

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING
WAGENINGEN

Nomografie

J. WESSELING

RAPPORT 4
1958

INHOUD

	blz.
I. INLEIDING	7
1. Doelstelling van de nomografie	7
2. Nomografische technieken	7
3. Indeling van de nomogrammen	8
4. Indeling van de behandelde stof	10
II. EENVOUDIGE MEETKUNDIGE GRONDSLAGEN VAN HET PUNTEN- NOMOGRAM	11
1. Drie evenwijdige gelijk gerichte schaaldragers	11
1.1 Assen op onderling gelijke afstanden	11
1.2 Combinatie van rekenschuif en rekenvlak	15
1.3 Assen op onderling ongelijke afstanden	15
2. Drie evenwijdige tegengesteld gerichte schaal- dragers	18
2.1 Assen op onderling gelijke afstanden	18
2.2 Verschuiving van één van de assen in ver- ticale richting	18
2.3 Assen op onderling ongelijke afstanden	19
3. Twee evenwijdige tegengesteld gerichte schaal- dragers	19
4. Drie elkaar snijdende schaaldragers	21
III. NOMOGRAMMEN MET SCHARNIERLIJN EN RAAKLIJNOVERGANG	23
1. Nomogrammen met scharnierlijn	23
2. Nomogrammen met raaklijnovergang	24
2.1 Algemeen	24
2.2 Algemene vergelijking van de raaklijnkromme	25
2.3 Enkele voorbeelden van berekening van raak- lijnkrommen	26
IV. GEBRUIKEN EN ALGEMENE EIGENSCHAPPEN VAN DETERMINANTEN	28
1. Determinanten in het algemeen	28
2. Definitie van determinanten	28
3. Eigenschappen van determinanten	29

4. Ontwikkeling van een determinant	31
5. Het randen van een determinant	33
6. Het vermenigvuldigen van determinanten	34
V. HET GEBRUIK VAN DETERMINANTEN IN DE NOMOGRAFIE . .	36
1. Nadere beschouwing van het lijnen- en punten- nomogram	36
2. De collineatie voorwaarde voor drie punten . .	37
3. Het snijpunt van drie rechte lijnen	38
4. Lijncoördinaten van UNVERZAGT	39
4.1 <i>Het systeem van lijncoördinaten</i>	39
4.2 <i>Afleiding van enige betrekkingen in het lijncoördinatensysteem</i>	42
4.3 <i>Enige opmerkingen over de algemene punten- vergelijking</i>	44
4.4 <i>De voorwaarde voor drie punten op een rech- te lijn.</i>	44
5. Voorbeelden van het gebruik van determinanten in Cartesiaanse nomogrammen	45
6. Enkele voorbeelden van nomogrammen met evenwijdige schalen	47
VI. OPSTELLING VAN DE DETERMINANTEN	52
1. Algemene voorwaarden waaraan de determinant moet voldoen	52
2. Het opstellen van een vergelijking met drie on- bekenden in determinantvorm	54
2.1 <i>Algemeen</i>	54
2.2 $a + b - c = 0$	54
2.3 $ab - c = 0$	54
2.4 $a + b + c - abc = 0$	55
2.5 $a = b/4(4c - b)(3c - b)^{-1}$	56
VII. TRANSFORMATIE VAN NOMOGRAMMEN	58
1. Algemeen	58
2. Het principe van de transformatie	59

3. Enkele voorbeelden van transformaties	59
3.1 <i>Betekenis van de verandering van de determinant</i>	59
3.2 <i>Transformatie van $1/a + 1/b = 1/c$</i>	60
4. Algemene vergelijkingen voor de transformatie	62
5. Voorbeeld van de transformatie met behulp van de algemene vergelijkingen	65
6. Vereenvoudigde oplossing van de transformatie	70
7. Overbrengen van twee rechte schalen op een kegelsnede	72
 VIII. NORMAALVORMEN	 77
1. Algemeen	77
2. Nomogrammen met twee evenwijdige schalen	77
2.1 <i>De derde schaal is een kromme</i>	77
2.2 <i>De derde schaal is recht en snijdt de beide andere schalen</i>	78
2.3 <i>De derde schaal is recht en evenwijdig aan de beide andere</i>	79
3. Nomogrammen met elkaar snijdende schalen	80
3.1 <i>De derde schaal is gebogen</i>	80
3.2 <i>De derde schaal is recht</i>	81
3.3 <i>De drie schalen zijn recht en gaan door één punt</i>	82
4. Nomogrammen met gebogen schaaldragers	82
4.1 <i>De derde schaal is een kromme</i>	82
4.2 <i>De derde schaal is recht</i>	84
5. Kegelsnedenomogrammen	85

I. INLEIDING

1. Doelstelling van de nomografie

Het woord nomografie duidt aan het beschrijven van wiskundige wetten. Men zou het kunnen noemen de wetenschap die zich bezig houdt met het mogelijk maken van een snel en eenvoudig gebruik van deze wiskundige wetten; het weergeven op een wijze, die een voldoende nauwkeurigheid van aflezen toestaat en het maken van fouten voorkomt.

De nomografie ontstond in militaire kringen. Hier spelen in sterke mate factoren als eenvoud, grote snelheid, uitschakelen van vergissingen, bediening door weinig vakbekwame gebruikers en opoffering van alle misbare nauwkeurigheid een uiterst belangrijke rol. In andere vakgebieden - ook de cultuurtechniek - liggende vraagstukken niet geheel gelijk, maar snelheid, eenvoud en weloverwogen grenzen voor de nauwkeurigheid zijn ook daar van belang.

De vraagstukken worden geleidelijk ingewikkelder, omdat men de invloed van steeds toenemende aantallen eigenschappen op een resultaat in zijn beschouwingen wil betrekken. En ook wanneer de invloed van elke factor afzonderlijk eenvoudig zou zijn, dan zal het samenspel van vele factoren ingewikkeld worden. Het streven om steeds meer de eenvoudige, ongeschoolde werker taken van de geschoolde krachten te laten overnemen, maakt het noodzakelijk, de bestaande kennis in de meest overzichtelijke vorm te geven. Werkt men in eigen land dan nog met ongeschoolden, die door het leven in een moderne staat veel op grond van hun gezond verstand kunnen doen, in de onderontwikkelde gebieden staan de uitvoerders van voorlichtingsplannen of technische ontwerpen voor veel moeilijker problemen. Onder deze omstandigheden zal men voor de keuze staan, de kwantitatieve relaties in een optimaal hanteerbare vorm te geven, zodat ze ook onbegrepen nog goed gebruikt kunnen worden, dan wel ze maar weg te laten. De nomografie heeft de taak de grens tussen het wel en niet meer kunnen gebruiken van kwantitatieve relaties zo ver mogelijk in de richting van het wel-gebruiken te verschuiven.

2. Nomografische technieken

De nomografie beschikt over drie systemen van vereenvoudiging van de kwantitatieve relatie. Men gebruikt het rekenvlak,

de rekenschuif en de rekenmachine. Het rekenvlak treft men in elke grafiek aan, waarin de waarde van een veranderlijke kan worden afgelezen als resultaat van de invloed van een of meer factoren. De rekenschuif is als rekenlineaal voldoende bekend, naar behalve de mogelijkheid van opstellen van logaritmische schalen, die men steeds aantreft, zijn er tevens rekenlinealen in gebruik voor allerlei gespecialiseerde berekeningen die veel minder algemeen bekend zijn.

De rekenmachine tenslotte behoeft evenmin alleen maar te kunnen optellen of vermenigvuldigen, zoals bij de bekende machines de enige mogelijkheid is, maar deze kunnen eveneens voor geheel andere bewerkingen worden geconstrueerd.

Wanneer de betekenis van de formule het nodig maakt, zal men zich niet tot een enkel principe mogen beperken maar in een combinatie van principes dienen te zoeken naar de meest vergaande vereenvoudiging van de rekentechniek. Ook in dit opzicht is men met militair belangrijke formules ons voorgedaan. Voor cultuurtechnische behoeften heeft men in de Verenigde Staten zich met succes op dit gebied van combinatie van rekentechnieken bewogen. Hier mag ook Nederland niet achter blijven.

3. Indeling van de nomogrammen

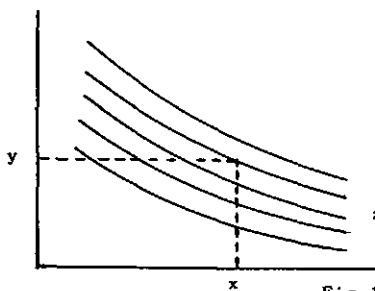


Fig. 1

Wanneer men een grafiek maakt, dan werkt men vrijwel steeds met rechthoekige coördinaten volgens het Cartesiaanse stelsel (figuur 1). Voor het maken van grafieken is dit wel handig. Voor het aflezen staat het echter minder vast, of dit het best bruikbare systeem is. Men moet van de x -as loodrecht omhoog tot aan een of andere kromme lijn, en dan horizontaal naar de y -as. De bezwaren zijn hierbij, dat men voor het nauwkeurig loodrecht en horizontaal uitmeten zich wel even goed moet outillieren, dat bij een dichte bundel z -lijnen zorgvuldig moet worden nagegaan welke men moet hebben, en tenslotte zal men tussen de z -lijnen nog moeten interpoleren. Het aflezen van een dergelijk *Cartesiaans- of lijnennomogram* vraagt enige aandacht.

Een minder bekend coördinatenstelsel is dat van de parallel coördinaten volgens UNVERZAGT. Een samenhang als in fi-

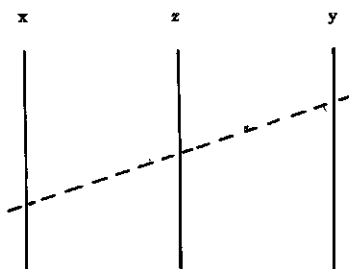


Fig. 2

guur 1 gegeven, zou kunnen worden weergegeven door drie lijnen, in principe van een willekeurige vorm maar veelal in de vorm van drie rechte lijnen, welke alle drie van een continu verlopende schaal zijn voorzien. Over deze drielijnen legt men een rechte afleeslijn (zie figuur 2), die de z -waarde geeft, die bij de combinatie van x en y hoort. Een dergelijk

nomogram noemt men een *puntennomogram*. Hier is de aflezing met een rechte lijn heel wat eenvoudiger, terwijl ook het nomogram veel simpeler en opener van constructie is. De nomografie gebruikt met voorliefde dit type van coördinaten. Hier is het voordeel echter niet zonder nadeel. Niet alle formules zijn zo in beeld te brengen, zij het ook dat men zo een heel eind kan komen.

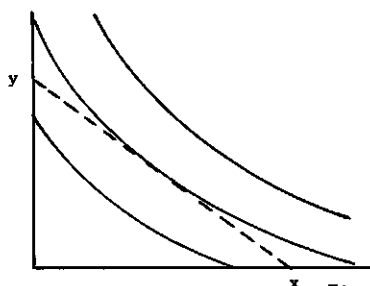


Fig. 3

Nog minder bekend zijn de raaklijn-coördinaten, waarbij de band tussen x en y voor een bepaalde waarde van z gevonden wordt door een rechte afleeslijn als raaklijn te trekken langs de kromme vooreen bepaalde te kiezen waarde van z . Ook hier (figuur 3) zijn de loodrecht op elkander staande afleeslijnen van figuur 1 vervan-

gen door één rechte afleeslijn. Het voordeel van dit nomogram is, dat in theorie elke functie kan worden weergegeven. Nadeel is, dat de grafiek weer voller en onoverzichtelijker is, terwijl de raaklijnkrommen soms wel eens wat buiten de tekening vallen.

Onder bepaalde omstandigheden zal de ene, onder andere omstandigheden de andere weergave voordelen opleveren. Het gebruikelijke Cartesiaanse systeem staat echter bij het maken van nomogrammen niet hoog aangeschreven wanneer het om het aflezen van een nomogram gaat. Voor wetenschappelijk onderzoek daarentegen heeft het Cartesiaanse nomogram (de stippenkaart) vrijwel een monopoliepositie, vooral waar het gaat om het op zodanige wijze omzetten van deze nomogrammen, dat er rechte lijnen, additieve relaties en hoeken van 45° optreden.

In de volgende beschouwing zal niet het onderzoek maar het gebruik voorop staan, doch zal aan de nomografische weergave alle aandacht worden gegeven.

4. Indeling van de behandelde stof

In dit rapport zijn hoofdzakelijk de punten nomogrammen besproken. Teneinde minder getrainde gebruikers in staat te stellen eenvoudige nomogrammen op te stellen, is eerst een behandeling gegeven van enkele meetkundige betrekkingen die voor dit soort nomogrammen gelden.

Voor ingewikkelder vergelijkingen zal men veelal gebruik maken van determinanten. De eigenschappen van deze determinanten werden daarom in het kort besproken. De grondslag van het gebruik van determinanten in de nomografie is aan de hand van enkele eenvoudige voorbeelden uiteengezet. Verder is aangegeven op welke wijze vergelijkingen in determinantvorm kunnen worden geschreven.

Voor de vergroting van de afleesnauwkeurigheid is vaak vervorming van het oorspronkelijk opgezette nomogram noodzakelijk. De grondslagen van deze transformatie worden dan ook besproken.

Tot slot is een algemeen overzicht van de normaalvormen opgesteld en de wijze waarop deze in determinantvorm kunnen worden geschreven.

* * *

II. EENVOUDIGE MEETKUNDIGE GRONDSLAGEN VAN HET PUNTENNOMOGRAM

1. Drie evenwijdig gelijk gerichte schaaldragers (H-nomogram)

1.1 Assen op onderling gelijke afstanden

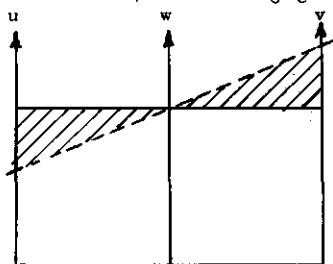


Fig. 4 of

De verdeling van de drie evenwijdige assen begint bij de horizontale lijn. Deze lijn noemen wij de *nulllijn* van de schalen (figuur 4).

Uit de congruentie van de gearceerde driehoeken blijkt nu, dat

$$w - u = v - w$$

$$w = \frac{1}{2}(u + v) \quad (2.1)$$

Meet men nu de afstanden op de drie assen vanaf de nullijn als resp. a , c en b cm dan is

$$c = \frac{1}{2}(a + b) \quad (2.2)$$

Stel dat de schalen alle drie 100 mm lang zijn. Worden nu hierop de waarden 0 tot 10 uitgezet, dan is de *schaaleenheid* of *modulus* $100 : 10 = 10$ mm. De waarden 0, 1, 2, 3 enz. komen dus op afstanden 0, 10, 20, 30 enz. mm vanaf de nullijn te staan. Verbinden we nu het punt $a = 2$ met het punt $b = 4$, dan is de afstand die de verbindingslijn tussen deze punten van de w -as afsnijdt gelijk aan $\frac{1}{2}(20 + 40) = 30$ mm. Hier wordt dus de waarde $\frac{1}{2}(a + b)$ afgelezen.

Willen we nu op dit punt de waarde $(a + b)$ aflezen, dan moet op 30 mm van de nullijn op de w -as het getal **6** staan. Met andere woorden: de schaaleenheid van de w -schaal moet dan $30 : 6 = 5$ mm of 2×26 klein zijn als die van de u - en de v -schaal.

Door verandering van de schalen kunnen dus blijkbaar andere functies dan 2.2 worden berekend. Veelal zal de functie gegeven zijn en moeten de schalen daarnaar bepaald worden.

Stellen we de lengte van de schaaleenheden voor door μ (uitgedrukt in mm) dan geldt in het algemeen

$$\mu c = \frac{1}{2}\mu (a + b)$$

of

$$\mu c = \frac{1}{2}(\mu a + \mu b) \quad (2.3)$$

De eenheden voor de verschillende schalen worden veelal door indices aangeduid, dus

$$\mu_3 c = \frac{1}{2}(\mu_1 a + \mu_2 b) \quad (2.4)$$

We zullen nu enige voorbeelden geven van de berekening der verschillende moduli. Eerst het geval

$$c = \frac{1}{2}a + 1/3b \quad (2.5)$$

Invoeren van de moduli geeft nu

$$\mu c = \mu \cdot \frac{1}{2}a + \mu \cdot \frac{1}{3}b$$

of

$$\mu c = \frac{1}{2}(\mu a + \mu \frac{2}{3}b)$$

of

$$\mu_3 c = \frac{1}{2} \mu_1 a + (\frac{3}{2} \mu_2) \frac{2}{3} b$$

waaruit dus in verband met de algemene verg. 2.3 volgt, dat

$$\mu_1 = 3/2 \mu_2 = \mu_3$$

Evenzo geldt voor

$$c = a + b \quad (2.6)$$

dat

$$\mu_1 = \mu_2 = 2\mu_3$$

In de meest algemene vorm krijgen we functies

$$r.c = s.a + t.b \quad (2.7)$$

waarin r , s en t constanten zijn. Invoeren van moduli analoog aan 2.3 geeft

$$\mu rc = \mu s.a + \mu t.b$$

of

$$\mu rc = \frac{1}{2}(2\mu sa + 2\mu t.b)$$

of na invoeren van indices

$$\mu_3 rc = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1}{2s} \right) 2sa + \left(\frac{\mu_2}{2t} \right) 2tb$$

zodat

$$\mu_3 r = \frac{\mu_1}{2s} = \frac{\mu_2}{2t}$$

of

$$\mu_1 t = \mu_2 s = 2\mu_3 rst \quad (2.8)$$

Het bovenomschreven nomogram kan ook worden gebruikt voor vermenigvuldiging

$$c = a.b \quad (2.9)$$

want invoering van logaritmen schalen geeft

$$\log c = \log a + \log b$$

Op de assen moeten dan de volgende verdelingen worden aangebracht:

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 \log a \\ v &= \mu_2 \log b \\ w &= \mu_3 \log c \end{aligned}$$

Bij een schaaleenheid van 100 mm komt het getal $a = 3$ op de u -as dus te liggen op $100 \cdot \log 3 = 100 \cdot 0.4771 = 47.71$ mm boven de nullijn. Dergelijke schaalverdelingen komen voor op de rekenlineaal en op logaritmisch papier.

Ook hier geldt weer de algemene formule

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{2}(\mu_1 \log a + \mu_2 \log b) \quad (2.10)$$

waarin $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ voor
 $c = a \cdot b$

De schalen voor

$$c = a^2 b \quad (2.11)$$

worden nu als volgt berekend

$$\log c = 2 \log a + \log b$$

Invoeren van de algemene modulus geeft

$$\mu \log c = 2\mu \log a + \mu \log b$$

of

$$\mu \log c = \frac{1}{2}(\mu \cdot 4 \log a + \mu \cdot 2 \log b)$$

en na invoeren van indices

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{2}(\mu_1 \cdot 4 \log a + \mu_2 \cdot 2 \log b)$$

of

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mu_1}{4}\right) 4 \log a + \left(\frac{\mu_2}{2}\right) 2 \log b\right\}$$

zodat voor dit geval

$$\frac{\mu_1}{4} = \frac{\mu_2}{2} = \mu_3$$

of

$$\mu_1 = 2\mu_2 = 4\mu_3$$

Ook is het mogelijk een constante in de bewerking op te nemen, bv.

$$3 a b^2 = c \quad (2.12)$$

Dan geldt

$$\log 3 + \log a + 2 \log b = \log c$$

$$\mu(\log 3 + \log a) + \mu 2 \log b = \mu \log c$$

$$\mu \log c = \frac{1}{2}\{\mu \cdot 2(\log 3 + \log a) + \mu \cdot 4 \log b\}$$

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{2}\{\mu_1 2(\log 3 + \log a) + \mu_2 4 \log b\}$$

zodat

$$\frac{\mu_1}{2} = \frac{\mu_2}{4} = \mu_3 \quad \text{of} \quad 2\mu_1 = \mu_2 = 4\mu_3$$

terwijl de schaal μ_1 over een afstand $\log 3$ moet worden verschoven.

Ook een vorm als bv.

$$c = a^2(b + 5) \quad (2.13)$$

is op deze wijze te behandelen. De factor $(b + 5)$ wordt nu gesteld op b^1 waarna de schalen van het nomogram worden berekend. Om nu in het nomogram de waarde b inplaats van die

van b^1 af te lezen, moet de v -schaal zo worden vernummerd, dat niet b^1 , doch $b^1 - 5 = b$ wordt afgelezen

Uit de beide laatste voorbeelden blijkt dus dat een vermenigvuldiging met een bepaalde factor een *verschuiving* van de log. schaal betekent, terwijl het optellen van een constante factor een *vernummering* teweeg brengt.

Behalve de waarden a en b en $\log a$ en $\log b$ kunnen op de assen ook andere willekeurige functies van a en b worden uitgezet. De enige voorwaarde is, dat in elke functie slechts één variabele mag optreden.

Willen we bv.

$$c^2 = 5a^2 + 3b^2 \quad (2.14)$$

berekenen, dan moeten op de assen de functies

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 5a^2 \\ v &= \mu_2 3b^2 \\ w &= \mu_3 c^2 \end{aligned}$$

worden uitgezet.

Stel dat de schaal maximaal 260 mm lang is en de waarden van a en b tussen -2 en +10 liggen. De modulus μ_1 moet dan zijn

$$\frac{5(10)^2 - (-5)(-2)^2}{260} = \frac{260}{520} = \frac{1}{2} \text{ mm.}$$

Op overeenkomstige wijze wordt voor μ_2 de waarde $\frac{260}{312}$ gevonden. Aangezien in dit geval $\mu_1 = \mu_2$ moet zijn, kan slechts die modulus gebruikt worden waarbij beide trajecten gelijk of kleiner dan 260 mm zijn.

We nemen dus

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$$

en de waarde a en $b = 1, 2, 3$ enz. komen resp. op $2\frac{1}{2}, 10, 22\frac{1}{2}$ enz. mm boven de nullijn; de waarden -1 en -2 op resp. 2, 5 en 10 mm beneden de nullijn.

Verder geldt

$$\mu_3 c^2 = \frac{1}{2}(\mu_1 \cdot 5a^2 + \mu_2 3b^2)$$

of

$$\mu_3 c^2 = \frac{1}{2}\mu_1(5a^2 + 3b^2) \quad (2.15)$$

zodat $\mu_3 = \frac{1}{2}\mu_1$, of $\frac{1}{4}$ mm. De waarden van $c = 1, 2, 3$ enz. komen dus resp. $\frac{1}{4}, 1, 2\frac{1}{4}$ enz. mm boven de nullijn.

Ook bv. een functie als

$$c = (3a^2 + 2a + 5) + (2b^2 + 2b + 3) \quad (2.16)$$

kan zo tot een nomogram met evenwijdige schalen worden verwerkt. Hiervoor moet op de assen worden uitgezet

$$\begin{aligned}u &= \mu_1 (3a^2 + 2a + 5) \\v &= \mu_2 (2b^2 + 2b + 3) \\w &= \mu_3 c\end{aligned}$$

Voor a en b tussen 0 en 10 is de modulus voor de u - en de v -as bij een lengte van 162.5 mm gelijk aan $\frac{1}{2}$ mm. Verder moet $\mu_3 = \frac{1}{4}\mu_1$ zijn. De w -as krijgt dus een lineaire verdeling met eenheid $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ mm.

Moet in het laatste geval a tussen 0 en 10 en b tussen 0 en 5 worden berekend, dan krijgt de v -as een modulus = 1 mm. Voor $a = 10$ en $b = 5$ moet worden afgelezen $c = 390$. Het eindpunt van de w -schaal (op 260 mm boven de nullijn) heeft dus de waarde 390. Verder is de schaal lineair verdeeld, dus de modulus is $\frac{260}{390} = \frac{2}{3}$ mm.

1.2 Combinatie van rekenschuif en rekenvlak (Verticale schaalverschuiving)

Een uitbreiding van het nomogram van 2.1 kan worden verkregen door bv. de u -as over een bepaalde afstand verticaal te verschuiven. Gaat deze verschuiving over een afstand = d naar beneden, dan geldt in figuur 4:

$$w - (u - d) = v - w$$

of

$$w = \frac{1}{2}(u + v - d) \quad (2.17)$$

en bij verschuiving naar boven

$$w = \frac{1}{2}(u + v + d) \quad (2.18)$$

In het vermenigvuldigingsnomogram heeft dit tot gevolg dat het product door een factor = d , waarvan de grootte afhangt van de grootte van de verschuiving, wordt gedeeld of er mee wordt vermenigvuldigd.

Immers geldt dan

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{2}(\mu_1 \log a + \mu_2 \log b \mp \mu_1 \log d) \quad (2.19)$$

en voor $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{d} \quad \text{of} \quad c = a \cdot b \cdot d \quad (2.20)$$

1.3 Assen op onderling ongelijke afstanden

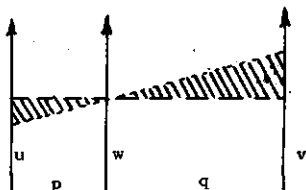


Fig. 5

In het laatste voorbeeld van par. 1.1 bleek de modulus van de w -schaal een zeer ongelukkige waarde te krijgen. Dit kan worden voorkomen door horizontale verschuiving van de w -as. Hierdoor wordt de onderlinge

afstand tussen de assen ongelijk. Uit de gelijkvormigheid van de gearceerde driehoeken in figuur 5 blijkt nu dat

$$(w - u) : p = (v - w) : q$$

of

$$w = \frac{pv + qu}{p + q} \quad (2.21)$$

De functies krijgen dan de algemene vorm

$$c = \frac{1}{p+q} (qa + pb) \quad (2.22)$$

Door verschuiving van de w -as kan hetzelfde resultaat worden bereikt als door verandering van de moduli. Voor de berekening van bv.

$$c = 1/3 a + 2/3 b \quad (2.23)$$

kunnen op de u - en de v -schaal de waarden a en b worden uitgezet.

Wordt de w -schaal nu zodanig aangebracht dat $p : q = 2 : 1$, dan geldt algemeen

$$\mu_3 c = \mu_1 \cdot 1/3 a + \mu_2 \cdot 2/3 b \quad (2.24)$$

Bij $\mu_1 = \mu_2$ wordt ook $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

Bij vermenigvuldiging geldt nu algemeen

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{p+q} (\mu_1 q \log a + \mu_2 p \log b) \quad (2.25)$$

Voor de functie

$$c = a^4 b^2$$

geldt nu

$$\log c = 4 \log a + 2 \log b$$

of na invoering van de modulus

$$\mu \log c = 4\mu \log a + 2\mu \log b$$

Uit 2.22 volgt nu, dat

$$qa + pb = c(p + q)$$

In ons geval dus

$$4a + 2b = 6c$$

Invoeren van indices geeft nu bv.

$$\mu_3 \log c = 4/6 \mu_1 \log a + 2/6 \mu_2 \log b$$

zodat i.v.m. 2.25

$$\frac{q}{p+q} = 4/6 \quad \text{en} \quad \frac{p}{p+q} = 2/6$$

zodat voor $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ $q = 4$ en $p = 2$ wordt.

Ook functies met gebroken exponenten kunnen met dit soort nomogram worden weergegeven.

Zo geldt bv. voor $p:q = 2:1$

$$c = a^{1/3} b^{2/3} \quad \text{bij } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (2.27)$$

$$c = a^{2/3} b^{4/3} \quad \text{bij } \mu_1 = \mu_2 = 2\mu_3 \quad (2.28)$$

Ook voor algemene functies van a en b is deze werkwijze toe te passen. We willen bv. berekenen

$$c = 1/8(3a^2 + 5b^2 + 6a + 5b + 17) \quad (2.29)$$

Dit is dan te herleiden tot de vorm

$$c = 1/8 \{3(a^2 + 2a + 4) + 5(b^2 + b + 1)\} \quad (2.30)$$

Dan wordt de w -as zodanig geplaatst dat $p:q = 5:3$ en worden op de assen de functies

$$u = \mu_1(a^2 + 2a + 4)$$

$$v = \mu_2(b^2 + b + 1)$$

$$w = \mu_3 c$$

uitgezet.

Een uitbreiding van het laatste nomogram is nog mogelijk door $p+q$ te variëren. Stellen we $p = \text{constant}$ en $q = d$, dan hebben we vier veranderlijken en gaat de formule over in

$$c = \frac{ad}{p} + \frac{pb}{d} \quad (2.31)$$

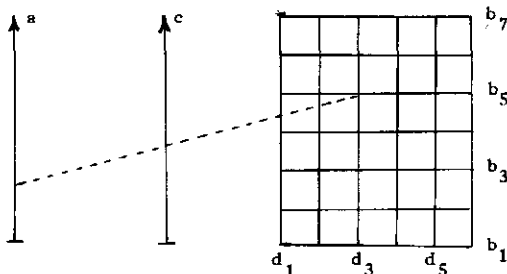


Fig. 6

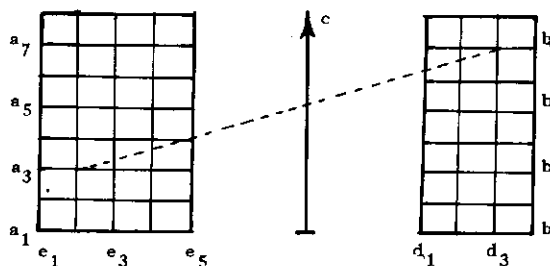


Fig. 7

De nieuwe verticale assen in figuur 6 stellen dan de verschillende waarden van d voor, terwijl horizontale lijnen de b -waarden aangeven. Door de invoering van dit *puntenveld* rechts in de figuur hebben we dus een vierde veranderlijke ingevoerd.

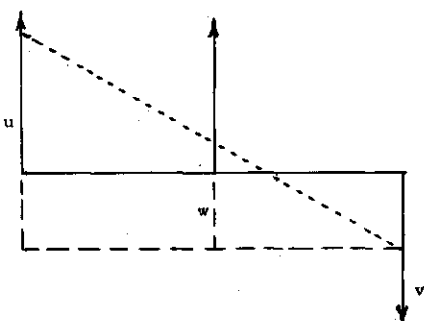
Hetzelfde kunnen we ook nog links in de figuur doen.

Hierdoor ontstaan links in figuur 7 een aantal lijnen voor de variabele e en krijgen we een nomogram voor vijf veranderlijken.

Doorgaans zal men hier te doen krijgen met gebogen schaal dragers, die niet zonder meer zijn vast te stellen. Hiervoor is dan het gebruik van determinanten nodig. In hoofdstuk III zullen nog twee andere soorten nomogrammen met meer dan drie variabelen worden behandeld.

2. Drie evenwijdige, tegengesteld gerichte schaal dragers

2.1 Assen op onderling gelijke afstand



Zet men de v -as niet naar boven doch naar beneden af, dan ontstaat een ander nomogram, waaraan dezelfde uitbreidingen kunnen worden gegeven als aan het in par. 1.1 besproken nomogram.

In figuur 8 geldt nu:

$$(w + v) = \frac{1}{2}(u + v)$$

of

$$w = \frac{1}{2}(u - v) \quad (2.33)$$

Algemeen kan dus op de schalen worden uitgezet:

$$\text{Fig. 8} \quad \mu_3 c = \frac{1}{2}(\mu_1 a - \mu_2 b) \quad (2.34)$$

Voor waarden van μ_1 , μ_2 en μ_3 genoemd in par. 1.1 verandert het $+$ -teken in de functie in een $-$ -teken.

Bij vermenigvuldiging gaat de vergelijking over in

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{2}(\mu_1 \log a - \mu_2 \log b) \quad (2.35)$$

Zo geldt voor

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad c = a/b \quad (2.36)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 2\mu_3 \quad c = a/b^2 \quad (2.37)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 4\mu_3 \quad c = a/b^4 \quad (2.38)$$

2.2 Verschuiving van de w - of de v -as in verticale richting

geeft weer vermenigvuldiging met of deling door een bepaalde constante. Men moet hierbij echter wel bedenken, dat nu twee mogelijkheden optreden omdat een verschuiving van de v -as het omgekeerde teweeg brengt van de verschuiving van de u -as in dezelfde richting. Bij optellen van een bepaalde constante moet de betreffende schaal weer vernummerd worden.

2.3 Assen op onderling ongelijke afstand

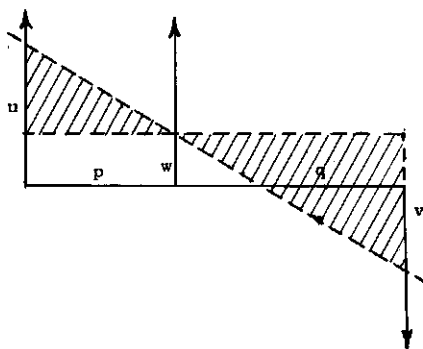


Fig. 9

Evenals in 1.3 is verschuiving van een van de assen in horizontale richting mogelijk.

Uit figuur 9 blijkt dan:

$$(u - w) : (v + w) = p : q$$

$$pv + qw = qu - pw$$

$$w = \frac{qu - pv}{p + q} \quad (2.39)$$

Evenals in 1.3 kan hiermee hetzelfde effect worden bereikt als met verandering van de moduli.

Bij vermenigvuldiging geldt nu algemeen

$$\mu_3 \log c = \frac{1}{p+q} (\mu_1 q \log a - \mu_2 p \log b) \quad (2.39a)$$

analoog aan par 1.3 geldt nu voor $p : q = 2 : 1$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad c = a/b^2 \quad (2.40)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 2\mu_3 \quad c = a^3/b^4 \quad (2.41)$$

Ook voor de algemene functies

$$c = f(a) - f(b) \quad (2.42)$$

geldt dit nomogram analoog aan par.1.3.

3. Twee evenwijdige tegengesteld gerichte dragers en een deze dragers snijdende schaaldrager (N-nomogram)

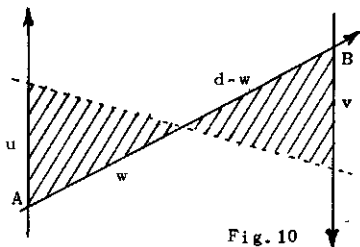


Fig. 10

Naast een w -as evenwijdig aan de u - en v -as kan men ook de nullijn als derde as gebruiken (figuur 10). Doorgaans wordt dan, om ruimte te sparen, deze as schuin geplaatst. De beginpunten van de u -assen v -as liggen resp. in A en B, van de w -as in A. De afstand $AB = d$.

Uit de gelijkvormigheid van de gearceerde driehoeken volgt dan

$$\mu : v = w : (d - w)$$

of

$$w = \frac{u \cdot d}{u + v}, \quad v = \frac{u(d-w)}{w}, \quad u = \frac{vw}{d-w} \quad (2.43)$$

Wordt nu op de w -as de functie $w^1 = \frac{w}{d-w}$ uitgezet, dan gaan de verg. 2.43 over in

$$v = \frac{u}{w^1} \quad \text{en} \quad u = v w^1 \quad (2.44)$$

Deze werkwijze wordt toegepast voor het type functie

$$c = \frac{d \cdot a}{a + b} \quad (2.45)$$

waarin d een constante is en de lengte van de w -as aanduidt. Voor 2.45 kunnen we schrijven

$$a = \frac{b \cdot c}{d - c}$$

of na invoering van schaallengten

$$\mu a = \mu \frac{b \cdot c}{d - c}$$

en na invoering van moduli

$$\mu_1 a = \mu_2 b \mu_3 \frac{c}{d - c}$$

waarin $\mu_1 = \mu_2 \mu_3$

De schaal van de w -as wordt dan

$$\mu_3 \frac{c}{d - c} \quad \text{met} \quad \mu_3 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Deze schaal is ook met behulp van projectie te vinden. Stellen we de schaal w , dan geldt

$$w = \frac{\mu_3 c}{d - c}$$

of

$$wd - wc - \mu_3 c = 0$$

waaruit volgt

$$c = \frac{wd}{w + \mu_3}$$

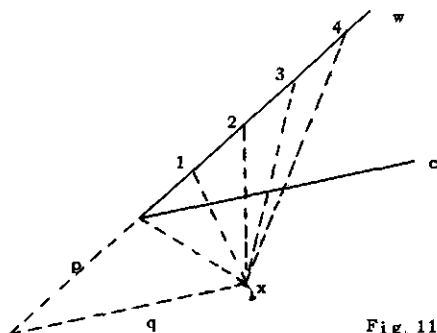


Fig. 11

Is de onderlinge ligging van de schalen als in figuur 11 aangegeven, dan geldt

$$w : c = (w + p) : q$$

en

$$c = \frac{w q}{w + p}$$

zodat, als $q = d$ (lengte w -schaal)

en $p = \mu_3 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ wordt ge-

nomen, de schaal van c uit die van w kan worden geconstrueerd.

Het is duidelijk, dat een dergelijke schaalprojectie ook geldt voor elke schaal waarop een willekeurige functie van w , of zoals men wil van c wordt uitgezet. We hebben dus door de w -schaal de mogelijkheid een nieuwe functie toe te voegen.

Verder mogen uiteraard ook op de u - en de v -as alle mogelijke functies van a en b worden afgezet.

Ook bij deze laatste nomogrammen kan de u - of de v -schaal worden verschoven. Dit heeft tot gevolg dat de functie op de schaal met een bepaalde waarde wordt vermeerderd of verminderd. In plaats van dus bv. $a^2 + 5$ op de u -as af te zetten kan men ook a^2 afzetten en de schaal over een afstand van 5 eenheden naar beneden verschuiven. Dit kan in sommige gevallen een vereenvoudiging geven bij het berekenen van de schaalpunten.

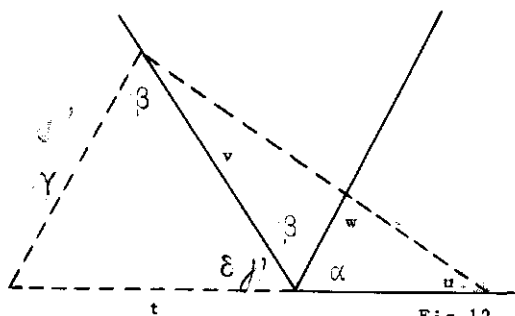
Tenslotte kan men de afstand tussen de u - en de v -schaal weer als een functie van een vierde variabele laten toe- of afnemen analoog aan par. 2.

4. Drie elkaar snijdende schaaldragers

Wil men bv.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad (2.46)$$

dan zou dit in een nomogram met drie evenwijdige schaaldragers leiden tot de moeilijkheid, dat de punten $a = 0$, $b = 0$ en $c = 0$ in het oneindige zouden worden afgebeeld. Om dit te voorkomen kunnen gebruik maken van drie elkaar snijdende schaaldragers (fig. 12).



Trekken we een hulplijn evenwijdig aan de w -as, dan geldt

$$w : s = u : (u + t)$$

Verder geldt in de linker driehoek

$$\frac{s}{\sin \gamma} = \frac{t}{\sin \beta} = \frac{v}{\sin \alpha}$$

of

$$s = v \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \quad \text{en} \quad t = v \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Dit ongevuld in de evenredigheid geeft

$$w : v \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = u : (u + v \frac{\sin \beta}{\sin \alpha})$$

of

$$uv \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = uw + wv \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

en delen door $u \cdot v \cdot w$ geeft dan

$$\frac{1}{w} \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Deze vergelijking gaat bij vermenigvuldiging met $\sin \alpha$ over in

$$\frac{1}{w} \sin (\alpha + \beta) = \frac{1}{v} \sin \alpha + \frac{1}{u} \sin \beta$$

Daar verder geldt voor $\alpha = \beta$ dat

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ontstaat voor dit geval

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{w} 2 \cos \alpha \quad (2.47)$$

Het geval van (2.46) kan dus worden weergegeven bij $\alpha = \beta = 60^\circ$ waarvoor $2 \cos \alpha = 1$.

Voor het algemene geval van dit soort nomogrammen geldt dus dat

$$\frac{1}{\mu_1 u} + \frac{1}{\mu_2 v} = \frac{1}{\mu_3 c} 2 \cos \alpha \quad (2.48)$$

Zo geldt voor $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ en $\alpha = \beta = 30^\circ$ of $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ de vergelijking

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \sqrt{3}$$

Ook bij dit soort nomogrammen kan een van de assen over een bepaalde afstand worden verschoven.

III. NOMOGRAMMEN MET SCHARNIERLIJN EN RAAKLIJNOVERGANG

1. Nomogrammen met scharnierlijn

Moet men een nomogram voor meer dan drie veranderlijken construeren, dan kan men, gebruik makende van de in par. 1.2 en 1.3 besproken nomogrammen, twee van deze nomogrammen aan elkaar koppelen met behulp van een hulpschaal of *scharnierlijn*.

De bewerking komt dan hierop neer, dat de vergelijking met vier of meer onbekenden gesplitst wordt in twee of meer vergelijkingen met drie variabelen, voor elk waarvan men een nomogram kan construeren. Hierbij dient opgemerkt te worden, dat als eis gesteld wordt, dat op de hulpschaal voor beide nomogrammen dezelfde functie moet worden afgezet.

Als voorbeeld van een dergelijk nomogram kiezen we de *drainageformule* van ROTHE.

$$s = \frac{4KH^2}{l^2} \quad (3.1)$$

Hiervoor kunnen we schrijven

$$\frac{s}{4K} = h = \frac{H^2}{l^2} \quad (3.2)$$

Nu is zowel voor $\frac{s}{4K} = h$ als voor $h = \frac{H^2}{l^2}$ een nomogram samen te stellen. Deze beide nomogrammen worden nu gekoppeld. Hiervoor zijn twee mogelijkheden.

1e mogelijkheid (zie bijlage I)

We beginnen met een nomogram voor

$$\frac{s}{K} = 4h$$

waarvan de s - en de K -schaal tegengesteld zijn ende h -schaal midden tussen deze twee in ligt. De s - ende K -schaal worden becijferd als in bijlage I aangegeven. Uit deze becijfering en de bovenstaande vergelijking volgt de schaalverdeling voor de h -schaal, waartoe nullijn I is getrokken.

Vervolgens wordt een nomogram geconstrueerd voor

$$\frac{H^2}{l^2} = h$$

Hierbij wordt van de zelfde h -schaal gebruik gemaakt. De H - en de l -schaal komen nu op gelijke afstanden aan weerszijden

van deze schaal. Becijferen van een van de beide nieuwe schalen levert die voor de andere.

Daar op de h -schaal geen aflezing wordt gedaan, is het niet noodzakelijk deze te becijferen. Voor de afleiding van de andere schalen is het echter wel gemakkelijk enige waarden op deze schaal aan te geven.

2e mogelijkheid (zie bijlage II)

We beginnen met een nomogram voor

$$s = (4h)K$$

waarin de s -schaal als middelste wordt gekozen en de l -schaal als buitenste. Alle drie schalen zijn dan gelijk gericht. Uit de becijfering van de K - en de s -schaal volgt weer de h -schaal. Op de nullijn I staan nu $s = 1$, $K = 1$ en $h = \frac{1}{4}$.

Daarna wordt met gebruikmaking van de h -schaal een nomogram ontworpen voor

$$H^2 = h l^2$$

met de H -schaal als middelste schaal. Becijfering van een van de nieuwe schalen levert weer de andere.

In dit nomogram zijn de schalen voor s en H minder gunstig, omdat de meest gebruikte waarden te dicht bij elkaar liggen.

2. Nomogrammen met raaklijnovergang

2.1 Algemeen

Bij meer dan drie veranderlijken is het niet altijd mogelijk deze zo te splitsen, dat op de h -as(sen) gelijke functies ontstaan. De oplossing kan dan worden gezocht in nomogrammen met puntenvelden (II.1.3). Een andere mogelijkheid is een nomogram met raaklijnovergang.

Noemen we bv. de betrekking

$$\frac{a}{b} = c(d - e) \quad (3.3)$$

dan kunnen we schrijven

$$\frac{a}{b} = h = c h^1$$

Voor het eerste deel kunnen we een normaal puntennomogram samenstellen met logaritmische schalen. Ook voor

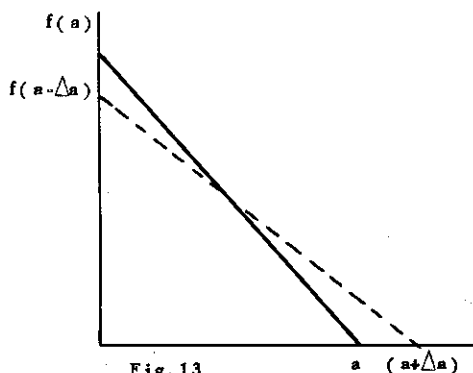
$$h^1 = d - e$$

kan een puntennomogram worden samengesteld.

De beide nomogrammen plaatsen we nu zo, dat h^1 en h loodrecht op elkaar staan (zie bijlage III). Voor c worden nu zodanige curven geconstrueerd, dat de raaklijn aan deze curven de overgang van h naar h^1 vormt en omgekeerd.

Voor de waarde $c = 1$ moeten daartoe de gelijke waarden van h en h^1 worden verbonden. Langs de aldus ontstane raaklijnen is de curve voor c te construeren. Voor het geval $c = 2$ moeten alle punten op h^1 worden verbonden met de dubbele waarden op h . In het rechter bovendeel van de figuur komen dus lijnen met verschillende c -waarden.

2.2 Algemene vergelijking voor de raaklijnkrumme



In sommige gevallen is het mogelijke overgangskrommen te berekenen in plaats van te construeren. Hiertoe zullen we de algemene vergelijking voor deze kromme afleiden.

Voor een raaklijn die van de assen resp. stukken a en $f(a)$ afsnijdt (getrokken lijn in figuur 13) geldt:

$$\frac{y}{f(a)} + \frac{x}{a} = 1 \quad (3.4)$$

Evenzo heeft een raaklijn, die stukken $a + \Delta a$ en $f(a + \Delta a)$ van de assen afsnijdt als vergelijking (gestippelde lijn in figuur 13)

$$\frac{y}{f(a + \Delta a)} + \frac{x}{(a + \Delta a)} = 1 \quad (3.5)$$

Voor $\Delta a \rightarrow 0$ moeten beide lijnen samenvallen. Aftrekken van de vergelijkingen 3.4 en 3.5 levert

$$\frac{y}{f(a)} - \frac{y}{f(a + \Delta a)} + \frac{x}{a} - \frac{x}{a + \Delta a} = 0$$

of

$$y \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{f(a) f(a + \Delta a)} + \frac{x \cdot \Delta a}{a(a + \Delta a)} = 0$$

of

$$\frac{y \Delta f(a)}{f(a) f(a + \Delta a)} + \frac{x \cdot \Delta a}{a(a + \Delta a)} = 0$$

of

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta a} \cdot \frac{y}{f(a) f(a + \Delta a)} + \frac{x}{a(a + \Delta a)} = 0$$

Voor $\Delta a \rightarrow 0$ geeft deze vergelijking

$$\frac{y f'(a)}{f^2(a)} + \frac{x}{a^2} = 0 \quad (3.6)$$

als $f^1(a)$ de eerste afgeleide van $f(a)$ is.

De meetkundige plaats van punten die zowel aan 3.4 als aan 3.6 voldoen, is een bepaalde kromme, de *omhullende*. De coördinaten van deze kromme zijn te vinden door x en y uit deze twee vergelijkingen op te lossen. Dit geeft

$$y = \frac{f^2(a)}{f(a) - a f^1(a)} \quad (3.7)$$

$$x = a - \frac{a f(a)}{f(a) - a f^1(a)} \quad (3.8)$$

2.3 Enkele voorbeelden van berekeningen van raaklijnkrommen

Stel, dat we een raaklijnkromme willen hebben voor de berekening van

$$f(a) = \frac{b}{a} \quad (3.9)$$

De waarden van a worden op de x -as afgezet, die van $f(a)$ op de y -as.

Nemen we nu $b = 12$, dan geeft dit bij invullen in 3.7 en 3.8 de waarden

$$x = \frac{1}{2} a \quad (3.10)$$

$$y = b/a \quad (3.11)$$

Daar nu geldt, dat $a = 2x$, kan uit 3.11 worden afgeleid, dat de algemene vergelijking voor de raaklijnkromme voor $b = 12$ voldoet aan

$$y = \frac{3}{x} \quad (3.12)$$

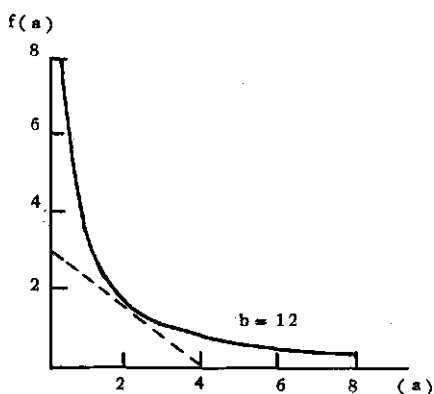


Fig. 14

Deze kromme is in figuur 14 weergegeven. Voor andere waarden van b kunnen op overeenkomstige wijze vergelijkingen worden afgeleid. Figuur 14 geeft nu dus een vermenigvuldigings- of delingsnomogram met een raaklijnovergang.

Bij het maken van nomogrammen met meer variabelen zal het meermalen voorkomen, dat op de beide assen ongelijke scha-

len zijn uitgezet. Zo heeft bv. de horizontale as een lineaire verdeling en de verticale een kwadratische.

We willen nu de overgangskromme hebben voor de verg. 3.9. Omdat nu de schaal voor $f(a)$ een kwadratische verdeling heeft, moet bij de bepaling van de coördinanten van de omhullende worden uitgegaan van de vergelijking

$$f(a) = \left(\frac{b^2}{a}\right) \quad (3.13)$$

Met behulp van deze vergelijking kunnen de waarden van x en y uit 3.7 en 3.8 worden berekend. Het resultaat is dan

$$y = \frac{b^2}{3a^2} \quad (3.14)$$

$$x = \frac{2}{3} a \quad (3.15)$$

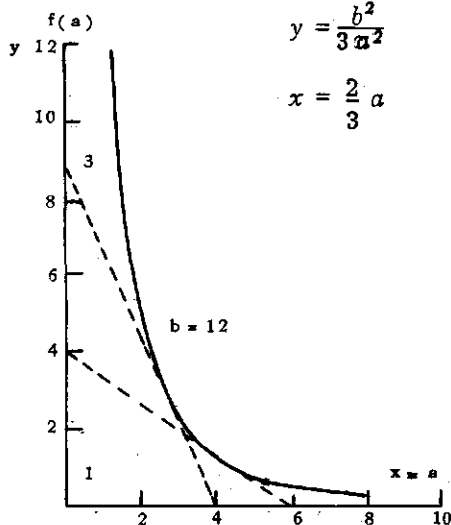


Fig. 15

Daar nu geldt, dat $a = \frac{3}{2} x$, voldoende raaklijnkrommen aan de algemene vergelijking

$$y = \frac{4 b^2}{27 a^2} \quad (3.16)$$

Voor het geval $b = 12$ is de kromme weergegeven in figuur 15. Hier is dus ook weer een vermenigvuldigings- en delingsnomogram ontstaan.

IV GEBRUIK EN ALGEMENE EIGENSCHAPPEN VAN DETERMINANTEN

1. Determinanten in het algemeen

De leer der determinanten is afkomstig uit de vectorrekening. Determinanten hebben thans echter ook vele toepassingen op andere gebieden.

In de analytische meetkunde worden determinanten toegepast voor het onderzoek van kegelsneden, bepalingen van middelpunten en hoofdassen van tweedegraadskrommen.

De oppervlakte van een driehoek, waarvan de hoekpunten in coördinaten zijn gegeven kan in determinantvorm worden geschreven.

Een determinant kan eveneens de uitdrukking zijn voor de ligging van een vlak door drie punten ten opzichte van een willekeurig in de ruimte aangebracht assenstelsel.

Een belangrijke toepassing van de determinanten is de oplossing van n -vergelijkingen met n onbekenden. Voldoen nu in de analytische meetkunde de coördinaten van een bepaald punt aan twee of meer vergelijkingen dan wil dit zeggen, dat het betreffende punt het snijpunt is van de door deze vergelijkingen weergegeven rechte of kromme lijnen. De voorwaarde, waaraan een dergelijk punt moet voldoen, is dus in determinantvorm te schrijven. Deze toepassing vormt de grondslag van het gebruik van determinanten in de nomografie.

Een andere, in de nomografie gebruikte toepassing is de voorwaarde, waaraan drie punten moeten voldoen, willen ze op een rechte lijn liggen.

Een derde voor ons van belang zijnde toepassing is die van het zoeken van de vergelijkingen van de uit de projectieve transformatie van een nomogram verkregen figuur.

Voor hen, die niet op de hoogte zijn van de eigenschappen van determinanten worden de voornaamste bewerkingen in de volgende paragrafen behandeld.

2. Definitie van determinanten

Een determinant is een verkorte schrijfwijze van een som van producten. Hij wordt doorgaans geschreven in de vorm

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & h_n \end{vmatrix}$$

Het aantal rijen ($a_1, b_1, c_1, \dots, h_1$) en het aantal kolommen ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$) is steeds gelijk. Men noemt dit *de orde van de determinant*.

Hoewel alle hier na te beschrijven eigenschappen ook gelden voor determinanten van hogere en lagere orde, zullen we ons hier beperken tot determinanten van de derde orde.

Uitschrijven van de producten kan eenvoudig op de volgende wijze worden gedaan. Achter de determinant van de derde orde schrijven we nog eens de eerste twee kolommen van de oorspronkelijke determinant op de volgende wijze

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \\ & & a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3 \end{array}$$

De diagonalen van links boven naar rechts beneden leveren nu de positieve termen, die van rechts boven naar links beneden de negatieve, dus

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

Een algemene regel is, dat, wanneer het aantal verwisselingen dat nodig is om in een product de indices de natuurlijke volgorde 1, 2, 3 te geven *even* is, dan is de term *positief*. Is dit aantal *oneven*, dan is het product *negatief*.

3. Eigenschappen van determinanten

a. Worden van een determinant rijen en kolommen verwisseld, dan houdt de determinant dezelfde waarde.

De hoofddiagonaal blijft dezelfde en alle andere termen houden hetzelfde voorteken.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- b. Vermenigvuldigt men alle elementen van dezelfde kolom (rij) met het zelfde getal p dan wordt de determinant p maal zo groot.

In elk komt slechts een term van een bepaalde kolom voor. Elk product wordt dus met p vermenigvuldigd.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Omdat geen verandering van waarde optreedt door verwisseling van rijen en kolommen, geldt hetzelfde voor de rijen.

Analoog geeft deling van een bepaalde rij (kolom) door een bepaald getal p een p maal zo kleine waarde van de determinant.

- c. Zijn alle elementen van een zelfde rij (kolom) gelijk aan p , dan is de determinant $= 0$

Vermenigvuldiging van de betreffende rij (kolom) met $p=0$ geeft deze determinant, dus $D = 0 \cdot D$ of $D = 0$

- d. Verwisseling van twee rijen (kolommen) geeft de determinant de tegengestelde waarde.

Na de verwisseling geeft elke term een paarwisseling van de indices te zien, dus gaat elk product in zijn tegengestelde waarde over.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

- e. Zijn twee rijen (kolommen) gelijk, dan is de determinant $= 0$.

Verwisseling van de betreffende rijen (kolommen) geeft de determinant de tegengestelde waarde, dus $D = -D$. Dit is alleen mogelijk als $D = 0$

- f. Vormen de elementen van twee rijen (kolommen) een evenredigheid, dan is de determinant = 0

Na deling door de evenredigheidsfactor worden de rijen (kolommen) aan elkaar gelijk.

- g. Verschillen twee of meer determinanten slechts in de elementen van een rij (kolom), dan ontstaan bij optelling een nieuwe determinant, waarin de corresponderende rij (kolom) de som van de oorspronkelijke elementen is

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- h. De waarde van een determinant verandert niet, wanneer men alle elementen van enige rijen (kolommen) vermeerderd met een veelvoud van de overeenkomstige elementen van een andere rij (kolom).

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3+2 \times 0 & 0 \\ 1 & -2+2 \times 1 & 1 \\ 3 & -4+2 \times 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Deze eigenschap wordt veel toegepast bij de berekening van determinanten. Zo is

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

Hiervoor zijn achtereenvolgens de 3e rij van de 1e rij afgetrokken. Daarna 2×3 e rij van 2e rij; 2×3 e kolom van 1e kolom en $2/3 \times 2$ e rij van 1e rij.

4. Ontwikkelen van een determinant naar de elementen van een rij of van een kolom

Met deze bewerkingsmethode wordt een nieuwe methode gegeven om determinanten te berekenen.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
 &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
 &= a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3
 \end{aligned}$$

Door de ontwikkeling naar een bepaald element blijft er dus een nieuwe determinant van lagere orde over. Deze ontstaat uit de oude determinant door hiervan de betreffende rij en kolom waarin het element voorkomt, weg te laten. De aldus ontstane *restdeterminant* of *minor* heeft hetzelfde teken als de oorspronkelijke determinant als de som van het rangnummer van rij en kolom waarin het element voorkomt, *even* is, het tegengestelde teken als dit rangnummer *oneven* is.

Voor bovengenoemde determinant geldt eveneens *

$$\begin{aligned}
 D &= b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + b_2(c_3a_1 - c_1a_3) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) \\
 &= b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3
 \end{aligned}$$

en eveneens

$$D = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$$

Door verwisseling van rijen en kolommen kan eveneens worden afgeleid dat

$$D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 = a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3$$

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{naar 1e kolom}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ naar 2e kolom}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ naar 3e kolom}$$

naar (1e rij) (2e rij) (3e rij)

5. Het randen van een determinant

Met de in de vorige paragraaf besproken eigenschap is het mogelijk van een determinant een andere determinant van een hogere orde te maken met dezelfde waarde als de oorspronkelijke determinant.

Om de orde van een determinant met 1 te verhogen moet aan de determinanten rij en een kolom worden toegevoegd.

Stel, dat we van de determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

een determinant van de derde orde willen maken. Het eerste element van de nieuwe eerste kolom maken we 1. De rest van deze kolom kan dan bestaan uit nullen.

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Ontwikkelen van deze determinant naar de eerste rij geeft dan $1 \times$ de oorspronkelijke determinant, $p \times 0$ en $q \times 0$. De waarde p en q mogen dus willekeurig worden genomen.

Voor de twee laatste waarden in de eerste rij kan men ook nullen invullen. De beide waarden van de nieuwe eerste kolom krijgen we dan willekeurige waarden p en q .

Omgekeerd kan dus de orde van een determinant worden verlaagd door eerste de elementen van een rij of kolom op een na nul te maken met behulp van de eigenschap genoemd in par. 3 punt h.

6. Het vermenigvuldigen van determinanten

Voor de vermenigvuldiging moeten de determinanten dezelfde orde hebben. Dit is steeds mogelijk door de laagste orde door randen te verhogen. De vermenigvuldiging wordt hier aan de hand van enkele voorbeelden toegelicht

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (1x2+2x5+3x8) & (1x3+2x6+3x9) & (1x4+2x7+3x1) \\ (4x2+5x5+6x8) & (4x3+5x6+6x9) & (4x4+5x7+6x1) \\ (7x2+8x5+9x8) & (7x3+8x6+9x9) & (7x4+8x7+9x1) \end{vmatrix}$$

Omdat verwisseling van rijen en kolommen de waarde van de determinant niet verandert kan de vermenigvuldiging ook worden geschreven als

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (1x2+2x5+3x8) & (4x2+5x5+6x8) & (7x2+8x5+9x8) \\ (1x3+2x6+3x9) & (4x3+5x6+6x9) & (7x3+8x6+9x9) \\ (1x4+2x7+3x1) & (4x4+5x7+6x1) & (7x4+8x7+9x1) \end{vmatrix}$$

7. Het oplossen van n vergelijkingen met n onbekenden

Een van de toepassingen van determinanten is het oplossen van vergelijkingen.

Hebben we de vergelijkingen

$$a_1x + b_1y + c_1z = p$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = q$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = r$$

Dan is de oplossing voor x , y en z respectievelijk

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} &
 y &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p & c_1 \\ a_2 & q & c_2 \\ a_3 & r & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} &
 z &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p \\ a_2 & b_2 & q \\ a_3 & b_3 & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}
 \end{aligned}$$

Voor het geval van n vergelijkingen met n onbekenden krijgen de determinanten de orde n

V. HET GEBRUIK VAN DETERMINANTEN IN DE NOMOGRAFIE

1. Nadere beschouwing van het lijnen- en puntennomogram

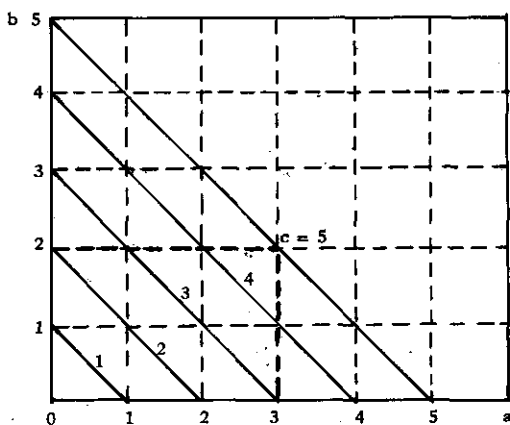


Fig. 16

- 1) lijnen // y -as voor waarden van a
- 2) lijnen // x -as voor waarden van b
- 3) lijnen onder 45° voor waarden van c

Drie bij elkaar horende waarden van a , b en c geven nu een snijpunt (b.v. $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$) van de drie soorten lijnen. Voldoen omgekeerd de coördinaten van een punt aan de drie voor de lijnen geldende vergelijking, dan is dit punt dus een oplossing van de vergelijking. De voorwaarde, waaraan een dergelijk punt moet voldoen kunnen we nu in de vorm van een determinant schrijven.

Beschouwen we het *puntennomogram* voor de verg. 5.1 (fig. 17), dan liggen drie bij elkaar horende waarden op een rechte lijn. Elke oplossing in dit systeem moet aan deze voorwaarde voldoen.

Om duidelijk te maken, hoe determinanten in de nomografie worden gebruikt, beschouwen we het eenvoudige nomogram

$$a + b = c \quad (5.1)$$

Als *Cartesiaans* nomogram bestaat dit uit een samenstel van drie soorten rechte lijnen (fig. 16) te weten:

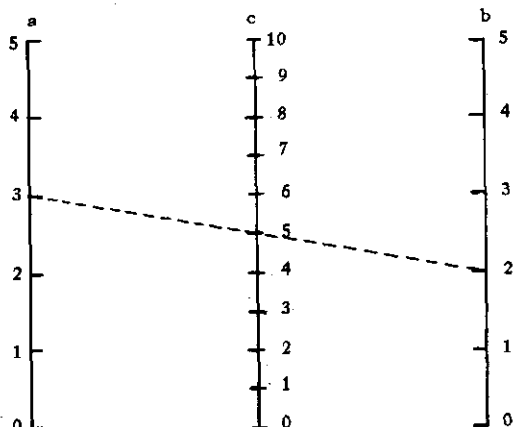


Fig. 17

Ook hier zullen we deze voorwaarde in de vorm van een determinant schrijven. Voor beide gevallen zullen we deze voorwaarde eerst opstellen voor **CARTESIAANSE** coördinaten. Daarna zullen we nagaan, welk verbander bestaat tussen deze coördinaten en die van **UNVERZAGT**.

2. De collineatievoorwaarde voor drie punten

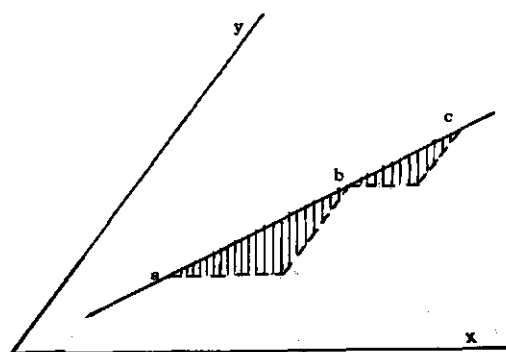


Fig. 18

Liggen drie punten op een rechte lijn in een willekeurige assenstelsel dan geldt voor de gearceerde driehoeken (fig. 18)

of

$$(x_b - x_a) : (y_b - y_a) = (x_c - x_b) : (y_c - y_b)$$

$$(x_b - x_a)(y_c - y_b) - (x_c - x_b)(y_b - y_a) = 0$$

In determinantvorm geeft dit

$$\begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_b & y_c - y_b \end{vmatrix} = 0$$

Randen van deze determinant geeft

$$\begin{vmatrix} x_b & y_b & 1 \\ x_b - x_a & y_b - y_a & 0 \\ x_c - x_b & y_c - y_b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

of na omwerking (1e rij bij 3e optellen, 2e rij van 1e aftrekken en 1e rij bij 2e rij optellen)

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

Willen drie punten op een rechte lijn liggen, dan moeten de coördinaten dus voldoen aan bovenstaande determinant.

3. Het snijpunt van drie rechte lijnen

Een rechte lijn kan worden weergegeven door de vergelijking

$$ax + by + c = 0 \quad (5.3)$$

Het snijpunt van twee rechte lijnen moet voldoen aan de vergelijkingen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad (5.4)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad (5.5)$$

Vermenigvuldiging met resp. a_2 en a_1 en aftrekken geeft

$$y = (a_2 b_1 - a_1 b_2) / (a_2 c_1 - a_1 c_2) = 0$$

of

$$y = - \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad (5.6)$$

Idem geldt voor x

$$x = - \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2} \quad (5.7)$$

Voor een derde lijn door hetzelfde punt gelden dezelfde vergelijkingen voor x en y , met dien verstande dat de index 2 moet worden vervangen door de index 3. De coördinaten van x en y moeten dezelfde zijn, dus

$$\frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{a_3 c_1 - a_1 c_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \quad \text{en} \quad \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2} = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{b_3 a_1 - b_1 a_3}$$

Deling van de tweede vergelijkingen door de eerste levert

$$\frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{a_3 c_1 - a_1 c_3}$$

of als determinant

$$\begin{vmatrix} a_2 c_1 - a_1 c_2 & b_2 c_1 - b_1 c_2 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 & b_3 c_1 - b_1 c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Vanden van deze determinant levert

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 & b_2 c_1 - b_1 c_2 & 0 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

of na bewerking (c_1 x 1e rij bij 2e rij optellen, c_3 x 1e rij bij 3e optellen en 2e en 3e rij delen door c_1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Lijncoördinaten van Unverzagt

4.1 Het systeem van lijncoördinaten

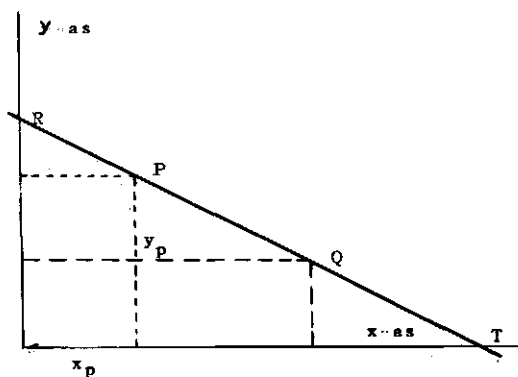


Fig. 19

De ligging van een punt in een plat vlak is bepaald door zijn afstand tot twee willekeurige, elkaar snijdende coördinaatassen x en y . Deze weergave van de plaatsbepaling van het punt noemt men een *Cartesiaans coördinatensysteem*.

We nemen nu in plaats van twee elkaar snijdende assen x en y twee evenwijdige assen u en v met beginpunten A en B . De lijn AB noemt men de *nullijn* van het systeem.

De x -waarden uit het Cartesiaanse stelsel (fig. 18) worden nu van uit A op de u -as uitgezet; de y -waarden op de v -as van uit B (fig. 19). Positieve waarden van x en y worden naar boven, negatieve naar beneden afgezet.

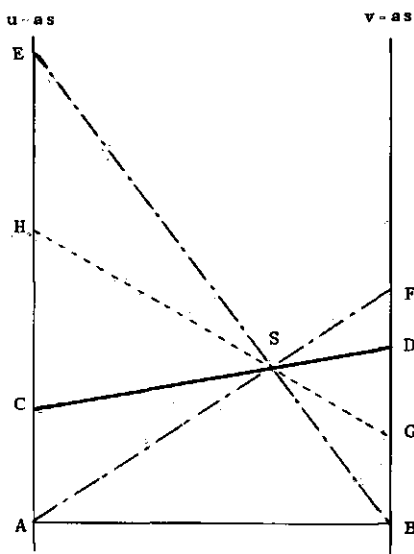


Fig. 19

Nemen we het punt P uit het Cartesiaanse stelsel. De waarde $x_P = u$ wordt dus uitgezet op de u -as; de waarde $y_P = v$ op de v -as. Het punt P wordt in het nieuwe stelsel weergegeven door de lijn CD .

We nemen nu een willekeurige lijn door het punt P in het oude stelsel. Deze lijn snijdt de x - en de y -as resp. in T en R . Het punt T wordt in het nieuwe stelsel weergegeven door de lijn

EB ($EA = u = x_T$, $y_T = 0$). Het punt R wordt in het nieuwe stelsel aangegeven door de lijn AF ($x_R = u = 0$, $y_R = v = BF$).

De lijnen CD , BE en AF in het nieuwe stelsel, die resp. de punten P , T en R uit het oude stelsel weergeven gaan alle drie door het punt S in het nieuwe systeem. Daar de genoemde punten liggen op de getekende lijn door P , gaan lijnen uit het oude stelsel blijkbaar in het nieuwe stelsel over in punten. We zagen daarbij, dat punten uit het oude stelsel overgingen in lijnen. De aldus verkregen wijze van uitzetten noemt men naar de ontwerper ervan de methode van de *lijncoördinaten van Unverzagt*.

Daar het punt S de weergave is van de lijn RT uit het oude stelsel, zullen alle punten die op deze lijn liggen in het lijncoördinatensysteem, lijnen geven die gaan door het punt S . Zo gaat punt Q uit het Cartesiaanse stelsel over in de lijn GH .

Elk willekeurig punt op de lijn RT zal dus worden weergegeven door een lijn door S . De lijncoördinaten van deze punten zullen nu moeten voldoen aan een bepaalde betrekking. Deze betrekking moet dan tevens het punt S weergeven. Deze betrekking is als volgt af te leiden uit fig. 20

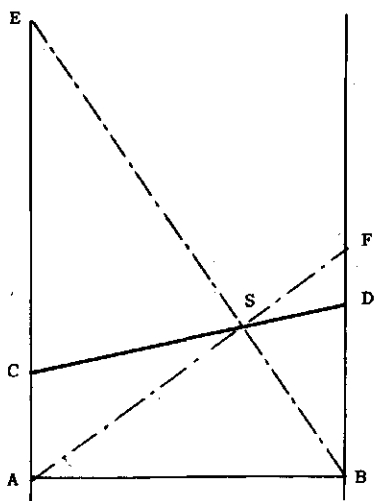


Fig. 20

Stel dat een willekeurig punt (P) wordt weergegeven door de lijn CD . De variabele afstanden $AC=u$ en $BD=v$ bepalen dan de ligging van het punt in lijncoördinaten. Verder stellen we

$$AE = \alpha \quad BF = \beta$$

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken CES en DBS volgt dan dat

$$CD : SD = (\alpha - u) : v \quad (5.9)$$

Evenzo volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ACS en FDS

$$CD : SD = \alpha : (\beta - v) \quad (5.10)$$

Uit beide evenredigheden volgt dan dat

$$\text{of} \quad (\alpha - u) : v = \alpha : (\beta - v) \quad (5.11)$$

$$\beta u + \alpha v - \alpha \beta = 0 \quad (5.12)$$

Dit is dus de vergelijking van het punt S in lijncoördinaten.

Evenmin als in het Cartesiaanse stelsel de assen loodrecht op elkaar hoeven te staan, hoeft bij de lijncoördinaten de nullijn AB loodrecht op de assen te staan. Bij een niet loodrechte stand verandert er niets aan de afgeleide betrekkingen.

4.2 Afleiding van enige betrekkingen in het lijncoördinatenstelsel.

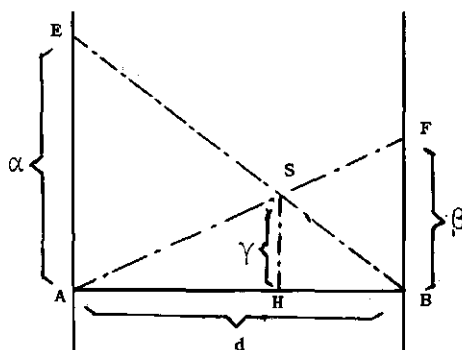


Fig. 21

We trekken in het lijncoördinatenstelsel door S een lijn SH evenwijdig aan de beide assen u en v (zie figuur 21). Nu stellen we

$$AB = d$$

$$HS = \gamma$$

γ wordt *positief* genomen als S boven de nullijn ligt, *negatief* als dit punt er beneden ligt.

Nu volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AHS en AFB

$$AH : AB = \gamma : \beta \quad (5.13)$$

$$\text{of} \quad AH = \frac{d\gamma}{\beta} \quad (5.14)$$

Evenzo volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABE en HBS

$$HB = \frac{d\gamma}{\alpha} \quad (5.15)$$

Optellen van 5.14 en 5.15 geeft dan

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \quad (5.16)$$

De afstanden AH en HB bepalen bij puntenomogrammen de ligging van de middelste schaal. De waarden van γ is bepalend voor de modulus van deze schaal.

De algemene vergelijking van een lijn in het Cartesiaans coördinatensysteem luidt

$$Ax + By + C = 0 \quad (5.17)$$

Analoog hieraan kunnen we voor de vergelijking van een punt in een Unverzagt coördinatensysteem stellen

$$Au + Bv + C = 0 \quad (5.18)$$

In de vorige par. vonden we als vergelijking voor zo'n punt $\beta u + \alpha v - \alpha\beta = 0$ (5.12)

Vergelijken van 5.12 en 5.18 levert dus dat

$$A = \beta, \quad B = \alpha \quad \text{en} \quad C = -\alpha\beta$$

Door hiervan gebruik te maken kunnen dus de verg. 5.14, 5.15 en 5.16 worden uitgedrukt in lijncoördinaten. We krijgen dan

$$HS = - \frac{C}{A+B} \quad (5.19)$$

$$AH = \frac{d \cdot B}{A+B} \quad (5.20)$$

$$HB = \frac{d \cdot A}{A+B} \quad (5.21)$$

De plaats van het punt S in het lijncoördinatensysteem kan met behulp van deze formules weer gemakkelijk in Cartiaanse coördinaten worden uitgedrukt. Hiertoe denken we ons het nulpunt van het Cartesiaanse stelsel in A , de x -as langs de nul-lijn en de y -as langs de u -as. Voor het punt S geldt dan dat

$$x = AH \quad (5.22)$$

$$y = HS \quad (5.23)$$

Het bepalen van de puntenvergelijking en het lijncoördinaten-systeem is nu vrij eenvoudig. In figuur 22 moet S voldoen aan de waarden

$$u = -2 \quad v = +2$$

$$u = +3 \quad v = -1$$

zodat de puntenvergelijking moet voldoen aan

$$-2A + 2B + C = 0 \quad (5.24)$$

en

$$-3A - B + C = 0 \quad (5.25)$$

Uit 5.24 en 5.25 volgt de verhouding

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = -\frac{C}{4} \quad (5.26)$$

zodat de puntenvergelijking in dit geval luidt

$$3u + 5v - 4 = 0 \quad (5.27)$$

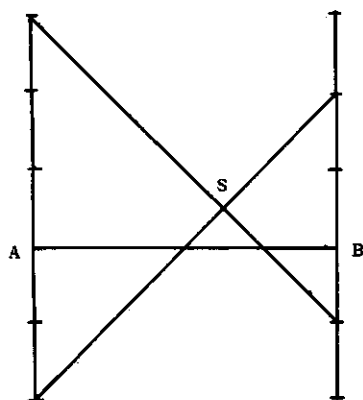


Fig. 22

4.3 Enige opmerkingen over de algemene puntvergelijking

Evenals bij de algemene vergelijking van een lijn in het Cartesiaanse assenstelsel kunnen we enige kenmerken van de puntvergelijking in het lijncoördinatenstelsel onderscheiden. Uit de verg. 5.19, 5.20 en 5.21 voor de lijnstukken AH, HB en HS kunnen we afleiden dat voor

$$\begin{aligned} C &= 0 \text{ het punt ligt op de nullijn} \\ A &= 0 \text{ " " " " " } v\text{-as} \\ B &= 0 \text{ " " " " " } u\text{-as} \end{aligned}$$

We hebben gezien, dat we met behulp van bovengenoemde vergelijking een lijncoördinatensysteem steeds weer om kunnen zetten in den Cartesiaansysteem. Drukken we in een punten-nomogram de ligging der punten dus uit in het Cartesiaanse stelsel, dan moeten de bij elkaar behorende punten voldoen aan de voor de collineatie geldende determinant 5.2. Maken we echter gebruik van lijncoördinaten, dan zal voor de collineatie een andere voorwaarde gelden, n.l. die, vervat in de determinant 5.8

4.4 De voorwaarde voor drie punten op een rechte lijn in lijncoördinaten

Bij de in hoofdstuk II besproken nomogrammen en in par. V. 1 zagen we, dat voor de aflezing van puntennomogrammen gebruik werd gemaakt van drie schaalpunten die lagen op een rechte lijn. De voorwaarde hiervoor zal nu uitgedrukt worden in determinantvorm.

In het Cartesiaanse assenstelsel werd voor het snijpunt van drie rechte lijnen in V.3 de voorwaarde afgeleid, dat de coëfficiënten van de drie vergelijkingen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

moeten voldoen aan

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

In het lijncoördinatensysteem vindt men de verbindingslijn van drie punten door de waarden van u en v op te lossen uit de vergelijkingen

$$A_1 u + B_1 v + C_1 = 0$$

$$A_2 u + B_2 v + C_2 = 0$$

$$A_3 u + B_3 v + C_3 = 0$$

Deze bewerking is volkomen gelijk aan die in V.3 voor het snijpunt van drie lijnen in het Cartesiaanse assenstelsel, met dien verstande, dat x en y hier zijn vervangen door u en v . De voorwaarde dat drie punten in lijncoördinaten op een rechte lijn moeten liggen, wordt dus uitgedrukt door de determinant 5.8

5. Voorbeelden van het gebruik van determinanten in Cartesiaanse nomogrammen

In par. V.3 hebben we gezien, dat de coëfficiënten van de vergelijkingen van drie lijnen aan een bepaalde voorwaarde moeten voldoen, willen ze door een punt gaan. Deze voorwaarde schreven we in de vorm van de determinant 5.8

Omgekeerd moet, wanneer een stelsel van drie lijnen aan deze voorwaarde voldoet, hieruit een nomogram zijn te construeren dat bestaat uit deze drie soorten lijnen.

We nemen het eenvoudige geval van fig. 16

$$a + b = c \quad (5.1)$$

Deze vergelijking schrijven we nu zodanig in determinantvorm, dat in de eerste rij naast bekende termen alleen de veranderlijke a optreedt, in de tweede rij alleen b en in de derde rij alleen c .

Voor 5.1 kunnen we schrijven

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 1 & 1 & -c \end{vmatrix} = 0$$

Vergelijken we deze determinant met 5.8, dan stellende elementen van de rijen de volgende vergelijkingen voor.

$$x + 0, y - a = 0 \quad (5.29)$$

$$0, x + y - b = 0 \quad (5.30)$$

$$x + y - c = 0 \quad (5.31)$$

De vergelijkingen stellen nu voor:

5.29 geeft voor elke waarde van a een lijn // y -as

5.30 " " " " " b " " // x -as

5.31 " " " " " c " " met

hellingstangens - 1

We zien dus, dat dit nomogram is, dat in fig. 16 is uitgebeeld.

Op 5.28 mogen allerlei bewerkingen worden toegepast, mits de waarde $= 0$ blijft. Zorgen we er nu voor, dat door de bewerking de variabelen steeds in hun eigen rij blijven staan, dan kunnen we direct de vergelijkingen voor de lijnen aflezen.

Vermenigvuldiging van de laatste kolom van de determinant met 10 doet de waarde (0) niet veranderen, dus

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -10a \\ 0 & 1 & -10b \\ 1 & 1 & -10c \end{vmatrix} = 0 \quad (5.32)$$

Uit deze determinant volgen dezelfde lijnen, doch deze liggen nu op afstanden van elkaar die $10x$ zo groot zijn.

Ook verwisseling van twee kolommen (of rijen) verandert niets aan de waarde van de determinant. We kunnen dus ook schrijven:

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.33)$$

De vergelijkingen voor de lijnen worden dan:

$$-ax + 0, y + 1 = 0 \quad y = ax - 1 \quad (5.34)$$

$$-bx + y + 1 = 0 \quad \text{of} \quad y = bx \quad (5.35)$$

$$-cx + y + 1 = 0 \quad y = cx - 1 \quad (5.36)$$

Het nomogram zou dus ook kunnen bestaan uit lijnen, waarvoor de hellingstangenten resp. a , b en c zijn.

Verandering van de determinant betekent dus vervorming van het nomogram, zonder dat het nomogram een andere oplossing geeft. In het besproken geval werden andere lijnen gevonden. Dit is dus een projectieve verandering en hierbij blijven rechte lijnen recht.

We zien dus, dat uit de determinant eenvoudig de vergelijkingen voor de verschillende lijnen volgen. Hetzelfde geldt uiteraard voor lijncoördinaten. Om dit aan te tonen zullen in de volgende paragraaf enige voorbeelden worden gegeven van in het eerste hoofdstuk gegeven nomogrammen.

6. Enkele voorbeelden van nomogrammen met evenwijdige schalen afgeleid met behulp van determinanten

Willen drie punten in lijncoördinaten op een rechte lijn liggen, dan moeten de coëfficiënten van de vergelijkingen van deze punten voldoen aan dezelfde voorwaarde als voor het snijpunt van drie lijnen in een Cartesiaans assenstelsel.

We nemen weer als voorbeeld de vergelijking

$$a + b = c \quad (5.1)$$

waarvoor we nu een puntnomogram met drie evenwijdige assen willen construeren.

Deelt men nu de elementen van de eerste kolom van de determinant 5.28 door de modulus μ_1 , die van de tweede kolom door μ_2 en vermenigvuldigt men vervolgens de eerste, tweede en derde rij resp. met μ_1 , μ_2 en $\mu_1\mu_2$, dan wordt de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & - & \mu_1 a \\ 0 & 1 & - & \mu_2 b \\ \mu_2 & \mu_1 & - & \mu_1\mu_2 c \end{vmatrix} = 0 \quad (5.37)$$

waaruit voor de lijnvergelijkingen valt af te leiden

$$u - \mu_1 a = 0 \quad (5.38)$$

$$v - \mu_2 b = 0 \quad (5.39)$$

$$\mu_2 u + \mu_1 v - \mu_1\mu_2 c = 0 \quad (5.40)$$

Verg. 5.38 stelt, wegens het ontbreken van de term met v , een puntenserie op de u -as voor. In 5.39 ontbreekt de term met u , zodat de punten op de v -as liggen. Vergelijking van 5.40 met de algemene puntvergelijking 5.18 levert $A = \mu_2$, $B = \mu_1$ en $C = \mu_1\mu_2 c$. Invullen van deze waarden in de vergelijkingen 5.20 en 5.21 voor de afstanden AH en HB geeft

$$AH = \frac{\mu_1^2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5.41)$$

$$HB = \frac{\mu_2^2 d}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5.42)$$

Voor $\mu_1 = \mu_2$ ligt de derde as dus midden tussen de beide eerste assen in.

Invullen van de waarden voor A , B en C in 5.19 geeft:

$$HS = \frac{\mu_1 \mu_2 c}{\mu_1 + \mu_2}$$

Voor $\mu_1 = \mu_2$ is dus de derde modulus $\mu_3 = \frac{1}{2} \mu_1$. Verder blijkt uit 5.41 en 5.42, 5.43 dat een verandering van de moduli μ_1 en μ_2 ook een verandering van de modulus μ_3 en de plaats van de derde as inhoudt.

Gebruiken we voor bovenbeschreven nomogram Cartesiaanse coördinaten, d.w.z. leggen we de x -as langs de nullijn, de y -as langs de u -schaal dan geldt voor alle punten op de u -as

$$x = 0, \quad y = \mu_1 a$$

en voor alle punten op de v -schaal

$$x = d, \quad y = \mu_2 b$$

als de afstand tussen de schalen $= d$ is.

Voor de w -schaal (middelste schaal) volgt dan door invullen van de betreffende waarden in de vergelijkingen voor AH en HS

$$x = \frac{\mu_1 d}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5.44)$$

$$y = \frac{\mu_1 \mu_2 c}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5.45)$$

Drie bij elkaar horende punten van deze schalen moeten nu op een rechte lijn liggen, dus volgens de voorwaarde vervat in 5.8:

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu_1 a & 1 \\ d & \mu_2 b & 1 \\ \frac{\mu_1 d}{\mu_1 + \mu_2} & \frac{\mu_1 \mu_2 c}{\mu_1 + \mu_2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.46)$$

Stellen we nu $\mu_1 = \mu_2$, dan blijkt de middelste as naar het oneindige te verdwijnen; op de v -as moeten dan de waarden langs de negatieve as worden uitgezet.

Van deze eigenschap kunnen we gebruik maken, wanneer we twee nomogrammen met een scharnierlijn willen verbinden. Deze kan dan naar het oneindige worden verplaatst voor beide nomogrammen, zodat slechts vier schaaldragers overblijven.

Stel dat we een nomogram hebben voor

$$a + b = p + q \quad (5.47)$$

of

$$a + b = h = p + q \quad (5.48)$$

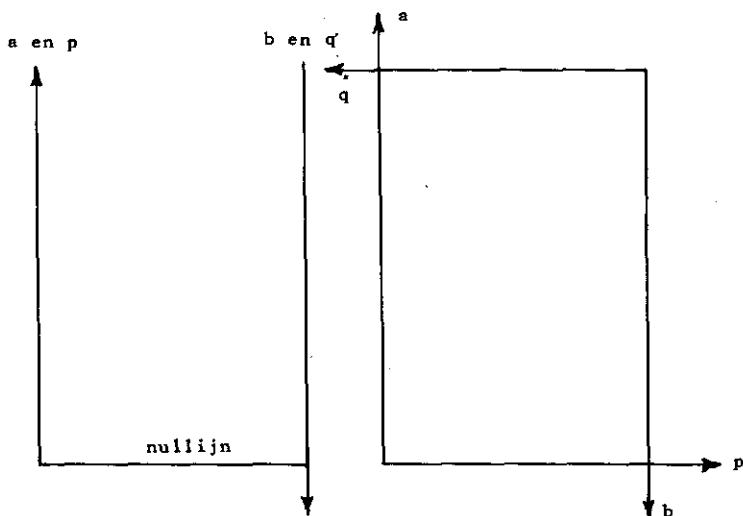


Fig. 23

Voor $\mu_1 = -\mu_2$ verdwijnt de scharnierlijn h in het oneindige.

Gebruiken we dezelfde schaaldragers ook voor c en d (fig. 23) dan geldt hiervoor ook de determinant 5.46 met dien verstande, dat nu voor a en b resp. de waarden p en q moeten worden gelezen.

Draaien we nu p en q als in de figuur aangegeven, dan kunnen we voor de aflezing gebruik maken van twee onderling loodrechte afleeslijnen.

Stel, dat we de p -schaal langs de oorspronkelijke nullijn (x -as) leggen de q -schaal op een afstand $= d$ daarboven. De schaalwaarden van p worden dan weergegeven door

$$x = \mu_3 p, y = 0 \quad (5.49)$$

en die voor de q -schaal

$$x = d - \mu_4 q, y = d$$

Voor het vermenigvuldigingsnomogram

$$a \cdot b = c \quad (5.51)$$

geldt eveneens het boven afgeleide, mits deze formule wordt geschreven in de vorm

$$\log a + \log b = \log c \quad (5.52)$$

De formule is echter ook te schrijven als

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ b & -1 & 0 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix} = 0 \quad (5.53)$$

Deling van de eerste en tweede kolom door resp. μ_1 en μ_2 en vermenigvuldiging van de rijen met resp. μ_1 , $\mu_1\mu_2$ en μ_2 geeft

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\mu_1 a \\ \mu_2 b & \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 & \mu_2 c \end{vmatrix} = 0 \quad (5.54)$$

Gebruik van lijncoördinaten leidt tot de puntvergelijkingen

$$u + 0 - \mu_1 a = 0 \quad (5.55)$$

$$\mu_2 bu + \mu_1 v + 0 = 0 \quad (5.56)$$

$$0 + v + \mu_2 c = 0 \quad (5.57)$$

Voor positieve waarden van μ_1 en μ_2 geeft de eerste vergelijking wegens ontbreken van de term met v een puntenserie op de u -as. De derde vergelijking geeft wegens ontbreken van u een serie punten op de v -as. In de tweede vergelijking ontbreekt de bekende term; d.w.z. dat de punten liggen langs de nullijn. Hun afstand x tot de u -as wordt weergegeven door de vergelijking 5.20, dus

$$x = \frac{\mu_1 d}{\mu_2 b + \mu_1} \quad (5.58)$$

Voor $b = 0$ is $x = 0$. Het schaalpunt $b = 0$ wordt dus afgebeeld in het snijpunt van de nullijn met de v -as. Voor $b = \infty$ is $x = d$. Het punt $b = \infty$ komt dus in het snijpunt van de nullijn en de u -as.

Hiermee hebben we dus het N -nomogram van par. II.4 teruggevonden, waarin de u -as een projectieve verdeling had.

VI. OPSTELLING VAN DE DETERMINANTEN

1. Algemene voorwaarden waaraan de determinant moet voldoen

Voor een lijncoördinatenstelsel met twee onderling evenwijdige assen moeten, willen drie punten in dit stelsel op een rechte lijn liggen, de coëfficiënten A, B en C van de drie puntvergelijkingen

$$A_1 u + B_1 v + C_1 = 0 \quad (6.1)$$

$$A_2 u + B_2 v + C_2 = 0 \quad (6.2)$$

$$A_3 u + B_3 v + C_3 = 0 \quad (6.3)$$

voldoen aan

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.8)$$

Kan een gegeven vergelijking in een zodanige vorm als de determinant worden geschreven, dat in elke rij slechts één veranderlijke optreedt dan hebben we gezien, dat uit deze determinant onmiddellijk de schaalpunten van het nomogram kunnen worden bepaald. Is het dus omgekeerd mogelijk een vergelijking in een zodanige determinant te schrijven, dan kan hiervoor een nomogram met drie op een rechte lijn liggende punten worden geconstrueerd.

In zijn algemene vorm mag de determinant de gedaante

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} = 0$$

hebben. Hierin worden f , g en h dan beschouwd als functies van de variabelen.

Maken we gebruik van een Cartesiaans assenstelsel dan is de voorwaarde voor drie punten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ en $x_3 y_3$ op een rechte lijn:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

Is het dus mogelijk een vergelijking tussen drie veranderlijken a , b en c in een determinant van de vorm

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(c) & g(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.5)$$

te schrijven, dan kunnen $f(a)$, $g(a)$ enz. worden geïnterpreteerd als punten met coördinaten x , y waarvan drie bij elkaar behorende punten op een rechte lijn liggen. De vergelijkingen van de puntenschalen, waarop de punten a , b en c worden uitgezet hebben dan als vergelijking

$$\begin{array}{lll} x_1 = f(a) & x_2 = f(b) & x_3 = f(c) \\ y_1 = g(a) & y_2 = g(b) & y_3 = g(c) \end{array} \quad (6.6)$$

De determinant 6.5 kan altijd worden verkregen uit 6.4. Immers gaat deze, wanneer de rijen resp. door $h(a)$ en $h(b)$ en $h(c)$ worden gedeeld, over in

$$\begin{vmatrix} \frac{f(a)}{h(a)} & \frac{g(a)}{h(a)} & 1 \\ \frac{f(b)}{h(b)} & \frac{g(b)}{h(b)} & 1 \\ \frac{f(c)}{h(c)} & \frac{g(c)}{h(c)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.7)$$

en dan worden hieruit eveneens vergelijkingen van de puntenschalen afgelezen, analoog aan 6.6

Van elke willekeurige vergelijking met drie variabelen, die in de meest algemene vorm 6.4 kan worden geschreven, kan dus een nomogram worden geconstrueerd. Hiervoor kunnen zowel Cartesiaanse als lijncoördinaten worden gebruikt. Zolang twee veranderlijken op onderling evenwijdige schalen kunnen worden uitgezet, geven lijncoördinaten bepaalde voordelen. Zodra echter bepaalde variabelen of functies daarvan met een hogere

macht voorkomen bieden Cartesiaanse coördinaten bepaalde voordelen.

2. Het opstellen van vergelijkingen met drie veranderlijken in determinantvorm

2.1 Algemeen

Voor eenvoudige vergelijkingen lukt het schrijven in de determinantvorm meestal zonder veel moeite. Voor ingewikkelder formules is het verdernog wel eens mogelijk door een paar maal proberen een oplossing te vinden. Er is echter ook een strengere methode, de z.g. *eliminatiemethode*. Hierbij wordt door invoering van twee hulponbekende de oorspronkelijke vergelijking gesplitst in drie andere vergelijkingen, in elk waarvan behalve een veranderlijke uit de oorspronkelijke vergelijking een of beide hulponbekenden in de eerste graad voorkomen. We zullen een aantal voorbeelden van deze methode geven.

$$2.2 \quad a + b - c = 0$$

Stel nu $a = \alpha$ en $b = \beta$ Dan is

$$\alpha - a = 0 \quad (6.8)$$

$$\beta - b = 0 \quad (6.9)$$

$$\alpha + \beta - c = 0 \quad (6.10)$$

Deze vergelijkingen zijn lineair in α en β . Meetkundig zijn dit de vergelijkingen van drie rechte lijnen in het $\alpha\beta$ -stelsel. Ze gaan door een punt, n.l. het punt $\alpha = a$ en $\beta = b$, als de betrekking geldt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 1 & 1 & -c \end{vmatrix} = 0 \quad (6.12)$$

$$2.3 \quad ab - c = 0$$

Stellen we

$$ab = \alpha \quad (6.13)$$

dan geeft invullen in de vergelijking

$$\alpha - c = 0 \quad (6.14)$$

We moeten β nu zodanig kiezen, dat eliminatie van a en b twee vergelijkingen in β van de eerste graad geeft. Stel

$$a + b = \beta \quad (6.15)$$

Dan geeft 6.15 ingevuld 6.13

$$\begin{aligned} a(\beta - a) &= \alpha & \text{of} & & -a^2 + a\beta &= \alpha \\ b(\beta - b) &= \alpha & \text{of} & & -b^2 + b\beta &= \alpha \end{aligned}$$

De vergelijkingen worden dan

$$\alpha - a\beta + a^2 = 0 \quad (6.16)$$

$$\alpha - b\beta + b^2 = 0 \quad (6.17)$$

$$\alpha - c = 0 \quad (6.14)$$

en de determinant wordt

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & -b & b^2 \\ 1 & 0 & -c \end{vmatrix} = 0 \quad (6.18)$$

De factor $(a-b)$ noemt men de *parasitische factor*.

Ook hadden we $a-b = \beta$ kunnen stellen. De determinant zou dan zijn geworden

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -a^2 \\ 1 & -b & -b^2 \\ 1 & 0 & -c \end{vmatrix} = 0 \quad (6.20)$$

of na ontwikkeling

$$(a+b)(ab-c) = 0 \quad (6.21)$$

$$2.4 \quad a + b + c - abc = 0$$

We stellen weer $ab = \alpha$ en uit 6.23 volgt dan (6.22)

$$a + b = \beta \quad (6.23)$$

$$a = \beta - b \quad (6.24)$$

$$b = \beta - a \quad (6.25)$$

Invullen van 6.24 en 6.25 in de vergelijking geeft

$$\alpha - a\beta + a^2 = 0 \quad (6.27)$$

$$\alpha - b\beta + b^2 = 0 \quad (6.28)$$

Invullen van 6.22 en 6.23 in de oorspronkelijke vergelijking geeft dan

$$-\alpha c + \beta + c = 0 \quad (6.29)$$

zodat de determinant wordt

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & -b & b^2 \\ -c & 1 & c \end{vmatrix} = 0 \quad (6.30)$$

Uitwerken geeft dan

$$\begin{aligned} -bc + ab^2c + a^2 - a^2bc - b^2 + ac &= 0 \\ abc(b-a) + (a+b)(a-b) + c(a-b) &= 0 \\ (a-b)(-abc + a + b + c) &= 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$2.5 \quad a = \frac{b}{4} \cdot \frac{4c-b}{3c-b}$$

Hiervoor kunnen we schrijven

$$4a(3c-b) - b(4c-b) = 0 \quad (6.32)$$

$$b^2 + 12ac - 4b(a+c) = 0 \quad (6.33)$$

$$\text{Nemen we} \quad ac = \alpha \quad (6.34)$$

$$\text{en} \quad a + c = \beta \quad (6.35)$$

dan geeft de laatste vergelijking

$$a = \beta - c \quad (6.36)$$

$$c = \beta - a \quad (6.37)$$

Invullen in 6.34 geeft dan

$$a(\beta - a) = \alpha \quad \text{of} \quad \alpha - a\beta + a^2 = 0 \quad (6.38)$$

$$c(\beta - c) = \alpha \quad \text{of} \quad \alpha - c\beta + c^2 = 0 \quad (6.39)$$

En invullen van 6.34 en 6.35 in 6.33 geeft dan

$$-12\alpha - 4b\beta + b^2 = 0 \quad (6.40)$$

en de determinant wordt dan

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & -c & c^2 \\ 12 & -b & b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.41)$$

of uitgewerkt

$$(a - c) \{b^2 + 12ac - 4b(a + c)\} = 0 \quad (6.42)$$

VII. TRANSFORMATIE VAN NOMOGRAMMEN

1. Algemeen

Moet een nomogram met drie rechte schaaldragers worden geconstrueerd voor ver uiteenlopende waarden van de veranderlijken, dan is het noodzakelijk een zeer kleine modulus te gebruiken. Hierdoor wordt de afleesnaauwkeurigheid wellicht te klein. Soms kan het bovendien gewenst zijn, dat schalen of delen van schalen vergroot of verkleind worden om ten aanzien van de afleesnaauwkeurigheid een bruikbaar nomogram te krijgen. Bij alle transformaties moet als eis gesteld worden, dat de samenhang tussen de variabelen, die aan het nomogram ten grondslag ligt, behouden blijft. In de volgende paragrafen zullen enkele grondslagen en voorbeelden voor en van dergelijke transformaties worden behandeld.

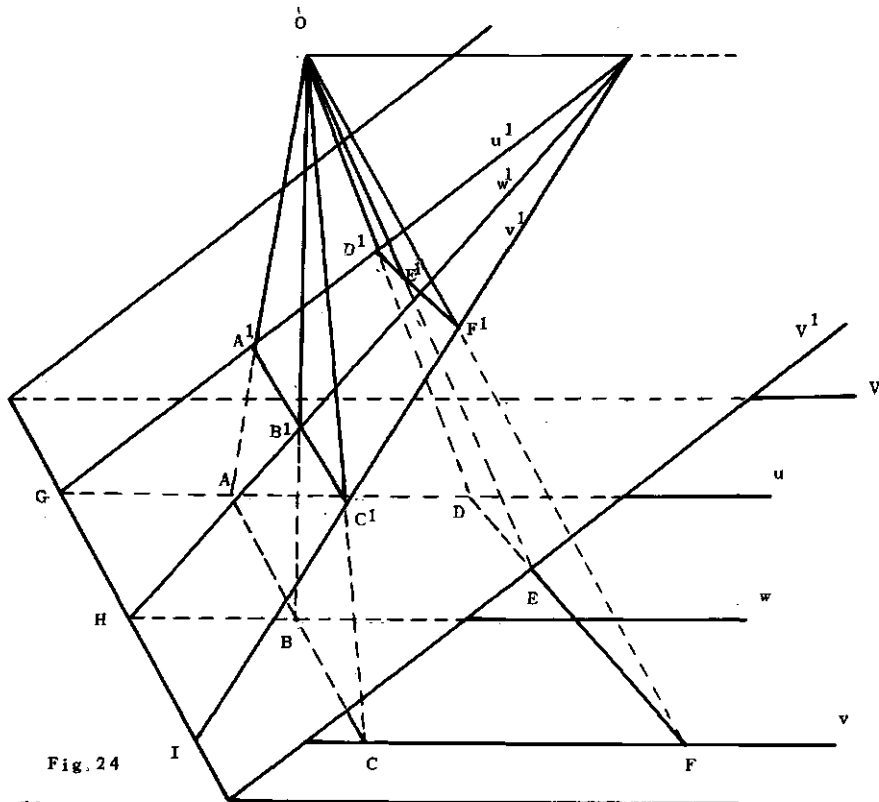


Fig. 24

2. Het principe van de transformatie

Als illustratie van een projectieve vervorming beschouwen we figuur 24.

In het vlak V ligt een nomogram met drie evenwijdige schalen u , v en w . De nullijn van dit nomogram is de lijn ABC . Dit nomogram wordt nu vanuit het punt O , dat ligt buiten beide vlakken, op het vlak V' geprojecteerd. De afbeelding van het oneindig verre punt van de u -, v - en w -schaal komt te liggen op een lijn door O evenwijdig aan deze schalen dus evenwijdig aan het vlak V . De weergave van dit punt in het V' -vlak is het snijpunt S van deze lijn met het V' -vlak.

De snijlijn van de vlakken V en V' blijft bij projectie onveranderd. De getransformeerde schalen in het V' -vlak liggen dus langs de lijnen SI , SH en SG . De punten A , B , C , enz. worden bepaald door het snijpunt van de lijnen OA , OB , OC enz. met het V' -vlak. Na projectie hebben we dus in plaats van drie evenwijdige schalen drie elkaar in een punt S snijdende verkregen. De nieuwe schalen in het V' -vlak hangen nu projectief met de oude schalen in het V -vlak samen.

Meetkundig is het mogelijk uit de ligging van vier punten in het V -vlak en hun projecties in het V' -vlak de stand van V' en O ten opzichte van V in de ruimte te construeren.

3. Enkele voorbeelden van transformaties

3.1 Betekenis van de veranderingen van de determinant

Reeds eerder (par. V.5) is er op gewezen, dat elke verandering van de constructiedeterminant een transformatie van het nomogram voorstelt. We zullen later aantonen, dat bij de transformatie punten overgaan in punten, rechte lijnen in rechte lijnen enz.

Omna te gaan, wat een verandering van de determinant voor transformatie geeft, gaan we uit van de algemene constructie determinant.

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(c) & g(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.5)$$

waarvoor als schaalvergelijkingen gelden

$$\begin{aligned} x_1 &= f(a) & x_2 &= f(b) & x_3 &= f(c) \\ y_1 &= g(a) & y_2 &= g(b) & y_3 &= g(c) \end{aligned}$$

Optellen van een bepaald getal bij de eerste kolom voor de determinant geeft een verschuiving van alle x-waarden over een bepaalde afstand.

Idem geeft optellen van een bepaald getal bij de tweede kolom een verschuiving van alle y-waarden.

Optellen van een bepaald getal bij de derde kolom geeft een verkleining van de x- en de y-schalen. Immers moeten dan om terug te komen tot de waarden één in de laatste kolom, de beide andere kolommen door de waarde van de laatste worden gedeeld.

Optellen van een bepaalde waarde bij een rij geeft, evenzo een verschuiving, maar nu van de betreffende x en y en een schaalverandering.

Vermenigvuldiging van een kolom geeft een vergroting in een bepaalde richting, zoals gemakkelijk uit de schaalvergelijkingen blijkt.

Deling van een kolom geeft een verkleining van een bepaalde schaal of coördinaat.

Verwisselen van eerste en tweede kolom geeft een draaiing van het nomogram. Verwisseling van rijen geeft een verwisseling van de schalen.

Verwisseling van rijen en kolommen geeft draaiing van het nomogram.

3.2 Transformatie van $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

We zullen nu de transformatie van het in II.4 besproken nomogram voor de vergelijking

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad (7.1)$$

nagaan.

In determinantvorm kunnen we voor deze vergelijking schrijven:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} \\ 1 & 1 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} \quad (7.2)$$

In parallelcoördinaten stellen de eerste en tweede rij bij veranderlijke a en b resp. puntenseries op de u - en de v -as voor. De derde rij geeft een puntenserie op een as midden tussen de u - en de v -as. Uit deze determinant volgt dus een nomogram met drie evenwijdige, op gelijke afstand van elkaar liggende, rechte schaaldragers.

Het nadeel van dit nomogram is echter, dat voor de waarde nul van a , b en c de punten in het oneindige verdwijnen, terwijl voor grotere waarden de punten dicht op elkaar komen te liggen.

Om hierin verbetering te brengen, vermenigvuldigen we de eerste, tweede en derde rij van de determinant resp. met a , b en c . Hierdoor krijgen we:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.3)$$

Invoering van moduli door de eerste kolom met μ_1 en de tweede met μ_2 te vermenigvuldigen, levert:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 a & 0 & 1 \\ 0 & \mu_2 b & 1 \\ \mu_1 c & \mu_2 c & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.4)$$

In Cartesiaanse coördinaten krijgen we dan als schaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_1 a & x_2 &= 0 & x_3 &= \mu_1 c \\ y_1 &= 0 & y_2 &= \mu_2 b & y_3 &= \mu_2 c \end{aligned} \quad (7.5)$$

Zetten we nu (x_1, y_1) op de x-as en (x_2, y_2) op y-as uit, dan moeten de waarden (x_3, y_3) liggen op een lijn door de oorsprong van het assenstelsel. Immers geldt voor c

$$c = \frac{x_3}{\mu_1} \quad \text{en} \quad c = \frac{y_3}{\mu_2} \quad (7.6)$$

zodat ook geldt

$$\frac{y_3}{x_3} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (7.7)$$

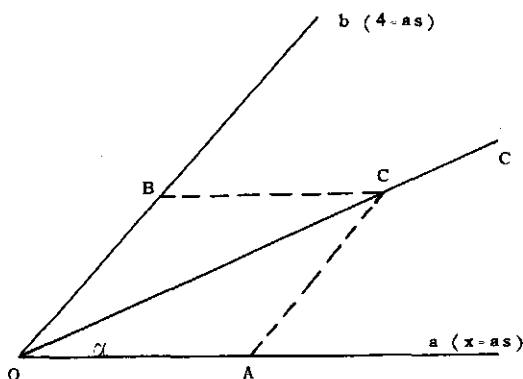


Fig. 25

Het nu verkregen nomogram is schematisch weergegeven in figuur 25. De a - en de b -schaal zijn beidelijneair. Verder blijkt dat, omdat $OB = AC$,

$$OC^2 =$$

$$OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos (180 - \alpha) \quad (7.8)$$

als α de hoek tussen de x - en de y -as is.

Voor 7.8 valt nu te schrijven;

$$OC^2 = \mu_1^2 c^2 + \mu_2^2 c^2 - 2\mu_1 \mu_2 c^2 \cos \alpha \quad (7.9)$$

$$OC = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1 \mu_2 \cos \alpha} \quad (7.10)$$

De vergelijking 7.10 is tevens de algemene vergelijking voor een nomogram met drie elkaar snijdende schalen.

Door de transformatie hebben we punten uit het oneindige in het oude nomogram in het punt O van het nieuwe nomogram gebracht. Meetkundig is niets anders gebeurd dan dat het oude nomogram is geprojecteerd op een vlak, dat het vlak door het oorspronkelijke nomogram snijdt en evenwijdig loopt aan het vlak door het projectiecentrum O en de nullijn van het oorspronkelijke nomogram.

4. Algemene vergelijkingen voor de transformatie

Voor ingewikkelder gevallen is het niet altijd mogelijk direct uit een eenvoudige verandering van de oorspronkelijke determinant de constructiedeterminant van het getransformeerde nomogram vast te stellen. Hiervoor moeten dus algemene regels worden opgesteld.

Worden de oorspronkelijke punten weergegeven in coördinaten x en y en de getransformeerde (geprojecteerde) punten in coördinaten x' en y' , dan kan het verband tussen deze coördinaten worden weergegeven door de algemene vergelijkingen.

$$x' = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} \quad (7.11)$$

$$y' = \frac{b_1 + c_1 x + c_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} \quad (7.12)$$

In deze vergelijkingen worden x' en y' uitgedrukt als gebroken lineaire vergelijkingen in x en y . Uit elk willekeurig punt P ontstaat een punt P' .

In de formules komen 3×3 coëfficiënten voor. Worden deze coördinaten nu zodanig gekozen dat de determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.13)$$

is het mogelijk om ook x en y uit te drukken als gebroken lineaire functies van x' en y' . Dit wil zeggen, dat de transformatie omkeerbaar is, omdat uit bekende x' en y' dan x en y volgen en omgekeerd.

Van een rechte lijn

$$Ax + By + C = 0 \quad (7.14)$$

luidt nu de getransformeerde formule

$$A'x' + B'y' + C' = 0 \quad (7.15)$$

waarin voor x' en y' de bovengenoemde vergelijkingen kunnen worden ingevuld. De dan ontstane vergelijking blijft van de eerste graad in x en y . Algemeen zal gelden dat een vergelijking van de n -de graad overgaat in een nieuwe vergelijking van de n -de graad. Door de projectie gaan dus rechte lijnen over in rechte lijnen, n^e -graads krommen in n^e -graads krommen enz.

Wil men uit de oorspronkelijke figuur de getransformeerde figuur vaststellen, dan moet de verhouding van een van de coëfficiënten a_1 , a_2 enz. tot de acht overige bekend zijn.

Om deze acht verhoudingen vast te stellen, moeten dus van 4 punten zowel x en y als x' en y' bekend zijn. Mogelijk is dat ook, wanneer van drie punten de coördinaten en beide stelsels bekend zijn, van een vierde punt, alleen x en x' (of y en y') en van een vijfde alleen y en y' (of x en x'). Willen de vergelijkingen onafhankelijk zijn, dan mogen van deze punten geen drie op een rechte lijn liggen.

Voor de bepaling van de transformatie moeten dus de oplossing gezocht worden van 8 vergelijkingen met 8 onbekenden.

Voor een getransformeerd nomogram moet blijven gelden, dat dat drie afleespunten op een rechte lijn liggen, dus

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & y_1^1 & 1 \\ x_2^1 & y_2^1 & 1 \\ x_3^1 & y_3^1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.16)$$

Invullen van de waarden voor x' en y' uit 7.11 en 7.12 in 7.16 een uitdrukking in x en y , n.l.

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3}{c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3} & \frac{b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3}{c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3} & 1 \\ \frac{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3}{c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3} & \frac{b_1 x_2 + b_2 y_2 + b_3}{c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3} & 1 \\ \frac{a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3}{c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3} & \frac{b_1 x_3 + b_2 y_3 + b_3}{c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.17)$$

Vermenigvuldiging van de rijen met de waarden in de noemers geeft

$$\begin{vmatrix} a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 & b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 & c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 & b_1 x_2 + b_2 y_2 + b_3 & c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 \\ a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 & b_1 x_3 + b_2 y_3 + b_3 & c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.18)$$

en voor deze determinant valt te schrijven

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.19)$$

De eerste determinant noemt men de *transformatiemodulus*. De constructiedeterminant van het getransformeerde nomogram kan dus verkregen worden door die van de oorspronkelijke determinant te vermenigvuldigen met de transformatiemodulus.

Deze moet bepaald worden uit de 8 vergelijkingen in a_1, a_2 enz. die zijn op te stellen uit de coördinaten van vier punten in elk stelsel.

5. Voorbeeld van transformatie met behulp van de algemene vergelijkingen

We wensen een nomogram voor de vergelijking:

$$a = \frac{b}{c} \sqrt{100 - c^2} \quad (7.20)$$

voor waarden van c tussen 5 en 10

van b tussen 1 en 5

van c tussen 1 en 10

Voor 7.20 kunnen we schrijven

$$c^2(a^2 + b^2) - 100 b^2 = 0 \quad (7.21)$$

of in determinantvorm

$$\begin{vmatrix} c^2 & 0 & 1 \\ 100 & -a^2 & 1 \\ 0 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.22)$$

Vermenigvuldiging van de eerste kolom met μ_1 , van de tweede met μ_2 levert:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 c^2 & 0 & 1 \\ 100 \mu_1 & -\mu_2 a^2 & 1 \\ 0 & \mu_2 b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.23)$$

De schaalverdelingen (in Cartesiaanse coördinaten) van het nomogram zijn dan:

$$x_1 = \mu_1 c^2 \quad x_2 = 100 \mu_1 \quad x_3 = 0 \quad (7.24)$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = -\mu_2 a^2 \quad y_3 = \mu_2 b^2$$

We nemen zowel voor μ_1 als voor μ_2 een modulus van 1 mm. Zetten wenu (x_1, y_1) en (x_3, y_3) af op resp. de x - en de y -as, dan komt de derde schaal (x_2, y_2) op een afstand van 100 mm

evenwijdig aan de y -as te lopen. Het nomogram krijgt dan de in bijlage IV aangegeven vorm. Alle drie de schalen hebben een kwadratische verdeling. De x -as (waarop de waarden van c zijn uitgezet) is schuin gelegd om ruimte te sparen.

Het nadeel van dit nomogram is, dat de b -schaal zeer kort is. Verder is de afleesnauwkeurigheid van de a -schaal voor kleine waarde gering. Omhierin verbetering te brengen zullen we trachten door projectieve transformatie de schaalafstanden wat gunstiger te verdelen.

Om te beginnen laten we de c -schaal (x -as) ongewijzigd. Het eerste deel van de a -schaal moet iets worden uitgerekt. Hiervoor stellen we, dat het punt $a = 5$ midden op de schaal komt te liggen. Het punt $a = 10$ komt weer op het eind van de schaal. Verder houdt de schaal dezelfde plaats en lengte.

We kiezen nu vier punten die zowel in het oude als in het nieuwe stelsel bekend zijn. Dit zijn:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & \text{wordt} \quad x_1^I = 0 \\ y_1 = 0 & y_1^I = 0 \end{array} \quad (\text{het punt } c = 0)$$

$$\begin{array}{ll} x_2 = 25 & x_2^I = 25 \\ y_2 = 0 & y_2^I = 0 \end{array} \quad (\text{het punt } c = 5)$$

$$\begin{array}{ll} x_3 = 100 & x_3^I = 100 \\ y_3 = 25 & y_3^I = -50 \end{array} \quad (\text{het punt } a = 5)$$

$$\begin{array}{ll} x_4 = 100 & x_4^I = 100 \\ y_4 = -100 & y_4^I = -100 \end{array} \quad (\text{het punt } a = 10)$$

Door deze vier punten is de transformatie volledig bekend. Invullen van de betreffende waarden in de vergelijkingen voor x' en y' levert immers

$$0 = \frac{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3}{c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3} \quad \text{of} \quad a_3 = 0 \quad (7.25)$$

$$0 = \frac{b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + b_3}{c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3} \quad \text{of} \quad b_3 = 0 \quad (7.26)$$

$$25 = \frac{a_1 \cdot 25 + a_2 \cdot 0}{c_1 \cdot 25 + c_2 \cdot 0 + c_3} \quad (7.27)$$

$$0 = \frac{b_1 \cdot 25 + b_2 \cdot 0}{c_1 \cdot 25 + c_2 \cdot 0 + c_3} \quad \text{of} \quad b_1 = 0 \quad (7.28)$$

$$100 = \frac{a_1 \cdot 100 - a_2 \cdot 25}{c_1 \cdot 100 - c_2 \cdot 25 + c_3} \quad (7.29)$$

$$-50 = \frac{-b_2 \cdot 25}{c_1 \cdot 100 - c_2 \cdot 25 + c_3} \quad (7.30)$$

$$100 = \frac{a_1 \cdot 100 - a_2 \cdot 100}{c_1 \cdot 100 - c_2 \cdot 100 + c_3} \quad (7.31)$$

$$-100 = \frac{-b_2 \cdot 100}{c_1 \cdot 100 - c_2 \cdot 100 + c_3} \quad (7.32)$$

Uit 7.30 en 7.32 volgt:

$$\begin{array}{rcl} 100 c_1 - 25 c_2 + c_3 & = & \frac{1}{2} b_2 \\ 100 c_1 - 100 c_2 + c_3 & = & b_2 \\ - & & \\ & -75 c_2 & = \frac{1}{2} b_2 \\ & c_2 & = -\frac{1}{150} b_2 \end{array}$$

Uit 7.29 en 7.31 volgt

$$\begin{array}{rcl} 400 c_1 - 100 c_2 + 4 c_3 & = & 4 a_1 - a_2 \\ - & & \\ 100 c_1 - 100 c_2 + c_3 & = & a_1 - a_2 \quad 4x \\ - & & \\ & -300 c_2 & = -3 a_2 \\ & c_2 & = -\frac{1}{100} a_2 \end{array}$$

Invullen van de waarde $b_2 = -\frac{3}{2} a_2$ in 7.30 geeft uit 7.29 en 7.30

$$\begin{array}{rcl} 400 c_1 - 100 c_2 + 4 c_3 & = & 4 a_1 - a_2 \\ 100 c_1 - 25 c_2 + c_3 & = & -1,5 a_2 \quad 4x \\ - & & \\ & 0 & = 4 a_1 + 2 a_2 \end{array}$$

$$a_2 = -2 a_1$$

Invullen van de waarde $b_2 = 3 a_1$ en $c_2 = 0,02 a_1$ in 7.32 levert uit 7.32 en 7.27

$$\begin{array}{rcl} 100 c_1 + c_3 & = & a_1 \\ 25 c_1 + c_3 & = & a_1 \\ \hline 75 c_1 & = & 0 \\ c_1 & = & 0 \end{array}$$

We hebben nu alle waarde uitgedrukt in a_1 .n.l.

$$a_1 = a_1 \quad b_1 = 0 \quad c_1 = 0$$

$$-a_2 = 2 a_1 \quad b_2 = 3 a_1 \quad -c_2 = 0,02 a_1 \quad (7.33)$$

$$a_3 = 0 \quad b_3 = 0 \quad c_3 = a_1$$

Stellen we $a_1 = 1$, dan wordt de transformatiemodulus.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -0,02 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7.34)$$

De constructiedeterminant van het getransformeerde nomogram wordt dan:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -0,02 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c^2 & 0 & 1 \\ 100 & -a^2 & 1 \\ 0 & b^2 & 1 \end{vmatrix} = \quad (7.35)$$

$$\begin{vmatrix} c^2 & 0 & 1 \\ 100 + 2 a^2 & -3 a^2 & 0,02 a^2 + 1 \\ -2 b^2 & 3 b^2 & 0,02 b^2 + 1 \end{vmatrix} = 0$$

of na deling door de waarden van de laatste kolom

$$\left| \begin{array}{ccc} c^2 & 0 & 1 \\ 100 & -3a^2 & 1 \\ & 0,02 a^2 + 1 & \\ \hline & -2b^2 & 3b^2 \\ 1 - 0,02b^2 & 1 - 0,02b^2 & 1 \end{array} \right| = 0 \quad (7.36)$$

Hieruit zijn de schaalvergelijkingen voor de a en de c -schaal gemakkelijk af te lezen. Uit de schaalvergelijkingen van de nieuwe b -schaal blijkt, dat

$$y_3^1 / x_3^1 = -\frac{3}{2} \text{ of } y_3^1 = -\frac{3}{2} x_3^1$$

De drager van de b -schaal gaat dus door het nulpunt van het assenstelsel.

De constructie van de waarden op de c -schaal levert nu wel enige moeilijkheden op door de schuine stand van de assen. Is de hoek tussen de x - en y -as β , dan blijkt uit figuur 26 door toepassing van de cosinusregel in de driehoek $A O B$

$$p^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cos \beta \quad (7.37)$$

In het getekende nomogram is $\cos \beta = 0,96$. Verder is $y = -\frac{3}{2}x$. Invullen van deze waarden geeft dan voor de lengte van p .

$$p = 0,61 x =$$

$$\frac{1,22b^2}{1 - 0,02b^2} \quad (7.38)$$

Hieruit kunnen de waarden van p eenvoudig worden berekend.

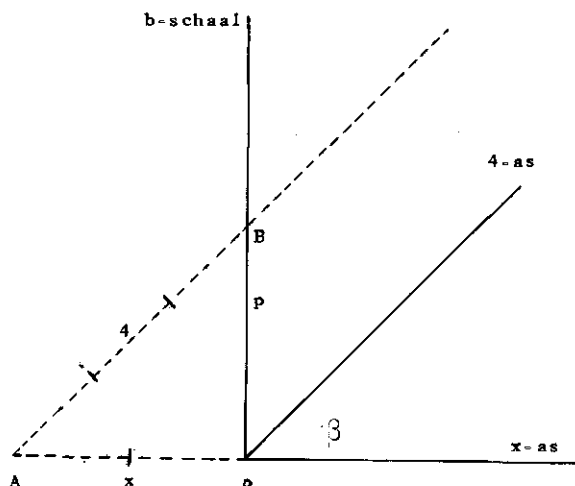


Fig. 26

6. Vereenvoudigde oplossing van de transformatie

Bij de in de vorige par. beschreven transformatie werd de plaats en lengte van de a -schaal onveranderd gelaten. Van de nieuwe a -schaal zijn drie punten bekend n.l.:

$$\begin{array}{lll} x = 100 & & x^I = 100 \\ y = 0 & \text{wordt} & y^I = 0 \quad (\text{het punt } a = 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x = 100 & & x^I = 100 \\ y = -25 & \text{wordt} & y^I = -50 \quad (\text{het punt } a = 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x = 100 & & x^I = 100 \\ y = -100 & \text{wordt} & y^I = -100 \quad (\text{het punt } a = 10) \end{array}$$

De nieuwe a -schaal is projectief verdeeld ten opzichte van de oude schaal. Het verband tussen de y -waarden van de oude en de getransformeerde schaal kan nu worden weergegeven door de algemene vergelijking.

$$y^I = \frac{ay + b}{cy + d} \quad (7.39)$$

Invullen van de drie bekende waarden van y en y^I levert dan resp.

$$0 = \frac{0 \cdot a + b}{0 \cdot c + d} \quad (y = 0, y^I = 0) \quad (7.40)$$

$$-50 = \frac{-25a + b}{-25c + d} \quad (y = -25, y^I = -50) \quad (7.41)$$

$$-100 = \frac{-100a + b}{-100c + d} \quad (y = -100, y^I = -100) \quad (7.42)$$

Uit 7.40 volgt $b = 0$. Uit 7.41 en 7.42 blijkt dat $c = -0,02$ en $a = 3d$. De algemene formule voor y^I gaat dus over in:

$$y^I = \frac{3d \cdot y}{-0,02d \cdot y + d} = \frac{3y}{-0,02y + 1} \quad (7.43)$$

Verder volgt uit de schaalvergelijking 7.24 dat $y = -a^2$ (modulus $\mu_2 = 1$) zodat y^I wordt

$$y^I = \frac{3a^2}{0,02a^2 + 1} \quad (7.44)$$

De schaalvergelijkingen voor c en a volgend uit 7.24 en 7.44 zijn dan resp.

$$\begin{aligned} x_1^1 &= c^2 & x_2^1 &= 100 \\ y_1^1 &= 0 & y_2^1 &= \frac{-3a^2}{0,02a^2 + 1} + 1 \end{aligned}$$

De schaalvergelijking van de getransformeerde b -schaal moet nu zodanig zijn, dat in de constructiedeterminant

$$\begin{vmatrix} c^2 & 0 & 1 \\ 100 & \frac{-3a^2}{0,02a^2 + 1} & 1 \\ P & Q & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.45)$$

P en Q zodanige waarden hebben dat deze determinant na ontwikkeling identiek is aan de oorspronkelijke vergelijking 7.21

Ontwikkeling van 7.45 naar de eerste kolom geeft

$$\begin{aligned} c^2 \left(\frac{-3a^2}{0,02a^2 + 1} - Q \right) + 100 Q + P \left(\frac{3a^2}{0,02a^2 + 1} \right) &= 0 \\ \text{of} \\ c^2 \left\{ -3a^2 - Q(0,02a^2 + 1) \right\} + 100 Q(0,02a^2 + 1) + 3Pa^2 &= 0 \\ \text{of} \\ -a^2 c^2 (3 + 0,02Q) - Qc^2 + 100 Q + a^2(3P + 2Q) &= 0 \end{aligned} \quad (7.46)$$

Daar 7.46 identiek moet zijn aan 7.21 moet gelden

$$\frac{-a^2 c^2 (3 + 0,02 Q)}{-a^2 c^2} \equiv \frac{-Qc^2}{-b^2 c^2} \equiv \frac{100 Q}{100 b^2} \quad (7.47)$$

als verder

$$a^2(3P + 2Q) \equiv 0 \quad (7.48)$$

Uit 7.48 volgt dat $P = -2/3 Q$ en uit 7.47

$$3 + 0,02 Q = \frac{Q}{b^2}$$

of

$$Q = \frac{3b^2}{1 - 0,02b^2} \quad (7.49)$$

zodat

$$P = \frac{-2b^2}{1 - 0,02b^2} \quad (7.50)$$

Voor de constructiedeterminant van het getransformeerde nomogram volgt dan uit 7.45, 7.49 en 7.50:

$$\begin{vmatrix} c^2 & 0 & 1 \\ 100 & \frac{-3a^2}{0,02a^2 + 1} & 1 \\ \frac{-2b^2}{1 - 0,02b^2} & \frac{3b^2}{1 - 0,02b^2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.36)$$

Deze determinant is dezelfde als die welke we gevonden hebben met behulp van de algemene vergelijkingen.

7. Overbrengen van twee rechte schalen op een kegelsnede

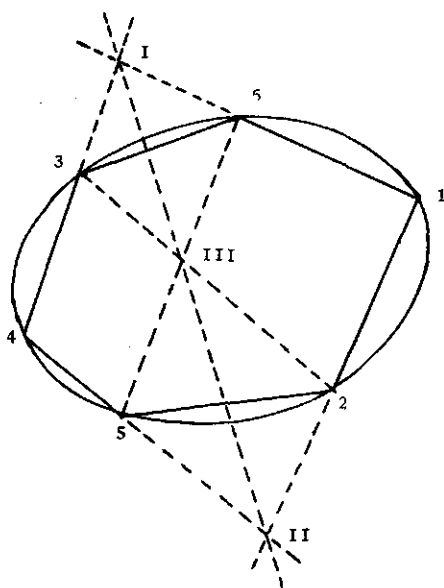


Fig. 27

Bij de in de vorige paragrafen besproken transformatie blijven de schalen recht. Een verbetering van de schaalafstanden kan echter ook worden verkregen door twee van de drie rechte schalen over te brengen op een kegelsnede. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de uit de projectieve transformatie bekende *stelling van Pascal*. Deze stelling zegt, dat 6 willekeurige punten op een kegelsnede, in een willekeurige volgorde

genome, een zeshoek vormen, van welke de snijpunten van de

overstaande zijden op een rechte lijn liggen.

In fig. 27 is dit gedemonstreerd. Van de getekende zeshoek 1, 2, 3, 4, 5, 6 in de ellips liggen de snijpunten van de overstaande zijden 3, 4 en 1, 6 (I) 4, 5 en 1, 2 (II) en 2, 3 en 5, 6 (III) op een rechte lijn.

We nemen nu het N -nomogram met u en v -as en AC als nullijn (met projectieve verdeling). De punten E , F en G zijn drie willekeurige bij elkaar horende waarden van het nomogram. (fig. 28)

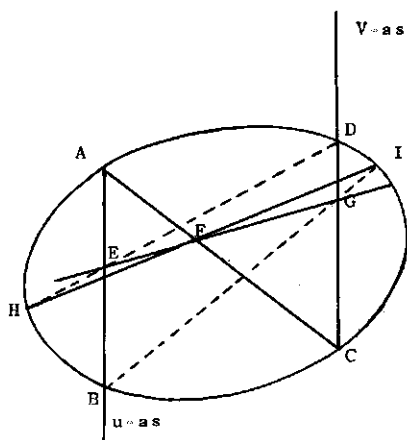


Fig. 28

We brengen nu door de punten A en C (uiteinden van de nullijn) een willekeurige kegels nede in dit geval een ellips. Deze ellips snijdt de dragers in B en D . We projecteren nu de waarden van de v -as vanuit punt B (snijpunt u -as met ellips) op de ellips. Voor het punt G wordt dit dus punt I op de ellips. De punten van de u -as worden vanuit punt D (snijpunt ellips en v -as) op de ellips geprojecteerd. Voor punt E wordt dit dus punt H .

De stelling van Pascal leert nu, dat in de zeshoek $ABIHDC$ de snijpunten van de overstaande zijden AB en HD (punt E), BI en CD (punt G) en IH en AC (punt F) op de rechte lijn EG liggen. Het punt F ligt nu en op deze lijn en op de lijn AC , zodat het tevens gelegen moet zijn op de overstaande zijde HI .

Projecteert men dus op de aangegeven wijze de punten van de u - en de v -as op de ellips, dan ziet men dat elke drie bij elkaar horende punten weer op een rechte lijn liggen.

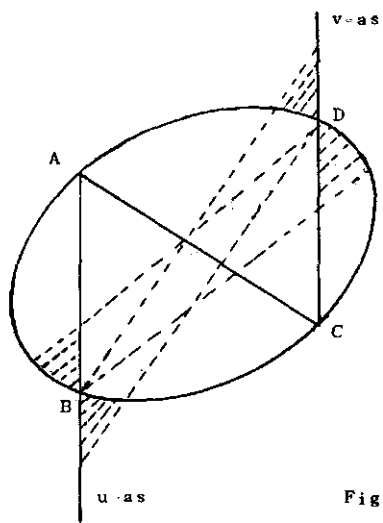


Fig. 29

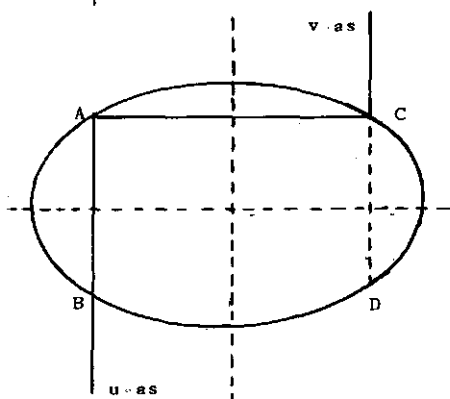


Fig. 30

De projectiemethode is schematisch weergegeven in fig. 29. Het is duidelijk, dat het oneindig verre punt van de v -as in de nieuwe figuur overeenkomt met het punt A. Het oneindig verre punt van de u -as zal samen vallen met punt C.

Door de keus van de ellips is een vergroting van de schaal mogelijk. Dit kan verklaard worden aan de hand van fig. 30, waarin de hoofdas van de ellips evenwijdig aan de (projectief verdeelde) nullijn is getrokken. Alle punten van de v -as komen nu op de korte boog AC, terwijl alle punten van de u -as komen op de lange boog ABD. Deze ligging zal dus moeten worden gekozen als de schaal van de u as vergroot moet worden weergegeven. Zouden daarentegen de schalen op de u -as en de v -as geen onderlinge verandering hoeven te ondergaan, dan zou de nullijn met de hoofdas van de ellips samen kunnen vallen. De u - en v -as zijn dan raaklijn aan de ellips en beide schalen krijgen na

projectie een even groot deel van de ellips.

In bepaalde gevallen kan direct uit de determinant een kegelsnedenomogram worden afgeleid. Nemen we b.v. de vergelijking.

$$(a + b) - a^2(b + c) - b^2(a - c) \quad (7.51)$$

Hiervoor kunnen we schrijven

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & -b & b^2 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.52)$$

optellen van de 1e kolom bij de 2de en deling van de eerste en tweede kolom door de derde verandert niets aan de waarde van de determinant, dus

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2 + 1} & \frac{a}{a^2 + 1} & 1 \\ \frac{1}{b^2 + 1} & \frac{b}{b^2 + 1} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{c}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.53)$$

Hieruit volgt voor de schaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a^2 + 1} & x_2 &= \frac{1}{b^2 + 1} & x_3 &= \frac{1}{2} \\ y_1 &= \frac{a}{a^2 + 1} & y_2 &= \frac{b}{b^2 + 1} & y_3 &= \frac{1}{2}c \end{aligned} \quad (7.54)$$

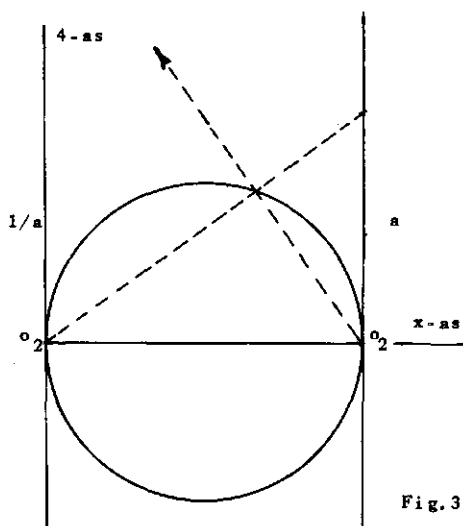
Uit de eerste vergelijking voor x_1 en y_1 volgt, dat (7.55)

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{(a^2 + 1)^2} + \frac{a^2}{(a^2 + 1)^2} = \frac{a^2 + 1}{(a^2 + 1)^2} = \frac{1}{a^2 + 1} = x$$

Deze vorm komt overeen met de algemene *topvergelijking van de cirkel*

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

Een zelfde vergelijking volgt uit de vergelijkingen voor x_2 en y_2 . Dit wil zeggen, dat de beide eerste schalen op een



zelfde cirkelomtrek kunnen worden afgebeeld. Deze cirkel raakt in de oorsprong van het assenstelsel aan de y-as en heeft de x-as tot middellijn. Nemen wenu de y-as als eerste drager en de x-as als nul-lijn en stellen we de middellijn van de cirkel als eenheid, dan is voor de tweede drager $x = 1$. verder volgt uit de eerste vergelijking $y_1 = ax_1$

Fig. 31

We kunnen dus de waarden a uitzetten op de tweede drager en deze vanuit O_1 op de cirkel projecteren. Ook zouden we op de eerste drager $\frac{1}{a}$ uit kunnen zetten en vanuit O_2 op de cirkel projecteren.

VIII. NORMAALVORMEN

1. Algemeen

We hebben gezien, dat van elke vergelijking die met drie onbekenden in de algemene vorm van een determinant

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.1)$$

of

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f(c) & g(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.2)$$

kan worden geschreven, een nomogram met collineaire afleespunten kan worden geconstrueerd. We zullen nu een overzicht geven van de mogelijkheden die bestaan wat betreft de typen van functies die zich laten afbeelden. Hiervoor zijn een aantal normaalvormen gegeven, welke in de volgende paragrafen worden besproken. Het aantal functies dat in deze normaalvormen voorkomt, noemt men de *orde* ervan. De laagste orde is drie. De nomogrammen zijn in 4 soorten ingedeeld.

In tabel 1 is een overzicht van de in dit hoofdstuk besproken typen van nomogrammen gegeven.

2. Nomogrammen met twee evenwijdige schalen

2.1 De derde schaal is een kromme

De algemene vergelijking luidt

$$f(a) \cdot g(c) + f(b) = f(c) \quad (8.3)$$

De determinant voor deze vergelijking kan worden geschreven als

$$\begin{vmatrix} -f(a) & 1 & 0 \\ -f(b) & 0 & 1 \\ -f(c) & g(c) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Door de tweede kolom bij de derde op de tellen, de rijen te delen door de waarden in de 3e rij en invoeren van moduli geeft

$$\begin{vmatrix} -\mu_1 f(a) & \mu_2 & 1 \\ -\mu_1 f(b) & 0 & 1 \\ -\frac{\mu_1 f(c)}{1+g(c)} & \frac{\mu_2 g(c)}{1+g(c)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.4)$$

Waaruit voor de schaalvergelijkingen volgt

$$\begin{aligned} x_1 &= -\mu_1 f(a) & x_2 &= -\mu_1 f(b) & x_3 &= -\frac{\mu_1 f(c)}{1+g(c)} \\ y_1 &= \mu_2 & y_2 &= 0 & y_3 &= \frac{\mu_2 g(c)}{1+g(c)} \end{aligned}$$

Worden de waarden (x_2, y_2) langs de x -as afgezet, dan komen de waarden (x_1, y_1) op een schaal evenwijdig aan de x -as op een afstand μ_2 .

Een bijzonder geval doet zich voor als er een betrekking van de 2e graad geldt tussen $f(c)$ en $g(c)$. Dan ligt de derde schaal op een cirkelboog.

2.2 De derde schaal is recht en snijdt de beide eerste schalen

De algemene vergelijking voor dit soort nomogram is

$$f(a) \cdot f(b) = f(c) \quad (8.5)$$

Hiertoe behoren functies als

$$f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) = 1 \quad (8.6)$$

$$f(a) \cdot g(c) + f(b) = 0 \quad (8.7)$$

die tot de algemene vorm zijn terug te brengen.

De constructiedeterminant voor de algemene vergelijking luidt (zie V.6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\mu_1 f(a) \\ \mu_2 f(b) & \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 & \mu_2 f(c) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.8)$$

Voor lijncoördinaten volgen hieruit de schaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} u & - \mu_1 f(a) = 0 \\ \mu_2 f(b) \cdot u & + \mu_1 v = 0 \\ v & + \mu_2 f(c) = 0 \end{aligned}$$

De eerste vergelijking geeft een puntenserie op de u -as, de derde een serie op de negatieve v -as (als μ_1 en μ_2 beide positief). De tweede vergelijking geeft een serie punten op de nullijn. De u - en v -schaal zijn hierbij lineair verdeeld.

Bij gebruik van Cartesiaanse coördinaten gaat men uit van de constructiedeterminant

$$\begin{vmatrix} -\mu_1 f(a) & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 f(b)} & 1 \\ 1 + \mu_2 f(c) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.9)$$

welke verkregen wordt door achtereenvolgens verwisseling van 1e en 3e kolom, optellen van 2e kolom bij derde en delen van de derde kolom op de beide eerste. Voor de schaalvergelijkingen krijgen we dan

$$\begin{aligned} x_1 &= -\mu_1 f(a) & x_2 &= 0 & x_3 &= 1 + \mu_2 f(c) \\ y_1 &= 0 & y_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 f(b)} & y_3 &= 1 \end{aligned}$$

Uitzetten van (x_1, y_1) langs de x -as, en (x_3, y_3) langs een lijn // de x -as op een afstand $= 1$, geeft voor (x_2, y_2) een schaal onder een bepaalde helling. Een voorbeeld van een dergelijk nomogram is gegeven in hoofdstuk VII.5

Door inplaats van de functies de logaritmen van deze functies op de schalen af te zetten, ontstaat een nomogram met drie evenwijdige schalen.

2.3 De derde schaal is evenwijdig aan de beide andere

De algemene vergelijking voor dit nomogram is

$$f(a) + f(b) = f(c) \quad (8.10)$$

waarvoor in determinantvorm kan worden geschreven

$$\begin{vmatrix} f(a) & 0 & 1 \\ f(b) & 1 & 0 \\ f(c) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.11)$$

Deling van de tweede en derde kolom door resp. μ_2 en μ_1 en vermenigvuldiging van de rijen met resp. μ_1 , μ_2 en $\mu_1 \mu_2$, dan de tweede kolom bij de derde optellen en delen van de eerste en tweede kolom door de derde geeft als constructiedeterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_1 f(a) & 0 & 1 \\ \mu_2 f(b) & 1 & 1 \\ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} f(c) & \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.12)$$

Voor de schaalvergelijkingen volgt hieruit

$$x_1 = \mu_2 f(a) \quad x_2 = \mu_2 f(b) \quad x_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} f(c)$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

Om een afstand $= d$ te krijgen tussen a -en b -schaal moet de tweede kolom van de determinant met d worden vermenigvuldigd (hetzelfde geldt voor de voorgaande paragraaf). Voor de meetkundige afleiding zie I.1 en V.5.

3. Nomogrammen met elkaar snijdende schalen

3.1 De derde schaal is gebogen

De algemene vergelijking voor dit nomogram is

$$\frac{1}{f(a)g(c)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)} \quad (8.13)$$

In determinantvorm is deze vergelijking te schrijven als

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{f(a)} \\ 0 & 1 & \frac{1}{f(b)} \\ \frac{1}{g(c)} & 1 & \frac{1}{f(c)} \end{vmatrix} = 0 \quad (8.14)$$

of na omwerken en invoeren van moduli

$$\begin{vmatrix} \mu_1 f(a) & 0 & 1 \\ 0 & \mu_2 f(b) & 1 \\ \mu_1 \frac{f(c)}{g(c)} & \mu_2 f(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.15)$$

De schaalvergelijkingen hiervoor zijn

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_1 f(a) & x_2 &= 0 & x_3 &= \mu_1 \frac{f(c)}{g(c)} \\ y_1 &= 0 & y_2 &= \mu_2 f(b) & y_3 &= \mu_2 f(c) \end{aligned}$$

Uitzetten van (x_1, y_1) op de x -as en (x_2, y_2) op de y -as geeft voor x_3, y_3 een gebogen lijn.

Een bijzonder geval doet zich voor, wanneer er tussen $f(c)$ en $g(c)$ een kwadratisch verband bestaat. De derde schaal ligt dan op een cirkelboog.

3.2 De derde schaal is recht en snijdt beide andere schalen

De algemene vergelijking voor dit geval luidt

$$\frac{1}{f(a)f(b)} + \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)} \quad (8.16)$$

De determinant is in dit geval

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{f(a)} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{f(b)} \\ \frac{1}{f(c)} & 1 & -\frac{1}{f(c)} \end{vmatrix} = 0 \quad (8.17)$$

Omwerken en invoeren van moduli geeft

$$\begin{vmatrix} \mu_1 f(a) & 0 & 1 \\ -\mu_2 f(b) & -\mu_2 f(b) & 1 \\ \mu_1 & -\mu_2 f(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.18)$$

Hiervoor gelden als schaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu_1 f(a) & x_2 &= -\mu_2 f(b) & x_3 &= \mu_1 \\ y_1 &= 0 & y_2 &= -\mu_2 f(b) & y_3 &= \mu_2 f(c) \end{aligned}$$

Uitzetten van (x_1, y_1) langs de x -as en (x_2, y_2) langs een rechte onder een hoek $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ geeft voor (x_3, y_3) een lijn // y -as op afstand μ_1

3.3 De drie schalen zijn recht en gaan door een punt

Dit is het geval voor de algemene vergelijking

$$\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)} \quad (8.19)$$

Voor deze vergelijking werd in VII.3 de volgende determinant afgeleid

$$\begin{vmatrix} \mu_1 f(a) & 0 & 1 \\ 0 & \mu_2 f(b) & 1 \\ \mu_1 f(c) & \mu_2 f(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.20)$$

met als schaalvergelijking

$$\begin{aligned} x_1 = \mu_1 f(a) & & x_2 = 0 & & x_3 = \mu_1 f(c) \\ y_1 = 0 & & y_2 = \mu_2 f(b) & & y_3 = \mu_2 f(c) \end{aligned}$$

4. Nomogrammen met gebogen schaaldragers

4.1 De derde schaal is een kromme schaal

Dit type nomogram ontstaat uit de algemene vergelijking

$$\frac{f(a) + f(b)}{g(a) + g(b)} = \frac{f(a) + f(c)}{g(a) + g(c)} \quad (8.21)$$

Voor deze vergelijking valt te schrijven

$$\begin{vmatrix} f(a) + f(b) & g(a) + g(b) \\ f(a) + f(c) & g(a) + g(c) \end{vmatrix} = 0$$

Randen van deze determinant met in de eerste kolom de waarden 1, 0, 0 en in de eerste rij 1, $f(a)$, $g(a)$, omwerken (1e rij van 2e en 3e rij aftrekken en 2e en 3e rij met -1 vermenigvuldigen en invoeren van moduli geeft

$$\begin{vmatrix} \mu_1 f(a) & \mu_2 g(a) & 1 \\ -\mu_1 f(b) & -\mu_2 g(b) & 1 \\ -\mu_1 f(c) & -\mu_2 g(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.22)$$

met schaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 = \mu_1 f(a) & & x_2 = -\mu_1 f(b) & & x_3 = -\mu_1 f(c) \\ y_1 = \mu_2 g(a) & & y_2 = -\mu_2 g(b) & & y_3 = -\mu_2 g(c) \end{aligned}$$

Over het algemeen zullen alle drie schalen gebogen zijn.

Het nomogram heeft een gemeenschappelijke drager voor a en b als

$$g(a) = F(f(b)) \quad (8.21a)$$

$$g(b) = F(f(b)) \quad (8.21b)$$

dus voor de algemene vorm

$$\frac{f(a) + f(b)}{F(f(a)) + F(f(b))} = \frac{f(a) + f(c)}{F(f(a)) + g(c)} \quad (8.23)$$

Hiermede is dus een kegelsnedenomogram verkregen. De normaalvorm is dan tot de derde orde teruggebracht.

Een voorbeeld voor een dergelijke nomogram vormt de algemene vergelijking (8.24)

$$f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) + \{f(a) + f(b)\} g(c) + h(c) = 0$$

Stellen we hierin

$$f(a) \cdot f(b) = \alpha \quad (8.25)$$

$$f(a) + f(b) = \beta \quad (8.26)$$

dan geeft de eliminatie van $f(b)$ uit 8.26 en invullen in 8.25

$$\alpha - \beta f(a) + f^2(a) = 0 \quad (8.27)$$

en eliminatie van $f(a)$ uit 8.26 en invullen in 8.25

$$\alpha - \beta f(b) + f^2(b) = 0 \quad (8.28)$$

Invullen van 8.25 in 8.24 geeft dan

$$\alpha f(c) + \beta g(c) + h(c) = 0 \quad (8.29)$$

zodat voor de determinant uit 8.27, 8.28 en 8.29 volgt

$$\begin{vmatrix} 1 & -f(a) & f^2(a) \\ 1 & -f(b) & f^2(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.30)$$

of

$$\begin{vmatrix} 1 & f(a) & f^2(a) + 1 \\ 1 & f(b) & f^2(b) + 1 \\ f(c) & -g(c) & h(c) + f(c) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.31)$$

of

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{f^2(a) + 1} & \frac{f(a)}{f^2(a) + 1} & 1 \\ \frac{1}{f^2(b) + 1} & \frac{f(b)}{f^2(b) + 1} & 1 \\ \frac{f(c)}{f(c) + h(c)} & \frac{g(c)}{f(c) + h(c)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.32)$$

waarvoor de schaalvergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{f^2(a) + 1} & x_2 &= \frac{1}{f^2(b) + 1} & x_3 &= \frac{f(c)}{f(c) + h(c)} \\ y_1 &= \frac{f(a)}{f^2(a) + 1} & y_2 &= \frac{f(b)}{f^2(b) + 1} & y_3 &= \frac{g(c)}{f(c) + h(c)} \end{aligned} \quad (8.33)$$

De schalen voor (x_1, y_1) en (x_2, y_2) komen op een cirkel te liggen, (zie VII.7), de schaal voor x_3, y_3 is gebogen.

4.2 De derde schaal is recht

Dit geval doet zich voor bij de algemene vergelijking

$$\frac{f(a) + f(b)}{g(a) + g(b)} = f(c) \quad (8.34)$$

In determinantvorm schrijven als

$$\begin{vmatrix} f(a) + f(b) & g(a) + g(b) \\ f(c) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

en randen door in de eerste kolom 1, 0, 0 en in de eerste rij 1, $f(a)$, $f(b)$ ontstaat na omwerking (1e rij van 2e aftrekken)

$$\begin{vmatrix} 1 & f(a) & g(a) \\ -1 & f(b) & g(b) \\ 0 & f(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.35)$$

Verder omwerken en invoeren van moduli geeft

$$\begin{vmatrix} \frac{\mu_1}{g(a)} & \mu_2 \frac{f(a)}{g(a)} & 1 \\ \frac{-\mu_1}{g(b)} & \mu_2 \frac{f(b)}{g(b)} & 1 \\ 0 & \mu_2 f(c) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.36)$$

Hieruit volgen de schaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu_1}{g(a)} & x_2 &= -\frac{\mu_1}{g(b)} & x_3 &= 0 \\ y_1 &= \mu_2 \frac{f(a)}{g(a)} & y_2 &= \mu_2 \frac{f(b)}{g(b)} & y_3 &= \mu_2 f(c) \end{aligned}$$

De beide eerste schalen zijn nu in het algemeen gebogen, de derde is recht.

Het nomogram krijgt weer een gemeenschappelijke drager voor $f(a)$ en $f(b)$ als

$$g(a) = F(f(a)) \quad (8.34a)$$

$$g(b) = F(f(b)) \quad (8.34b)$$

dus voor de algemene vorm van de derde orde

$$\frac{f(a) + f(b)}{F(f(a)) + F(f(b))} = f(c) \quad (8.37)$$

Een algemene vorm van dit geval is

$$f(a) + f(b) + f(c) = f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \quad (8.38)$$

waarvoor als determinant geldt

$$\begin{vmatrix} 1 & -f(a) & f^2(a) \\ 2 & -f(b) & f^2(b) \\ -f(c) & 1 & f(c) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.39)$$

Omvormen als in de vorige par. geeft als uiteindelijke determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{f^2(a) + 1} & \frac{f(a)}{f^2(a) + 1} & 1 \\ \frac{1}{f^2(b) + 1} & \frac{f(b)}{f^2(b) + 1} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2f(c)} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.39)$$

5. Kegelsnedenomogrammen

Kegelsnedenomogrammen worden voorgesteld door de algemene vergelijking

$$f(a) \cdot f(b) - \{f(a) + f(b)\} f(c) + g(c) = 0 \quad (8.40)$$

Stellen we hierin

$$f(a) \cdot f(b) = \alpha \quad (8.41)$$

$$f(a) + f(b) = \beta \quad (8.42)$$

dan geeft eliminatie van resp. $f(b)$ uit 8.42 en invullen in 8.41

$$\alpha - \beta f(a) - f^2(a) = 0 \quad (8.43)$$

Evenzo geeft eliminatie van $f(a)$

$$\alpha - \beta f(b) - f^2(b) = 0 \quad (8.44)$$

Invullen van 8.41 en 8.42 geeft

$$\alpha - \beta f(c) + g(c) = 0 \quad (8.45)$$

zodat voor de determinant uit 8.43, 8.44 en 8.45 volgt

$$\begin{vmatrix} 1 & -f(a) & f^2(a) \\ 1 & -f(b) & f^2(b) \\ 1 & -f(c) & g(c) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.46)$$

welke determinant kan worden omgewerkt tot

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{f^2(a) + 1} & \frac{f(a)}{f^2(a) + 1} & 1 \\ \frac{1}{f^2(b) + 1} & \frac{f(b)}{f^2(b) + 1} & 1 \\ \frac{1}{g(c) + 1} & \frac{f(c)}{g(c) + 1} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.47)$$

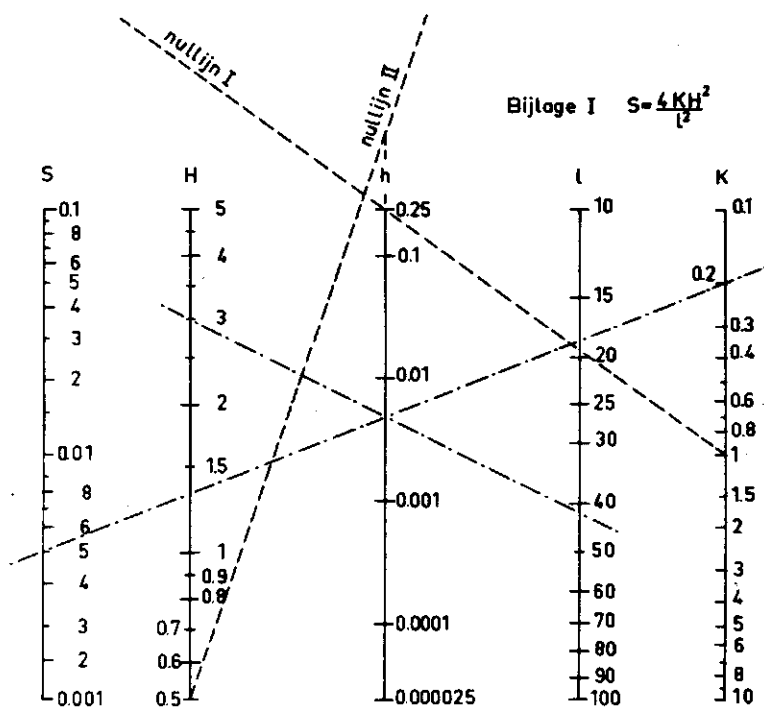
Evenals de in par.4 genoemde gevallen komen nu (x_1, y_1) en (x_2, y_2) op een kegelsnede te liggen. Over het algemeen zal de derde schaal gebogen zijn. Deze schaal wordt recht wanneer, voor $g(c)$ geldt

$$g(c) = A f(c) + B \quad (8.49)$$

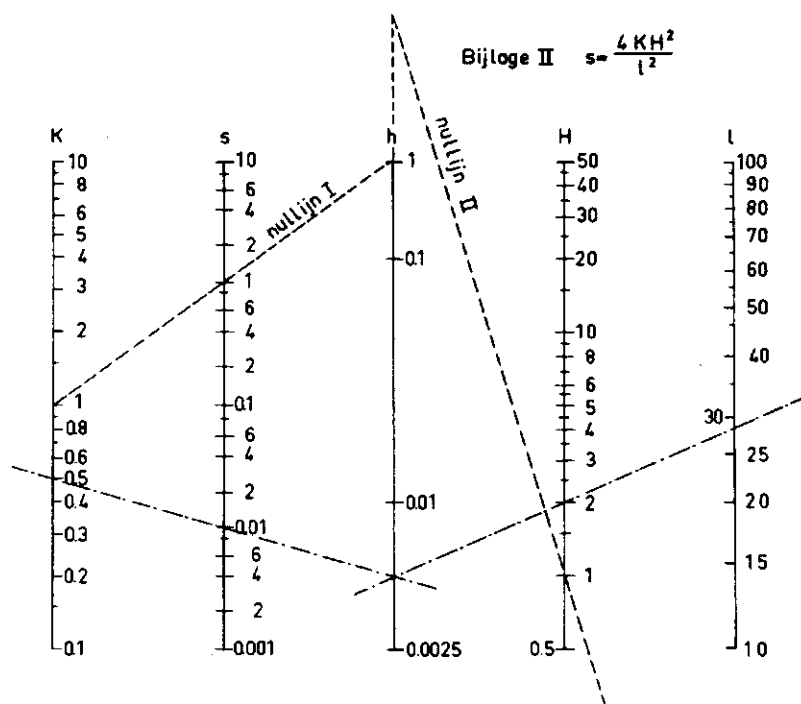
waarin A en B constanten zijn.

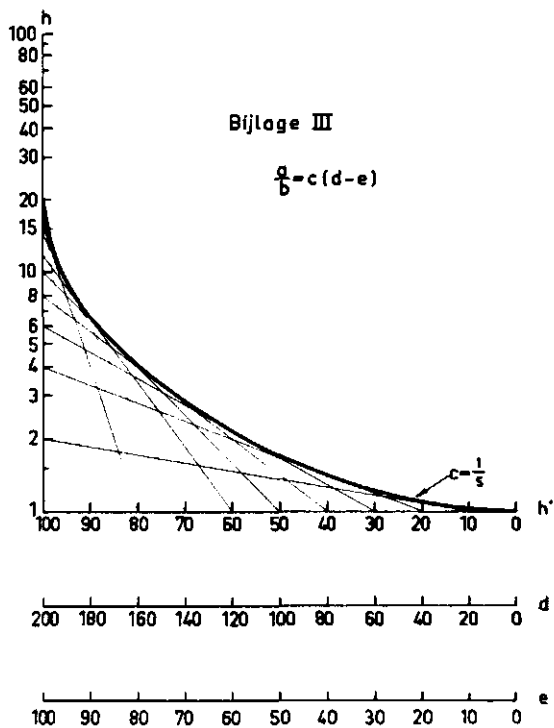
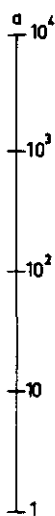
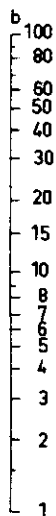
Normaalkvorm	Type nomogram
1) $f(a) + f(b) = f(c)$	drie evenwijdige schalen
2) $f(a) + f(b) = f(c)$ $f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) = 1$	twee evenwijdige en 1 snij- dende schaaldrager of drie evenwijdige dragers met log. verdeling
3) $f(a) \cdot g(c) + f(b) = 0$	twee evenwijdige + 1 kromme drager
4) $f(a) + f(b) + f(c) = f(a) \cdot f(b) \cdot f(c)$	schalen a en b op gemeen- schappelijke kegelsnede, schaal c recht.
5) $\frac{1}{f(a)f(c)} + \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)}$	de schalen a en b recht en elkaar snijdend, schaal c is recht en snijdt beide andere schalen
6) $\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)}$	drie elkaar in een punt snijdende schalen
7) $f(a) \cdot g(c) + f(b) = f(c)$	twee evenwijdige + 1 kromme drager
8) $\frac{1}{f(a)g(c)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)}$	schalen a en b elkaar snij- dend, schaal c gebogen, in- dien kwadratisch verband tussen $f(c)$ en $g(c)$, anders- de schaal op cirkelboog
9) $f(a)f(b) - \{f(a)+f(b)\}f(c) + g(c) = 0$	schalen a en b op kegelsnede Derde schaal recht als li- neair verband tussen $f(c)$ en $g(c)$ bestaat
10) $f(a)f(b)f(c) + \{f(a)+f(b)\}g(c) + h(c) = 0$	als nr. 9
11) $\frac{f(a) + f(b)}{g(a) + g(b)} = f(c)$	3 kromme schalen. Schalen a en b op kegelsnede, als $g(a)$ en $g(b)$ zelfde func- tie van $f(a)$ en $f(b)$ zijn
12) $\frac{f(a)+f(b)}{g(a)+g(b)} = \frac{f(a)+f(c)}{g(a)+g(c)}$	als nr. 11

Bijlage I $S = \frac{4KH^2}{l^2}$



Bijlage II $s = \frac{4KH^2}{l^2}$





Bijlage IV $a = \frac{b}{c} \sqrt{100 - c^2}$

