Een numerieke berekeningsmethode van stroomlijnen of stroombanen met bijbehorende verblijftijden

IR. C. VAN DEN AKKER
Gemeentewaterleidingen
Amsterdam

Er zijn verschillende oorzaken aan te wijzen die de toenemende vraag naar meer verfijnde en snellere berekeningsmethoden op het gebied van grondwaterstroming tot gevolg hebben. Te noemen zijn onder meer het steeds schaarser worden van grondwater van goede kwaliteit, de bedreiging van de grondwaterkwaliteit door verontreiniging en plannen voor infiltratie van water met als doel voorraadvorming en kwaliteitsafvlakking.
Enkele van de vragen die naar voren komen hebben betrekking op verblijftijden van grondwater, frontverplaatsingen van geïnfiltreerd water en onderlinge beïnvloeding van winningsmiddelen.

Naar aanleiding hiervan is een numerieke berekeningsmethode ontwikkeld op het gebied van horizontale tweedimensionale grondwaterstroming. Deze berekeningsmethode heeft tot doel het stroomlijnen- of stroombanenbeeld te bepalen van grondwater in een watervoerend pakket onder invloed van een natuurlijke afstroming en een aantal puntonttrekkingen en/of puntinfiltraties. Tevens worden de tijden berekend waarin waterdeeltjes zekere afstanden afleggen. Deze berekeningsmethode kan worden toegepast d.m.v. een drietal komputerprogramma's die elk voor een zeker grondwaterstromingsprobleem gebruikt kunnen worden.

Aannamen

Voor de toepassing van de rekenprogramma's dient te worden uitgegaan van een aantal aannamen, te weten:

— horizontale, tweedimensionale grondwaterstroming;

— homogeen isotroop poreus medium;

— konstante dikte van de watervoerende pakketten waarin de grondwaterstroming plaatsvindt;

— onttrekkingen of infiltraties van water geschieden d.m.v. puntonttrekkingen en/of puntinfiltraties;

— een eventueel aanwezige natuurlijke afstroming bepaalt de oriëntatie van het te gebruiken cartesische assenstelsel zodanig dat de x-as ligt in de richting van de natuurlijke afstroming.

Stroombanen en verblijftijden in een pakket met volkomen spanningswater

Voor een horizontale radiale grondwaterstroming in een homogeen, isotroop pakket naar een volkomen put kan gesteld worden:

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi H} \ln r_p + C_1$$

waarin:

Φ = $k \cdot \varphi$
φ = toeneming van de stijghoogte t.g.v. onttrekking Q op afstand r_p uit de put;
k = doorlatendheid, in m/dag;
Q = onttrokken hoeveelheid water, in m^3/dag;
H = dikte van het pakket, in m;
r_p = afstand tot de put, in m;
C_1 = konstante, afhankelijk van randvoorwaarden, in m^2/dag.

Na overgang op cartische coördinaten en invoering van een natuurlijke afstroming in de x-richting kan voor de snelheidsvektoren afgeleid worden:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi nH} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i (x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right) + \frac{q(x, t)}{Hn}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\pi nH} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i (y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right)$$

waarin:

m = aantal onttrekkingen of infiltraties;
Q_i = grootte van de i-de onttrekking, in m^3/dag;
x_i = x-coördinaat van de i-de onttrekking, in m;
y_i = y-coördinaat van de i-de onttrekking, in m;
n = effectieve porositeit;
q (x, t) = natuurlijke afstroming in x-richting als funktie van x en t, in $m^3/dag \cdot m^1$;
t = tijd, in dagen.

Voor de oplossing van het bovenstaande simultane stelsel gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde is gebruik gemaakt van de methode van Runge-Kutta.

In het rekenprogramma FLOP-1 *FLOwPattern* wordt dit stelsel simultane differentiaalvergelijkingen tot oplossing gebracht.
De gebruiker dient de noodzakelijke gegevens in te voeren op een wijze zoals is aangegeven in de gebruikersdocumentatie [1].
In het programma FLOP-1 is aangenomen dat:

q (x, t) = q (uniforme stroming)

echter is met een eenvoudige aanvulling in het programma de natuurlijke afstroming in te voeren als een funktie van x en t.
Ter illustratie is een berekeningsvoorbeeld bijgevoegd (afb. 1).

Stroombanen en verblijftijden in een pakket met onvolkomen spanningswater

Voor een horizontale, radiale grondwaterstroming in een homogeen, isotroop pakket afgedekt door een slechtdoorlatende laag met daarboven een vaste potentiaal kan onder een aantal aannamen gesteld worden dat:

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi H} K_0 \left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

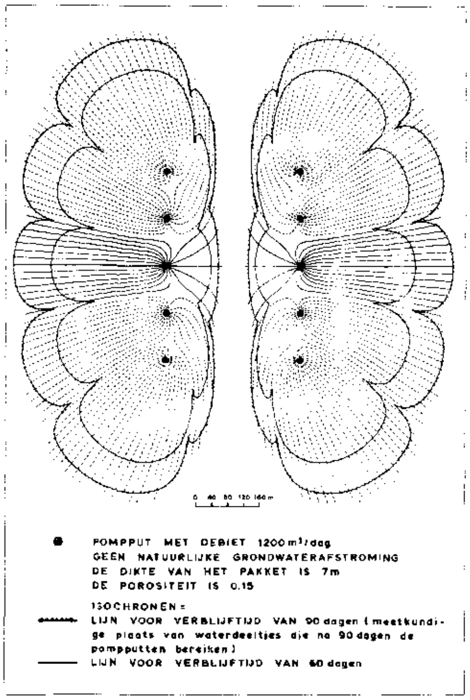
waarin:

K_0 = gemodificeerde Besselfunktie van de o-de orde;
λ = spreidingslengte ($\sqrt{kH \cdot c}$), in meters;
c = weerstand slechtdoorlatende laag, in dagen.

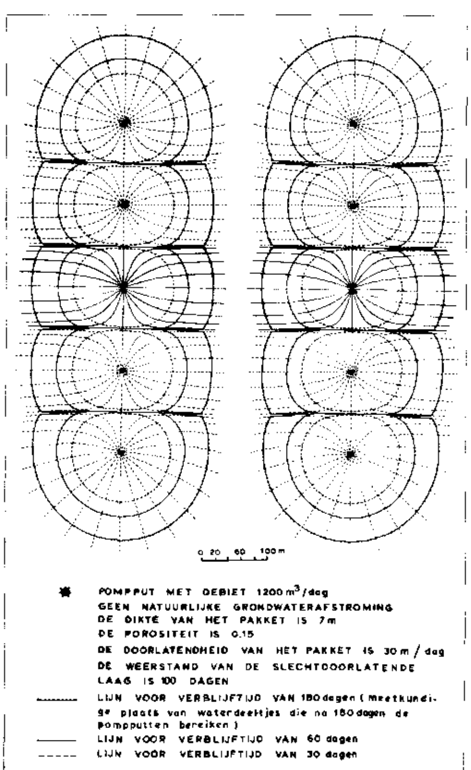
Na overgang op cartesische coördinaten en invoering van een uniforme natuurlijke afstroming in de x-richting kan afgeleid worden voor de snelheidsvektoren:
(zie formules onderaan de pag.).
Ook hier is voor de oplossing van het bovenstaande simultane stelsel gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde gebruik gemaakt van de methode van Runge-Kutta.
In het rekenprogramma FLOP-2 wordt dit stelsel simultane differentiaalvergelijkingen tot oplossing gebracht. De gebruiker kan in de gebruikersdocumentatie [2] vinden op welke wijze de noodzakelijke gegevens in het programma worden ingevoerd.
Ter illustratie is een berekeningsvoorbeeld bijgevoegd (afb. 2) waarin invoergrootheden zijn gebruikt als bij het berekeningsvoorbeeld met FLOP-1, met dien verstande dat hier voor de doorlaatfactor k = 20 m/dag

$$\frac{dx}{dt} = +\frac{1}{2\pi nH\lambda} \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{Q_i (x - x_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \cdot K_1 \left(\frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}{\lambda} \right) \right] + \frac{q}{H \cdot n}$$

$$\frac{dy}{dt} = +\frac{1}{2\pi nH\lambda} \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{Q_i (y - y_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} \cdot K_1 \left(\frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}{\lambda} \right) \right]$$



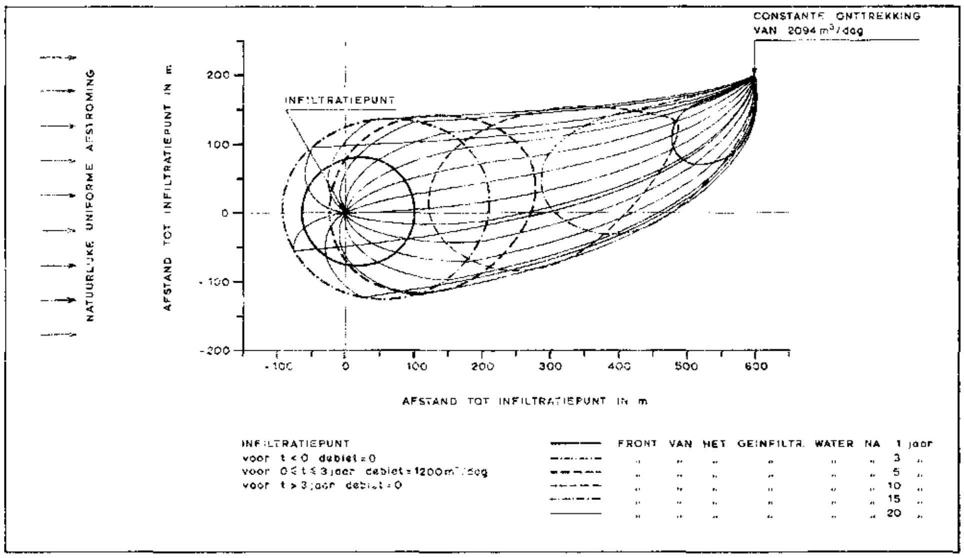
Afb. 1 - Stroomlijnen en isochronen in een pakket met freatisch grondwater en 10 pompputten.



Afb. 2 - Stroombanen en isochronen in een pakket met semi-spanningswater en 10 pompputten.

en voor de weerstand c = 100 dagen is ingevoerd.

Stroombanen en verblijftijden in een pakket met volkomen spanningswater, waarin één van de aanwezige puntonttrekkingen of puntinfiltraties een trapsgewijs wisselend debiet heeft



Afb. 3 - De verplaatsing van geïnfiltreerd water in een watervoerend pakket o.i.v. uniforme afstroming en een konstante onttrekking.

Voor een horizontale radiale grondwaterstroming in een homogeen, isotroop pakket naar een volkomen put kan gesteld worden in het geval van stationaire onttrekking:

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi H} \ln r_p + C_1$$

De oplossing voor het niet-stationaire gedeelte bij konstante onttrekking door een volkomen put luidt:

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi kH} W(r_p^2/4c^{\prime}t)$$

waarin:

$c^{\prime}$ = kH/s;
s = bergingscoëfficiënt;
t = tijd, in dagen.

Indien het debiet van een puntonttrekking of -infiltratie trapsgewijs verandert kan door een superpositie van bovenstaande oplossingen het probleem worden uitgeschreven.

De snelheidsvektoren $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ kunnen worden bepaald en het simultane stelsel differentiaalvergelijkingen kan tot oplossing worden gebracht met behulp van de methode van Runge-Kutta

In het rekenprogramma FRONT-1 wordt aangenomen dat het debiet van één puntonttrekking of -infiltratie gedurende een zekere tijd wordt verhoogd. De simultane stelsels differentiaalvergelijkingen die dan het probleem beschrijven zijn na overgang op cartesische coördinaten en na invoering

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi nH} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i (x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right) + \frac{q}{Hn} = f_1$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\pi nH} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i (y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right) = g_1$$

$$\frac{dx}{dt} = f_1 - \frac{1}{2\pi nH} \left[\frac{Q_n (x - x_n)}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} . \exp\left(-\left((x - x_n)^2 + (y - y_n)^2\right)/4c^{\prime}(t - t_1)\right) \right] = f_2$$

$$\frac{dy}{dt} = g_1 - \frac{1}{2\pi nH} \left[\frac{Q_n (y - y_n)}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} . \exp\left(-\left((x - x_n)^2 + (y - y_n)^2\right)/4c^{\prime}(t - t_1)\right) \right] = g_2$$

$$\frac{dx}{dt} = f_2 + \frac{1}{2\pi nH} \left[\frac{Q_n (x - x_n)}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} . \exp\left(-\left((x - x_n)^2 + (y - y_n)^2\right)/4c^{\prime}(t - t_2)\right) \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = g_2 + \frac{1}{2\pi nH} \left[\frac{Q_n (y - y_n)}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} . \exp\left(-\left((x - x_n)^2 + (y - y_n)^2\right)/4c^{\prime}(t - t_2)\right) \right]$$

van een uniforme natuurlijke afstroming:
voor o $< t \leq t_1$ heerst een stationaire toestand
(zie eerste twee formules onder aan de vorige pagina)
voor $t_1 < t \leq t_2$ een verhoogd debiet van één puntonttrekking of -infiltratie (toename met Q_n):
(zie tweede twee formules onderaan de vorige pagina)
en voor $t > t_2$ als het debiet van de puntonttrekking of -infiltratie weer teruggebracht is op de oorspronkelijke waarde:
(zie derde twee formules onderaan de vorige pagina)
waarin:

x_n = x-coörd. van de puntonttrekking of -infiltratie waarvan het debiet toeneemt met Q_n;
y_n = y-coörd. van de puntonttrekking of infiltratie waarvan het debiet toeneemt met Q_n.

Voor gebruik van het rekenprogramma FRONT-1 wordt verwezen naar de gebruikersdokumentatie [3]. Ter illustratie is een berekeningsvoorbeeld bijgevoegd [3].

In dit voorbeeld is een konstante onttrekking aanwezig benevens een puntinfiltratie die gedurende de tijd o $\leq t \leq 3$ jaar werkt met een debiet van $Q_n = + 1200\ m^3/dag$.
De frontverplaatsingen kunnen bepaald worden door de punten met gelijke verblijftijd op de stroombanen met elkaar te verbinden.

Literatuur

1. Akker, C. van den. RID-mededeling 75-3. Toelichting bij het rekenprogramma FLOP-1.
2. Akker, C. van den. RID-mededeling 75-7. Een toelichting bij het rekenprogramma FLOP-2. Stroombanen en verblijftijden van grondwater bij twee-dimensionale horizontale stroming van onvolkomen spanningswater.
3. Akker, C. van den. RID-mededeling 75-5. Frontverplaatsingen in twee-dimensionale grondwaterstromingen. Een toelichting bij het rekenprogramma FRONT-1.