Analytische berekeningsmethoden voor grondwaterstroming in de verzadigde zone

Voordracht uit de 28ste vakantiecursus in drinkwatervoorziening 'De winning en aanvulling van grondwater en beïnvloeding van de omgeving', die op 8 en 9 januari 1976 werd gehouden aan de TH Delft.

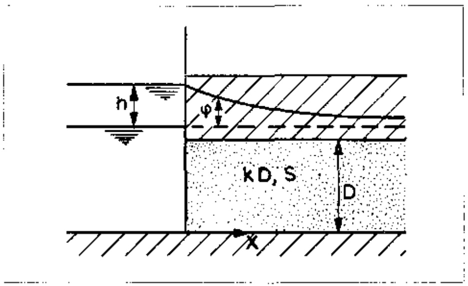
Om duidelijk te maken wat wordt verstaan onder analytische berekeningsmethoden voor grondwaterstroming in de verzadigde zone, zij allereerst opgemerkt dat kennis van de grondwaterstroming onontbeerlijk is voor het oplossen van vraagstukken, zoals die eigenlijk al in de titel van deze vakantiecursus liggen besloten, nl. 'de winning en aanvulling van grondwater en de beïnvloeding (dientengevolge) van de omgeving'. In het algemeen kan dit worden omschreven als: kennis van de grondwaterstroming is noodzakelijk om de

IR. G. A. BRUGGEMAN
RID

gevolgen van menselijke ingrepen in het bestaande grondwaterregime op dat regime te kunnen voorspellen.

Een zeer belangrijke bijdrage tot die kennis vormt uiteraard de bekendheid met het medium waar het grondwater door stroomt: de grond. Om de eigenschappen van de grond te leren kennen is geologisch en geohydrologisch onderzoek noodzakelijk. Voor deze onderwerpen zij, wat deze cursus betreft, verwezen naar de voordrachten van mej. Jelgersma en die van de heren De Ridder en Walter, benevens naar de bijgevoegde lijst van geohydrologische begrippen.
Echter is zelfs een vrij gedetailleerd inzicht in het verloop van de watervoerende en weerstandbiedende grondlagen met bijbehorende grondconstanten, zoals kD en C-waarden nog niet voldoende om juiste voorspellingen ten aanzien van de opgewekte grondwaterstromingen te doen; daarnaast moet ook bekendheid aanwezig zijn met de berekeningsmethoden, welke voor verschillende gevallen moeten worden aangewend om de relatie vast te stellen tussen de geohydrologische en geografische gegevens enerzijds en de grootte en richting van de grondwaterstroming anderzijds.

Indien die relatie kan worden gevonden in de vorm van een wiskundige formule, dan is het beschouwde geohydrologische probleem in wezen opgelost. Zodra bijv. het stijghoogteverloop φ van het grondwater in het grondmassief ten gevolge van de verandering der omstandigheden gevonden is als funktie van plaats en tijd en tevens als funktie van de grondconstanten en de geografische begrenzingen, dan zijn alle andere geohydrologische wetenswaardigheden van dat potentiaal verloop af te leiden.



Afb. 1.

Neem bijv. het probleem van de gevolgen van een plotselinge peilverhoging in een lang recht kanaal op de stijghoogten van van het grondwater in een aangrenzend pakket met spanningswater. De oplossing van dit ééndimensionale niet-stationaire geval luidt (zie afb. 1):

$$\varphi(x,t) = h\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{S}{kDt}}\right) \qquad (1)$$

waarbij:
erfc(x) = complementary error funktie =

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

De stijghoogte φ wordt hier gegeven als bekende funktie van een dimensieloze parameter, welke zowel de variabelen x (afstand tot het kanaal) en t (tijd) bevat, alsmede twee constanten van het watervoerende pakket, nl. de elastische bergingscoëfficiënt S en het doorlaatvermogen kD.
Indien deze grondconstanten bekend zijn kan op iedere plaats in het pakket en op ieder tijdstip de potentiaalstijging van het grondwater worden bepaald.
Uit de formule voor φ kunnen nu ook andere gegevens worden afgeleid, bijv. de filtersnelheid van het grondwater als funktie van x en t door differentiatie van φ naar x; ook kan de afgelegde weg van een binnendringend waterdeeltje worden berekend als funktie van de tijd (van belang voor verontreinigd buitenwater).

De doelstelling nu van de analytische berekeningsmethoden is het vinden van dergelijke funkties in formulevorm als oplossingen van geohydrologische problemen. Zulke funkties zijn niet zo maar op te schrijven, maar moeten worden bepaald met behulp van een aantal elementaire natuurkundige wetten, welke voor grondwaterstroming gelden en met behulp van de eigenschappen van zowel grond als water.
Voor de grondwaterstroming in de verzadigde zone gelden als voornaamste wetten de Wet van Darcy en de continuïteitswet, waarbij de laatste een algemeen geldend natuurkundig axioma vertegenwoordigt, waaraan niet valt te tornen. De Wet van Darcy is een proefondervindelijke wet en is gebaseerd op bepaalde experimenten waarvan de uitkomsten niet algemene geldigheid behoeven te hebben. Echter moet worden opgemerkt dat jarenlange ervaringen op het gebied van grondwaterstromingen hebben geleerd dat de Wet van Darcy een bijzonder solide basis voor de berekening is en heel moeilijk door een betere wet zal kunnen worden vervangen.
Door combinatie van de genoemde elementaire wetten en de eigenschappen van grond en water wordt de zogenaamde basis-differentiaalvergelijking verkregen, welke geldt voor elke grondwaterstroming in de verzadigde zone en in homogene, isotrope grond, hoe ingewikkeld ook. Deze differentiaalvergelijking luidt:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+F(x,y,z,t)=\frac{S_s}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (2)$$

waarin:

φ	=	stijghoogte van het grondwater
x, y en z	=	variabelen van plaats
t	=	tijdvariabele
S_s	=	specifieke bergingscoëfficiënt $= \dfrac{S}{D}$
k	=	doorlatendheidscoëfficiënt
F (x, y, z, t)	=	een funktie welke de hoeveelheid water voorstelt welke in het grondlichaam wordt geïnjecteerd of er aan wordt onttrokken

Voor stationaire gevallen vervalt de term met $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ en zonder onttrekking of injectie ook de term F waardoor de drie-dimensionale differentiaalvergelijking van Laplace ontstaat:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (3)$$

Indien het probleem axiaal symmetrisch is kan gemakkelijker met cylindercoördinaten worden gewerkt; de differentiaalvergelijking wordt dan:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{S_s}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (4)$$

Deze differentiaalvergelijking geldt bijv. voor het niet stationaire gedeelte van onttrekking van water door middel van een onvolkomen pompput in volkomen spanningswater. Hebben we te maken met een volkomen pompput, dan is de stroming zuiver horizontaal en vervalt de term

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Treedt bovendien voeding op via een halfdoorlatende laag met weerstand c en is die evenredig met het potentiaalverschil aan weerszijden van die laag en neemt men aan dat die voeding gelijkmatig over de dikte D van het pakket wordt verdeeld, dan kan de term F in de algemene formule worden becijferd op $-\dfrac{\varphi}{kDc}$; de differentiaalvergelijking wordt dan:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\varphi}{\lambda^2}=\frac{S}{kD}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad \text{met } \lambda^2 = kDc \tag{5}$$

In het stationaire geval ontstaat dan de bekende gemodificeerde Besselse differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\varphi}{\lambda^2}=0 \tag{6}$$

Op deze wijze kan voor elk stromingsgeval direkt de bijbehorende differentiaalvergelijking worden opgeschreven en behoeft men niet voor ieder geval afzonderlijk deze af te leiden. Zo luidt de differentiaalvergelijking voor het genoemde ééndimensionale niet-stationaire probleem van de peilverhoging in het lange rechte kanaal:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{S}{kD}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{7}$$

Uit de differentiaalvergelijking alleen is nog niet het potentiaal verloop φ te bepalen; dit wordt pas mogelijk indien ook de begin- en randvoorwaarden mee in de beschouwing worden betrokken. De oplossing van de differentiaalvergelijking tezamen met begin- en randvoorwaarden levert dan het gezochte funktionele verband op. Als controle op de juistheid van de uitkomst kan worden nagegaan of de gevonden funktie inderdaad zowel aan de differentiaalvergelijking als aan de begin- en randvoorwaarden voldoet. Nemen we weer het voorbeeld van het lange rechte kanaal, dan zien we dat de beginvoorwaarde luidt: op het tijdstip $t=0$ is voor elke x groter dan nul ook $\varphi=0$, terwijl de randvoorwaarden worden bepaald door de omstandigheid dat voor $x=0$ steeds $\varphi=h$ is en voor $x=\infty$ $\varphi=0$ is, onafhankelijk van de tijd. Het gehele probleem kan nu verkort worden weergegeven door:

$$\left[\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\dfrac{S}{kD}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} & \varphi=\varphi(x,t) & \\ & \varphi\ (x,0)=0 & \text{voor } x>0 \\ & \varphi(0,t)=h & \text{voor } t>0\ ;\ \varphi(\infty,t)=0 \end{array}\right] \tag{8}$$

Uit de voorbeelden blijkt dat de differentiaalvergelijking, welke met bijbehorende begin- en randvoorwaarden moet worden opgelost, lineair en van de tweede orde is. Hiervoor zijn verschillende oplosmethoden beschikbaar, waarop aan het einde van deze voordracht nog in het kort zal worden teruggekomen.

In het genoemde voorbeeld van het lange rechte kanaal zijn de begrenzingen van het probleem naar plaats en tijd zeer eenvoudig, waardoor het probleem ééndimensionaal wordt, terwijl tevens een homogeen oneindig uitgestrekt pakket wordt verondersteld. Door deze omstandigheden is de oplossing niet moeilijk te vinden. Anders wordt het indien in plaats van een recht kanaal een bochtige rivier wordt beschouwd, welke niet geheel in het pakket insnijdt, dus onvolkomen is, waarbij bovendien de bodem gedeeltelijk is dichtgeslibd, terwijl bijv. het aangrenzende pakket sterk gelaagd is, en dus met verschillende kD's moet worden gewerkt. In zulk soort gevallen is het dan veelal niet mogelijk om het probleem analytisch op te lossen, zonder sterke vereenvoudigingen. Men moet dan zijn toevlucht nemen tot numerieke oplossingen, waarvan de meest gangbaren op dit moment de differentiemethode en de eindige elementen methode zijn, onderwerpen die in deze vakantiecursus door de heer Van den Akker aan de orde worden gesteld.
Deze numerieke methoden — het zij hier nadrukkelijk gesteld, omdat daar nog al eens misverstand over bestaat — zijn dus ook volledig gebaseerd op dezelfde algemene differentiaalvergelijking die ten grondslag ligt aan de analytische berekeningsmethoden; slechts de gecompliceerdheid van de randvoorwaarden en de ondergrond maakt het noodzakelijk van analytische op numerieke methoden over te stappen. In beide gevallen moet echter dezelfde differentiaalvergelijking worden opgelost.
Door de opkomst van de computer hebben in de laatste decennia de numerieke methoden in de vorm van digitale modellen een zeer grote vlucht genomen, zo zelfs, dat men zich zou kunnen afvragen of analytische berekeningen door deze ontwikkeling niet veel van hun waarde hebben verloren. Het antwoord op deze vraag moet ontkennend luiden omdat, hoewel de beperkingen die aan analytische oplossingen moeten worden gesteld in verband met de veelal noodzakelijke sterke schematisatie van de problemen in het oog springen, er anderzijds een aantal duidelijke voordelen boven numerieke berekeningen zijn welke hier in het kort zullen worden genoemd.
In de eerste plaats zijn er legio problemen die zonder, of met betrekkelijk geringe schematisaties toegankelijk zijn voor een analytische oplossing en dit zijn heus niet de allersimpelste problemen. Ook de techniek van het analytisch oplossen van vooral partiële differentiaalvergelijkingen met ingewikkelde randvoorwaarden, alhoewel in theorie reeds lang bekend, heeft de laatste tijd een geweldige praktische stimulans gekregen door de opkomst van de computer. Immers, men hoeft niet meer terug te schrikken voor gecompliceerde analytische uitkomsten, daar deze tegenwoordig met behulp van calculators numeriek toegankelijk zijn, waar ze voorheen niet hanteerbaar waren of pas na eindeloze becijferingen.
Als voorbeeld voor een dergelijke uitkomst bezien we het geohydrologische probleem wat zich in de buurt van het pompstation de Groeve voordoet (in deze cursus als één der standaardvoorbeelden gekozen). Gevraagd wordt naar de invloed van een infiltratiedebiet dat gelijkmatig over de bodembreedte van oneindig lange, sterk onvolkomen sloten, die op gelijke afstanden van elkaar lopen, wordt aangebracht, op de grondwaterstijghoogten in een freatisch anisotroop pakket, dat door een semipermeabele laag is gescheiden van een onderliggend pakket met spanningswater, met min of meer gelijke potentiaal (zie afb. 2).
De analytische oplossing voor dit tweedimensionale stationaire geval kan worden bepaald op:

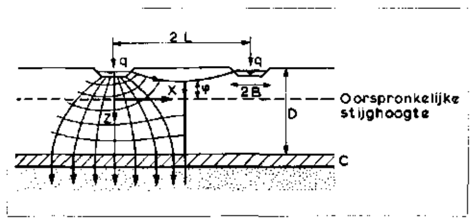
$$\varphi(x,z)=\frac{q}{2L}\left(c+\frac{D-z}{K_z}\right)+\frac{qaL}{\pi^2 B K_z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi B}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)F(n,z)$$

waarin:

$$F(n,z)=\frac{\dfrac{n\pi}{aL}\cosh\left\{\dfrac{n\pi(D-z)}{aL}\right\}+\dfrac{1}{K_z c}\sinh\left\{\dfrac{n\pi(D-z)}{aL}\right\}}{\dfrac{n\pi}{aL}\sinh\left(\dfrac{n\pi D}{aL}\right)+\dfrac{1}{K_z c}\cosh\left(\dfrac{n\pi D}{aL}\right)}$$

x en z	=	coördinaten in resp. horizontale en vertikale richting
φ (x, z)	=	stijghoogten in het bovenste pakket als funktie van de coördinaten
q	=	het debiet per m slootlengte
B	=	halve slootbreedte
L	=	halve onderlinge afstand tussen de slootmiddens
D	=	pakketdikte bovenste pakket
a	=	$\sqrt{\dfrac{K_z}{K_x}}$
K_x	=	horizontale doorlatendheidscoëfficiënt
K_z	=	vertikale doorlatendheidscoëfficiënt
c	=	weerstand semipermeabele laag

Alhoewel de formule er gecompliceerd uitziet, is de oneindige reeks zelfs voor een eenvoudige tafelrekenmachine gemakkelijk te berekenen en daarna even goed hanteerbaar als een bekende, reeds getabelleerde funktie.
In de tweede plaats zijn analytische oplossingen bijzonder nuttig voor het snel verkrijgen van een voorlopige, globale indruk van de uitkomsten van een gecompliceerd projekt dat men voornemens is met behulp van een digitaal model door te rekenen. Bij een dergelijk analytisch vooronderzoek moet uiteaard sterk worden geschematiseerd en de uitkomsten zullen veelal een grove benadering van de werkelijkheid zijn, maar behalve dat men zich zeer snel een globaal idee van de uitkomsten kan vormen, geven de verkregen analytische uitkomsten in formulevorm ook een duidelijk inzicht in de invloed van de verschillende parameters op de uitkomst.
Er mag vervolgens worden aangenomen dat een dergelijke relatieve invloed ook geldig is voor het gecompliceerde geval.
Voor de analyse van pompproeven zijn analytische oplossingen nog steeds onmisbaar. Wie daaraan nog mocht twijfelen hoeft alleen maar het pompproevenboek van



Afb. 2.

Kruseman en De Ridder open te slaan. Daarbij komt nog dat ook in deze tak van de geohydrologie, nl. het veldonderzoek ter bepaling van bodemconstanten, de ontwikkeling van digitale modellen de stoot gegeven heeft tot allerlei nieuwe ontwikkelingen op dit gebied. Een digitaal model kan nl. een grote mate van heterogeniteit van de grond verwerken en wordt pas zinvol indien die heterogeniteit ook in het model wordt ingevoerd, met andere woorden, de variatie van de grondconstanten over betrekkelijk geringe afstanden en op verschillende diepten wordt nu gevraagd.
De klassieke pompproeven met reeksen waarnemingsputten voldoen zowel technisch als economisch (de duur) niet meer aan deze eis zodat uitgezien moet worden naar goedkopere en meer plaatselijke bepalingen van de bodemconstanten.
Een aantal van dit soort proeven is reeds in een vergevorderd onderzoekstadium; het karakter ervan is uiteenlopend maar zij hebben met elkaar gemeen dat de theoretische basis gevormd wordt door een wiskundige formule, ontstaan uit een analytische berekening.
In de vierde plaats kunnen analytische oplossingen van een stroomveld als basis dienen voor de numerieke berekeningen van de verplaatsing en verblijftijden van waterdeeltjes in dat veld, de verplaatsing van fronten, de variatie in concentratie van bepaalde in het grondwater terechtgekomen stoffen enz., onderwerpen, die nauw verbonden zijn met zaken zoals beschermingszones rond waterwinplaatsen, rivierwater-infiltratie en andere projekten, die vanuit een oogpunt van milieuvervuiling bezien, kwetsbaar zijn.
Uit de hier genoemde voorbeelden van toepassingen van analytische berekeningsmethoden blijkt dat er eigenlijk geen werkelijke tegenstelling bestaat tussen analytische en numerieke berekeningsmethoden, maar dat ze elkaar wederzijds aanvullen. Daarom is het ook van belang dat in de geohydrologie niet alleen de digitale modellen verder moeten worden ontwikkeld, maar dat ook meer aandacht wordt besteed aan de toepassing van analytische methoden, die over het algemeen al zeer lang bekend zijn in aanverwante waterschappen, zoals bijv. de warmteleer.
Het is hier niet de bedoeling om nog uitgebreid in te gaan op de verschillende oplosmethoden voor de differentiaalvergelijkingen met de verschillende voorwaarden, welke voor grondwaterstroming gelden. Er zij volstaan met een overzicht van de meest toegepaste methoden ter oplossing van dat gedeelte van de vraagstukken waarbij sprake is van partiële differentiaalvergelijkingen, d.w.z. vergelijkingen waar meer dan één veranderlijke in voorkomt. Voor oplossing van gewone differentiaalvergelijkingen, dus stationaire problemen waarin alleen de x (lineaire stroming) of de r (radiale stroming) optreedt, zij verwezen naar leerboeken over differentiaalvergelijkingen.
Voor wat betreft de oplosmiddelen voor partiële differentiaalvergelijkingen moeten als belangrijkste de scheiding van variabelen, de conforme transformatie en de integraaltransformaties worden genoemd. Deze laatsten kunnen weer worden onderverdeeld in een aantal soorten, welke ieder voor zich toepasbaar zijn op bepaalde vormen waarin de differentiaalvergelijking zich voordoet, zoals de Laplace transformatie, de eindige en oneindige Hankeltransformatie, de eindige en oneindige Fourier sinus en cosinus transformatie. Een overzicht hiervan met de belangrijkste eigenschappen geeft RID-mededeling nr. 73-1 [2], terwijl overigens wordt verwezen naar literatuur over operationele wiskunde [1].
Met behulp van deze methoden kunnen de meest uiteenlopende twee- en driedimensionale, stationaire en niet-stationaire problemen worden opgelost, als gevolg waarvan een enorme uitbreiding van het aantal bekende analytische oplossingen van geohydrologische problemen kon worden verkregen.

Literatuur

1. Churchill, R. V. *Operational Mathematics*, Mc Graw Hill.

2. Bruggeman, G. A. *Mathematical analysis of steady and non steady two- and threedimensional flow in anisotropic aquifers.* RID-mededeling 73-1.

● ● ●

Agenda

27-28 januari 1977, Essen (BRD): Seminar 'Sammlung und Transport von Hausmüll und hausmüllähnlichen Abfällen'. Inl.: Haus der Technik e.V., Postf. 767, 4300 Essen 1, Duitsland.

7 - 10 febr. 1977, Essen: seminar 'Abfallwirtschaft'. Inl.: Haus der Technik e.V., Postf. 767, D-4300 Essen 1.

7-12 februari 1977, Düsseldorf: Envitec, Int. Fachmesse und Kongress für Technik und Umwelt (Environment Technique). Inlichtingen: Envitec, Postfach 320 203, 4000 Düsseldorf.

28 febr. - 4 maart 1977, Essen: seminar 'der Betriebsbeauftragte für Immissionsschutz'. Inl.: Haus der Technik e.V., Postf. 767, D-4300 Essen 1.

2 - 4 maart 1977, Aken, TH: tiende Essener Tagung. Inl.: Inst. zur Förderung der Wassergüte u. Wassermengenwirtschaft,

7-18 maart 1977, Mar del Plata: United Nations World Water Conference.

21-24 maart 1977, Düsseldorf: DVWW Jahrestagung. Inl. DVWW, Pfaffendorferweg 42, 5150 Bergheim/Erft.

21 - 22 maart 1977, Essen: seminar 'Genehmigungsverfahren von Anlagen unter Berücksichtigung des Immissionsschutzes und der Sicherheitstechnik'. Inl.: Haus der technik e.V., Postf. 767, D-4300 Essen 1.

21 - 24 maart 1977, Reading: WRC congres 'Oppertunities for Innovation in Sewerage'. Inl.: WRC, Medmenham Laboratory, Henley Rd, Medmenham, P.O. Box 16, Marlow, Bucks, SL7 2HD, England.

23 - 28 maart 1977, Frankfort: negende Internationale Fachmesse Sanitär Heizung Klima.

27 - 29 april 1977, Brabantse Biesbosch: Symposium 'Mogelijkheden tot vermindering van algengroei in spaarbekkens'. Inl.: drs. G. Oskam, NV Waterwinningbedrijf Brabantse Bisebosch, tel. (01835) 2144.

10-14 mei 1977, Berlijn: Kongress Wasser. Inl.: 'Kongress und Ausstellung Wasser Berlin e.V.', p.A. AMK Berlin, Messedam 22, 1000 Berlin 19.

10 - 11 mei 1977, Graz: Arbeitstagung 'Neue Entwicklungen auf dem Gebiet der Abwassertechnik'.

12 - 13 mei 1977, Graz: Symposium 'Mathematische Modelle und Computeranwendung in der Abwasserreinigung'. Inl. Prof. Franz Moser, Inst. für Grundlagen der Verfahrenstechnik, Coppernicusgasse 24, Graz, Oostenrijk.