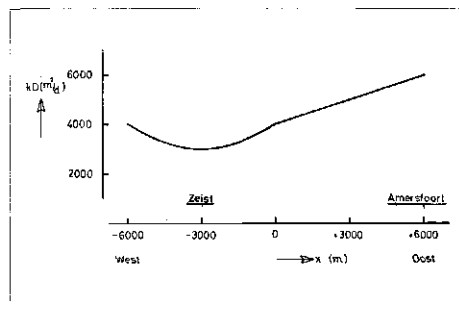
De bodem ter plaatse is hydrologisch gezien opgebouwd uit een drietal lagen: Vanaf maaiveld tot 6 m — NAP is duinzand voorhanden met een permeabiliteit van 10 m/dag.

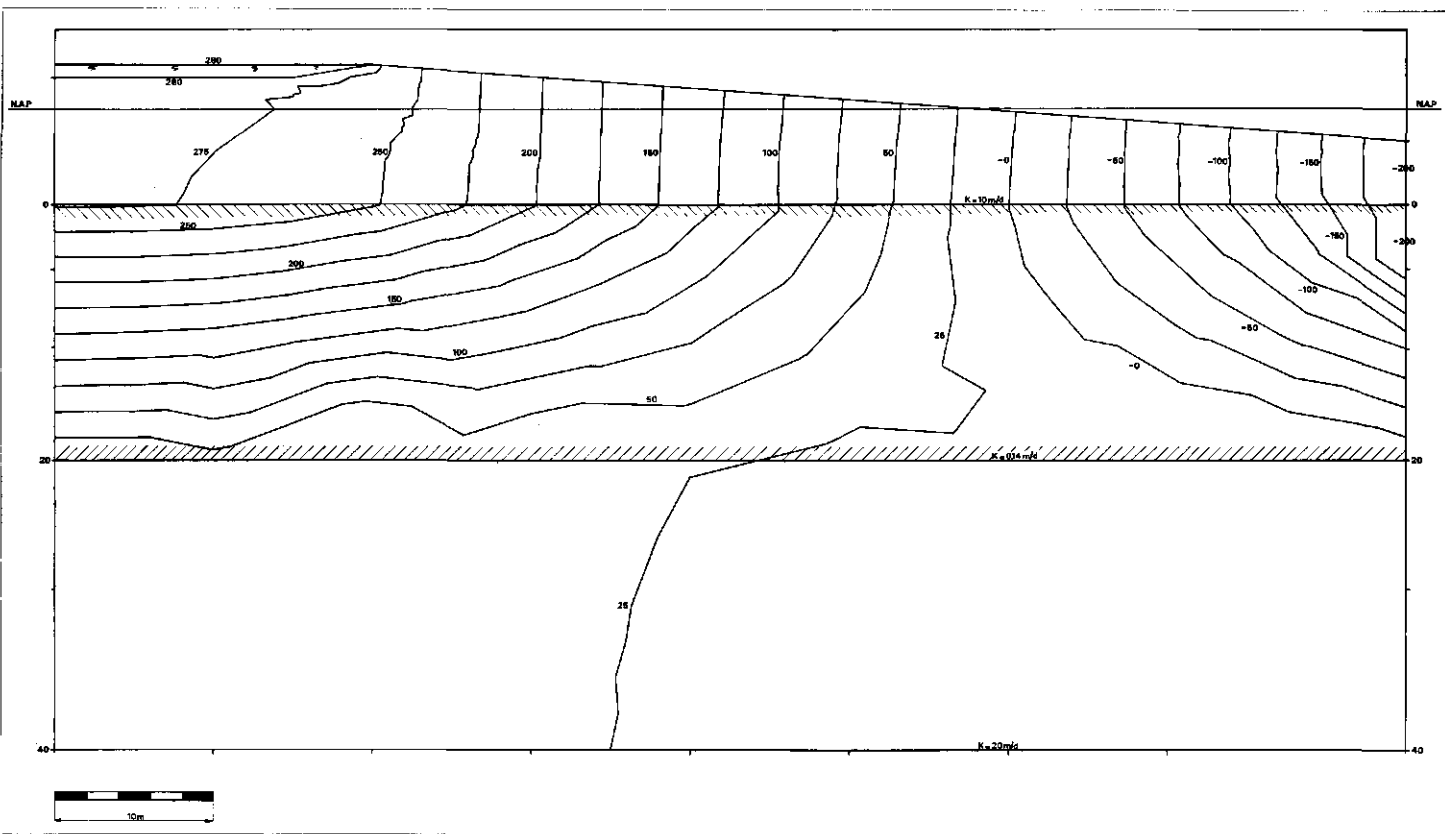
Van de laag slibhoudend zand tussen 6 en 20 m — NAP is de weerstand tegen verticale waterstroming bekend. Deze bedraagt 100 dagen. De hieruit afgeleide k-waarde bedraagt 0,15 m/dag.

De derde laag tussen 20 en 40 m — NAP tenslotte, bestaat uit grovere zanden, de k-waarde is dan ook hoger en bedraagt 20 m/dag. De kleilaag op 40 m diepte fungeert als basis voor het watervoerend pakket.

De berekening welke is uitgevoerd voor een drietal waarden van de permeabiliteit van

Afb. 3 - Verloop van de kD-waarde in het Heuvelrugcomplex.





Afb. 4 - Strooming vanuit een infiltratiekanaal naar de winningsmiddelen te Castricum.

de middenlaag was binnen 24 uur gereed. In dit geval hoefde evenmin middels aparte ponskaarten aan ieder element afzonderlijk een k -waarde te worden toegevoerd: Omdat de k -waarde alleen in y -richting varieerde en ook in deze richting binnen de aangegeven grenzen konstant was, kon zij worden ingevoerd door de volgende opdrachten in onderstaande volgorde te programmeren:

$$c = 10$$

$$\text{ndien } y < -6 \quad k = 0,14$$

$$\text{ndien } y < -20 \quad k = 20$$

Ook hier was de benodigde inspanning minimaal.

Een aspect van dit tweede voorbeeld is de wijze waarop het freatisch vlak is ingebracht, daar de juiste plaats ervan a priori onbekend was. Van de 48 op te geven randpunten van de in elementen te verdelen ruimte bevindt zich een aantal op het freatisch vlak. De y -coördinaten van deze punten werden ingeschat door het freatisch vlak door een rechte lijn te benaderen. De berekende stijghoogten in de punten van het freatisch vlak zullen enigszins van de geschatte y -coördinaten van de punten afwijken. Een betere benadering van het freatisch vlak kan nu worden verkregen door deze y -coördinaten met de berekende stijghoogten in overeenstemming te brengen, waarna de berekening eventueel kan worden herhaald.

Kostenaspecten

De computerkosten die met een enkele berekening gemoeid waren, bedroegen op de IBM 360/65 van de TH Delft (studententarief 1974) ca. f 10,— voor compilatie en berekening, vermeerderd met ca. f 35,— per tekening. Men mag aannemen dat de normale cliënt van een willekeurig rekencentrum beduidend meer zal moeten betalen. Desondanks zullen de rekenkosten op zich steeds een fractie van de totale kosten (arbeidsloon) uitmaken.

Dankbetuiging

In Delft wordt de ontwikkeling van de op de eindige elementen-methode gebaseerde programmatuur met name gestimuleerd door lector dr. ir. A. Verruijt van de afdeling Civiele Techniek. De schrijver is de heer Verruijt veel dank verschuldigd voor zijn waardevolle assistenties en de toestemming in deze publikatie van zijn programma gebruik te maken. Voorts gaat de dank van de schrijver uit naar de heer ir. F. A. van Dam die namens het Waterleidingbedrijf Midden Nederland voor deze publikatie toestemming verleende en naar al diegenen die door hun hulpvaardigheid veel tot deze publikatie hebben bijgedragen.

Samenvatting

De eindige elementen-methode is sinds

enkele jaren tot machtig hulpmiddel in de (geo)hydrologie uitgegroeid. Elke hydroloog heeft van de methode gehoord, doch slechts een beperkt aantal mensen heeft er mee leren werken. In dit artikel is in het kort de kern van de methode besproken, zonder dat de lezer in formules wordt verstrikt.

Hiernaast worden bezwaren van praktische aard belicht. Aangeduid wordt op welke manier deze bezwaren zijn omzeild en de methode tot elegant en effectief gereedschap is geworden.

Aan de hand van twee voorbeelden wordt de wijze van presentie van de resultaten toegelicht.

Literatuur

1. Olsthoorn, T. N.; *Infiltratie in de Utrechtse Heuvelrug 1974* (bibl. Gezondheidstechniek van de afdeling Civiele Techniek, TH Delft).
2. Verruijt, A.; *Theory of Groundwater Flow* (McMillan 1970).
3. Zienkiewicz, O. C. and Chung, J. K.; *The Finite Elements Method in Structural and Continous Mechanics* (McGraw - Hill 1967).
4. Forchheimer; *Hydraulik* (1930).

