

Berekening van verblijftijden van grondwater

De snelheid waarmee vervuild grondwater stroomt en de daaraan gekoppelde verblijftijden en beschermingszones rond grondwaterwinplaatsen krijgen, door het grote aantal opzienbarende bodemverontreinigingen, toenemende belangstelling. De berekening van de grondwatersnelheid kan uitstekend met behulp van een programmeerbare zakrekenmachine worden uitgevoerd. Het hierna te behandelen programma doet dit, voor zowel spanningswater als semi-spanningswater, in een watervoe- rend pakket, waarin, naast een natuurlijke



T. N. Olsthoorn
KIWA NV

$$z_{t+\Delta t} \approx z + v_1 \Delta t$$

In het zo verkregen punt wordt opnieuw de snelheid berekend (v_2). Indien v_2 niet teveel van v_1 afwijkt, wordt de uiteindelijke verplaatsing becijferd met het gemiddelde van v_1 en v_2 , uitgaande van het punt z:

$$v_2 = v(z + v_1 \Delta t); \bar{v} = \frac{1}{2} (v_1 + v_2);$$

$$z_{t+\Delta t} = z + \bar{v} \Delta t$$

De check of v_2 en v_1 niet teveel van elkaar verschillen dient om te grove stappen en daarmee irrelevante middeling van v_1 en v_2 te voorkomen. Is het verschil tussen v_2 en v_1 te groot, dan wordt v_2 vergeten, vervolgens de tijdstap gehalveerd en de rekenprocedure herhaald. Dit gaat zo door totdat wel aan het criterium wordt voldaan. De vergelijking bestaat uit de eenvoudige eis, dat het inwendig product $v_1 \cdot v_2$ ge-

deeld door de modulus (lengte) van v_1 in het kwadraat tussen 0,5 en 2 moet liggen:

$$0,5 < \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| |v_2|} < 2; \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| |v_2|} = \frac{v_{x1}v_{x2} + v_{y1}v_{y2}}{v_{x1}^2 + v_{y1}^2}$$

Deze check voorkomt tevens, dat de gevolgde druppel, door een te grote tijdstap, door een put heenschiet of rond een put gaat slingeren.

Omdat een reeksontwikkeling teveel rekentijd in beslag neemt wordt de besselfunctie, overigens met 99 % nauwkeurigheid, door eenvoudige functies benaderd:

$$\text{voor } u \leq 1,5 : u K_1(u) \approx 1 - 0,2159u - 0,3318u^2 + 0,1437u^3$$

$$\text{voor } u > 1,5 : u K_1(u) \approx e^{-u} \sqrt{\left(\frac{\pi u}{2}\right)}$$

of andere basisstroming, een in principe willekeurig aantal onttrekkings- en infiltratieputten aanwezig is. Vanaf een willekeurig startpunt wordt, tijdstap na tijdstap, een stroomlijn gevolgd, tot het beoogde punt, de beoogde verblijftijd, danwel een van de onttrekkingsputten is bereikt.

De snelheid van een druppel grondwater in het punt $z = (x,y)$ bedraagt:

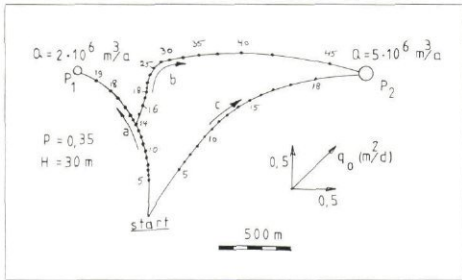
$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{pH} \begin{pmatrix} q_{0x} \\ q_{0y} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{np} \left\{ \frac{Q_i}{2\pi pH} \begin{pmatrix} x - x_{pi} \\ y - y_{pi} \end{pmatrix} \frac{1}{(r_i)^2 F} \right\}$$

Vectoren zijn in deze betrekking tussen rechte haken geplaatst; de betreffende x-component boven, de y-component onder. v is de snelheid, bijvoorbeeld in meters per dag; q_0 is de specifieke basisstroming (m^2/d); Q_i is de volumestroom uit put_i, onttrekkings positief (m^3/d); p is de porositeit van het watervoerende pakket (fractie, dimensieloos); H is de dikte van het watervoerende pakket (m); x en y de coördinaten van het beschouwde punt waarin de snelheid wordt berekend (m); x_{pi} , y_{pi} de coördinaten van put i (m); r de afstand tussen punt (x, y) en put i (m); np is het aantal aanwezige putten en F is een functie: $F = 1$ voor spanningswater en $F = (r_i/\lambda) K_1(r_i/\lambda)$ voor semi-spanningswater, met λ de karakteristieke lengte van het pakket (m) en K_1 de gemodificeerde besselfunctie van de tweede soort en orde 1.

Het programma berekent eerst de snelheid $v = v_1$ in het punt $z = (x,y)$. Met de gekozen tijdstap Δt volgt dan een eerste benadering van de verplaatsing Δz en de coördinaten van het nieuwe punt:

Programma HP 41 C.

014LBL FLOP 2	61 XEQ 01	121 DELTA T	181 ISG 13	241 RCL 10	301 ARCL 09
02 CF 04	62 RTN	122 PROMPT	182 XEQ 07	242 1/X	302 AVIEW
03 CLR	63 GTO 22	123 STO 09	183 RTH	243 SQR	303 LLH
04 +Y	64 LBL 0	124 RTH	184 LBL 07	244 RCL 00	304 CF 03
05 ASTO X	65 RCL 02	125 GTO 22	185 RCL 12	245 /	305 RCL 17
06 SEMI Y OR N?	66 XEQ 01	126 LBL 01	186 INT	246 ENTER	306 X12
07 PROMPT	67 H ?	127 ST* 15	187 ARCL X	247 ENTER*	307 RCL 18
08 ASTO Y	68 PROMPT	128 ST* 16	188 + ?	248 ENTER*	308 X12
09 X=Y?	69 STO 02	129 SF 02	189 PROMPT	249 1.5	309 +
10 XEQ 04	70 1/X	130 XEQ 03	190 STO IND 13	250 X=Y?	310 1/X
11 N PUT ?	71 XEQ 01	131 CF 02	191 RTH	251 GTO 25	311 RCL 07
12 PROMPT	72 RTH	132 RDN	192 LBL 09	252 RDN	312 RCL 17
13 STO 11	73 GTO 22	133 LBL 20	193 RCL 15	253 .14367	313 *
14 1	74 LBL 0	134 ISG 13	194 STO 07	254 *	314 RCL 08
15 STO 01	75 -1 ?	135 GTO 21	195 RCL 16	255 -.33175	315 RCL 18
16 STO 02	76 PROMPT	136 RTH	196 STO 08	256 +	316 *
17 2	77 3	137 LBL 21	197 XEQ 02	257 *	317 +
18 PI	78 *	138 ST* IND 13	198 XEQ 03	258 -.2159	318 *
19 *	79 18	139 GTO 20	199 LBL 17	259 +	319 2
20 ST/ 01	80 +	140 LBL 02	200 ISG 12	260 *	320 X<Y
21 XEQ E	81 -0 ?	141 .001	201 GTO 18	261 1	321 X<Y?
22 XEQ 02	82 PROMPT	142 RCL 11	202 RTH	262 +	322 SF 03
23 XEQ 03	83 2	143 *	203 LBL 18	263 RTH	323 .5
24 XEQ 05	84 /	144 STO 12	204 ISG 13	264 LBL 25	324 X<Y
25 FIX 2	85 PI	145 RTH	205 RCL IND 13	265 RDN	325 X<Y?
26 XEQ B	86 /	146 LBL 03	206 RCL 03	266 -1.2869 E-3	326 SF 03
27 XEQ C	87 RCL 01	147 RCL 11	207 -	267 *	327 SF? 03
28 XEQ F	88 /	148 .003	208 STO Y	268 .02344	328 XEQ 13
29 LBL 22	89 RCL 02	149 *	209 ISG 13	269 +	329 RTH
30 XEQ G	90 /	150 18.01803	210 RCL IND 13	270 *	330 LBL 13
31 LBL 23	91 STO IND Y	151 +	211 RCL 04	271 -.14806	331 RCL 17
32 XEQ 09	92 RTH	152 STO 13	212 -	272 +	332 RCL 09
33 XEQ 11	93 GTO 22	153 SF? 02	213 STO T	273 *	333 *
34 XEQ 09	94 LBL E	154 RTH	214 X12	274 1.364	334 ST- 03
35 XEQ 12	95 -00X ?	155 2 E-5	215 X<Y	275 +	335 RCL 18
36 SF? 03	96 PROMPT	156 ST- 13	216 X12	276 X<Y	336 RCL 09
37 GTO 23	97 STO 15	157 RTH	217 +	277 E1X	337 *
38 XEQ 13	98 -00Y ?	158 LBL 04	218 1/X	278 /	338 ST- 04
39 XEQ 14	99 PROMPT	159 SF 04	219 STO 10	279 X<Y	339 2
40 RCL 02	100 STO 16	160 LAMBDA ?	220 RCL T	280 PI	340 ST/ 09
41 -X*	101 RCL 01	161 PROMPT	221 *	281 *	341 RTH
42 XEQ 15	102 RCL 02	162 STO 00	222 STO 06	282 2	342 LBL 14
43 RCL 04	103 *	163 RTH	223 RDN	283 /	343 RCL 17
44 +Y*	104 ST/ 15	164 LBL 05	224 RCL 10	284 SQR	344 ST+ 07
45 XEQ 15	105 ST/ 16	165 FIX 0	225 *	285 *	345 RCL 18
46 RCL 09	106 RTH	166 LBL 24	226 STO 05	286 RTH	346 ST+ 08
47 2	107 GTO 22	167 ISG 12	227 1	287 LBL 11	347 XEQ 11
48 *	108 LBL F	168 GTO 16	228 SF? 04	288 RCL 07	348 RTH
49 ST+ 14	109 *-TOTAL ?	169 RTH	229 XEQ 10	289 STO 17	349 LBL 15
50 RCL 14	110 PROMPT	170 LBL 06	230 ISG 13	290 RCL 09	350 ARCL X
51 -T*	111 STO 14	171 XEQ 06	231 RCL IND 13	291 *	351 AVIEW
52 XEQ 15	112 *-START ?	172 GTO 24	232 *	292 ST+ 03	352 STOP
53 GTO 22	113 PROMPT	173 LBL 06	233 ST* 05	293 RCL 08	353 CLR
54 LBL E	114 STO 03	174 -X *	234 ST* 06	294 STO 18	354 END
55 RCL 01	115 +Y-START ?	175 ISG 13	235 RCL 05	295 RCL 09	
56 XEQ 01	116 PROMPT	176 XEQ 07	236 ST+ 07	296 *	
57 -POR ?	117 STO 04	177 -Y *	237 RCL 06	297 ST+ 04	
58 PROMPT	118 RTN	178 ISG 13	238 ST+ 08	298 RTH	
59 STO 01	119 GTO 22	179 XEQ 07	239 GTO 17	299 LBL 12	
60 1/X	120 LBL G	180 -Q"	240 LBL 10	300 DT	



Afb. 1 - Stroomlijnen en verblijftijden bij 2 putten en natuurlijke stroming q_0 ; a) alleen P_1 in bedrijf, b) bovendien put P_2 in bedrijf vanaf $t = 14$ jaar en c) P_1 en P_2 in bedrijf.

$(0,9962 + 1,3844u - 0,1481u^2 - 0,001287u^3)$

Het aantal putten dat kan worden gebruikt hangt uitsluitend van de beschikbare geheugenruimte af. Voor de HP 41 C met 1 geheugenmodule zijn twee putten het maximum, doch per extra geheugenmodule komen er 21 bij; geen onaanzienlijk aantal dus.

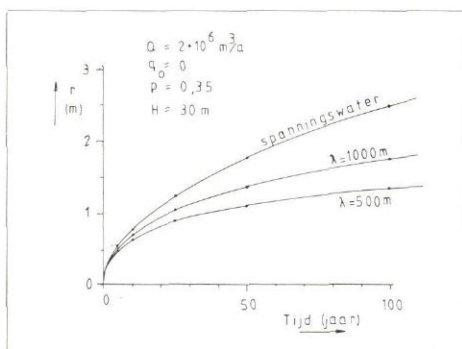
Het programma is geheel interactief, het vraagt na het starten dus zelf om alle voor de berekening benodigde gegevens. Een belangrijk voordeel van de toegepaste programmeerwijze is de mogelijkheid om op elk gewenst moment een willekeurige variabele te wijzigen, zonder dat het gehele set gegevens opnieuw moet worden ingevoerd. Op willekeurige momenten kunnen hiermee putten worden aan- of uitgezet, de debieten en de natuurlijke stroming worden gevarieerd en dergelijke.

Het programma (voor de HP 41 C) is 354 regels lang en bevat ruim 20 sub-routines. De werking van het programma wordt direct duidelijk uit de stroomschema's, aan de hand waarvan op eenvoudige wijze voor willekeurig welk ander type rekenmachine het programma kan worden opgesteld.

Voorbeeld

Afb. 1 toont het resultaat van een berekening met volkomen spanningswater, met

Afb. 2 - Afstand tot de put als functie van de tijd voor radiaal-symmetrische stroming bij spanningswater en semi-spanningswater. Stroomschema's.



T (jaar)	0,22	0,61	1	2	5	10	25	50	100	(j)
r (HP 41 C)	116	194	248	350	554	783	1240	1750	2473	(m)
r (analyt.)	115	192	146	348	550	779	1231	1741	2462	(m)

2 putten (of pompstations) P_1 en P_2 , natuurlijke stroming q_0 in noord-oostelijke richting, met sterkte $0,5 \text{ m}^2/\text{d}$, een porositeit p van $0,35$ en een pakketdikte H van 30m . Curve a is de stroomlijn vanaf het startpunt (bijvoorbeeld een vuilstort), wanneer alleen P_1 in bedrijf is met een capaciteit van 2 miljoen m^3/jaar . (De tussentijden in jaren zijn naast de curves vermeld). Na 19,4 jaar komt de gevolgde druppel in P_1 aan. Curve b ontstaat door het in bedrijf nemen van P_2 na 14 jaren, met een capaciteit van 5 miljoen m^3/jaar . De druppel belandt dan uiteindelijk, na een totale verblijftijd van 45,4 jaar, in P_2 . Indien beide pompstations vanaf het begin met hun respectieve capaciteiten zouden hebben gedraaid, dan ontstaat curve c, met een totale stroomtijd van 18,7 jaar. Dit voorbeeld demonstreert het onderweg aanzetten van put P_2 . Op dezelfde manier kan vanaf een willekeurig ander punt de baan met bijbehorende verblijftijd worden becijferd; er zijn legio mogelijkheden, bijvoorbeeld terugrekenen in de tijd, door hezij negatieve tijdstappen, hetzij negatieve onttrekkingen toe te passen. Dit laatste wordt algemeen gedaan bij de berekening

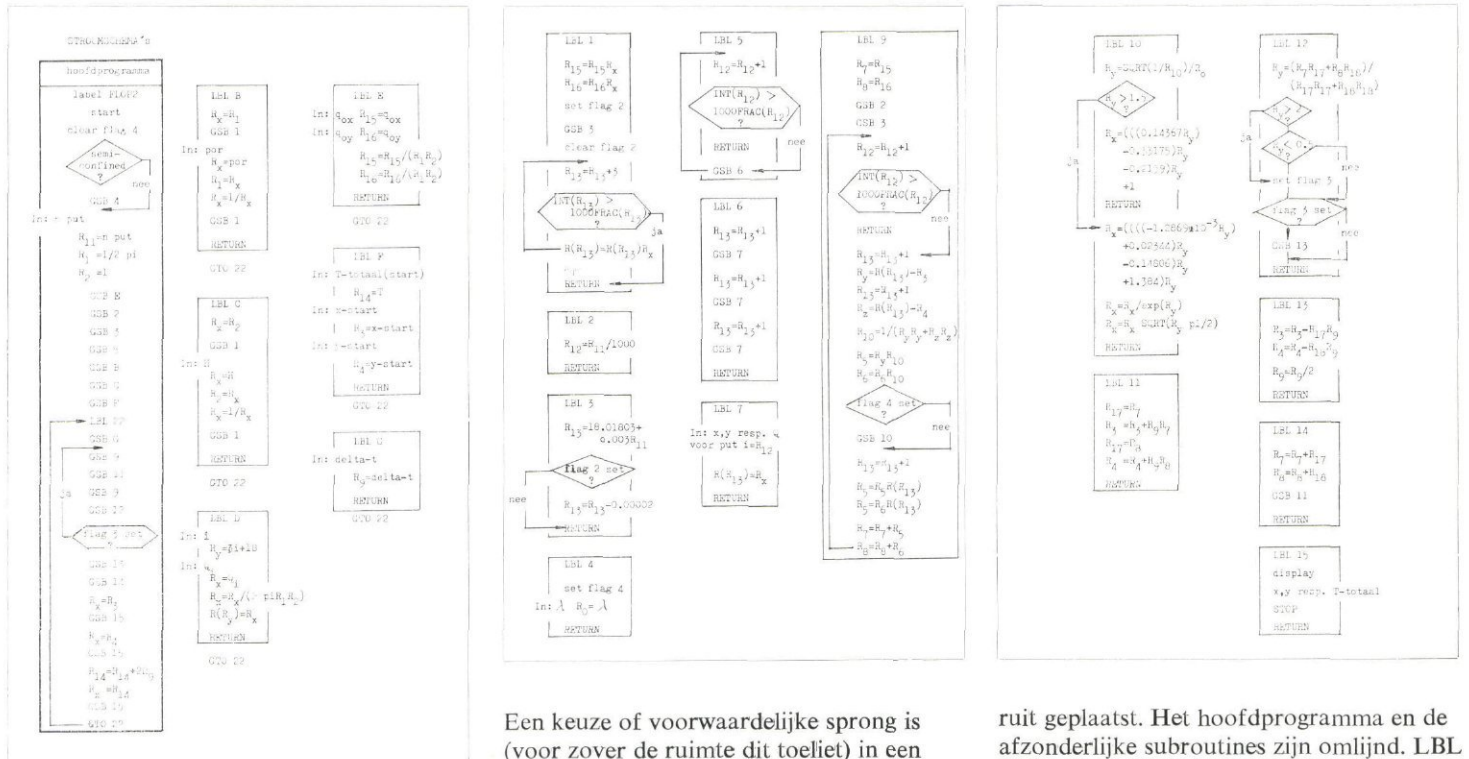
van beschermingszones met vaste verblijftijden rond grondwaterwinplaatsen. Afb. 2 toont, aan de hand van een voorbeeld met een enkele put, zonder natuurlijke stroming, de afstand tot de put als functie van de tijd. Duidelijk blijkt de invloed van de lek bij semi-spanningswater als functie van λ . Vergelijking van de voor spanningswater berekende waarden met de analytische oplossing toont, dat vaak zeer grote tijdstappen mogelijk zijn, zonder dat enige fout van betekenis optreedt: zie tabel bovenaan de pagina.

Gebruik stroomschema's

De stroomschema's tonen direct de veranderingen van de inhoud van de verschillende registers (geheugenplaatsen). Met behulp van zulke schema's kan op eenvoudige wijze het programma worden geschreven voor andere machines dan de HP 41 C. De stroomschema's worden stap voor stap in verticale zin doorlopen; alleen wanneer stappen worden overgeslagen of wanneer wordt teruggesprongen is dit door middel van een pijl aangegeven.

Overzicht van de gebruikte subroutines

Label	Inhoud
Flop 2	Hoofdprogramma
B	Invoeren van de porositeit p
C	Invoeren van een pakketdikte H
D	Invoeren van een andere waarde voor het debiet van put i
E	Invoeren van de componenten van de natuurlijke stroming
F	Invoeren van startwaarden x -start, y -start en t -totaal-start
G	Invoeren van de tijdstap
1	Vervangen van p of H in de betreffende registers
2	resetten telgeheugen R_{12}
3	resetten telgeheugen R_{13}
4	invoer voor semi-spanningswater, zetten van vlag 4
5	invoerbesturing van x_{pi} , y_{pi} en Q_i
6	geheugenbesturing x_{pi} , y_{pi} en Q_i
7	invoer van de waarden x_{pi} , y_{pi} en Q_i
8	niet gebruikt
9	berekening watersnelheid
10	berekening van $(u)K_1(u)$, nodig bij semi-spanningswater
11	berekening van nieuwe x en y , verwisseling geheugeninhouden
12	check nieuwe snelheid, zonodig halvering tijdstap
13	berekening nieuwe x , y
14	berekening tussenstap x , y
15	besturing uitvoer



Een keuze of voorwaardelijke sprong is (voor zover de ruimte dit toeliet) in een

Geheugengebruik

Register	Inhoud
R ₀	λ (in het geval van semi-spanningswater)
R ₁	porositeit p
R ₂	pakketdikte H
R ₃	x-start, respectievelijk x
R ₄	y-start, respectievelijk y
R ₅	hulpgeheugen voor tussenberekeningen
R ₆	idem
R ₇	v _x , snelheidscomponent in x-richting
R ₈	v _y , snelheidscomponent in y-richting
R ₉	delta-t, tijdstap
R ₁₀	1/r ² , tijdens tussenberekeningen
R ₁₁	aantal putten
R ₁₂	i-put, oplopend tijdens de berekening
R ₁₃	j-register, oplopend tijdens de berekening
R ₁₄	t-totaal
R ₁₅	q _{ox} /(p H), snelheid basisstroming in x-richting
R ₁₆	q _{oy} /(p H), idem in y-richting
R ₁₇	v _x , snelheidscomponent in x-richting
R ₁₈	v _y , idem in y-richting
R ₁₉	x _{p1} , x-coördinaat van eerste put
R ₂₀	y _{p1} , y-coördinaat van eerste put
R ₂₁	Q ₁ /(2π pH), waarin Q ₁ het debiet uit put 1
R ₂₂	x _{p2}
R ₂₃	y _{p2}
R ₂₄	Q ₂ /(2π pH), waarin Q ₂ het debiet uit put 2
R ₂₅	x _{p3}
R ₂₆	etcetera
R _x , R _y en R _z	werkregisters

ruit geplaatst. Het hoofdprogramma en de afzonderlijke subroutines zijn omlijnd. LBL betekent label, GSB . . . betekent, ga naar subroutine onder label . . . , voor deze uit en keer terug zodra de return-opdracht wordt ontmoet. GTO . . . betekent: ga naar label INT is het gedeelte van een getal voor de decimale punt (of comma); FRAC is het gedeelte van een getal achter de decimale punt (of comma). De GTO 22-opdracht tussen de subroutines B tot en met G maakt het mogelijk om op een willekeurig moment een specifiek gedeelte van de invoer te wijzigen door op de betreffende toets, namelijk B, C, D etcetera of G te drukken. Na dit intoetsen wordt immers uitsluitend de betreffende subroutine uitgevoerd; doorstarten leidt dan tot uitvoering van het hoofdprogramma vanaf het juiste punt, namelijk label 22. R (R . .) betekent dat het nummer van het te gebruiken register in R . . is opgeborgen. Bijvoorbeeld, is R₂ = 3, dan is R(R₂) = R₃.



Rijk subsidieert schone technologieprojecten

Aan het slot van het artikel dat onder bovenstaande kop in H₂O 26/81 op pag. 635 heeft gestaan is een verkeerd telefoonnummer vermeld. Inlichtingen zijn te verkrijgen bij: ir. G. van Grootveld en ir. K. Visscher van de Afdeling Schone Technologie (telefoon 070 - 20 92 60 tst. 3317 resp. 3052).

