OVERDRUK UIT HET LANDBOUWKUNDIG TIJDSCHRIFT
66ste JAARGANG No 3 MAART 1954

REKENEN MET TABELLEN [1]

G. HAMMING
Rijksinstituut voor Rassenonderzoek te Wageningen

„Table" algebra

Summary see p. 165

1 Motivering

Van sommige onderzoekingen kan men het resultaat moeilijk in het *Landbouwk. Tijdschr.* bespreken, omdat moet worden aangenomen, dat de lezers de gebruikte begrippen niet goed kennen. We hebben hier op het oog onderzoekingen waarbij een groot aantal variabelen optreden.

Als enkele uit vele voorbeelden van zulke onderzoekingen noemen we:

Bij rassenonderzoek kan de opbrengst van ieder ras worden opgevat als een aparte variabele. Wanneer een aantal proefvelden wordt bestudeerd, waarop b.v. 20 rassen voorkomen, dan moet men rekenen met 20 variabelen.

Bij onderzoekingen over herkenbaarheid van graankorrels is iedere eigenschap die men opmeet een variabele, dus lengte, breedte, dikte, gewicht, soortelijk gewicht enz.

Bij vruchtbaarheidsonderzoek zijn de verschillende resultaten van grondonderzoek en veldverkenning als even zovele variabelen op te vatten.

Al deze onderzoekingen hebben met elkaar gemeen dat de gegevens in een *tabel* kunnen worden verzameld.

2 Opbouw van een tabel

In tabel A is voor de gehuchten Ergen, Nergen en Overa het aantal mannelijke inwoners gegeven, ingedeeld naar leeftijdsklassen.

Tabel A. Leeftijdsopbouw van de mannelijke bevolking in drie gehuchten.

Woonplaats	Leeftijdsklassen				Totaal
	0–19	20–39	40–59	60 en ouder	
Ergen	43	40	35	38	156
Nergen	73	68	61	62	264
Overa	58	59	44	60	221
Totaal	174	167	140	160	641

[1]) Ter publicatie ontvangen 17 Oct. 1953.

In tabel A vormen de cijfers die naast elkaar staan een *rij*, de cijfers die onder elkaar staan een *kolom*. Voor ieder gehucht is er dus een rij; voor iedere leeftijdsklasse een kolom.

De laatste kolom geeft de *rijtotalen*, de onderste rij de *kolomtotalen*; rechtsonder staat het *algemeen totaal*. Wanneer we alle totalen weglaten, blijft een deel van de tabel over, dat wij het *lichaam* van de tabel willen noemen.

In tabel A zijn de gehuchten in alfabetische volgorde geplaatst; we hadden ze ook volgens grootte kunnen rangschikken, dus in de volgorde Nergen, Overa, Ergen. Het veranderen van de volgorde der rijen willen we *rijenruil* noemen. Er is natuurlijk ook *kolommenruil* mogelijk, al ligt dat in dit voorbeeld niet voor de hand.

Het zou ook mogelijk zijn voor ieder gehucht een kolom te bestemmen en voor iedere leeftijdsklasse een rij. In tabel B is deze rangschikking gebruikt.

Tabel B. De spiegeling van tabel A.

Leeftijdsklassen	Woonplaats			Totaal
	Ergen	Nergen	Overa	
0–19	43	73	58	174
20–39	40	68	59	167
40–59	35	61	44	140
60 en ouder	38	62	60	160
Totaal	156	264	221	641

In wezen is er geen verschil tussen tabel A en tabel B; slechts de plaatsing is anders. We noemen tabel B de spiegeling van tabel A. Kortheidshalve laten we het woord tabel weg, en zeggen dat B de spiegeling van A is. Zo is A de spiegeling van B. *Inplaats van „spiegeling van A" schrijft men A', dus*

$$B = A'$$
$$A = B' = (A')' \qquad (1)$$

Het is handig steeds hoofdletters te gebruiken als algemeen symbool voor tabellen.

In formule (1) zien we dat tabellen in algebraïsche vergelijkingen worden geplaatst.

3 Onderverdeling van een tabel

In tabel A zien we getallen en kopjes (d.w.z. opschriften van rijen en kolommen). Een tabel zonder kopjes heet een *matrix*, indien men er op een bepaalde wijze mee wil rekenen. De rekenvoorschriften zullen in volgende paragrafen worden gegeven.

Ieder getal, dat in de matrix voorkomt, heet een *element* van de matrix. Ieder element heeft zijn plaats; deze plaats wordt aangeduid door de rijen te nummeren van boven naar beneden, en de kolommen van links naar rechts.

De elementen van matrix A worden vaak door een a aangeduid, voorzien van twee indices. Het element a_{ij} ligt in matrix A op de plaats (ij) in de i^e rij in de j^e kolom. Het element a_{24} in tabel A b.v. is dus 62.

Een matrix met slechts één rij noemt men een *rij-vector*; wij willen zo'n vector aanduiden als (a, of (b enz. Een matrix met slechts één kolom is dan een kolomvector; weer te geven door a), of b). De matrix A bestaat uit de rijvectoren $(a_{1.}$, $(a_{2.}$, ...; maar ook uit de kolomvectoren $a_{.1})$, $a_{.2})$. . . . . In het symbool $(a_{1.}$ geeft de punt aan, dat in alle kolommen een element van $(a_{1.}$ voorkomt; zo komt in alle rijen een element van $a_{.1})$ voor.

De matrix A' bestaat uit de rijvectoren $(a'_{1.}$, $(a'_{2.}$... De eerste rij van A' is de eerste kolom van A; in symbolen kunnen we zeggen dat $(a'_{1.}$ de spiegeling van $a_{.1})$ is. Vaak willen we de spiegeling van een vector aanduiden door alleen de haak te verplaatsen. We duiden de spiegeling van $a_{.1})$ dus aan door $(a_{.1}$. Blijkbaar is $(a'_{1.} = (a_{.1}$. Zo is ook $a_{i.}) = a'_{.i})$.

Men moet dus vooral op de plaatsing van de punt letten.

Vaak is het nodig de bouw van een matrix iets nauwkeuriger te laten zien. In zo'n geval schrijft men b.v. in symbolen

$$
\begin{aligned}
(a &= [a_1.\ a_2.\ a_3.\ \ldots\ .a_p\,] \\
(a_2 &= [a_{21}.\ a_{22}.\ a_{23}.\ .a_{2m}\,] \\
a) &= \{a_1.\ a_2.\ a_3.\ \ldots\} \\
a_{.j}) &= \{a_{1j}.\ a_{2j}.\ \ldots\ .a_{ij}\ \ldots\ .a_{nj}\}
\end{aligned}
$$

In sommige voorbeelden is het laatste element vermeld, nl. a_p, a_{2m}. a_{nj}.

In het laatste voorbeeld is gezegd dat een willekeurig element als a_{ij} wordt aangeduid. Bij een kolomvector worden andere haken gebruikt, dan bij een rijvector.

Voor het weergeven van de gehele matrix A kunnen de volgende symbolische schrijfwijzen gemakkelijk zijn:

$$
\begin{aligned}
A &= [a_{ij}] = [a_{.1})\ a_{.2})\ a_{.3})\ \ldots\ a_{.m})\,] = \\
&= \{(a_{1.}\ (a_{2.}\ (a_{3.}\ \ldots\ldots\ a_{n.}\} = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Hierdoor wordt resp. aangegeven:

1e dat een willekeurig element van A wordt aangegeven als a_{ij};

2e dat een matrix een rijvector is van kolomvectoren;

3e dat een matrix ook een kolomvector is van rijvectoren;

4e dat de matrix een rechthoek van elementen is.

Een matrix, die uit n rijen bestaat en uit m kolommen, is van de orde $n \times m$. Zo vormen de getallen uit het lichaam van tabel A een matrix van de orde 3×4; met inbegrip van de totalen is de orde 4×5. De orde wordt dus aangegeven door twee getallen, verbonden met een $\times$.

4 Optellen

In tabel C is de leeftijdsopbouw gegeven van de vrouwen in de genoemde drie gehuchten.

Tabel C. Leeftijdsopbouw der vrouwelijke bevolking in drie gehuchten.

Woonplaats	Leeftijdsklassen 0–19	20–39	40–59	60–	Totaal
Ergen	34	44	43	47	168
Nergen	67	76	66	58	267
Overa	65	58	47	61	231
Totaal	166	178	156	166	666

In tabel D is de leeftijdsopbouw gegeven van de gehele bevolking.

Tabel D. Leeftijdsopbouw der bevolking van drie gehuchten.

Woonplaats	Leeftijdsklassen 0–19	20–39	40–59	60–	Totaal
Ergen	77	84	78	85	324
Nergen	140	144	127	120	531
Overa	123	117	91	121	452
Totaal	340	345	296	326	1307

Het is duidelijk dat tabel D verkregen is door de tabellen A en C bij elkaar te tellen, dus

$$A + C = D \quad \text{en ook}$$
$$D - A = C \tag{2}$$

Kennelijk kunnen we zeggen $A + C = D$ wanneer $a_{ij} + c_{ij} = d_{ij}$ voor iedere combinatie (ij).

5 Het locaal product

In de genoemde gehuchten hebben bietenproefvelden gelegen met vier rassen p, q, r en s.

De opbrengsten aan verse bieten per veldje, de droge-stofgehalten en de (uit deze twee gegevens afgeleide) droge-stofopbrengsten zijn resp. in tabel E, F en G vermeld.

Tabel E. Verse opbrengst aan bieten in kg per veldje

Proefveld	Bietenrassen p	q	r	s
Ergen	97	80	77	65
Nergen	45	37	38	30
Overa	63	58	54	47

Tabel F. Droge-stofgehalten (in %)

Proefveld	Bietenrassen p	q	r	s
Ergen	9	11	13	15
Nergen	10	13	14	16
Overa	11	11	14	15

Tabel G. Droge-stofopbrengsten in dag per veldje.

Proefveld	Bietenrassen			
	p	q	r	s
Ergen	873	880	1001	975
Nergen	450	481	532	480
Overa	693	638	756	705

Het is duidelijk, dat tabel G verkregen is door de tabellen E en F met elkaar te vermenigvuldigen, dus

$$E \times F = G \text{ (d.w.z. } e_{ij} \times f_{ij} = g_{ij}) \qquad (3)$$

Wij willen G het *locaal product* van E en F noemen, omdat slechts die elementen van E en F met elkaar worden vermenigvuldigd, die op dezelfde plaats staan. E en F verbinden we door een $\times$ teken; dit teken mag niet worden weggelaten. Kennelijk kunnen we ook zeggen

$$G : F = E \text{ (d.w.z. } g_{ij} : f_{ij} = e_{ij}) \qquad (4)$$

E is het locaal quotient van de deling.

Alle regels van de gewone algebra gelden voor optellen en locaal vermenigvuldigen, dus b.v.

$$(A + B) \times (A + B) = (A \times A) + 2\,(A \times B) + (B \times B) \qquad (5)$$

In formule 5 komt voor het vermenigvuldigen van een matrix $(A \times B)$ met het getal 2. Hieronder wordt verstaan dat *ieder* element van de matrix met 2 wordt vermenigvuldigd. Zo geldt voor ieder willekeurig getal p dat

$$B = pA \text{ indien } b_{ij} = pa_{ij} \qquad (6)$$

De matrices A en B heten *evenredig* wanneer (6) geldt.

In de literatuur was het begrip locaal product tot dusver niet gedefinieerd. In uiteenzettingen over proefveldverwerking hebben we het evenwel nodig.

6 Het gewoon product

Indien niet speciaal is aangegeven welk product bedoeld is, is steeds sprake van het *gewoon product*. Het gewoon product van A en B wordt aangegeven door A B, dus zonder $\times$ teken. Het gewoon product A A wordt geschreven A^2; deze schrijfwijze mag dus niet gebruikt worden bij het locaal product.

Voorbeeld. De boekhandelaren A, B, C hebben de boeken g, h, i, j in voorraad. Bijzonderheden over deze boeken staan in tabel M; de voorraadpositie is opgegeven in tabel K.

Tabel M. Aspecten der voorraadspositie.

Bijzonderheden	Boektitels			
	g	h	i	j
Pagina's per boek	257	58	132	374
Prijs per boek	6,50	1,00	3,00	9,75
Aantal dagen in voorraad	40	13	182	16
Dagguldens = $(m_{2.} \times (m_{3.}$	260	13	546	156

Tabel K. Voorraadpositie bij drie boekhandelaren.

Boektitels	Handelaren		
	A	B	C
g	14	5	0
h	50	7	16
i	5	44	11
j	13	29	37

Met het oog op de vereiste bergruimte is de grootte van de boeken belangrijk. Als maat daarvoor is het aantal pagina's genomen. De tweede rij van tabel M vermeldt de prijs van de boeken. Hiervan is het vastgelegde kapitaal afhankelijk. Het aantal dagen dat de boeken in voorraad zijn is een (gebrekkige) maat voor de voorraadpolitiek.

Door de prijs met dit aantal dagen locaal te vermenigvuldigen, krijgen we het aantal dagguldens dat het kapitaal renteloos vast ligt. Dit is dus een maat voor het renteverlies. In tabel N zijn de gegevens verwerkt.

Tabel N. Aspecten van het bedrijf van drie boekhandelaren.

Bijzonderheden	Handelaren		
	A	B	C
Bergruimte	12 020	18 345	16 218
Vastgelegd kapitaal	282,75	454,25	409,75
Voorraadpolitiek	2 328	8 763	2 802
Renteverlies	9 048	29 939	11 986

Tabel N is uit K en M berekend. N is het gewoon product van K en M.

In formule: $MK = N$ (7)

Omdat het locaal product tot dusver niet gebruikt werd, is ook de *naam* „gewoon product" nieuw.

Het is goed er op te letten hoe het gewoon product wordt berekend. Eerst worden de bijzonderheden per boektitel berekend, vervolgens worden de uitkomsten voor de verschillende boektitels opgeteld. Zo is b.v. $n_{41} = 9048 = 260 \times 14 + 13 \times 50 + 546 \times 5 + 156 \times 13$. Een element n_{ij} wordt dus berekend uit de rij i van matrix M en kolom j van matrix K. Eerst wordt bepaald het locaal product $(m_{i.} \times (k_{.j} = (p$. *Vervolgens worden de elementen van (p opgeteld.*

Het is duidelijk dat de kolommen van N corresponderen met de kolommen van K, dus $n_{.j}) = Mk_{.j})$; zo corresponderen de rijen van N met de rijen van M, dus $(n_{i.} = (m_{i.} K$. Het merkwaardige gevolg hiervan is dat de kolommen van M corresponderen met de rijen van K. Dit brengt weer mee dat een rij van M met een kolom van K wordt vermenigvuldigd.

Laat A van de orde $1 \times q$ zijn en B van de orde $q \times 1$. Dus A is de rijvector (a en B de kolomvector b). Het gewoon product (ab) is van de orde 1×1, dus een getal. Het is

$$\sum_{i=1}^{q} a_i b_i$$

Zo zijn alle elementen van N getallen die verkregen zijn door een rijvector van M met een kolomvector van K te vermenigvuldigen. We kunnen daarom schrijven

$$MK = N \text{ indien } n_{ij} = (m_{i.} k_{.j}) \qquad (7a)$$

Vermenigvuldigen van twee matrices is niet altijd mogelijk. Laat A van de orde $p \times q$ zijn en B van de orde $r \times s$. Het gewoon product AB bestaat slechts als $q = r$. Dan is AB van de orde $p \times s$.

Laat M van de orde a $\times$ b zijn en K van de orde b $\times$ a. Dan is MK van de orde a $\times$ a en KM van de orde b $\times$ b. Wanneer $\neq$ is dit onmogelijk. We mogen dus *niet* veronderstellen dat MK = KM. Dit in afwijking van de rekenregels voor getallen.

Bij matrices is de volgorde der factoren belangrijk. In (7) is K *voorvermenigvuldigd* met M, en M is *achtervermenigvuldigd* met K. M noemen we de *voorste factor* en K de *achterste factor*.

In N′, de spiegeling van N, slaan de rijen op de boekhandelaren. Deze corresponderen met de rijen van K′. Zo corresponderen de kolommen van N′ met de kolommen van M′. Omdat de rijen van N′ corresponderen met de rijen van de *voorste* factor moeten we schrijven

$$N' = K'\ M' \tag{8}$$

Omdat N = MK kunnen we ook schrijven N′ = (MK)′. Door dit te vergelijken met (8) zien we (MK)′ = K′M′.

$$\text{Zo ook } (ABCD)' = D'\ C'\ B'\ A' \tag{8a}$$

Dus: Bij het spiegelen van een product worden alle factoren gespiegeld en in tegengestelde volgorde geplaatst.

7 Enkele rekenregels

Zonder bewijs geven we hier enkele rekenregels. Sommige van deze regels zijn eenvoudig te verifiëren. De lijst maakt geen aanspraak op volledigheid. Met behulp van cijfervoorbeelden kan men de betekenis van de regels in zich opnemen.

1 $A + B = B + A$
2 $A + A = 2\ A$
3 optellen van A en B is alleen mogelijk als ze van dezelfde orde zijn.
4 $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
5 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
6 Locaal vermenigvuldigen van A en B is alleen mogelijk als ze van dezelfde orde zijn.
7 $(A + B)^2 = (A + B)\ (A + B) = AA + BA + AB + BB = A^2 + BA + AB + B^2$.
Dit is alleen mogelijk als A en B *vierkant* zijn, d.w.z. evenveel rijen als kolommen hebben.
8 Wanneer in een uitdrukking gewoon vermenigvuldigen, locaal vermenigvuldigen en optellen voorkomen, hebben ze in de genoemde volgorde voorrang. Dus
$A + B \times CD = A + \{B \times (CD)\}$
9 $AB\ (C \times p\ D) \times EqF = pq\ AB\ (C \times D) \times EF$
als p en q gewone getallen zijn. We mogen gewone getallen dus in de producten naar believen verplaatsen. Indien we a)(b met p willen vermenigvuldigen, schrijven we a)p(b.
10 (ab is het locaal product (a $\times$ (b.

8 Soorten matrices

a Een matrix die evenveel rijen heeft als kolommen is *vierkant*. De elementen a_{ii} vormen de *diagonaal* van matrix A; de diagonaal loopt dus van linksboven naar rechtsonder. De elementen, die op de diagonaal liggen heten *diagonale elementen*, de overige *zij-elementen*. De zij-elementen rechts boven de diagonaal noemen we *bovenelementen;* die links onder de diagonaal noemen wij *benedenelementen.*

b Een vierkante matrix waarvan alle bovenelementen nul zijn, noemen we een *lage driehoek;* bij een *hoge driehoek* zijn de benedenelementen nul.

c Een vierkante matrix waarvan alle zij-elementen nul zijn is een *diagonale matrix.* Evenals in een vector is er maar één index nodig om de elementen van een diagonale matrix te onderscheiden. Als symbool voor een diagonale matrix willen we nemen een kleine letter tussen speciale haken, b.v.

$$\lceil d \rfloor = \lceil d_1 , d_2 , d_3 \ldots . d_p \rfloor = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & d_p \end{vmatrix}$$

d Een diagonale matrix waarvan de (diagonale) elementen 1 zijn, heeft een *eenheidsmatrix;* deze stellen we voor door I.

Door de eenheidsmatrix met het getal d te vermenigvuldigen krijgen we dI, een diagonale matrix waarvan de (diagonale) elementen onderling gelijk zijn. Er kan dus verschil zijn tussen dI en $\lceil d \rfloor$. Bij de notatie $\lceil d \rfloor$ mogen de elementen ongelijk zijn.

e Een rijvector die uit elementen 1 bestaat, stellen we voor door (1; zo is a(1 een rijverctor die uit gelijke elementen a bestaat. Er zij aan herinnerd dat (a de rijvector $[\ a_1, a_2, a_3 \ . \ .]$ is; hier mogen de elementen ongelijk zijn. Door 1) wordt een kolomvector aangeduid, die uit elementen 1 bestaat; 1) a heeft gelijke elementen a. Door gewoon te vermenigvuldigen blijkt dat

$$a)(b = [\ a_i b_j\ ] \tag{9}$$

d.w.z. het resultaat is een matrix C waarvan het element $c_{ij} = a_i b_j$. Als speciale gevallen kunnen genoemd worden 1)(a, een matrix die uit gelijke rijen (a bestaat; en 1)(1, een matrix die geheel uit elementen 1 bestaat.

Het is een goede oefening na te rekenen dat

$$\begin{aligned} (a \lceil d \rfloor &= (a \times (d = (ad \\ A \lceil d \rfloor &= A \times 1)(d \\ \lceil d \rfloor\ A &= A \times d)(1 \end{aligned} \tag{10}$$

Speciaal wanneer $\lceil d \rfloor = I$

$$\begin{aligned} A\ I &= A \times 1)(1 = A \\ I\ A &= A \times 1)(1 = A \end{aligned} \tag{11}$$

De formules (11) verklaren de naam eenheidsmatrix; gewoon vermenigvuldigen met I heeft geen invloed. Men mag dus naar believen matrices I tussenvoegen of weglaten bij gewoon vermenigvuldigen.

f Een matrix A is *symmetrisch* wanneer A = A'. Kennelijk is iedere diagonale matrix symmetrisch. Verder is ieder product A'A symmetrisch, want (wegens 8a)

$$(A'A)' = A'(A')' = A'A \qquad (12)$$

g Een matrix die geheel uit nullen bestaat heet een nulmatrix en wordt geschreven als 0. Een nulvector wordt door hetzelfde symbool aangeduid.

Het product (a.1) = (1.a) = Σ a. We kunnen de 1 weglaten en schrijven (a). Onder (a) wordt dus verstaan de som van de elementen van (a. Blijkbaar is (ab.1) = (ab) = (a.b).

9 Ontbinden in driehoeken

Eventueel na rijenruil en kolommenruil kan iedere vierkante matrix A worden geschreven als het product van twee driehoekige matrices B en C. Aan B kunnen we de eis stellen dat het een lage driehoek is met diagonale elementen 1; van C kunnen we eisen dat het een hoge driehoek is. Dus

$$A = B\ C \qquad (13)$$

Indien A geheel uit nullen bestaat, dus een nulmatrix is, kunnen we schrijven

$$A = B\ 0$$

De nulmatrix 0 kan worden opgevat als een hoge driehoek, waarvan ook de diagonale elementen en bovenelementen toevallig nul zijn.

In dit geval is dus aan (13) voldaan.

Indien A niet een nulmatrix is, is er minstens één element dat niet nul is. Laat dit a_{ij} zijn. Door rij i met de eerste rij te ruilen en kolom j met de eerste kolom, komt dit element in de positie a_{11} te staan. Om afrondingsfouten te voorkomen, is het vaak wenselijk het element met de grootste absolute waarde op deze manier naar de plaats (11) te brengen.

Voor het bestuderen van de verdere werkwijze willen we formule (13) uitvoeriger uitschrijven in een voorbeeld van matrices van de orde 3 $\times$ 3. Elementen die verplicht nul zijn, duiden we even aan als o_{ij} om hun plaats te kunnen aangeven; elementen die verplicht 1 zijn als 1_{ii}. Zo krijgen we

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{11} & o_{12} & o_{13} \\ b_{21} & 1_{22} & o_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 1_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ o_{21} & c_{22} & c_{23} \\ o_{31} & o_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \qquad (13a)$$

Volgens (7a) is $a_{11} = (b_{1.}\ c_{.1}) =$

$$1_{11}\ c_{11} + o_{12}\ o_{21} + o_{13}\ o_{31} = c_{11}.$$

Voor ieder element van $(a_{1.}$ geldt zo'n formule, dus $a_{12} = (b_{1.}\ c_{.2})$

$$a_{13} = (b_{1.}\ c_{.3}).$$

Samenvattend kunnen we schrijven

$$(a_{1.} = (b_{1.}C = 1_{11}\ (c_{1.} + o_{12}\ (c_{2.} + o_{13}\ (c_{3.} = (c_{1.}$$

De eerste rij van C is dus gelijk aan de eerste rij van A.

Zo is ook

$$a_{.1}) = B\ c_{.1}) = b_{.1})\ c_{11} + b_{.2})\ o_{21} + b_{.3})\ o_{31} = b_{.1})\ c_{11}$$

We krijgen de eerste kolom van B door alle elementen van de eerste kolom van A te delen door $c_{11} = a_{11}$. Kennelijk is $b_{11} = a_{11}/a_{11} = 1$.

Doordat we een element van A, dat niet nul is, naar de plaats van a_{11} hebben gebracht, is deling steeds mogelijk. Het zal duidelijk zijn dat de afrondingsfouten des te kleiner zijn, naarmate a_{11} in absolute waarde groter is.

Nu moet een tweede kolom van B en een tweede rij van C worden berekend. We kunnen A = B C als volgt schrijven

$$A = \{\, b_{.1}),\ b_{.2})\ \ldots \,\}\ \{\, (c_{1.},\ (c_{2.}\ \ldots \,\} = b_{.1})\,(c_{1.} + b_{.2})\,(c_{2.} + \ldots$$

of $\quad A - b_{.1})\,(c_{1.} = b_{.2})\,(c_{2.} + \ldots$

Om $b_{.2})$ en $(c_{2.}$ te berekenen, berekenen we $U = A - b_{.1})\,(c_{1.}$. Door een cijfervoorbeeld uit te werken ziet men dat de eerste rij en eerste kolom van U uit nullen bestaan. Het is theoretisch ook gemakkelijk in te zien.

Indien U geheel uit nullen bestaat, kiezen we de ontbrekende elementen van C gelijk aan nul, zodat de keuze van de elementen van B verder niet belangrijk is. Indien U niet geheel uit nullen bestaat, brengen we het grootste element (in absolute waarde) naar de plaats van u_{22}. Nu stellen we

$$(c_{2.} = (u_{2.} \quad \text{en}$$

$$b_{2.}) = u_{.2})\,\frac{1}{u_{22}}$$

Zo doorgaande laten B en C zich geheel berekenen.

Een matrix heet *ontaard*, wanneer C minstens één diagonaal element nul heeft.

Laat A een hoge driehoek zijn. Wanneer we nu A volgens (13) ontbinden, vinden we dat er geen rijenruil nodig is.

In dit geval is $B = I$ en $C = A$. Het begrip „ontaard" is dus op C evenzeer toepasselijk als op A.

10 De inverse matrix

Bij iedere niet ontaarde driehoek P is een driehoek Q te vinden, zodanig dat $P\,Q = I$.

We tonen dit aan door een rekenvoorschrift te geven. We geven weer een voorbeeld met matrices van de orde 3×3.

$$\begin{bmatrix} p_{11} & o_{12} & o_{13} \\ p_{21} & p_{22} & o_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & o_{12} & o_{13} \\ q_{21} & q_{22} & o_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & 1_{22} & o_{23} \\ o_{31} & o_{32} & 1_{33} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

We zien

$1_{11} = p_{11}\,q_{11} + o_{12}\,q_{21} + o_{13}\,q_{31} = p_{11}\,q_{11}$; dus $q_{11} = 1/p_{11}$

$o_{21} = p_{21}\,q_{11} + p_{22}\,q_{21}\ (+\ o_{23}\,q_{31})$; dus $q_{21} = -\,p_{21}\,q_{11}/p_{22}$.

De deling is mogelijk want P is niet ontaard, dus p_{22} is niet nul. Op de aangegeven wijze laten de verschillende kolommen van Q zich berekenen van boven naar beneden.

Op dezelfde wijze laat zich een driehoek R berekenen, zodanig dat $R\,P = I$.

Wanneer $R\,P = I$ en $P\,Q = I$, dan is $R = Q$.

Want uit $R\,P = I$ volgt $R\,P\,Q = I\,Q = Q$.

Maar wegens $P\,Q = I$ geldt ook $R\,P\,Q = R\,I = R$. Dus $R = Q$.

Inplaats van R en Q kunnen we ook schrijven P^{-1}. P^{-1} heet de *inverse* van P.

We kunnen een matrix A ontbinden volgens (13), dus $A = B\,C$. Indien B en C niet ontaard zijn bestaan B^{-1} en C^{-1}. Stel $D = C^{-1}\,B^{-1}$.

Door beide leden van 13 achter te vermenigvuldigen met D vinden we

$$A\,D = B\,C\,D = B\,C\,C^{-1}\,B^{-1} = B\,I\,B^{-1} = B\,B^{-1} = I.$$

Zo ook $\ D\,A = D\,B\,C = C^{-1}\,B^{-1}\,B\,C = C^{-1}\,I\,C = C^{-1}\,C = I.$

Dus D is de inverse van A. We zien dus dat iedere vierkante matrix die niet ontaard is een inverse heeft, die zowel bij vóór- als achtervermenigvuldigen de eenheidsmatrix oplevert.

Uit de berekeningswijze volgt tegelijk: Een matrix die ontaard is, heeft geen inverse.

Wanneer A B = I zijn A en B elkaars inversen, d.w.z. $(a_{i.}\ b_{.i}) = 1$ voor alle i, en $(a_{i.}\ b_{.j}) = 0$ als $j \neq i$. Het is duidelijk dat een rijenruil in A gepaard moet gaan met een overeenkomende kolommenruil in B. Omdat ook B A = I, geldt ook het omgekeerde; bij een kolommenruil in A hoort een overeenkomstige rijenruil in B.

11 De rang

In § 9 hebben we een regel gegeven voor het ontbinden van een matrix in driehoeken.

Het aantal van de diagonale elementen van C die niet nul zijn, heet nu de rang van A; het aantal nullen in de diagonaal heet het rangtekort. Er wordt aan herinnerd dat een rij van C geheel uit nullen bestaat indien het diagonale element nul is. De rang geeft dus aan hoeveel rijen C bevat, die niet geheel uit nullen bestaan. Evenals het woord „ontaard" zijn ook de woorden rang en rangtekort gelijkelijk op C van toepassing. Een matrix die niet ontaard is heeft geen rangtekort.

Het gegeven voorschrift van § 9 brengt mee, dat de *eerste* r diagonale elementen van C ongelijk nul zijn, indien de rang r is, de verdere diagonale elementen zijn alle nul.

In het algemeen is $A = [\ b_{.1}),\ b_{.2}),\ \ldots\ ]\ \{(c_{1.},\ (c_{2.},\ \ldots\ \} =$

$$b_{.1})\ (c_{1.} + b_{.2})\ (c_{2.} + \ldots$$

Indien de rang r is, behoeven slechts r termen in het laatste lid te worden vermeld omdat de overige toch nul zijn.

Voor een bepaalde rij $(a_{k.}$ uit A kunnen we schrijven

$$(a_{k.} = b_{k1}\ (c_{.} + b_{k2}\ (c_{2.} + b_{k3}\ (c_{3.}$$

indien de rang van A 3 is. Op deze manier kan iedere rij van A worden geschreven als een lineaire combinatie van de drie vectoren $(c_{1.}$, $(c_{2.}$ en $(c_{3.}$.

In het algemeen heet een vector (a een *lineaire* combinatie van de vectoren (b, (c, ..., indien (a = p (b + q (c + . . ., waarbij p, q .. gewone getallen zijn. In dit geval mogen we ook schrijven −1(a + p(b + q(c + ... = 0. We zeggen dat (a, (b, (c, ... lineair afhankelijk zijn indien er getallen p_1, p_2, p_3 .... kunnen worden aangegeven, zodanig dat $p_1(a + p_2(b + p_3(c + \ldots = 0$, zonder dat alle p's nul zijn.

Indien we uit C alle *rijen* wegstrepen, die geheel uit nullen bestaan, blijft er een matrix over die we E zullen noemen. Uit B strepen we alle *kolommen* weg, met dezelfde nummers, de matrix die overblijft noemen we D. Nu is dus

$$A = D\ E \qquad (15)$$

Indien de rang van A r is, heeft D r kolommen en E r rijen. De rijen van E zijn *niet* lineair afhankelijk. Laten we even veronderstellen, dat ze wel afhankelijk zijn, dus dat er een (p bestaat zo, dat (p E = 0. Door (p met de eerste kolom van E te vermenigvuldigen vinden we dat $p_1 = 0$, want p_2 enz. worden met nul vermenigvuldigd. Zo doorgaande bewijzen we van alle elementen van (p dat ze nul zijn, dus de gevraagde (p bestaat niet.

Indien matrix A ontaard is, is er een rangtekort. Dan zijn tevens de rijen van A lineair afhankelijk. Om dit te laten zien duiden we de matrix die gevormd wordt door de bovenste r rijen van D { zie (15) } aan door F (de rang van A zij r).

Door F E worden nu r rijen uit A aangeduid, die we $\bar{A}$ zullen noemen. Dus $\bar{A} = F\ E$. Voorvermenigvuldigen met F^{-1} geeft $F^{-1}\ \bar{A} = E$.

Dit substitueren we in (15) zodat we vinden $A = D\ F^{-1}\ \bar{A}$. Schrijven we $D\ F^{-1} = K$ dan staat hier $A = K\ \bar{A}$.

Laat $(a_{i.}$ een rij uit A zijn die niet in $\bar{A}$ is opgenomen.

Blijkbaar geldt $(a_{i.} = (k_{i.}\ \bar{A}$ of

$$- 1\ (a_{i.} + k_{i1}\ (\bar{a}_{1.} + k_{i2}\ (\bar{a}_{2.} + \ldots . = 0.$$

Dit is de gezochte lineaire betrekking.

Kolommenruil van A komt overeen met kolommenruil van E. Hierdoor wordt het aantal rijen van E niet beïnvloed. Dit aantal rijen is de rang van A. De rang van A verandert dus niet door kolommenruil, en evenmin door rijenruil.

Indien we p maal de rij $(a_{i.}$ optellen bij rij $(a_{j.}$ dan kunnen we ook zeggen, dat we p $(d_{i.}$ optellen bij $(d_{j.}$. Het aantal kolommen van D wordt hierdoor niet beïnvloed, de rang evenmin. Laat H een willekeurige matrix zijn met evenveel rijen als A kolommen heeft. A H = D E H (= G zullen we zeggen) E H heeft r rijen evenals E; de rang van E H is dus niet groter dan r. Door vermenigvuldigen met een matrix kan de rang dus nooit worden verhoogd.

Veronderstel nu dat H vierkant is en niet ontaard. Dan is $A = G\ H^{-1}$, dus de rang van A is ook niet groter dan de rang van G, omdat $G\ H^{-1}$ geen hogere rang heeft dan G.

We vonden dus twee regels: De rang van een matrix verandert niet wanneer de matrix met een niet ontaarde matrix wordt vermenigvuldigd.

En: de rang van de matrix die ontstaat als een product van matrices, kan niet groter zijn dan de kleinste rang onder de factoren.

We kunnen (15) ook schrijven $A' = E'\ D'$. Het spiegelen heeft geen invloed op het aantal rijen en kolommen, dus ook geen invloed op de rang. Alle regels, die we vonden voor de rijen van A, gelden dus ook voor de kolommen.

Dus wanneer van matrix A alle rijen kunnen worden geschreven als lineaire combinaties van k vectoren, dan is k de rang en kunnen alle kolommen eveneens worden geschreven als lineaire combinaties van k kolomvectoren.

Laten er twee matrices zijn A en H; beide zijn ontbonden volgens (15), de factoren van H noemen we K en L, dus

$$A = D\ E \text{ en } H = K\ L.$$

Nu is $(A + H) = D\ E + K\ L$.

Het rechterlid kunnen we schrijven als het product van een rijvector [D, K] en een kolomvector { E, L } . Nu zijn de elementen van [D, K] geen getallen, zoals in [2, 3] , en ook geen kolomvectoren, maar gehele matrices. In [D, K] zijn de kolommen van K gewoon achter die van D geplaatst. Zo zijn in { E, L } de rijen van L onder E geplaatst. Door een eenvoudig getallenvoorbeeld kan men de gang van zaken gemakkelijk controleren.

Wanneer nu A van de rang r is en H van de rang s, dan heeft E precies r rijen en L heeft s rijen; de matrix { E, L } heeft dus r + s rijen. De rang van A + H kan dus niet groter zijn dan r + s; wel kleiner, er kan een lineaire betrekking zijn tussen de rijen van $\{E, L\}$ b.v. doordat de eerste rij van E gelijk is aan de derde rij van L, in zo'n geval is de rang lager dan het aantal rijen.

Laat nu $A + H = B$ zijn, de rang van B is t; we weten dus $t \leqq r + s$. De rang van H is dezelfde als de rang van $-H$. Nu is $A = B - H = B + (-H)$. Wegens bovenstaande rangregel geldt $r \leqq t - s$ of $t \geqq r - s$.

Dus de rang van de som van twee matrices is niet groter dan de som van de rangen, en niet kleiner dan het verschil.

12 Symmetrische matrices

We zagen reeds dat een matrix B *symmetrisch* heet indien $B = B'$. In de practijk wordt gewoonlijk gebruik gemaakt van symmetrische matrices van de vorm $A'A$.

A is dan de oorspronkelijke staat met gegevens en $A'A$ is nauw verwant aan de tabel met correlatie-coëfficienten. Om deze reden verdienen symmetrische matrices een eigen bespreking.

Laat R een symmetrische matrix zijn, dus $r_{ij} = r_{ji}$. Ontbindt R volgens (13) in twee driehoeken. Om de symmetrie te handhaven spreken we af, dat eventuele kolommenruil en rijenruil steeds samengaan, dus als de rijen 2 en 4 worden geruild, dan gebeurt dit ook met de kolommen 2 en 4.

Een diagonaal element blijft hierbij steeds diagonaal element. Deze afspraak maakt een ontbinding volgens 13 soms onmogelijk, b.v. als alle diagonale elementen nul zijn. Deze moeilijkheid komt niet voor met matrices van de vorm $A'A$.

Wegens de symmetrie geldt $(r_{1.} = (r_{.1}$. Volgens het gegeven voorschrift (in § 9) geldt $(r_{1.} = (c_{1.}$ en $1/r_{11}\,(r_{.1} = (b_{.1}$. Dus $(b_{.1}$ en $(c_{1.}$ zijn evenredig.

Hun product is $b_{.1})(c_{1.} = r_{.1})\dfrac{1}{r_{11}}(r_{1.} = s_{1.})(s_{1.}$ indien $(s_{1.} = 1/\sqrt{r_{11}}\,(r_{1.}$

Het is duidelijk dat $s_{1.})(s_{1.}$ symmetrisch is, dus ook $R - s_{1.})(s_{1.}$. Hieruit kan weer een symmetrische matrix $s_{2.})(s_{2.}$ worden berekend.

Zo voortgaande vinden we

$$R = S'S \tag{16}$$

Indien r de rang van R is, is r ook het aantal rijen van S, als we de driehoek niet met nullen opvullen. Laat nu $\lceil s_{ii} \rfloor$ de diagonale matrix zijn met dezelfde diagonale elementen als de r rijen van S hebben. De inverse van $\lceil s_{ii} \rfloor$ is $\lceil 1/s_{i} \rfloor$.

Nu is

$$R = S' \lceil 1/s_{ii} \rfloor \lceil s_{ii} \rfloor S \tag{17}$$

Hiermee is de vorm (15) terugverkregen als $S' \lceil 1/s_{ii} \rfloor = D$ en $\lceil s_{ii} \rfloor S = E$ wordt gesteld.

Wij willen de rang van R bepalen wanneer gegeven is, dat $R = A'A$, terwijl r de rang van A is. Voor het gemak nemen we aan dat A vierkant is.

Nu ontbinden we A' volgens (13) dus $A' = B\ C$. C bestaat volgens § 11 uit r rijen, die niet geheel nul zijn, en verder uit nullen.

Nu is $R = A'A = B\ C\ C'\ B'$.

Omdat B en B′ niet ontaard zijn (alle diagonale elementen zijn 1) hebben ze geen invloed op de rang, het is dus voldoende de rang van C C′ te weten. Uit C kunnen we een matrix E vormen, zoals ook in (15) is gedaan, door de rijen met nullen weg te laten; dit heeft geen invloed op de rang. We moeten dus de rang van E E′ weten.

Onze voorlopige aanname dat we over vierkante matrices spreken, laten we dus los; E is vaak niet vierkant. Iedere matrix kunnen we door ontbinden herleiden tot een andere met onderling onafhankelijke rijen. Dit laatste is de wezenlijke eigenschap van E.

Het is duidelijk dat E E′ een vierkante matrix is met r rijen en r kolommen. Indien de rang van E E′ lager zou zijn dan r, dan zou er lineaire afhankelijkheid zijn tussen de rijen, d.w.z. dan zou er een vector (p te vinden zijn zodanig dat (p E E′ $=$ 0 terwijl (p $\neq$ 0. Achtervermenigvuldigen met p) geeft (p E E′ p) $=$ 0.

Omdat de rang van E r is, bestaat er geen lineaire betrekking tussen de rijen van E, dus (p E is niet nul; stel (p E $=$ (z. Dan moet (p E E′ p) $=$ (zz) $= \Sigma z^2 = 0$ zijn. Dit kan niet, dus een vector (p zodanig dat (p E E′ $=$ 0 bestaat niet. De rang van E E′ is dus ook r. We zagen dat dit de rang van R is, dus wanneer R $=$ A′A dan heeft R dezelfde rang als A.

Wanneer R $=$ A′A volgens (16) gesplitst wordt in S′S, dan is geen enkele s_{ii}^2 negatief (s_{ii} imaginair). Dit kan wel gebeuren wanneer we een willekeurige symmetrische matrix opschrijven, b.v. $-$ I. Onze stelling blijkt als volgt. We ontbinden R volgens (16) dus R $=$ S′S.

Door symmetrische rijen- en kolommenruil worden diagonale elementen nul in S geheel naar rechts beneden gebracht. Laten we even veronderstellen dat er wel imaginaire diagonale elementen in S kunnen voorkomen. Laat $s_{ii}{}^2$ het eerste negatieve kwadraat zijn dat gevonden wordt. De eerste i kolommen van A (na de kolommenruil van R te hebben toegepast) verzamelen we nu in een matrix B. Stel D $=$ B′B. Wanneer we D volgens (16) splitsen vinden we een driehoekige matrix, die gelijk is aan het stuk van S dat we al hebben.

$\sqrt{s_{ii}{}^2}$ is het laatste element dat berekend moet worden. Volgens veronderstelling is $s_{ii}{}^2$ negatief. We voegen aan B nog een rij toe, die in de i^e kolom tot element $\sqrt{-s_{ii}{}^2}$ heeft, en verder uit nullen bestaat; $-s_{ii}{}^2$ is positief volgens veronderstelling.

De rang van B wordt hierdoor niet beïnvloed, omdat deze extra rij geen lineaire afhankelijkheid tussen de kolommen van B kan veroorzaken.

De enige invloed op D is, dat d_{ii} met $-s_{ii}{}^2$ wordt vermeerderd, zodat het element dat berekend moet worden nu 0 is. Maar hierdoor zou de rang van D verlaagd worden; dit is in strijd met de gevonden regel dat D $=$ B′B dezelfde rang heeft als B; dus een imaginaire s_{ii} komt niet voor, $s_{ii}{}^2$ is positief of nul.

13 De orthogonale matrix

Een matrix W is orthogonaal indien

$$W' = W^{-1} \tag{18}$$

Dus de spiegeling is gelijk aan de inverse.

$$\text{Bijv. de matrix } \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ is orthogonaal.}$$

Orthogonale matrices vormen de grondslag van de variantie-analyse en van vele andere methoden van onderzoek.

In verband met orthogonale matrices moeten we nog een paar termen noemen. Twee vectoren (a en (b heten onderling *loodrecht* wanneer $(a\ b) = 0$. Een vector (a heet *genormaliseerd* als $(a\ a) = 1$. In een orthogonale matrix zijn alle rijen en kolommen genormaliseerd. Verder zijn alle rijen onderling loodrecht; de kolommen eveneens.

Het product van twee orthogonale matrices U en V is orthogonaal. Om dit te laten zien, vermenigvuldigen we U V met $(U\ V)' = V'\ U'$.

We vinden

$$U\ V\ V'\ U' = U\ V\ V^{-1}\ U' = U\ I\ U' = U\ U' = U\ U^{-1} = I, \text{ dus}$$
$$V'\ U' = (U\ V)' = (U\ V)^{-1}.$$

Dus voor de matrix (U V) geldt formule (18).

SUMMARY: "TABLE" ALGEBRA

The fundamental idea's of matrix algebra are explained without any use of determinants.

The notions explained are addition, subtraction, multiplication, inverse matrix, rank and nullity of matrices, linear dependancy and orthogonal matrices.

In addition there is proved that the product $A'A$ has the same rank as A has, and is positively semidefinite.

A new notion is introduced viz. "local product", the defining equation being $A = B \times C$ if $a_{ij} = b_{ij} \times c_{ij}$.