H.J.J. Stolwijk

AGGREGATIE VAN PRODUKTEN EN PRIJZEN T.B.V. HET MARKTONDERZOEK IN DE TUINBOUW

Interne nota No. 216

L5
216 A

LANDBOUW-ECONOMISCH INSTITUUT
DEN HAAG
16 NOV. 1976
BIBLIOTHEEK

Juni / Juli 1976

Landbouw-Economisch Instituut - Afdeling Tuinbouw.

217796

INHOUD

			Blz.
1.	INLEIDING		5
2.	BESPREKING VAN EEN AANTAL BELANGRIJKE INDEXERINGS-METHODEN EN DE EISEN DIE ERAAN GESTELD KUNNEN WORDEN		6
	2 . 1	Indeling	6
	2 . 2	Vaste basis	6
	2.2.1	Paasche en Laspeyres indexcijfers en de afleidingen daarvan	6
	2.2.2	De indexcijfers van Törnqvist	9
	2 . 3	De totale periode als basis gebruikt	12
	2.3.1	B.L. indexcijfers	12
	2.3.2	De indexcijfers voorgesteld door Hamming	14
	2 . 4	Een opschuivende periode als basis gebruikt	16
	2.4.1	Een éénjarig opschuivende basis	16
	2.4.2	Een meerjarig opschuivende basis	21
	2 . 5	Eisen die aan indexcijfers kunnen worden gesteld	23
3.	NUMERIEKE ILLUSTRATIE EN KEUZE VAN EEN INDEXERINGS-METHODE VOOR DE TUINBOUW		30
	3 . 1	Inleiding	30
	3 . 2	Numerieke illustratie	30
	3.2.1	Bespreking van de resultaten	30
	3 . 3	Keuze van een 'beste' indexcijfer	39
	3 . 4	Regressie-analyse met prijsindexcijfers als verklaarde en hoeveelheidsindexcijfer als belangrijkste verklarende variabele.	40
LITERATUURLIJST			43

HOOFDSTUK I

INLEIDING

Sedert 1973 wordt door de afdeling Tuinbouw van het LEI jaarlijks een vademecum voor de tuinbouw uitgegeven. De in dit vademecum verstrekte informatie heeft voor een belangrijk gedeelte betrekking op de ontwikkeling van prijzen en hoeveelheden van individuele gewassen. Behalve echter aan informatie over de prijs- en hoeveelheidsontwikkeling van individuele gewassen, bestaat er ook behoefte aan dergelijke informatie over groepen van verwante gewassen. Door middel van samenvattende cijfers zouden prijs- en hoeveelheidsontwikkelingen van onderscheiden produktgroepen moeten worden weergegeven. Zulke samenvattende cijfers worden in de literatuur samengestelde indexcijfers genoemd. Op de problematiek die samenhangt met de constructie van dergelijke cijfers wordt in dit rapport ingegaan. Gaat het hierbij in zijn algemeenheid om het vergelijken van prijs- en hoeveelheidssituaties naar plaats of in de tijd, hier wordt beperkt tot vergelijking in de tijd. In de meeste gevallen maakt dit echter niets uit.

Het onderzoek zal zijn gericht op de praktische toepassing van indexering in de tuinbouw. Het meeste bezit echter een algemenere geldigheid.

De opbouw van dit rapport is als volgt :
Na deze inleiding (hoofdstuk I) worden in hoofdstuk II, dat qua omvang en inhoud het belangrijkste is, een aantal belangrijke methoden van indexeren besproken en becommentarieerd. Veel aandacht wordt besteed aan de belangrijkheid van de basiskeuze. Ook worden in dit hoofdstuk verschillende in de literatuur voorkomende eisen behandeld die aan een indexcijfer kunnen worden gesteld.

In hoofdstuk III wordt een numerieke illustratie gegeven van de besproken methoden. De prijzen en hoeveelheden van sla, komkommers en tomaten in de maand april van de jaren 1960-1974 dienen hierbij als uitgangsmateriaal. Na bespreking van de resultaten en op basis van hoofdstuk II wordt vervolgens een 'beste' indexeringsmethode gekozen die voor gebruik in de praktijk wordt geadviseerd.

Tenslotte wordt in dit hoofdstuk door middel van een regressieanalyse de hoogte van het prijsindexcijfer 'verklaard' uit het hoeveelheidsindexcijfer en enige andere belangrijke verklarende variabelen. De resultaten van deze regressieanalyse worden vergeleken met de resultaten van een regressieanalyse toegepast op de produkten afzonderlijk.

HOOFDSTUK II

BESPREKING VAN EEN AANTAL BELANGRIJKE INDEXERINGSMETHODEN EN DE EISEN DIE ER AAN KUNNEN WORDEN GESTELD

2.1 Indeling

Om een systematische bespreking van indexeringsmethoden te vergemakkelijken, is een indeling naar een karakteristieke eigenschap wenselijk.

Zo'n indeling kan op verschillende wijzen geschieden. Bijvoorbeeld zou een indeling kunnen worden gemaakt met de mate van toepassing in de praktijk als criterium ter onderscheiding. De formules van Laspeyres en Paasche bijv. worden veelvuldig in de praktijk toegepast; dit in tegenstelling tot bijv. de best lineair methode van Theil.

Een ander criterium ter onderscheiding zou kunnen zijn de hoeveelheid inspanning benodigd om tot een numeriek resultaat te komen. De berekening van een Laspeyres-indexcijfer kost heel wat minder energie, dan het indexcijfer berekend met de formule van Hamming. Voor deze laatste is reeds bij een beperkte hoeveelheid goederen en prijzen een rekenautomaat onontbeerlijk.

In dit hoofdstuk wordt een indeling gemaakt naar basisperiode. Onder basisperiode wordt in dit verband verstaan de periode waarmee de lopende periode wordt vergeleken en waaraan in sommige gevallen de prijzen resp. de hoeveelheden worden ontleend waarmee wordt gewogen bij de berekening van een hoeveelheids- resp. prijsindexcijfer.

De motivatie voor dit criterium voor de indeling is de belangrijkheid van de basiskeuze bij een berekening van een indexcijfer, hetgeen in de rest van dit hoofdstuk zal worden verduidelijkt.

De basisperiode kan zijn een vast jaar (of maand of aantal jaren), er wordt dan van een vaste basis gesproken. Ook kan de basis jaarlijks een periode opschuiven : een zogenaamde kettingindexreeks ontstaat dan. Tenslotte kan ook ieder jaar de totale periode als basis dienen.

2.2 Vaste basis

2.2.1 Paasche en Laspeyres indexcijfers en de afleidingen daarvan

De grootste bekendheid genieten wel de Laspeyres en Paasche indices.
Stel dat we m goederen onderscheiden waarvan er in jaar t hoeveelheden q_{ti} tegen prijzen p_{ti} worden verhandeld ($t = 0,1 - - j$; $i = 1,2 - - m$)
De Laspeyres prijs- en hoeveelheidsindexcijfers luiden dan :

$$P^L = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ti}\, Q_{oi}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}\, Q_{oi}} \qquad Q^L = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}\, Q_{ti}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}\, Q_{oi}}$$

$$(t = 0,1 - - j)$$

of in matrix notatie :

$$P^L = \frac{P_t^L\, Q_o}{P_o^1\, Q_o} \qquad Q^L = \frac{P_o^1\, Q_t}{P_o^1\, Q_o} \qquad (t = 0,1 - - j)$$

$$\text{met } P_t = \begin{bmatrix} P_{t1} \\ P_{t2} \\ \vdots \\ P_{tm} \end{bmatrix} \quad \text{en } Q_t = \begin{bmatrix} Q_{t1} \\ Q_{t2} \\ \vdots \\ Q_{tm} \end{bmatrix}$$

De prijzen resp. hoeveelheden worden iedere lopende periode vergeleken met de prijzen resp. hoeveelheden van de basis situatie. De hoeveelheden resp. de prijzen in het basisjaar dienen hierbij als wegingsfactoren. Een andere mogelijkheid is de hoeveelheden resp. de prijzen van het lopende jaar als wegingsfactoren te gebruiken. Dit leidt dan tot de zogenaamde Paasche prijs resp. hoeveelheidsindexreeks.

$$P^p = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ti} Q_{ti}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi} Q_{ti}} = \frac{P_t^1 Q_t}{P_o^1 Q_t} \qquad Q^p = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ti} Q_{ti}}{\sum_{i=1}^{m} P_{ti} Q_{oi}} = \frac{P_t^1 Q_t}{P_t^1 Q_o}$$

$$(t = 0, 1 - - j)$$

In plaats van jaar nul als basisjaar te nemen, kan natuurlijk ieder ander willekeurig jaar als basis dienen. Het beste kan als basisjaar een jaar worden gekozen dat qua prijzen en hoeveelheden in de betreffende periode als enigszins representatief kan worden beschouwd. Wordt een uitzonderlijk jaar als basis genomen dan leidt dit tot onrealistische resultaten. Aan de hand van een klein voorbeeld met enigszins extreme getallen wordt dit toegelicht.

Stel twee goederen A en B, twee perioden 0 en 1.

prijzenmatrix

periode \ goed	A	B
0	1	25
1	25	1

hoeveelheidenmatrix

periode \ goed	A	B
0	25	1
1	1	25

$$Q^L = \frac{626}{50} = 12,52 \qquad Q^p = \frac{50}{626} = 0,08$$

$$P^L = \frac{626}{50} = 12,52 \qquad P^p = \frac{50}{626} = 0,08$$

De verschillen tussen de berekende indexcijfers zijn zo groot dat het resultaat als zinloos kan worden beschouwd. Dit wordt veroorzaakt doordat de prijs- en hoeveelheidsverhoudingen in periode één ten opzichte van die van periode nul zo sterk zijn veranderd dat weging van de prijzen en hoeveelheden van de ene periode met de hoeveelheden en prijzen van de andere periode bepaald niet kan worden beschouwd als 'rekening houdend met de relatieve belangrijkheid van een prijs of een goed', doch in feite willekeurig en dus onzinnig is. Stel nu dat de prijzen en hoeveelheden in de periode 2,3 ----- etc.

rond de waarden van die van periode één schommelen. In dat geval zal indexering met $t = 1$ als basis tot aanzienlijk betere resultaten leiden dan indexering met periode nul als basis. Ten alle tijden echter zal het gebruik van een Paasche en een Laspeyres indexcijfer tot een systematische schattingsfout leiden. Dit als gevolg van substitutie-effecten waardoor de relatieve belangrijkheid van een goed en een prijs veranderen. Wordt uitgegaan van de situatie zoals deze zich voordoet in de tuinbouw, waar het aanbod op de korte termijn gegeven is en een negatieve samenhang vertoont met de prijs, dan kan dit als volgt algebraïsch worden aangetoond :

Definieer : d_i = relatieve prijsverandering van goed i in jaar 1 t.o.v. jaar o

e_i = relatieve hoeveelheidsverandering van goed i in jaar 1 to.v. jaar o

w_{oi} = waarde aandeel van goed i in totale waarde van het goederenpakket in jaar o.

dus $d_i = \frac{P_{1i}}{P_{oi}} - 1$, $e_i = \frac{Q_{1i}}{Q_{oi}} - 1$ en $w_{oi} = \frac{P_{oi} \; Q_{oi}}{\sum P_{oj} \; Q_{oj}}$

De gewogen gemiddelde prijs- en hoeveelheidsverandering is dan :

$$\sum w_{oi} \, d_i = P^L - 1 \qquad \text{en} \sum w_{oi} \, e_i = Q^L - 1$$

Een gewogen covariantie van de prijs- en hoeveelheidsveranderingen van de individuele goederen kan nu als volgt worden gedefinieerd :

$$C = \sum_i w_{oi}(d_i - \sum_j w_{oj} d_j) \; (e_i - \sum_j w_{oj} \, e_j) =$$

$$= \sum_i w_{oi} d_i e_i - \sum_i w_{oi} d_i \sum_j w_{oj} e_j - \sum_i w_{oi} \sum_j w_{oj} d_j e_i + \sum_i w_{oi} \sum_j w_{oj} d_j \sum_j w_{oj} e_j$$

$$= \sum_i w_{oi} \left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}} - 1 \right) \left(\frac{Q_{1i}}{Q_{oi}} - 1 \right) - (P^L - 1) \; (Q^L - 1) - (Q^L - 1) \; (P^L - 1) + (P^L - 1) \; (Q^L - 1)$$

$$= V - P^L - Q^L + 1 - Q^L P^L + Q^L + P^L - 1$$

$$= V - Q^L P^L$$

$$= P^L (Q^p - Q^L) = Q^L (P^p - P^L)$$

Wordt nu van de veronderstelling uitgegaan dat indien de hoeveelheid van een goed met meer dan het gemiddelde toeneemt, de prijs met meer dan het gemiddelde af zal nemen, dan zal het teken van de gewogen covariantie negatief zijn.

Voor de laatste uitdrukking betekent dit dat $Q^p < Q^L$ en $P^p < P^L$. Met andere woorden zowel het hoeveelheids- als het prijsindexcijfer van Paasche zullen in het algemeen lagere uitkomsten geven dan de corresponderende indexcijfers van Laspeyres.

Echter doordat de prijs- en hoeveelheidselasticiteiten van individuele produkten sterk kunnen verschillen terwijl er bovendien ongelijke verschuivingen van de vraag- en aanbodscurves op kunnen treden, zal in de praktijk niet altijd aan de eerder genoemde veronderstelling worden voldaan. In plaats van de ongelijkheden $P^p < P^L$ en $Q^p < Q^L$ zullen daarom ook wel eens de ongelijkheden $P^L < P^p$ en $Q^L < Q^p$ optreden.

Een voorkeur om aan het Paasche dan wel aan het Laspeyres indexcijfer meer waarde te hechten is er niet. Omdat bij gebruik van het Laspeyres indexcijfer alleen de prijzen of de hoeveelheden van het lopende jaar hoeven te worden bepaald terwijl bij gebruik van een Paasche indexcijfer de prijzen en de hoeveelheden van het lopende jaar moeten worden bepaald, wordt de eerste in de praktijk meer gebruikt dan de laatste. In de tuinbouw, waar prijs- en hoeveelheidsinformatie beide gelijktijdig ter beschikking komen is dit punt van weinig belang.

Een compromis tussen het Paasche en het Laspeyres indexcijfer is voorgesteld door Drobisch (1871). Hij stelde voor het rekenkundig gemiddelde te nemen.

$$P^D = 1/2\ (P^P + P^L) \qquad \text{en} \qquad Q^P = 1/2\ (Q^P + Q^L)$$

Ook kan het meetkundig gemiddelde worden genomen.

$$P^F = \sqrt{P^P P^L} \qquad \text{en} \qquad Q^F = \sqrt{Q^P Q^L}$$

Deze staan bekend als resp. het prijs- en hoeveelheidsindexcijfer van Fisher (1922), die ze aanprijst als de 'ideal index numbers'. Ze worden echter reeds bij Sidgwich (1883) aangetroffen. Van de paren P^D, Q^D en P^F, Q^F kan niet meer worden gezegd dat ze systematisch over- dan wel onderschatten.

2.2.2 De indexcijfers van Törnqvist

A. Economische achtergrond van het indexcijferprobleem

Samuelson en Swamy (1974) onderscheiden historisch gezien, drie benaderingen ten aanzien van de indexeringstheorie :

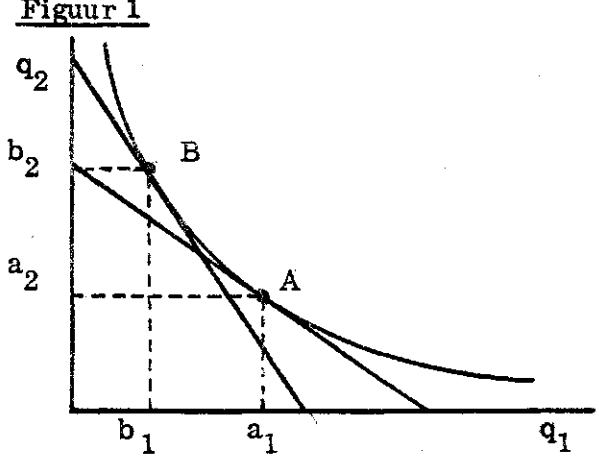
1. In de tweede helft van de vorige eeuw vatte men de constructie van een indexcijfer op als het zoeken naar een maat voor de centrale tendentie van een universum van prijs- of hoeveelheidsveranderingen.
2. In een later stadium hield men zich vooral bezig met het opstellen van criteria waaraan indexcijfers moesten voldoen. Getoetst werd o.a. of de indexeringsformules afwijkingen naar boven of naar beneden in de uitkomsten gaven. Wat echter afwijking nul was, werd nooit geformuleerd.

   In deze twee perioden werd het indexeringsprobleem dus beschrijvend-statistisch benaderd.
3. In het derde stadium keert de aandacht terug naar de economische theorie waar ze in de 18e eeuw oorspronkelijk ook vandaan komt

   Omdat de motivatie voor het gebruik van Törnqvistindices vooral voorkomt uit deze economische benadering, worden in deze paragraaf beknopt de belangrijkste punten uit de economische theorie hierover behandeld.

A 1 De economisch 'ware' prijsindex

Figuur 1



U(q)	= nutsfunctie	a.
A	= evenwicht in jaar o	
B	= evenwicht in jaar 1	
Y = p'q	= uitgavenfunctie	b.

Uit a. en b. volgt : $y = \bar{y}\ (U, p)$

Ofwel in woorden $\bar{y}\ (U, p)$ is het inkomen benodigd om bij prijzen p het nutsniveau U te bereiken.

Wordt nu het nutsniveau U als vast beschouwd en beschouwen we verder een basissituatie met prijzen p en een lopende situatie met prijzen P_1, dan kan het theoretisch juiste prijsindexcijfer als volgt worden gedefinieerd :

$$P^{th}(p_o, p_1, U) = \frac{\bar{y}(U, P_1)}{\bar{y}(U, P_o)}$$ ofwel in woorden :

De theoretisch juiste (of economische) prijsindex is de verhouding tussen de minimumkosten benodigd om een gegeven nutsniveau te bereiken in twee prijssituaties. Passen we deze definitie toe op figuur 1 dan is de theoretisch juiste prijsindex dus :

$$P^{th} = \frac{b_1 p_{11} + b_2 p_{12}}{a_1 p_{o1} + a_2 p_{o2}}$$

(A en B op hetzelfde nutsniveau
P_{ij} = prijs goed j op tijdstip i)

Een nutsfunctie is in de praktijk voor een consument grafisch noch algebraïsch weer te geven. Bovendien heeft iedere consument een andere nutsfunctie die tengevolge van smaak- en modeinvloeden aan een voortdurende verandering onderhevig is.

Het is daarom onmogelijk een algebraïsche formule te construeren die het prijsindexcijfer op volsterkt juiste wijze, (dit is : in overeenstemming met het economische prijsindexcijfer), uitdrukt.

In figuur 1 is af te lezen dat de enige mogelijkheid om P^{th} te bepalen zonder kennis van de nutsfunctie zou zijn als de punten A en B samenvallen. De juiste prijsindex is dan het quotiënt van de inkomens in de situaties A en B. Het samenvallen van de punten A en B betekent echter dat de (onbekende) nutsfunctie in de loop der tijd niet is veranderd en verder dat de prijsverhoudingen dezelfde zijn gebleven. Dit laatste betekent dan weer dat de technische vooruitgang voor alle goederen gelijk is geweest en dat de inkomenselasticiteiten van alle goederen één bedraagt. Aan deze voorwaarde wordt in de praktijk niet voldaan. Daarom ook zijn alleen benaderingen van P^{th} mogelijk.

A 2 De economische 'ware' hoeveelheidsindex

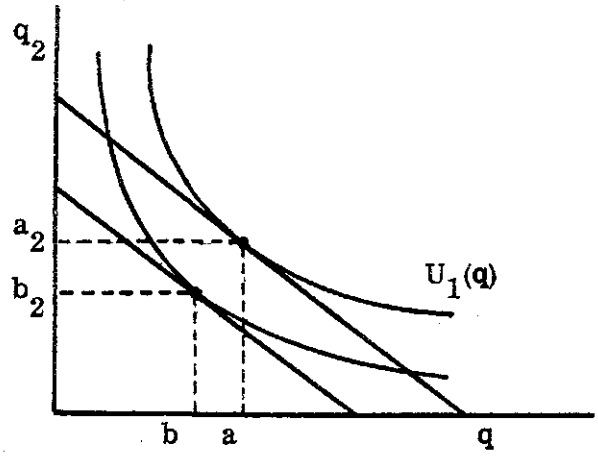
Beschouwen we wederom de functie $\bar{y}(U,p)$ ofwel het minimuminkomen benodigd om bij prijzen p nutsniveai U te bereiken. We gaan nu echter van een andere situatie uit. De vergelijking geschiedt wel weer tussen periode o en periode 1 (resp. basis- en lopende periode) maar nu echter wordt de prijsvector in de twee perioden gelijk gehouden en worden de nutsniveaus verschillend verondersteld.

Het theoretisch juiste hoeveelheidsindexcijfer wordt nu gedefinieerd als :

$$Q^{th}(U_o, U_1, p) = \frac{\bar{y}(U_1, P)}{\bar{y}(U_o, P)}$$ ofwel in woorden :

De verhouding tussen de minimaal benodigde inkomens in twee hoeveelheidssituaties om bij een gegeven prijsniveau de nutssituatie van die periode te bereiken.

Figuur 2



Stel figuur 2 is U_o (q) het nutsniveau dat bij prijzen p kan worden bereikt in hoeveelheidssituatie nul en U_1 (q) het nutsniveau dat kan worden bereikt in situatie één bij dezelfde prijzen P.

Volgens de definitie is dan de theoretisch 'juiste' hoeveelheidsindex :

$$Q^{th} = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2}{p_1 b_1 + p_2 b_2}$$

Omdat de nutsniveaus niet algebraïsch te definiëren zijn is een exacte verhouding tussen hoeveelheidsniveaus in verschillende situaties alleen te geven, als veranderingen van de hoeveelheden voor alle goederen met een zelfde evenredigheidsconstante plaatsvinden. Dit betekent echter weer dat de technische vooruitgang voor alle goederen gelijk moet zijn en dat de inkomenselasticiteiten voor alle goederen één moet zijn. Aangezien dit geen reële veronderstellingen zijn, bestaat er geen algebraïsche formule die de verhouding tussen twee hoeveelheidssituaties in één getal uit kan drukken. Anders gezegd : Omdat twee hoeveelheidssituaties behalve kwantitatief i.h.a. ook kwalitatief van elkaar zullen verschillen, is een 'juiste' interpretatie in kardinale terminologie onmogelijk. Alleen benaderingen zijn mogelijk.

B Törnqvist indexcijfers als kwadratische benaderingen van de theoretische indices bij middenprijzen en middennut

Uit de formules van P^{th} en Q^{th} blijkt dat deze niet onafhankelijk zijn van het gekozen nutsniveau resp. van de gekozen prijsvector uit periode nul en één. Wanneer men de situaties symmetrisch wil beschouwen, zoals Kloek (1966) doet dan kan men uitgaan van het meetkundig gemiddelde nutsniveau en de meetkundig gemiddelde prijzenvector. Substitueert men de gevonden middenwaarden in de formules dan krijgt men de volgende indices.

$$P_{o1}^{thn} = \frac{\bar{y}\,(U_n, P_1)}{\bar{y}\,(U_n, P_o)} \qquad \text{en} \qquad Q_{o1}^{thn} = \frac{\bar{y}\,(U_1, P_m)}{\bar{y}\,(U_o, P_m)}$$

(Het subscribt o1 betekent situatie 1 t.o.v. situatie o).

Deze indexcijfers gaat Kloek (1966) benaderen d.m.v. ontwikkeling in een reeks. Hij komt hierbij uit op de Törnqvist indexformules (voor de benadering : zie Kloek (1966)). De Törnqvist indexcijfers worden reeds in 1927 door Fisher genoemd, doch deze schenkt er geen bijzondere aandacht aan. In 1957 brengt Törnqvist ze opnieuw onder de aandacht. De formules luiden als volgt :

$$P^T = \prod (P_{1i}/P_{oi})^{W_i^*} \qquad Q^T = \prod (q_{1i}/q_{oi})^{W_i^*} \qquad \text{met } W_i^* = \frac{1}{2}(W_{oi} + W_{1i})$$

$$\text{waarin } W_{oi} = \frac{P_{oi}\,Q_{oi}}{\sum P_{oj}\,Q_{oj}} \qquad \text{en} \qquad W_{1i} = \frac{P_{1i}\,Q_{1i}}{\sum P_{1j}\,Q_{1j}}$$

Het prijsindexcijfer van Törnqvist kan dus worden gezien als de meetkundig gemiddelde prijsverandering, gewogen met de gemiddelde waardequoten van de individuele goederen in het basisjaar en het lopende jaar.

Analoog hieraan is Q^1 de meetkundig gemiddelde hoeveelheidsverandering, gewogen met de gemiddelde waardequoten van de individuele goederen in het basisjaar en het lopende jaar.

2.3 De totale periode als basis gebruikt

Bij de indexeringsmethoden die in 2.2 zijn behandeld, worden telkens de prijzen resp. hoeveelheden van een lopend jaar vergeleken met de prijzen resp. de hoeveelheden van een basisjaar. De prijzen resp. de hoeveelheden van het basisjaar, het lopend jaar of eventueel het gemiddelde van die twee, dienen als gewichten om de relatieve belangrijkheid van individuele hoeveelheden resp. prijzen in rekening te brengen. Bij de berekening van een indexcijfer volgens één van die methoden zijn dus alleen de prijzen en hoeveelheden van het lopende jaar en het basisjaar van belang.

Geheel andere methoden worden door Theil (1960) en Hamming (1975) voorgesteld. In de volgende paragrafen zullen deze worden behandeld.

2.3.1 B. L. indexcijfers

Uitgegaan wordt van m goederen in n jaren. We kunnen dan een $n \times m$ matrix P beschouwen met getallen p_{tj} $(t = 1, 2 \ldots n ; j = 1, 2 \ldots m)$. Ieder getal p_{tj} geeft aan de prijs van goed j in jaar t.

In deze matrix zijn dus de prijsbewegingen weergegeven van de m goederen in de n jaren. Het probleem nu is hoe deze onoverzichtelijke matrix van prijzen weer te geven in één getallenkolom van prijsindices. Een dergelijke benadering van het indexcijferprobleem komt overeen met de in paragraaf 2.2.2 onder punt 1 genoemde benaderingswijze : het zoeken naar een maat voor de centrale tendentie in het universum van prijsveranderingen in de tijd.

Stel dat de prijzen evenredig zouden bewegen, de matrix P zou dan geschreven kunnen worden als het produkt van een kolomvector p en een rijvector a van evenredigheidsconstanten. Of algebraïsch geformuleerd : een matrix van rang één (= P bij evenredige prijsbewegingen) kan geschreven als het produkt van twee matrices (kolom- en rijvector) van rang één.

Normaal echter zullen de prijsbewegingen niet evenredig zijn, m.a.w. matrix P zal van hogere rang dan één zijn. De matrix P te schrijven als het produkt van een kolom en een rijvector kan dus alleen d.m.v. een benadering gebeuren. Om zo min mogelijk informatie te verliezen zal deze benadering uiteraard zo goed mogelijk dienen te zijn. Een redelijk criterium hiervoor is de som van de kwadraten van de afwijkingen te minimeren. Echter bij een benadering van de matrix P op deze wijze, wordt geen rekening gehouden met de relatieve belangrijkheid van de individuele prijzen op de verschillende tijdstippen. Theil (1960) stelde voor om de matrix P achter te vermenigvuldigen met de getransponeerde matrix van de hoeveelheden Q (bestaande uit elementen q_{ti} = hoeveelheid van goed i op tijdstip t).

Het probleem wordt dan : benader $P Q^1$ door middel van een kolomvector p^* zijnde de vector m en prijsindices en een rijvector a. Uit de theorie over de hoofdcomponentenanalyse weten we dat de beste één dimensionale benadering van $P Q^1$ wordt verkregen door voor p^* de eigenvector van $P Q^1 Q P^1$ te nemen die correspondeert met de grootste eigenwaarde d_1^2 van $P Q^1 Q P^1$.

Analoog met hetgeen is gezegd over de prijzenmatrix kan een en ander worden toegepast op de matrix van de hoeveelheden Q. De vector q^*, zijnde de kolomvector van hoeveelheidsindices en de kolomvector van de beste lineaire benadering van $Q P^1 = q^* b$ wordt op identieke wijze verkregen uit :

$$Q P^1 P Q^1 q^* = d_1^2 q^*$$

De theorie over de hoofdcomponentenanalyse leert ons nu dat de beste ééndimensionale benadering (volgens het criterium der kleinste kwadraten) van $P\,Q^1$ en $Q\,P^1$ als volgt kan worden geschreven :

$$P\,Q^1 = p^* \, d_1 \, q^{*\,1}$$

$$Q\,P^1 = q^* \, d_1 \, p^{*\,1}$$

Met p als genormeerde eigenvector van $Q\,P^1\,P\,Q^1$ behorende bij de grootste eigenwaarde d_1^2 en q als genormeerde eigenvector behorende bij de grootste eigenwaarde d_1^2 van $P_1Q^1\,Q\,P^1$. (Waarbij vermeld dat d_1^2 van $Q\,P^1\,P\,Q^1$ gelijk is aan d_1^2 van $P\,Q^1\,Q\,P^1$).

(Voor bewijzen van het bovenstaande, zie diverse boeken over hoofdcomponenten- en factoranalyse).

Aan de hand van een klein voorbeeld zal één en ander worden toegelicht.

Stel twee goederen A en B, twee perioden o en 1

Prijzenmatrix P

goed / periode	A	B
0	1	2
1	1	3

Hoeveelheidsmatrix Q

goed / periode	A	B
0	50	25
1	61,65	20,25

$$P\,Q^1 = \begin{pmatrix} 100 & 102,15 \\ 100 & 122,4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$P\,Q^1\,Q\,P^1 = \begin{pmatrix} 20.435 & 25.003 \\ 25.003 & 30.607 \end{pmatrix}$$

Grootste eigenwaarde van $P\,Q^1\,Q\,P^1$ is $d_1^2 = 51.030$, de bijbehorende genormeerde eigenvector $p^* = \begin{pmatrix} .633 \\ .774 \end{pmatrix}$

$$Q\,P^1 = \begin{pmatrix} 100 & 125 \\ 102.15 & 122.4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$Q\,P^1\,P\,Q^1 = \begin{pmatrix} 25.625 & 25.515 \\ 25.515 & 25.416 \end{pmatrix}$$

Grootste eigenwaarde van $Q\,P^1\,P\,Q^1 = 51.036$ (verschilt van 51.030 door afronden), de bijbehorende genormeerde eigenvector $q^* = \begin{pmatrix} .707 \\ .706 \end{pmatrix}$

De beste ééndimensionale lineaire benadering $p\,d_1\,q^1$ van $P\,Q^1$ is nu

$$\begin{pmatrix} .633 \\ .744 \end{pmatrix} 226 \; (.707, \quad .706) = \begin{pmatrix} 101.1 & 101.0 \\ 123.7 & 123.5 \end{pmatrix}$$

Definiëren we de kwaliteit van de benadering als

$$1 - \frac{\| E \|^2}{\| Y \|^2}$$

, met $\| E \|^2$ als de som van de kwadraten van de elementen van de matrix van de afwijkingen ($= P\,Q^1 - p^* d_1 q^{*1}$) en met $\| Y \|^2$, als de som van de kwadraten van de uitgangsmatrix $P\,Q^1$, dan geldt voor het voorbeeld dat de kwaliteit $1 - .000031 = .999969$ is.

Door de eerste waarde van de kolomvector p^x, 100 te stellen krijgen we de 'reeks' prijsindexcijfers 100 en 122,38. Door hetzelfde te doen voor de q^* vector krijgen we 100 en 99.99 als hoeveelheidsindexcijfers.

De aldus ontstane prijs- en hoeveelheidscijfers werden door Theil 'best' linear index numbers genoemd, afgekort B.L. indices.

Opmerking

Kloek en De Wit (1962) geven een toepassing van de B.L. indexeringsmethode. Ze gebruiken hiervoor Nederlandse in- en uitvoergegevens als uitgangsdata.

Bij bestudering van de resultaten, blijkt dat de matrix E van afwijkingen bepaalde systematische afwijkingen vertoont. De elementen $p_t q_t$ van de benaderende matrix blijken nl. groter te zijn dan de corresponderende elementen van de benaderde matrix $P Q^1$ als de subscript van p_t en q_t weinig verschillen en anders om blijken ze kleiner te zijn als de subscripten van p_t en q_t veel verschillen. Voor het twee-goederen geval geven Kloek en De Wit hier een algebraïsch bewijs voor.

Voor het meergoederen geval kan het als volgt enigszins intuïtief aannemelijk worden gemaakt :

Beschouwen we de matrix $P Q^1$. Deze bestaat rijsgewijs uit Laspeyres hoeveelheidsindexcijfers (op een constante na). Kolomsgewijs bestaat ze uit Laspeyres prijsindexcijfers (op een constante na). Volgens paragraaf 2.2.1 geven de Laspeyres indexcijfers ten gevolge van substitutie-effecten in het algemeen een overschatting. Worden de hoeveelheden nu gewogen met prijzen die ver in de tijd verwijderd liggen, dan zal de overschatting i.h.a. groter zijn dan wanneer de hoeveelheden worden gewogen met prijzen die dichter in de tijd liggen.

De te benaderen matrix $P Q^1$ bestaat dus uit elementen die vanuit de hoofddiagonaal in richting noordoost en zuidwest een steeds sterkere overschatting zijn van de theoretisch juiste indexcijfers. De benadering zal hier dus enigszins tussen in liggen. M.a.w. de hoofddiagonaal zal overschat en de uiterste zuidwest en noordoost hoek van $P Q^1$ zullen onderschat worden. Een overschatting van de hoofddiagonaal betekent echter dat het produkt van het hoeveelheidsindexcijfer en het prijsindexcijfer groter zal zijn dan het waarde-indexcijfer. Kloek en De Wit geven een rekenmethode aan waarmee langs iteratieve weg de B.L. indexcijfers zodanig worden aangepast, dat het produkt van een prijsindexcijfer en zijn corresponderende hoeveelheidsindexcijfers gemiddeld genomen, gelijk is aan het waarde-indexcijfer. Vanwege de extra hoeveelheid rekenwerk wordt hier verder niet op ingegaan. Een eenvoudige aanpassing wordt in paragraaf 2.5 gegeven.

2.3.2 De indexcijfers voorgesteld door Hamming

Hamming (1975) stelt voor om als volgt het prijsindexcijfer te berekenen : Uitgegaan wordt van een matrix P met elementen p_{t_j}, zijnde de prijzen van produkt j in periode t. Deze matrix moet worden benaderd door een matrix van rang 1, die het produkt is van een kolomvector x (= prijsindexcijferreeks) en een rijvector y. Net als bij de in 2.3.1 behandelde B.L. methode, dienen de hoeveelheden q_{t_j} als wegingsfactoren, zij het op een enigszins andere wijze. Het kwadraat van het verschil tussen p_{t_j} en zijn benadering $x_t y_j$ wordt nl. vermenigvuldigd met de met p_{t_j} corresponderende q_{t_j}.

Het criterium voor de keuze van de vectoren x en y is dan, de som van de aldus gewogen kwadraten van de afwijkingen te minimaliseren.
In formule :

$$U = \sum_t \sum_j q_{t_j} (p_{t_j} - x_t y_j)^2 \text{ minimaal}$$

ofwel $\dfrac{\partial U}{\partial x_t} = 0 \longrightarrow 2 \sum_j q_{t_j} (p_{t_j} - x_t y_j)(-y_j) = 0$ (voor t = 0,1 .....)

en $\dfrac{\partial U}{\partial y_j} = 0 \longrightarrow 2 \sum_t q_{t_j} (p_{t_j} - x_t y_j)(-x_t) = 0$ (voor j = 0,1 .....)

Bovendien moet gelden voor een minimum :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_t^2} = 2 \sum_j q_{t_j} y_j^2 > 0 \quad \text{(voor t = 0,1 .....)}$$

en $$\frac{\partial^2 U}{\partial y_j^2} = 2 \sum_t q_{t_j} x_t^2 > 0 \quad \text{(voor j = 0,1 .....)}$$

dus

$$x_t = \frac{\sum_j q_{t_j} p_{t_j} y_j}{\sum_j q_{t_j} y_j^2} \quad \text{(t = 0,1 .....)}$$

en

$$y_j = \frac{\sum_t q_{t_j} p_{t_j} x_t}{\sum_t q_{t_j} x_t^2} \quad \text{(j = 0,1 .....)}$$

Omdat x en y in elkaar uitgedrukt zijn, dienen ze iteratief te worden bepaald.

Analoog aan een prijsindexcijferreeks kan een reeks hoeveelheidscijfers worden verkregen, waarbij in de formules alleen de argumenten p_{t_j} en q_{t_j} dienen te worden verwisseld. Bij benadering door een kolomvector u (= hoeveelheids indexcijferreeks) en rijvector v, zien de formules er als volgt uit :

$$u_t = \frac{\sum_j p_{tj} q_{tj} v_j}{\sum_j p_{tj} v_j^2} \quad \text{(t = 0,1 .....)}$$

en $$v_j = \frac{\sum_t p_{tj} q_{tj} u_t}{\sum_t p_{tj} u_t^2} \quad \text{(j = 0,1 .....)}$$

Opmerking 1

De definiëring van de hoeveelheids index cijferreeks wordt door Hamming niet op bovens taande wijze gegeven. In zijn nota over indexcijfers en s eizoenpatroon richt hij zich vooral op prijsindexcijfers. Mondeling definieerde hij het hoeveelheids index-cijfer als het quotiënt van de waarde-index en het prijsindexcijfer. Aldus wordt de eis van s ymmetrie ingeruild tegen de eis van s uperpositie terwijl bovendien het hoeveelheids indexcijfer minder s nel onbepaald is. In paragraaf 2.5 waar deze en andere eisen die aan indexcijfers kunnen worden ges teld ter s prake komen, zal hier verder commentaar op worden geleverd.

Opmerking 2

Behalve dat zowel bij de methode Hamming als bij de B.L. methode van Theil de gehele periode in bes chouw ing wordt genomen bij de berekening van een indexcijfer, bezitten deze methoden nog een ander karakteres tiek punt van overeenkomst. In beide gevallen gaat het er namelijk om een matrix van hogere rang (d.w.z. > 1) zo goed mogelijk te benaderen door een matrix van rang één. Alleen wordt door de wijze van wegen op een verschillende manier rekening gehouden met de relatieve belangrijkheid van de prijzen (hoewel hier alleen over prijzen wordt gesproken, geldt voor de hoeveelheden een analoog verhaal). Zo wordt bij de B.L. methode gewogen door de prijzenmatrix P achter te vermenigvuldigen met de getransponeerde hoeveelheidsmatrix Q^T. Deze matrix wordt dan benaderd door een produkt van een prijs- en een hoeveelheidsvector (op een constante na). Bij de bepaling van die vectoren kan gebruik worden gemaakt van methoden en technieken uit de hoofdcomponentenanalyse. Door de methode van weging die Hamming toepast wordt het terrein van de hoofdcomponentenanalyse verlaten. Er behoeven geen eigenwaarden en eigenvectoren meer te worden berekend. Voor de bepaling van de benaderende vectoren is door Hamming een computerprogramma ontworpen.

Opmerking 3

Een andere methode die ook gebruik maakt van eigenvectoren en eigenwaarde is voorgesteld door Tintner (1952). Het meetkundig gemiddelde van de prijsveranderingen wordt bepaald, waarbij weging plaats vindt met de relatieve grootte van de elementen van de eerste eigenvector van de correlatiematrix van prijzen. De grootte van de gewichten hangt dus af van de mate waarin de beweging van een individuele prijs gecorreleerd is met die van de index zelf. Omdat de resultaten van deze methode niet erg bevredigend zijn, wordt hier verder niet op ingegaan.

2.4 Een opschuivende periode als basis gebruikt

2.4.1 Een éénjarig opschuivende basis

Bij de berekening van een indexcijfer volgens één van de methoden beschreven in paragraaf 2.2 wordt een lopend jaar vergeleken met een basisjaar. De gewichten voor de weging worden ontleend aan het basisjaar (Laspeyres), het lopende jaar (Paasche) of er wordt een rekenkundig of meetkundig gemiddelde genomen (Drobisch, Fisher, Törnqvist). De motie hiervoor kan als volgt worden samengevat :

1. E r moet rekening worden gehouden met de relatieve belangrijkheid van een goed of prijs. M.a.w. gewogen moet er worden.
2. Omdat de economische belangrijkheid van een goed resp. prijs zijn weerspiegeling vindt in de prijs resp. de hoeveelheid, lijkt het alleszins redelijk bij de berekening van een prijs- resp. hoeveelheidsindexcijfer de hoeveelheden en prijzen van de goederen als wegingsfactoren te gebruiken.

3. Om een juiste verhouding, dus ook een indexcijfer vast te stellen, dient met dezelfde gewichten te worden gewogen. Hetzij dat de gewichten worden ontleend aan het basisjaar, hetzij aan het lopende jaar of er wordt eventueel een rekenkundig of meetkundig gemiddelde genomen.

In dit laatste punt ligt nu een fundamentele zwakte van de indexcijferberekening volgens de formules van paragraaf 2.2 Dat de belangrijkheid van een goed in jaar i wordt weerspiegeld in de prijs van dat goed in jaar i en dat daarom wordt gewogen met die prijs klinkt inderdaad wel redelijk. Echter omdat bij vergelijking van de jaren i en j dezelfde gewichten dienen te worden gehanteerd, moeten ook de goederen in jaar j worden gewogen met de prijzen van jaar i. De belangrijkheid van een goed in jaar j evenwel hoeft zich helemaal niet te weerspiegelen in de prijs van dat goed in jaar i. Dit geldt vooral als de prijs- en hoeveelheidssamenstelling van de jaren i en j sterk verschillen. Er wordt dan feitelijk met 'onzin' gewogen. (Zie ter illustratie het v.b. van 2.2.1).

Als de hoeveelheids- en prijsschommelingen in de tijd, al te spectaculair verlopen heeft de berekening van een prijs- en hoeveelheidsindexcijfer dan ook weinig zin. In de praktijk echter zullen ten gevolge van de bestaande produktiecapaciteit enerzijds en de consumptiegewoontes anderzijds prijs- en hoeveelheidsontwikkelingen, zeker na eliminatie van seizoensinvloeden, een meer trendmatig verloop vertonen. Het bezwaar van een foutieve weging zal zich dan pas doen gelden indien het lopende jaar en het basisjaar ver uit elkaar liggen. Een mogelijke correctie hierop zou kunnen zijn om het basisjaar iedere x-jaren te verleggen, zodat er een regelmatige aanpassing van het vergelijkingsjaar en de wegingsfactoren plaats vindt. De grootte van x kan in principe enigszins arbitrair worden gekozen. Stel we kiezen voor x = 8. Definiëren we vervolgens Pij als het prijsindexcijfer van het jaar j t.o.v. het jaar i, dan kan de reeks Po1, Po2, Po3.....Po8, P89, P 810 .....etc. worden berekend. Een nadeel van een op dergelijke wijze berekende reeks is, dat bij een veronderstelde enigszins trendmatige prijs- en hoeveelheidsontwikkeling, de indexcijfers verschillen in betrouwbaarheid. Zo zal i.h.a. vergelijking van Po2 t.o.v. Po1 betrouwbaarder zijn dan vergelijking van Po8 t.o.v. Po7. Een reeks die gelijkmatiger in betrouwbaarheid is, kan worden verkregen door voor x = 1 te kiezen en het aldus berekende indexcijfer ter vermenigvuldiging met het voorgaande indexcijfer om vergelijking met het jaar nul mogelijk te maken. Op deze wijze ontstaat een zogenaamde kettingindexreeks, waar vooral Mudgett (1951) voor pleit. Ter illustratie volgen hier de formules voor de berekening van de prijsindexcijfers van Laspeyres en de hoeveelheidsindexcijfers van Törnqvist met een vaste en één jaarlijks (maandelijks) opschuivende basis.

Zie blad formules (blz.18)

Het grote verschil tussen een kettingindexcijfer en een indexcijfer met vaste basis is de meer realistische manier van wegen bij de eerste methode. Dit brengt als voordeel mee dat de betrouwbaarheid bij vergelijking van twee jaren, niet meer afhankelijk is van hun gezamenlijke afstand tot het basisjaar doch alleen van de prijs- en hoeveelheidsontwikkelingen in de tussenliggende periode. Als nadelen van de kettingindices worden wel genoemd :

1. meer rekenwerk
2. ondoorzichtiger formules
3. in sommige gevallen moeten extra gegevens worden verzameld
4. de kettingindex heeft een cumulatieve fout.

De onder de punten één en twee genoemde nadelen zijn natuurlijk waar. Beide nadelen echter zijn van zo'n gering gewicht dat ze zonder gevaar van onderschatting, kunnen worden verwaarloosd. Het onder punt drie genoemde nadeel is met name reëel bij de berekening van een Laspeyres indexcijfer. Zo is bij de berekening van een Laspeyres-prijsindexcijfer met vaste basis voor iedere nieuwe periode t alleen informatie over de prijzen van die nieuwe periode t nodig, terwijl bij berekening van hetzelfde indexcijfer met een kettingbasis bovendien nog informatie nodig is over de hoeveelheden van de periode t-1. Voor de meeste indexformules geldt dit nadeel echter niet.

P^L	P^{L_k}
Symbool Vaste basis	Symbool Kettingbasis
$P^L_{o1} : \dfrac{\sum_1 P_{1i}\, Q_{oi}}{\sum_1 P_{oi}\, Q_{oi}}$	$P^{L_k}_{o1} : \dfrac{\sum_1 P_{1i}\, Q_{oi}}{\sum_1 P_{o1}\, Q_{oi}}$
$P^L_{o2} : \dfrac{\sum_1 P_{2i}\, Q_{oi}}{\sum_1 P_{oi}\, Q_{oi}}$	$P^{L_k}_{o2} : \dfrac{\sum_1 P_{1i}\, Q_{o1}}{\sum_1 P_{oi}} \; \dfrac{\sum_1 P_{2i}\, Q_{1i}}{\sum_1 P_{1i}\, Q_{1i}}$
$P^L_{o3} : \dfrac{\sum_1 P_{3i}\, Q_{oi}}{\sum_1 P_{o1}\, Q_{oi}}$ etc.	$P^{L_k}_{o3} : \dfrac{\sum_1 P_{1i}\, Q_{oi}}{\sum_1 P_{o1}\, Q_{oi}} \; \dfrac{\sum_1 P_{21}\, Q_{1i}}{\sum_1 P_{1i}\, Q_{1i}} \; \dfrac{\sum_1 P_{3i}\, Q_{2i}}{\sum_1 P_{2i}\, Q_{2i}}$ etc.
Q^T	Q^{T_k}
$Q^T_{o1} : \prod_i \left[\dfrac{Q_{1i}}{Q_{oi}}\right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{P_{1i}\, Q_{1i}}{\sum_j P_{1j} Q_{1j}} + \frac{P_{oi}\, Q_{oi}}{\sum_j P_{oj}\, Q_{oj}}\right]}$	$Q^{T_k}_{o1} : \prod_i \left[\dfrac{Q_{1i}}{Q_{oi}}\right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{P_{1i}\, Q_{1i}}{\sum_1 P_{ij}\, Q_{1j}} + \frac{P_{oi}\, Q_{oi}}{\sum_j P_{oj}\, Q_{oj}}\right]}$
$Q^T_{o2} : \prod_i \left[\dfrac{Q_{2i}}{Q_{o2}}\right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{P_{2i}\, Q_{2i}}{\sum_j P_{2j}\, Q_{2j}} + \frac{P_{oi}\, Q_{oi}}{\sum_j P_{oj}\, Q_{oj}}\right]}$	$Q^{T_k}_{o2} : \prod_i \left[\dfrac{Q_{2i}}{Q_{1i}}\right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{P_{21}\, Q_{2i}}{\sum_j P_{2j}\, Q_{2j}} + \frac{P_{1i}\, Q_{1i}}{\sum_j P_{1j} Q_{1j}}\right]} Q^{T_k}_{o1}$
$Q^T_{o3} : \prod_i \left[\dfrac{Q_{3i}}{Q_{o1}}\right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{P_{3i}\, Q_{3i}}{\sum_j P_{3j}\, Q_{3j}} + \frac{P_{oi}\, Q_{oi}}{\sum_j P_{oj}\, Q_{oj}}\right]}$ etc.	$Q^{T_k}_{o3} : \prod_i \left[\dfrac{Q_{3i}}{Q_{2i}}\right]^{\frac{1}{2}\left[\frac{P_{3i}\, Q_{3i}}{\sum_j P_{3j}\, Q_{3j}} + \frac{P_{2i}\, Q_{2i}}{\sum_j P_{3j} Q_{3j}}\right]} Q^{T_k}_{o2}$ etc.

Form. voor berekening van indexcijfers met vaste basis en met kettingbasis

In het algemeen moet zowel informatie van de hoeveelheden als informatie van de prijzen van het lopende jaar gegeven zijn alvorens tot de berekening van een indexcijfer over te kunnen gaan. Het feit of met een kettingbasis of wel met vaste basis wordt gewerkt speelt dan ook meestentijds geen rol (zie bijv. de formules Q^T en Q^{Tk}). Verder kan nog worden opgemerkt dat informatie over prijzen en hoeveelheden in de tuinbouw redelijk goed voor handen is en in het algemeen gelijktijdig wordt verzameld, zodat in de gevallen waarin het nadeel wel reëel is, het van geringe betekenis is.

Dat een kettingindexreeks behept is met een cumulatieve fout wordt met name door Mudgett (1951) als zijnde een misvatting, tegengesproken. In het geval dat het corresponderende indexcijfer met vaste basis niet systematisch over- dan wel onderschat is dit ook wel zo. Een nieuw berekend indexcijfer in jaar t met jaar t - 1 als basis zal uiteraard een afwijking bezitten t.o.v. het niet te berekenen, theoretisch juiste indexcijfer. Indien echter geen systematische over- dan wel onderschatting plaats vindt, zal deze afwijking dan weer positief dan weer negatief zijn. Bij vermenigvuldiging met het kettingindexcijfer van jaar t - 1, waardoor het kettingindexcijfer voor jaar t ontstaat, zal de afwijking de ene keer versterkt en de andere keer afgevlakt worden. Gemiddeld genomen zullen er evenveel positieve als negatieve afwijkingen voorkomen die ongeveer gelijk van grootte zullen zijn, zodat er beslist geen accumulatie van afwijkingen op zal treden.

Anders ligt het indien het corresponderende indexcijfer met vaste basis een systematische afwijking vertoont. In dat geval zal, in tegenstelling tot hetgeen Mudgett beweert, wel een accumulatie van afwijkingen optreden. Dit is eenvoudig in te zien. Ieder nieuw berekend indexcijfer in een jaar t met een jaar t - 1 als basis zal een afwijking in dezelfde richting vertonen. Bij berekening van een kettingindexcijfer, wat niets anders is dan vermenigvuldiging van een serie op een volgende indexcijfers berekend in jaar t (t= 1,2 .....) met jaar t - 1 als basis, zal de afwijking steeds in dezelfde richting versterkt worden. Of deze constatering een argument is tegen het gebruik van kettingindices hangt af van de grootte van de aldus optredende cumulatieve fout.
Is deze groter dan de afwijking bij gebruik van dezelfde formule met vaste basis dan moet het gebruik van de kettingindex worden afgeraden. Is de cumulatieve fout kleiner dan blijft de kettingindex de voorkeur genieten. Of de cumulatieve fout groter dan wel kleiner is, blijkt af te hangen van het bewegingspatroon van hoeveelheden en prijzen. Aan de hand van een voorbeeld, waarin Laspeyres en Paasche hoeveelheidsindexcijfers met vaste basis en met kettingbasis worden berekend, wordt dit nader toegelicht.

Gegevens: twee goederen A en B, 5 periodes 0, 1, 2, 3 en 4, 2 situaties I en II,
P = prijzenmatrix en Q = hoeveelhedenmatrix

Situatie I

P

goed \ periode	0	1	2	3	4
A	2	2	3	3	3
B	2	3	5	6	7

Q

goed \ periode	0	1	2	3	4
A	12	13	15	16	17
B	9	7	6	6	5

hieruit kunnen worden berekend :

$Q^L_{01} = 95$	$Q^P_{01} = 92$	$Q^{L_k}_{01} = 95$	$Q^{P_k}_{01} = 92$
$Q^L_{02} = 100$	$Q^P_{02} = 93$	$Q^{L_k}_{02} = 97$	$Q^{P_k}_{02} = 93$
$Q^L_{03} = 105$	$Q^P_{03} = 93$	$Q^{L_k}_{03} = 102$	$Q^{P_k}_{03} = 97$
$Q^L_{04} = 105$	$Q^P_{04} = 87$	$Q^{L_k}_{04} = 98$	$Q^{P_k}_{04} = 93$

Situatie II

P

goed \ periode	0	1	2	3	4
A					
B	5	2	6	7	3

Q

goed \ periode	0	1	2	3	4
A	15	12	16	17	13
B	6	9	6	5	7

$Q^L{}_{01} = 108$ $\quad Q^p{}_{01} = 100$ $\quad Q^{L_k}_{01} = 108$ $\quad Q^{P_k}_{01} = 100$

$Q^L{}_{02} = 104$ $\quad Q^p{}_{02} = 104$ $\quad Q^{L_k}_{02} = 111$ $\quad Q^{P_k}_{02} = 93$

$Q^L{}_{03} = 101$ $\quad Q^p{}_{03} = 99$ $\quad Q^{L_k}_{03} = 107$ $\quad Q^{P_k}_{03} = 89$

$Q^L{}_{04} = 99$ $\quad Q^p{}_{04} = 98$ $\quad Q^{L_k}_{04} = 109$ $\quad Q^{P_k}_{04} = 86$

De prijzen en hoeveelheden zijn zodanig gekozen, dat een relatief sterke verandering van de hoeveelheid van een goed gepaard gaat met een relatief sterke verandering van de prijs. Volgens de theorie moet een Paasche indexcijfer in dit geval onderschatten, terwijl een Laspeyres indexcijfer moet overschatten. In beide situaties blijkt dit voor zowel de indexcijfers berekend met vaste basis als voor die berekend met een kettingbasis het geval te zijn. Vergelijken we de kettingindexcijfers in situatie één met de kettingindexcijfers in situatie twee dan valt een opmerkelijk verschil op. In situatie één namelijk blijken de kettingindices dichter bij elkaar te liggen dan de indices berekend met een vaste basis terwijl voor situatie twee het tegenovergestelde blijkt te gelden. Een verklaring hiervoor kan worden gevonden in het verschil in bewegingspatroon van situatie één en situatie twee. De ontwikkeling van de prijzen en hoeveelheden van de goederen A en B blijkt namelijk in de eerste situatie van periode tot periode een zelfde richting aan te houden. De hoeveelheidsverhouding tussen A en B wordt steeds groter terwijl de prijsverhouding steeds kleiner wordt. Bij berekening van een kettingindexcijfer wordt hiermede rekening gehouden. Door iedere periode met één andere basis te vergelijken en met andere gewichten te wegen, wordt de relatieve belangrijkheid van een goed van periode tot periode enigszins aangepast. De systematische afwijking tussen het Laspeyres en het Paasche indexcijfer wordt hierdoor verkleind.
In situatie twee is de cijferopstelling van situatie één zodanig veranderd dat niet meer van een trendmatige ontwikkeling kan worden gesproken. De geaccumuleerde systematische afwijking tussen het Paasche en het Laspeyres indexcijfer blijkt nu groter te zijn bij de ketting indexreeks dan bij de indexreeks berekend met vaste basis. Dit wordt veroorzaakt doordat in drie van de vier periodes waarvoor het indexcijfer is berekend de hoeveelheidsontwikkeling van periode tot periode tegengesteld is. In periode een wordt de hoeveelheidsverhouding tussen A en B kleiner, in periode twee groter, in periode drie weer groter en in periode vier wordt ze weer kleiner. De ontwikkeling van de prijzen is analoog maar tegengesteld. Dit betekent dat door een jaarlijkse opschuiving van de éénperiode brede basis, in het geheel geen aanpassing plaats vindt t.a.v. de relatieve belangrijkheid van de goederen. In tegendeel de systematische afwijking tussen het Laspeyres en Paasche indexcijfer blijkt veel groter te worden.

Concluderend kan t.a.v. het gebruik van een éenjarige jaarlijks voortschrijdende basis het volgende worden gezegd.

1. Vindt bij gebruik van een indexcijfer geen systematische over- of onderschatting plaats dan verdient het ketting indexcijfer de voorkeur omdat een vergelijking tussen twee op eenvolgende perioden in het algemeen beter rechtstreeks dan via een verweggelegen basisjaar kan geschieden. Omdat de theoretische afwijking dan weer positief dan weer negatief uit zal vallen, is vrees voor een cumulatieve fout onterecht.
2. Heeft het indexcijfer wel een systematische afwijking dan vindt wel een accumulatie van fouten plaats. Er kunnen drie gevallen worden onderscheiden.

a. Er is een trendmatige ontwikkeling in de hoeveelheids- en prijsverhoudingen. In dat geval zal de cumulatieve afwijking t.g.v. de kettingindexberekening kleiner zijn dan de fout bij berekening met vaste basis. Oorzaak hiervan is het feit dat bij indexering met een kettingbasis bij iedere stap rekening wordt gehouden met de relatieve verandering van de belangrijkheid van de onderscheiden goederen.
b. Het prijs- en hoeveelheidsverloop vertoont een op- en neergaande beweging (varkenscyclus). In dit geval wordt bij gebruik van een kettingindex telkens een grote afwijking gemeten. De cumulatieve fout zal groter zijn dan bij indexering met een vaste basis.
c. Het prijs- en hoeveelheidsverloop vertonen geen specifieke ontwikkeling. Nu zal blijken dat het kettingindexcijfer dan weer groter, dan weer kleiner zal zijn dan de index gemeten met een vaste basis. Om de vergelijking tussen twee op eenvolgende jaren gelijk in betrouwbaarheid te doen zijn, verdient ook in dit geval indexering met een kettingbasis de voorkeur.

2.4.2 Een meerjarig opschuivende basis

Moet er jaarlijks een nieuw indexcijfer worden berekend dan ontstaan, bij berekening volgens de methode van Hamming of volgens de B.L. methode van Theil de volgende twee problemen :

1. De beschouwde periode wordt steeds groter hetgeen een toename van de hoeveelheid rekenwerk betekent.
2. Voor ieder jaar wordt meer malen een indexcijfer berekend.
   De berekende indexcijfers zullen i.h.a. verschillen.

Wat het eerste probleem betreft : er moet een grens worden gesteld aan de in beschouwing te nemen periode. Het heeft geen zin die periode tot in het oneindige te laten groeien. Bovendien wordt de hoeveelheid rekenwerk te groot. Een 'juiste' lengte van de te beschouwen periode bestaat echter niet : ze zal enigszins arbitrair moeten worden vastgesteld. Een lengte van bijv. 10 jaar lijkt redelijk.

Het tweede probleem is hinderlijker. Stel dat we werken met een basislengte van 10 jaar. Ieder jaar wordt er een berekening gemaakt waarbij de cijfers van het nieuwe jaar bij de basis worden toegevoegd ten koste van de verst weg liggende. Voor ieder jaar wordt dus tien maal een indexcijfer berekend. Omdat telkens een andere matrix wordt benaderd, zullen de berekende indexcijfers voor hetzelfde jaar verschillen. Het probleem is nu : welke is het juiste indexcijfer ? In principe is het antwoord op deze vraag eenvoudig, nl. alle zijn even juist en even onjuist. De praktijk is hier echter niet mee gediend, die vraagt om een definitief cijfer.

Een mogelijke aanpak van dit probleem zou de volgende kunnen zijn : In de loop der jaren wordt een serie vectoren prijsindexcijfers berekend met lengte m. Om deze vectoren vergelijkbaar te maken, dienen ze allereerst op hetzelfde niveau te worden gebracht. Dit kan geschieden door iedere vector met een zodanige factor te vermenigvuldigen dat het gemiddelde van de eerste m - 1 elementen van de vector t gelijk wordt aan het gemiddelde van de laatste m - 1 elementen van de vector t - 1. Voor ieder jaar zullen nu n op hetzelfde niveau gebrachte, doch verschillende indexcijfers verkregen worden. Het gemiddelde van de som van de indexcijfers van hetzelfde jaar, zouden we nu als het definitieve indexcijfer kunnen beschouwen. Dit brengt echter het voor de praktijk grote bezwaar met zich mee dat de indexcijfers pas na n jaren bekend zijn. Om hieraan tegemoet te komen kan men voor latere jaren met voorlopige indexcijfers werken, die men verkrijgt door het gemiddelde te nemen van de tot dan berekende waarden.

Een andere methode zou zijn om een indexcijfer van een bepaald jaar definitief te verklaren, wanneer het jaar voor het eerst in de berekening wordt opgenomen. Uiteraard wel na aanpassing aan het niveau van de in voorgaande jaren berekende vectoren. Dit betekent dus dat de berekening van een indexcijfer voor een jaar t geschiedt, op basis van prijzen en hoeveelheden van de jaren b, t - 1, - -, t - m + 1.

Dit in tegenstelling tot de eerst voorgestelde aanpak waar berekening van het indexcijfer voor het jaar t geschiedt op basis van de prijzen en hoeveelheden van de jaren t - m + 1, t - m + 2, ---- . t - 1, t, t + 1, ------ t + m - 1.

Een voorbeeld ter illustratie

Stel de lengte van de basisperiode is 4 en de volgende zes vectoren indexcijfers zijn berekend.
Vector berekend in jaar :

t	4	5	6	7	8	9
1	100					
2	120	100				
3	130	108	100			
4	150	124	112	100		
5		126	114	103	100	
6			120	107	105	100
7				106	105	99
8					115	112
9						128

Na aanpassing van de vectoren t aan het niveau van de vectoren t - 1, ontstaat de volgende tabel.
Vector berekend in jaar :

t	4	5	6	7	8	9
1	100					
2	120	120,48				
3	130	130,12	132,31			
4	150	149,40	148,19	147,67		
5		151,81	150,83	152,10	150,53	
6			158,77	158,01	158,06	157,31
7				156,53	158,06	155,74
8					173,11	176,19
9						201,36

Volgens de eerste methode waarbij dus met gemiddelde en voorlopige indexcijfers wordt gewerkt, is de stand van zaken aan het eind van de jaren waarin de vectoren zijn berekend, als volgt :

Indexcijfer jaar :	4	5	6	7	8	9
1	100	100	100	100	100	100
2	120 vp	120,24	120,24	120,24	120,24	120,24
3	130 vp	130,06 vp	130,81	130,81	130,81	130,81
4	150 vp	149,70 vp	149,20 vp	148,82	148,82	148,82
5		151,81 vp	151,22 vp	151,58 vp	151,32	151,32
6			158,77 vp	158,39 vp	158,28 vp	158,04
7				156,53 vp	157,30 vp	156,78 vp
8					173,11 vp	174,65 vp
9						201,36 vp

vp = voorlopig indexcijfer.

Bij toepassing van de tweede methode wordt ieder jaar het berekende indexcijfer van het nieuw toegevoegde jaar definitief verklaard. Eindjaar vier wordt dan de reeks 100, 120, 130, 150 verkregen. Aan het einde van de jaren 5, 6, 7, 8 en 9 worden daar dan de indexcijfers 151,81, 158,77, 156, 53, 173,11 en 201,36 aan toegevoegd.

De eerste methode lijkt wat degelijker. Bij een opschuivende basis echter van lengte 10 zal met 9 voorlopige indexcijfers moeten worden gewerkt, hetgeen in de praktijk hinderlijk zal zijn. Om die reden verdient methode twee de voorkeur.

Ook bij de andere methoden van indexeren kan met een meerjarig verschuivende basis worden gewerkt. Voor de hoeveelheden (q) kan een x-jarig gemiddelde worden genomen. Omdat de prijs als afhankelijke variabele wordt beschouwd, kan voor de prijs een x-jarig met q gewogen gemiddelde worden genomen.

Bij een opschuivende basis met een breedte van vijf jaar worden de formules van Laspeyres voor 5 jaar

$$P_5^{Lob} = \frac{\sum P_5 \bar{q}}{\sum P_{gew} \bar{q}} \quad \frac{\sum_{j=1}^{5} P_5^{Lob}}{5}$$

en

$$Q_5^{Lob} = \frac{\sum q_5 \; P_{gew}}{\sum \bar{q} \; P_{gew}} \quad \frac{\sum_{j=1}^{s} Q_j^{Lob}}{5}$$

met

$$\bar{q} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5}{5}$$

en Pgew.

$$P = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 + p_5 q_5}{q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5}$$

P_5^{Lob} = Laspeyres prijs-indexcijfer met vijfjarige opschuivende basis

Q_5^{Lob} = Laspeyres hoeveelheidsindexcijfer met vijfjarig opschuivende basis.

Een indexcijfer op deze wijze berekend is wat minder gevoelig voor uitschieters. De wegingsfactoren zijn wat stabieler, zodat als jaar t - 1 bijv. een uitschieter is wat prijzen en/of hoeveelheden betreft bij een kettingindex niet gewogen wordt met prijzen en hoeveelheden uit jaar t - 1 die in geen enkele relatie staan tot de hoeveelheden en prijzen van jaar t.

Beter in zo'n geval is eerst het seizoenpatroon te elimineren. Bij marktonderzoek echter gaat het vaak om de beweging in een seizoen te volgen. In dat geval verdient een indexeringsformule die alleen produkten $p_i \; q_i$ bevat in verband met betere weging de voorkeur boven een formule bestaande uit componenten $p_{i-1} \; q_i$ of $p_i \; q_{i-1}$.

2.5 Eisen die aan indexcijfers kunnen worden gesteld

In 2.2.2 werd geconcludeerd dat een formule die op volstrekt juiste wijze het bewegingspatroon van prijzen en hoeveelheden uitdrukt niet bestaat. De besproken formules, die in principe met oneindig veel andere kunnen worden uitgebreid, zijn alle benaderingen. Om tot een keuze van een bepaalde indexeringsmethode te komen zijn in de loop der tijd een aantal eisen gesteld waaraan een indexeringsformule kan worden getoetst. Al zij vermeld dat onder andere subrananian (1965), heeft aangetoond dat een aantal van deze eisen tegenstrijdig zijn. In deze paragraaf worden een aantal belangrijke eisen besproken. Hierbij diende de indeling van Kloek (1966) als voorbeeld. Tevens wordt vermeld welke van de in dit hoofdstuk genoemde indexcijfers aan de eisen voldoen. Ook worden enige opmerkingen gemaakt over de belangrijkheid van de verschillende eisen bij indexering van prijzen en hoeveelheden van tuinbouwprodukten.

A Eisen die een lopende situatie met een basisperiode vergelijken

A 1. De eis van de eenvoud

Deze eis houdt in dat een prijsindex P_{ot} die een lopende periode (t) vergelijkt met een basisperiode kan worden geschreven als een functie van maximaal de vier vectoren p_o, p_t, q_o en q_t. Dus $P_{ot} = f(p_o, p_t, q_o, q_t)$ en analoog $Q_{ot} = f(p_o, p_t, q_o, q_t)$
Het is duidelijk dat de indexcijfers met een meerjarige basis hieraan niet voldoen. Omdat bij indexering van tuinbouwprodukten in het algemeen voldoende cijfermateriaal over prijzen en hoeveelheden voor handen is, weegt deze eis bij indexering in deze sector niet zo zwaar.

A 2. Weging

Er dient rekening te worden gehouden met de relatieve belangrijkheid van een prijs of goed. Alle formules voldoen hieraan. Zij het in verschillende mate. In 2.4.1 werd aangetoond dat een ketting-indexcijfer hieraan in het algemeen beter voldoet dan een indexcijfer berekend met een vaste basis. Omdat de prijzen in jaar i meer gerelateerd worden verondersteld met de hoeveelheden in jaar i en minder met de hoeveelheden in jaar j, wordt het beste rekening gehouden met de relatieve belangrijkheid van een goed of prijs in die formules waarin uitsluitend produkten in de vorm $p_i q_i$ voorkomen en niet in de vorm $p_i q_j$.

Bezien we de indexeringsmethoden in de voorgaande paragrafen dan blijkt dat aan deze sterkere formulering van de eis van weging alleen de formules van Hamming en Törnqvist voldoen. De eis van weging is bij indexering voor welk doel dan ook zeer belangrijk.

A 3. Commensurabiliteit

Hiermee wordt bedoeld dat het indexcijfer niet mag veranderen wanneer de eenheden waarin de hoeveelheden worden gemeten veranderen. Aan deze uiteraard belangrijke eis voldoen alle indices.

A 4. Bepaaldheid

Ten gevolge van het seizoenmatige verloop van de produktie in de tuinbouw komt het nogal eens voor dat er in de hoeveelheden-matrix Q een element q_{ij} verschijnt met waarde nul. Voor de bijbehorende prijs p_{ij} mag in zo'n geval geen nul worden ingevuld; deze is onbepaald. De eis van bepaaldheid houdt nu in dat in een dergelijke situatie het indexcijfer niet nul, oneindig of onbepaald wordt. Uit de formules is op eenvoudige wijze af te leiden dat P^L en Q^P hieraan niet voldoen. Hieruit volgt dat de Drobisch en Fisher indexcijfers eveneens niet aan deze eis voldoen. Ook indexeren met de formules van Törnqvist of indexeren volgens de B.L. methode van Theil leidt in zo'n geval niet tot een numeriek resultaat. Wel is een prijsindexcijfer van Hamming te bepalen. Niet echter een hoeveelheidsindexcijfer, wanneer dit tenminste, zoals in 2.4.2 gebeurd is symetrisch gedefinieerd is. Voor Hamming is dit de reden om het hoeveelheidsindexcijfer te definiëren als het quotiënt van waarde- en prijsindexcijfer. Onder eis B 2. wordt hierop nog teruggekomen. Ontbreekt om wat voor reden dan ook voor een goed prijs- én hoeveelheidsinformatie dan kan uiteraard volgens geen enkele formule het indexcijfer worden bepaald. Komen dergelijke leemten echter incidenteel voor en is het waarde-aandeel van zo'n goed niet al te groot dan kan door extra en/of interpolatie toch nog een goede schatting van de prijs- en hoeveelheidsontwikkeling worden gemaakt.

A 5. Evenredigheid

Deze eis houdt in dat als alle prijzen met een zelfde evenredigheidsconstante veranderen, het prijsindexcijfer gelijk is aan de evenredigheidsconstante (de eis voor de hoeveelheidsindices is analoog).

Aan deze eis voldoen de Laspeyres en Paasche indexcijfers en de afleidingen daarvan. Als de hoeveelheidssamenstelling in jaar j t.o.v. jaar i veranderd is dan voldoen de indexcijfers van Hamming, Törnqvist en de B.L. indexcijfers niet aan deze eis.
De vraag kan worden gesteld of deze eis wel zinvol is. Stel er zijn twee consumenten die in jaar nul bij prijsniveau P. het nutsniveau U. bereiken. In jaar één echter verandert ten gevolge van smaakveranderingen hun 'kaart' met indifferentiecurven. Stel nu ter vereenvoudiging dat de individuele vraagverandering van ieder van deze twee consumenten zodanig tegengesteld is, dat ze elkaar in kwantitatieve zin opheffen. De totale vraag en dus ook P blijft gelijk (bij geen technische vooruitgang). De twee consumenten bereiken nu dus ieder een ander nutsniveau bij dezelfde prijsverhoudingen. Volgens de eis van evenredigheid moet P_{01} nu gelijk aan één zijn. Uit de definitie van de theoretisch juiste prijsindex (zie 2.2.2) volgt echter dat P_{01} best een andere waarde dan één kan hebben.

Een iets andere benadering is de volgende : De verandering van vraag en aanbod in jaar 1 t.o.v. jaar o kan zodanig zijn dat de prijzen gelijk blijven. Volgens de eis van evenredigheid mag P_{01} geen andere waarde dan één aannemen. Omdat de relatieve belangrijkheid van de verschillende prijzen in zo'n situatie wel veranderd kan zijn mag uiteraard niet worden geëist dat P_{01} één is.

De eis van evenredigheid kan alleen worden gesteld in een statische maatschappij waarin geen technische vooruitgang en geen smaakverandering voorkomen. Daarom voldoen de Paasche en Laspeyres indexcijfers aan deze eis; deze houden immers geen rekening met de verandering van de relatieve belangrijkheid van een goed in jaar één ten opzichte van jaar nul. Voor een evenredigheids constante anders dan één geldt mutatis mutandis hetzelfde.

A 6. Valuta-verandering

Wanneer in de lopende situatie de prijzen in een andere munteenheid worden gemeten dan in de basissituatie dan mag het er volgens deze eis niet toe doen of men vooraf dan wel achteraf de eenheden omrekent. Deze eis is vooral van belang in een periode van sterke in- resp. deflatie. In zo'n periode is namelijk sprake van een continue valuta verandering.

De indexcijfers van Hamming en de B.L. indexcijfers voldoen niet aan deze eis. Om een juiste prijsontwikkeling te meten dient bij deze methoden vooraf gede- resp. gefinfleerd te worden.

B Eisen in verband met de combinatie van twee of meer indices

B 1. Symmetrie

Deze eis houdt in dat uit een prijsindexcijfer bij verwisseling van p en q een hoeveelheidsindexcijfer ontstaat en omgekeerd.

Met uitzondering van de indexcijfers met een voortschrijdend gewogen gemiddelde voldoen alle in de voorgaande paragrafen besproken indexcijfers aan deze eis. In een model waar de prijs wordt verklaard uit de hoeveelheid lijkt deze eis niet van groot belang.

B 2. Superpositie

Het produkt van een prijs- en een hoeveeelheidsindex moet gelijk zijn aan de waardeverhouding. De paren (P^L, Q^P), (P^P, Q^L) en (P^f, Q^f) voldoen hieraan. Het paar $(P^t\ Q^t)$ voldoet er bij benadering aan (zie Kloek en Theil 1965).

Hebben we een willekeurig paar indexcijfers P en Q die niet aan de eis van superpositie voldoen dan kan men de paren (P, V/P) en (V / Q, Q) construeren die wel aan deze eis vpldoen. (V is waarde index). Ook Hamming stelt een dergelijke constructie ter bepaling van het hoeveelheids indexcijfer. Deze eis betekent dat een over- of onderschatting van de prijsindex gepaard moet gaan met een even grote onder- of overschatting van de hoeveelheidsindex. Voor deze gelijkheid lijken weinig logische argumenten te vinden. De eis van superpositie zou alleen zinvol zijn als er een formule bestond die de prijs- of hoeveelheidsontwikkeling op de theoretisch juiste wijze in een cardinale grootheid wist uit te drukken. Aangezien een dergelijke formule niet bestaat en nooit zal bestaan, kan beter een zwakkere formulering van de eis gehanteerd worden nl. dat het produkt van een prijs- en een hoeveelheidsindex niet systematisch groter of kleiner is dan de waarde-index.

Mocht echter toch behoefte bestaan aan indexcijfers die aan de eis van superpositie voldoen (ze lijken dan geloofwaardiger), dan kan beter een meetkundige verdeling van de afwijking plaatsvinden. De indexcijfers van bijvoorbeeld Törnqvist gaan er dan als volgt uitzien.

$$P_x^T = \sqrt{P^T \quad V/Q^T} \qquad \text{en} \quad Q_x^T = \sqrt{Q^T \quad V/P^T}$$

(V = waarde-index)

B 3. Aggregeerbaarheid

In tegenstelling tot de voorgaande eisen is deze eis vrij recent geformuleerd. Ze houdt in dat bij uitputtende opdeling van alle goederen in H deel verzamelingen, de totale prijs- en hoeveelheidsindices kunnen worden berekend uit de partiële prijs- en hoeveelheidsindices en de groepswaarde quoten. Deze eis is vooral van belang, als men uit de indexcijfers van bepaalde sectoren in een bedrijfstak, een indexcijfer voor de gehele bedrijfstak wil berekenen. In de tuinbouw zou in dit verband gedacht kunnen worden aan het berekenen van een prijs en/of een hoeveelheidsindexcijfer voor de gehele tuinbouw uit de prijs- en hoeveelheidsindexcijfers van de elkaar niet overlappende sectoren groenteteelt, fruitteelt, bloementeelt, etc.

Alleen de indexcijfers van Laspeyres en Paasche voldoen aan deze eis. In het navolgende wordt onderzocht in hoeverre de indexcijfers van Törnqvist er aan voldoen. Aangezien het prijs- en hoeveelheidsindexcijfer van Törnqvist symmetrisch zijn gedefinieerd is het voldoende om de aggregeerbaarheid van het prijsindexcijfer nader te bekijken.

Onderscheiden worden twee periodes, o en 1. Verder k + 1, sectoren o, 1,2, ... k, die tezamen de bedrijfstak T vormen. Totaalaantal produkten in bedrijfstak T is n. Hiervan n_o in sector o, n_1 in sector 1, ..., n_k in sector k. Dus $n_o + n_1 + \ldots\ldots + n_k = n$.

De partiële prijsindexcijfers (= sectoriale prijsindexcijfers) kunnen nu als volgt worden gedefinieerd :

$$P_{o_1}^{T_o} = \prod_i \frac{P_{1i}}{P_{oi}}^{\frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_j W_{oj}} + \frac{W_{1i}}{\sum_j W_{1j}}\right]} \qquad \left.\begin{array}{l} i = 1,2 \ldots\ldots n_o \\ j = 1,2 \ldots\ldots n_o \end{array}\right\} \text{produkten van sector o}$$

$$P_{o_1}^{T_1} = \prod_i \frac{P_{1i}}{P_{oi}}^{\frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_j W_{oj}} + \frac{W_{1i}}{\sum_j W_{1j}}\right]} \qquad \left.\begin{array}{l} i = 1,2 \ldots\ldots n_1 \\ j = 1,2 \ldots\ldots n_1 \end{array}\right\} \text{produkten van sector 1}$$

$$\vdots$$

$$P_{o_1}^{T_k} = \prod_i \frac{P_{1i}}{P_{oi}}^{\frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_j W_{oj}} \quad \frac{W_{1i}}{\sum_j W_{ij}}\right]} \qquad \left.\begin{array}{l} 1 = 1,2 \ldots\ldots n_k \\ j = 1,2 \ldots\ldots n_k \end{array}\right\} \text{produkten van sector k}$$

Hierin is $P_{o_1}^{T_k}$ het Törnqvist prijsindexcijfer voor sector k in periode één ten opzichte van periode nul. Verder is P_{1i}, prijs van produkt i in periode één en w_{oi}, is de waarde van produkt i in periode nul.

Voor de totale bedrijfstak is het Törnqvist indexcijfer, indien rechtstreeks berekend :

$$P_{o1}^{T} = \prod_i \frac{P_{1i}}{P_{oi}}^{\frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_j W_{oi}} + \frac{W_{1i}}{\sum_j W_{1i}}\right]} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2 \ldots\ldots n \\ j = 1,2 \ldots\ldots n \end{array} \qquad A$$

Een redelijke benadering van P_{oi}^{T} uit de partiële (sectoriale) indexcijfers lijkt een meetkundige gemiddelde, gewogen met de gemiddelde waarde quoten van de onderscheiden sectoren in het basisjaar en het lopende jaar.
Dit leidt tot :

$$P_{o1}^{T} = P_{o1}^{T_o}{}^{\frac{1}{2}\left[\frac{W_o^o}{\sum_r W_{or}} + \frac{W_1^o}{\sum_r W_{1r}}\right]} \; P_{o1}^{T_1}{}^{\frac{1}{2}\left[\frac{W_o^1}{\sum_r W_{or}} + \frac{W_1^1}{\sum_r W_{ir}}\right]} \; \text{---------}$$

$$\text{------} \; P_{o1}^{T_k}{}^{\frac{1}{2}\left[\frac{W_o^k}{\sum_r W_{or}} + \frac{W_1^k}{\sum_r W_{ir}}\right]} \qquad B$$

$$r = 0, 1, 2 \ldots\ldots k$$

P_{01} = prijsindexcijfer benaderd uit partiële indexcijfers

W_0^k = waarde van sector k in periode 0

Om te onderzoeken in hoeverre B een redelijke benadering is van A nemen we nu de logarithmen van zowel A als B :

$$\log P^{T}_{o1} = \sum_{1} \frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_{j} W_{oj}} + \frac{W_{1i}}{\sum_{j} W_{ij}}\right] \log \frac{P_{1i}}{P_{oi}} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots n \\ j = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots n \end{array} \qquad A^{I}$$

$$\log P^{T}_{o1} = \sum_{5} \frac{1}{2}\left[\frac{W^{5}_{o}}{\sum_{r} W_{or}} + \frac{W^{5}_{1}}{\sum_{r} W_{ir}}\right] \text{Log } P^{T_5}_{01} \qquad \begin{array}{l} r = 0,1 \ldots\ldots\ldots\ldots k \\ s = 0,1 \ldots\ldots\ldots\ldots k \end{array} \qquad B^{I}$$

door $P^{T_s}_{o1}$ uit te schrijven verandert B^{1} in :

$$\log P^{T}_{o1} = \sum_{s} \frac{1}{2}\left[\frac{W_{o}^{s}}{\sum_{r} W_{or}} + \frac{W_{1}^{s}}{\sum_{r} W_{ir}}\right] \sum_{i} \frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_{j} W_{oj}} + \frac{W_{1i}}{\sum_{j} W_{oj}}\right] \log \frac{P_{1i}}{P_{oi}} \qquad B^{II}$$

$j = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots p_r$

$i = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots n_r$ = produkten van sector r

$r = 0,1 \ldots\ldots\ldots\ldots k$

$s = 0,1 \ldots\ldots\ldots\ldots k$

Bezien we de uitdrukkingen A^{1} en B^{11} dan blijkt dat zowel A^{1} als B^{11} bestaan uit een som van n termen. Het deel achter het logteken van iedere term blijkt in beide uitdrukkingen identiek te zijn, nl. de prijsverhouding van goed i in periode één en nul (i = 1, 2 ..... n).

Om te bepalen in hoeverre de benadering goed is, is het daarom voldoende naar de samengestelde coëfficiënt voor het logteken te kijken.

Voor een willekeurig produkt i uit sector s is deze coëfficiënt in B^{11}.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{W_{o}^{s}}{\sum_{r} W_{or}} + \frac{W_{1}^{s}}{\sum_{r} W_{1r}}\right] \frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_{j} W_{oj}} + \frac{W_{1i}}{\sum_{j} W_{1j}}\right] \qquad \begin{array}{l} r = 0,1 \text{ ---}, k \\ j = 1,2 \text{ ---}, n_r \end{array} \qquad B^{III}$$

uitvermenigvuldigd levert dit op :

$$\frac{1}{4}\left[\frac{W_{o}^{s}\ W_{oi}}{\sum_{r} W_{or} \sum_{j} W_{oj}} + \frac{W_{o}^{s}\ W_{1i}}{\sum_{r} W_{or} \sum_{r} W_{ir}} + \frac{W_{1}^{s}\ W_{o}^{i}}{\sum_{r} W_{ir} \sum_{j} W_{oj}} + \frac{W_{1}^{s}\ W_{1i}}{\sum_{r} W_{ir} \sum_{j} W_{1j}}\right] B^{IV}$$

$r = 0,1 \text{ ---}, k$

$j = 1,2 \text{ ---}, n_r$

In deze uitdrukking is Wo^{s} (= waarde van de sector s in periode nul) gelijk aan

(j = 1,2 --- r) evenzo is $W.^{s}$ gelijk aan Wij.

Veronderstellen we nu dat de waardequote van de sector S in de periode één niet is veranderd ten opzichte van periode nul, dus $\frac{W_{o}^{s}}{\sum_{r} W_{or}} = \frac{W_{1}^{s}}{\sum_{r} W_{ir}}$

dan wordt uitdrukking B^{IV}

$$\frac{1}{2}\left[\frac{W_{oi}}{\sum_{j} W_{oj}} + \frac{W_{1i}}{\sum_{j} W_{ij}}\right] \qquad \text{met } j = 1,2 \text{ --- } n.$$

Deze uitdrukking is identiek aan de coefficiënt voor A^I. De conclusie is dus dat de Törnqvist indices aan de eis van aggregeerbaarheid voldoen mits de waardequoten van de onderscheiden sectoren niet veranderd zijn in periode één t.o.v. periode nul. Bij berekening van ketting indexcijfers zal bij benadering aan deze voorwaarde voldaan zijn. Omdat de som van de waardequoten één is zal een overschatting van de ene term gepaard gaan met een onderschatting van een andere term. Daarom mag worden verwacht dat de benadering vrij goed zal zijn.
Ter illustratie een voorbeeld :

Onderscheiden worden 2 sectoren A en B, 2 perioden 0 en 1 en twee produkten x en y. De volgende prijzen en hoeveelheidsmatrices zijn opgesteld :

Sector A

Hoeveelheidsmatrices :

produkt / periode	x	y
0	4	6
1	3	4

Prijzenmatrices :

produkt / periode	x	y
0	8	3
1	8	9

Sector B

produkt / periode	x	y
0	7	9
1	6	11

produkt / periode	x	y
0	5	5
1	4	6

Prijsindexcijfer volgens Törnqvist in sector A is : 0.87368153
Idem B is : 1.04710470

Het prijsindexcijfer volgens Törnqvist rechtstreeks berekend voor de totale "bedrijfstak" (= sector A + sector B) blijkt 0.914523 te zijn.
Hetzelfde prijsindexcijfer uit de partiële indices berekend volgens de boven omschreven methode geeft 0.914836 als uitkomst. Een zeer goede benadering dus.
In het voorbeeld stijgt de waarde-quote van sector A van 38,5% naar 40%, terwijl de waarde-quote van sector B daalt van 61,5% naar 60%. Schommelingen van deze omvang zijn ook in de praktijk te verwachten. Bij gebruik van Törnqvist indexcijfers kan daarom, zonder dat er grove fouten optreden, een indexcijfer voor een totale bedrijfstak worden opgebouwd uit de partiële indices door meetkundige middeling en weging met de gemiddelde waarde-quoten.

C. Eis die verband houdt met de wijziging van de gekozen basis

C 1. Basisverwisseling

Deze eis houdt in dat een prijs- of hoeveelheidsindexcijfer onafhankelijk moet zijn van zijn basis. Rechtstreekse vergelijking van de situaties t = 0 en t = 2 moet hetzelfde resultaat opleveren als vergelijking van de situatie t = 0 en t = 2 via situatie t = 1.
Geen van de behandelde indices voldoet aan deze eis waarop overigens veel kritiek is geleverd (zie bijv. Mudgett 1951). Samuelson en Swamy (1974) tonen aan dat de eis alleen te handhaven valt als de inkomenselasticiteiten van alle goederen één zou zijn. Ook in paragraaf 2.4.1 is dit impliciet vermeld.

HOOFDSTUK III

NUMERIEKE ILLUSTRATIE EN KEUZE VAN EEN INDEXERINGSMETHODE VOOR AGGREGATIE IN DE TUINBOUW

3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een toepassing gegeven van de indexeringsmethoden die in hoofdstuk II besproken zijn. Het cijfermateriaal dat hiervoor gebruikt wordt is ontleend aan het vademecum voor de tuinbouw 1975/1976. Het bestaat uit prijs- en hoeveelheidsgegevens van de produkten sla, komkommers en tomaten over de maand april van de periode 1960 tot en met 1974. Na becommentariëring van de resultaten wordt in paragraaf 3.3 een keuze gedaan uit de indexeringsmethoden die voorgesteld wordt om voor indexering van prijzen en hoeveelheden in de tuinbouw gebruikt te worden. In paragraaf 3.4 tenslotte wordt op hetzelfde cijfermateriaal een regressieanalyse uitgevoerd met het prijsindexcijfer als belangrijkste verklarende variabele. Het resultaat wordt besproken en vergeleken met de resultaten van een regressieanalyse toegepast op de drie produkten afzonderlijk.

3.2 Numerieke illustratie

Tabel 3.1 geeft een overzicht van de prijs- , hoeveelheids- en waardeontwikkeling van de produkten sla, komkommers en tomaten in de maand april van de jaren 1960 tot en met 1974. De prijzen zijn gedefleerd met de prijsindexcijfers kosten levensonderhoud met basisjaar 1964 = 100. Met deze gegevens zijn voor die periode berekend : prijs- en hoeveelheidsindexreeksen volgens de Paasche en Laspeyres methode, met vaste basis in 1960 en 1968, met kettingbasis en met een vijfjarig voortschrijdend gemiddelde als basis. Verder zijn berekend de meetkundige (Fisher) of rekenkundige (Drobisch) gemiddelden van deze reeksen, de Törnqvist indexcijfers met kettingbasis, de indexcijfers van Hamming en de indexcijfers berekend volgens de B.L. methode van Theil. Het rekenwerk ten behoeve van de indexcijfers van Hamming en t.b.v. de BL. indexcijfers is uitgevoerd met de computer van het LEI door resp. G. Hamming en K. Lodder.

3.2.1 Bespreking van de resultaten

Tabel 3.2 en tabel 3.3 bevatten de resultaten van de berekening van prijs- en hoeveelheidsindexcijfers volgens vijftien verschillende methodes.

Hoewel de berekende waarde binnen een zelfde jaar van methode tot methode soms aanzienlijk verschilt, is de overheersende tendens in iedere reeks duidelijk dezelfde. Bijna een halvering van het prijsindexcijfer en een ruime verviervoudiging van het hoeveelheidsindexcijfer. De Paasche indexreeksen die 1960 als basis hebben en die met een kettingbasis blijken zich op iets lager niveau te bewegen dan de corresponderende Laspeyres indexreeksen. Volgens de theorie van 2.2.1 betekent dit dat een toename van een hoeveelheid met meer dan het gemiddelde in jaar i ten opzichte van 1960 resp. het jaar i-1, in het algemeen samengaat met een afname van het prijsniveau met meer dan het gemiddelde in jaar i t.o.v. 1960 resp. het jaar i-1. Omdat de verschillen tussen de Paasche en Laspeyres reeksen zeer gering zijn, is een dergelijke prijsreactie maar in lichte mate aanwezig. Zo is bijv. de toename van de produktie in 1974 ten opzichte van 1960 voor de drie gewassen sla, komkommers en tomaten resp. 41%, 385% en 2344%, terwijl de afname van de prijzen in 1974 ten opzichte van 1960 resp. 46%, 47% en 48% bedraagt. Bovenstaande gaat niet op voor het geheel van prijs- en hoeveelheidsreacties in de beschouwde periode. Behalve aan de reeksen met 1968 als basis (na terugschaling op 1968 = 100) is dit ook te zien aan de indexreeksen berekend volgens de B.L. methode van Theil. Het produkt van deze reeksen namelijk, dat de beste één dimensionale benadering is van de matrix die uit alle mogelijke Laspeyres indexcijfers bestaat,

Tabel 3.1 Tijdreeksgegevens over prijzen, hoeveelheden en opbrengsten van sla, tomaten en komkommers in de maand april van de periode 1960 - 1974

Jaar	SLA			KOMMOMMERS			TOMATEN			Totale opbrengst (in mln. glds)
	reële veiling-prijs in ct. per kg	aanbod in mln. kg	opbrengst in mln. glds	reële veiling-prijs in ct. per kg	aanbod in mln. kg	opbrengst in mln. glds	reële veiling-prijs in ct. per kg	aanbod in mln. kg	opbrengst in mln. glds	
1960	122	16,0	19,5	107	6,8	7,3	318	0,9	2,9	29,7
1961	63	15,5	9,8	94	10,5	9,9	307	1,6	4,9	24,6
1962	202	13,8	27,9	102	13,0	13,3	319	1,8	5,7	46,9
1963	152	15,9	24,2	115	14,2	16,3	310	2,7	8,4	48,9
1964	109	19,0	20,7	95	17,2	16,3	282	4,0	11,3	48,3
1965	73	20,7	15,1	81	22,2	18,0	220	10,1	22,2	55,3
1966	107	19,5	20,9	78	25,3	19,7	252	5,3	13,4	54,0
1967	77	20,3	15,6	65	26,7	17,4	168	19,2	32,3	65,3
1968	81	22,6	18,3	74	27,9	20,6	171	20,4	34,9	73,8
1969	82	23,9	19,6	71	25,6	18,2	196	16,7	32,7	70,5
1970	74	20,3	15,0	56	24,9	13,9	152	23,9	36,3	65,2
1971	94	21,0	19,7	82	22,0	18,0	169	23,4	39,5	77,2
1972	54	21,4	11,6	56	23,5	13,2	146	23,6	34,5	59,3
1973	82	21,8	17,8	56	25,8	14,4	164	19,3	31,7	63,9
1974	66	22,5	14,9	57	33,0	18,8	164	22,0	36,7	69,8

Tabel
3.2 Prijsindexcijfers volgens verschillende indexeringsmethoden berekend

kolomnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	PAASCHE				LASPEYRES				FISHER		DROBISCH		TORN-QVIST	HAM-MING	B.L.
Jaar	1960 = basis	1968 = basis	ketting-basis	5-jaar brede ketting-basis	1960 = basis	1968 = basis	ketting-basis	5 jaar brede ketting-basis	1960 = basis	ketting-basis	1960 = basis	ketting-basis	ketting-basis	totale periode = basis	totale periode = basis
1960	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1961	70	69	70	69	65	84	65	68	67	67	74	69	67	70	84
1962	139	128	124	128	142	113	125	137	140	124	120	132	124	130	115
1963	113	114	110	113	118	106	110	117	115	110	110	115	110	115	106
1964	89	90	87	90	89	89	87	92	89	87	89	91	87	91	88
1965	68	72	67	73	65	69	65	73	66	66	71	73	66	71	69
1966	80	81	78	79	83	80	77	92	81	77	80	86	77	82	80
1967	57	62	56	66	62	56	58	69	59	57	59	68	57	61	57
1968	60	65	59	69	66	60	61	71	63	60	63	70	60	64	61
1969	64	69	62	71	66	64	64	72	65	63	66	71	63	68	64
1970	51	56	50	59	57	52	50	61	54	50	54	60	51	55	52
1971	62	68	61	71	74	64	62	72	68	61	66	72	63	67	65
1972	47	52	45	54	46	47	47	53	46	46	49	53	47	50	47
1973	55	60	53	57	62	55	56	61	58	54	58	59	55	59	56
1974	53	57	51	56	54	52	53	57	53	52	54	57	52	56	53

Tabel 3.3 Hoeveelheidsindexcijfers volgens verschillende indexeringsmethoden berekend

kolomnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	PAASCHE				LASPEYRES				FISHER		DROBISCH		TORN QVIST	HAM-MING	B.L.
Jaar	1960 = basis	1968 = basis	ketting-basis	5-jarig voort-schrijdend gem.	1960 = basis	1968 = basis	ketting-basis	5-jarig voort-schrijdend gem.	1960 = basis	ketting-basis	1960 = basis	ketting-basis	ketting-basis	gehele perio-de als basis	gehele perio-de als basis
1960	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1961	128	100	128	125	119	119	119	118	123	123	110	122	123	106	118
1962	111	140	127	118	113	123	127	121	112	127	132	120	128	129	121
1963	140	158	150	143	145	146	150	142	142	150	152	142	151	150	143
1964	183	183	188	183	183	181	187	179	183	187	182	181	190	183	179
1965	288	275	284	278	273	262	280	261	280	282	269	270	286	275	263
1966	219	225	237	225	228	227	235	219	223	236	226	222	238	226	221
1967	357	396	383	369	385	358	395	354	371	389	377	361	395	374	365
1968	378	417	410	392	412	385	422	380	395	416	401	386	422	396	392
1969	358	375	370	359	369	348	382	345	363	376	362	352	381	366	352
1970	384	429	435	404	429	392	440	391	406	437	411	398	436	409	405
1971	349	404	414	381	416	381	428	381	381	421	392	381	423	380	394
1972	430	429	425	401	425	392	451	389	427	438	411	395	433	423	402
1973	347	396	392	367	389	362	414	360	368	403	379	363	399	375	370
1974	439	454	449	418	447	415	474	412	443	461	434	415	456	443	424

ligt in 13 van de 15 keer onder het waardeindexcijfer. Volgens de theorie van paragraaf 2.3.1 betekent dit dat een toename van een hoeveelheid in jaar i met meer dan het gemiddelde ten opzichte van de hoeveelheid in een willekeurig jaar j, in het algemeen niet samen gaat met een prijsverandering (verlaging) van dat produkt met meer dan het gemiddelde in dat jaar i ten opzichte van dat jaar j.

Dit kan twee oorzaken hebben. Ofwel de prijs-flexibiliteiten tussen de individuele goederen verschillen sterk. Ofwel er zijn belangrijke andere autonome factoren die de prijsvorming beïnvloeden.

Bezien we de kettingindexreeksen dan blijkt onder andere dat de Laspeyres hoeveelheidsketting indexreeks op een hoger niveau ligt dan dezelfde reeks berekend met 1960 als basis. Met andere woorden een gecumuleerde weging met Pi-1 geeft grotere afwijkingen dan een weging met de prijzen van 1960. Volgens de theorie van paragraaf 2.4 duidt dit op twee punten. Op de eerste plaats is de ontwikkeling van de hoeveelheidsverhoudingen enerzijds en die van de prijsverhoudingen anderzijds tussen de individuele produkten niet tegengesteld. Dit is in overeenstemming met tabel 3.1. De hoeveelheidsontwikkeling die relatief ten nadele van sla verloopt, gaat niet samen met een relatieve prijsontwikkeling ten gunste van sla. Een tweede conclusie uit de constatering dat de kettinghoeveelheidsindexreeks van Laspeyres op een hoger niveau ligt dan de corresponderende index met vaste basis is, dat een relatief hoge prijs voorgoed j in jaar i-1, gepaard gaat met een relatief sterke toename van het aanbod van goed j in jaar i. Voor de ligging van de andere kettingindexreeksen met (éénjarige basis) gelden soortgelijke opmerkingen en verklaringen.

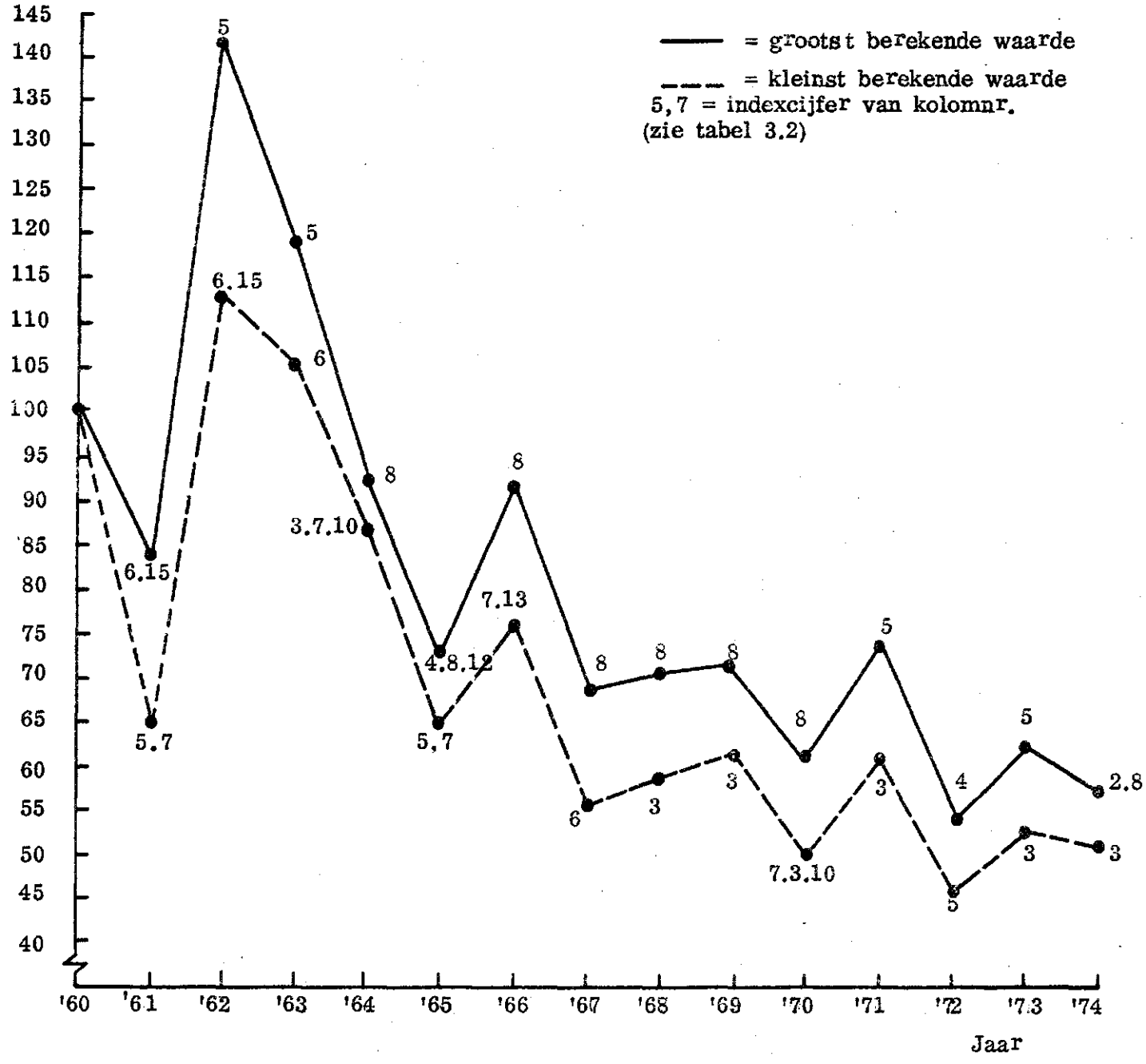
Een ander punt dat opvalt is dat de prijsindexcijfers berekend met een vijfjaar brede kettingbasis zowel voor Paasche als Laspeyres iets hoger liggen dan dezelfde indexreeksen berekend met een éénjarige kettingbasis. Voor de hoeveelheidsindexcijfers geldt het omgekeerde. Het niveauverschil tussen de reeksen blijkt na het ontstaan ervan in de eerste jaren vrij constant te blijven. Een verklaring voor het ontstaan ervan lijkt moeilijk te geven maar zal wel te maken hebben met de grote prijsschommelingen in de eerste jaren. Als het verschil tussen twee getallen niet al te groot is, kan het verschil tussen het meetkundig en rekenkundig gemiddelde van die twee getallen verwaarloosd worden. Om die reden is of het Fischer of het Drobisch indexcijfer bepaald. Het valt op dat de Fisher kettingindexreeks weinig verschilt van de Törnqvist kettingindexreeks. Nu is dat wel begrijpelijk. Zowel het Fisher als het Törnqvist kettingindexcijfer worden bepaald met behulp van gewichten ontleend aan het basisjaar en het lopende jaar.

De indexcijfers van Hamming en de indexcijfers berekend met de B.L. methode vallen over het geheel genomen niet uit de toon. Wel is opmerkelijk dat bij vermenigvuldiging van het prijsindexcijfer van Hamming met het corresponderende hoeveelheidsindexcijfer in twaalf van de vijftien keer een uitkomst wordt verkregen die groter is dan de waarde-index en slechts in twee gevallen een uitkomst kleiner dan de waarde-index. Hoewel dit op toeval kan berusten, kan het ook worden opgevat als een indicatie dat de indexcijfers van Hamming in tegenstelling tot hetgeen hij in zijn nota beweert systematisch overschatten. Wiskundig valt dit moeilijk te bewijzen.

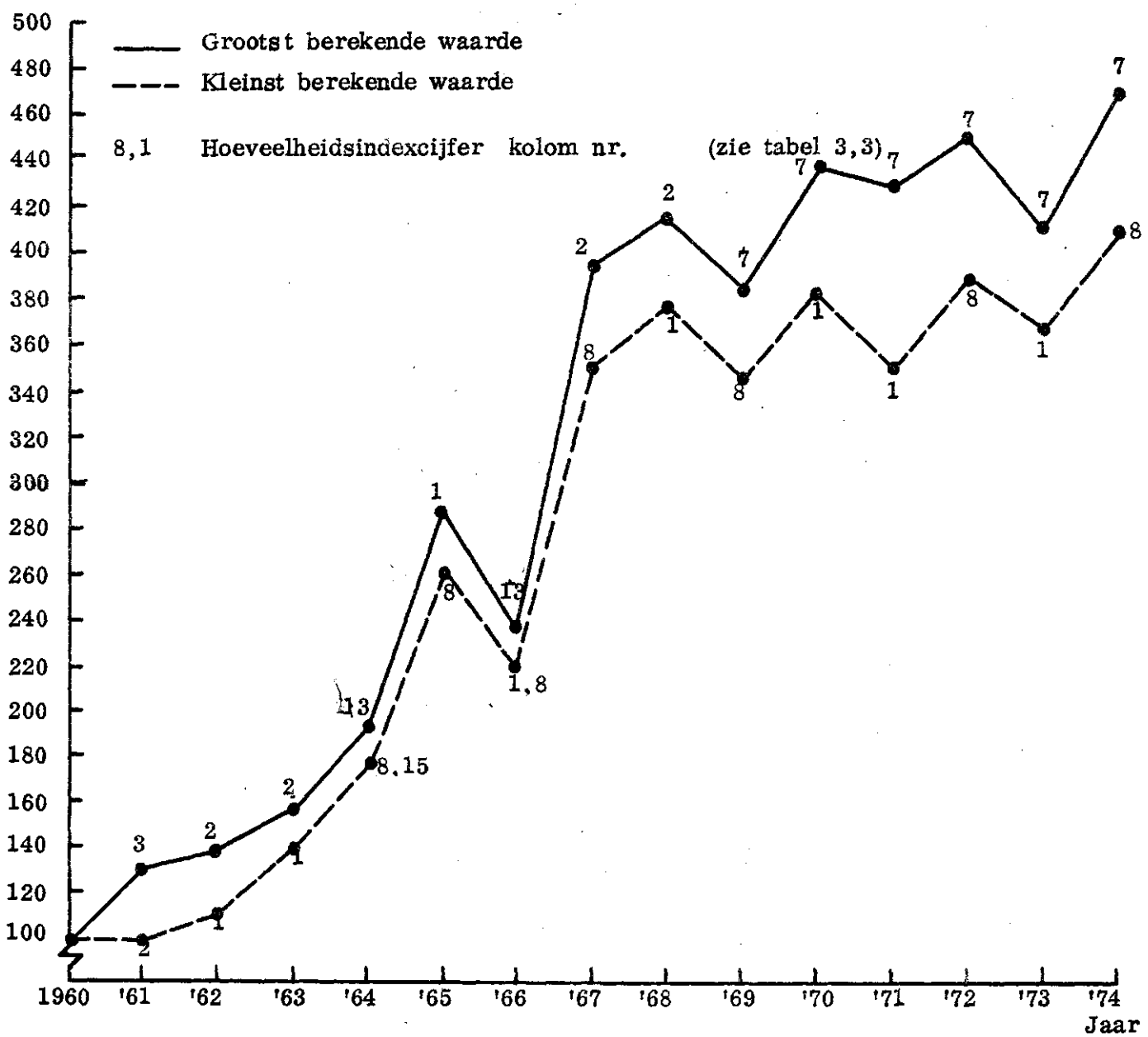
Om meer inzicht te verkrijgen in de grootte van de verschillen tussen de berekende indexcijfers in hetzelfde jaar, zijn de volgende grafieken getekend.

1. grafiek A : Voor ieder jaar is de grootste en de kleinste berekende waarde van het prijsindexcijfer binnen een jaar uitgezet.
2. grafiek B : Idem met betrekking tot de hoeveelheidsindexcijfers.
3. grafiek C : Relatief grootste en relatief kleinste gemeten verandering van het prijsindexcijfer in jaar i ten opzichte van jaar i-1.
4. grafiek D : Idem met betrekking tot de hoeveelheidsindexcijfers.

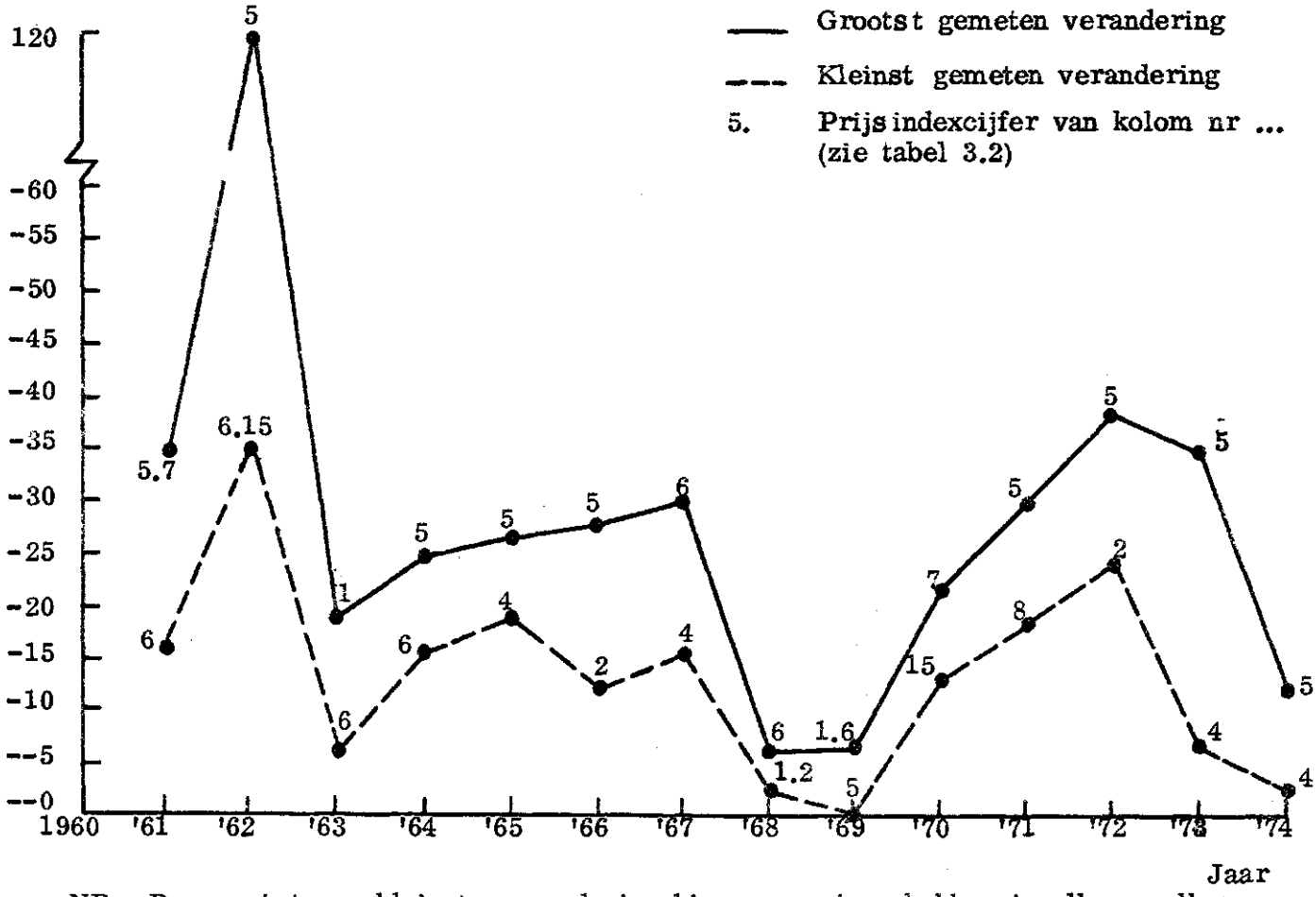
Grafiek A : Grootste en kleinste berekende waarde van het prijsindexcijfer binnen één jaar (1960 = 100)



Grafiek B : Grootste en kleinste berekende waarde van het hoeveelheidsindexcijfer binnen één jaar (1960 = 100)

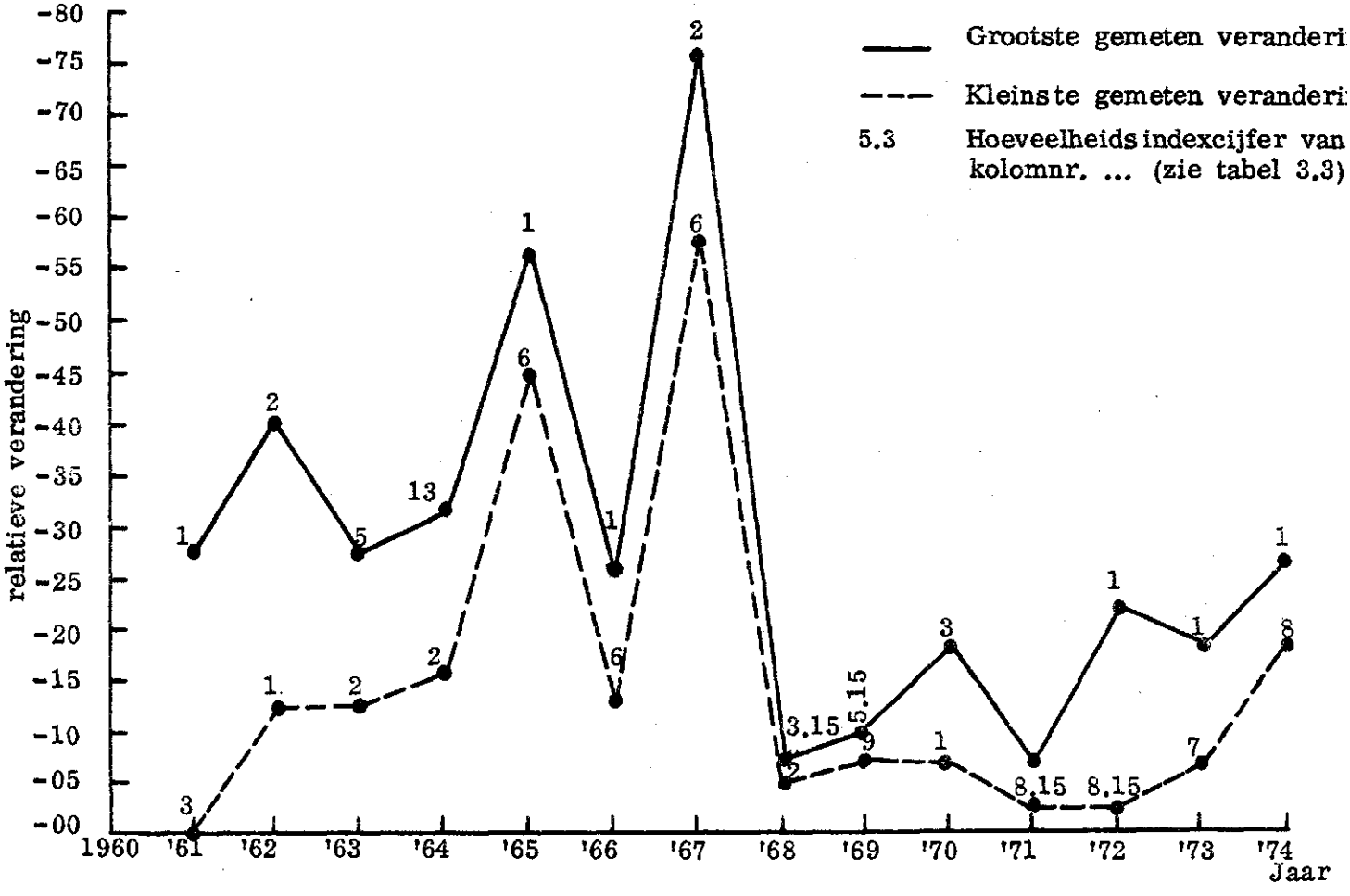


Grafiek C. Grootste en kleinste gemeten relatieve verandering (in absolute waarde) van het prijsindexcijfer in jaar i ten opzichte van jaar i-1



NB De grootste en kleinste verandering binnen een jaar hebben in alle gevallen dezelfde richting. Ze zijn of beide positief of beide negatief.

Grafiek D. Grootste en kleinste gemeten relatieve verandering (in absolute waarde) van het hoeveelheidsindexcijfer in jaar i. t.o.v. jaar i-1.



N. B. De grootste en kleinste relatieve verandering binnen een jaar hebben, met uitzonde van de waarden in 1962, in alle gevallen dezelfde richting. Ze zijn dus of beide po tief of beide negatief.
Omdat de verandering van de hoeveelheidsindexcijfers in 1962 t.o.v. 1961 afhankeli van de gebruikte methode soms positief en soms negatief blijkt te zijn, zijn voor dit jaar de grootste relatieve verandering in positieve richting (=40) en de absolute waarde van de grootste relatieve verandering in negatieve richting (13) in de grafiel uitgezet.

Grafiek A laat zien dat het verschil tussen de grootste en de kleinste berekende waarde voor het prijsindexcijfer over de gehele periode redelijk constant is. De grootste waarden blijken vooral berekend te worden met de Laspeyres formules met vaste basis en met vijfjarig voortschrijdend gemiddelde als basis. De kleinste waarden in het voorbeeld worden berekend met de Paasche en Laspeyres indexformules met één jaar brede kettingbasis. Een verklaring voor de loop van de verschillende reeksen is in het voorgaande reeds gegeven en wordt hier derhalve achterwege gelaten. Geeft een indexcijfer dan weer de grootste dan weer de kleinste waarde binnen een jaar weer, zoals het Laspeyres prijsindexcijfer met 1960 als basis in grafiek A diverse malen doet, dan duidt dit op een scherpe of wel op een zwakke reactie van de methode op prijs- of hoeveelheidsveranderingen. In grafiek C is af te lezen dat het in het geval van het Laspeyres prijsindexcijfer met basis 1960 vooral duidt op een scherpe reactie. Het grootste verschil in grafiek A is 29 en komt voor in 1962. Voor de praktijk is dit onaanvaardbaar groot. In dat zelfde jaar is ook het verschil in gemeten relatieve verandering van het prijsindexcijfer ten opzichte van het voorafgaande jaar het grootst nl. 0,83. Bezien we tabel 3.1 met het uitgangsmateriaal dan is dit niet verwonderlijk. De prijs van sla, dat in die tijd verreweg het belangrijkste produkt is, verandert in 1962 t.o.v. 1961 met meer dan een factor drie. In grafiek D komt dit wederom tot uiting. Volgens het Paasche indexcijfer met 1963 als bas is vindt er in 1962 t.o.v. 1961 een vergroting van de hoeveelheid met 40% plaats terwijl volgens hetzelfde indexcijfer met 1960 als basis er een verkleining van de hoeveelheid met 13% plaatsvindt. Dit alles bevestigt de reeds eerder gedane opmerking dat indexering bij grote prijs- en hoeveelheidsveranderingen weinig zinvol is. Het grootste verschil in grafiek B is28. Procentueel gezien is dit aanzienlijk minder dan het grootste verschil in grafiek A. Een belangrijk kenmerk van de vier grafieken is dat de uiterste waarden voor het overgrote deel worden gevormd door Laspeyres en Paasche indexcijfers.

3.3 Keuze van een 'beste' indexcijfer

Doel van dit onderzoek is te komen tot een advies voor het gebruik van een indexeringsmethode die kan worden gebruikt in de tuinbouw zodat zo goed mogelijk de hoeveelheids- en prijsontwikkelingen van onderscheiden homogene produktgroepen gemeten kunnen worden.

Nadat in het voorgaande een aantal belangrijke methoden van indexering zijn besproken, waarbij tevens aandacht werd besteed aan een aantal eisen die aan indexcijfers kunnen worden gesteld en nadat getracht is een en ander aan de hand van een cijfervoorbeeld sprekender te maken, wordt in deze paragraaf een keuze gedaan uit de behandelde methoden van indexeren.

Eerst wordt echter nog eens herhaald dat een methode van indexeren die op volstrekt juiste wijze prijs- en hoeveelheidsontwikkelingen aan kan geven niet bestaat en nooit zal bestaan. Dit omdat de prijsflexibiliteiten van de individuele produkten van een te indexeren produktgroep nu eenmaal niet gelijk zijn. Ten gevolge hiervan en ten gevolge van andere (waaronder stochastische) factoren zal de aangeboden hoeveelheid van jaar tot jaar anders van samenstelling zijn. En het is ten enenmale onmogelijk deze kwalitatieve verandering in kardinale termen uit te drukken, soms zelfs moeilijk in ordinale termen (zie bijvoorbeeld de hoeveelheidsontwikkeling in het voorbeeld van de paragraaf in 1962 t.o.v. 1961).

Soortgelijke opmerkingen kunnen over een prijsontwikkeling worden gemaakt. Hieruit volgt dat iedere formule die een indexcijfer uitdrukt een benadering is van het theoretisch juiste maar onbekende indexcijfer. Het logisch meest voor de hand liggende keuzecriterium 'welk indexcijfer wijkt het minste af' kan dus niet worden gebruikt omdat de afwijking onbekend is. Aan de hand echter van een aantal in de loop der tijd ontwikkelde eisen die aan een indexeringsmethode kunnen worden gesteld en aan de hand van de theoretische achtergrond van een methode kan toch een verantwoorde keuze worden gedaan.

De belangrijkste eis is wel dat rekening wordt gehouden met de relatieve belangrijkheid van een goed of een prijs, waarvan wordt verondersteld dat deze zich het best weerspiegeld in zijn prijs of hoeveelheid. Het is om die reden dat de Laspeyres en Paasche indexcijfers evenals methoden die gebruik maken van een vaste basis niet in aanmerking komen om als 'beste' indexcijfers te worden geadviseerd.

In hoofdstuk II is een en ander uitgebreid gemotiveerd. De beste weging is natuurlijk weging van hoeveelheden en prijzen in een jaar t met prijzen en hoeveelheden van dat zelfde jaar t. Aan deze sterkere eis van weging voldoen alleen de Hamming en Törnqvist formules. Een andere belangrijke eis is dat het produkt van een prijsindex en een hoeveelheidsindex een waarde-index oplevert. In paragraaf 2.5 is er al op gewezen dat de consequentie van deze eis is, dat een overschatting van het prijsindexcijfer een evenzo grote onderschatting van het hoeveeelheidsindexcijfer impliceert (en omgekeerd). Daarom lijkt het beter de eis af te zwakken tot de eis dat gemiddeld genomen het produkt van een prijs- en hoeveelheidsindex een waarde-index oplevert. De Fisher index voldoet aan de 'sterke' eis van superpositie. De indexcijfers van Hamming en Törnqvist aan de zwakke eis, al is het natuurlijk merkwaardig dat een eerste toepassing van de Hamming indices een vrij grote systematische overschatting te zien geeft. De B.L. indices kunnen om die reden niet gebruikt worden; afhankelijk van het teken van de covariantie tussen de prijs- en de hoeveelheidsverandering schatten deze indices systematisch over dan wel onder (zie par. 2.2). Wel kan op eenvoudige wijze de over- of onderschatting meetkundig worden verdeeld over het prijs- en hoeveelheidsindexcijfer zodat aan de sterke eis van superpositie wordt voldaan (zie par. 2.5).

Een ander nadeel van indexeringsmethoden als die van Hamming en de B.L. methode is het feit dat er meerdere uitkomsten voor één jaar verkregen worden. Nu is dit nadeel met behulp van een eenvoudige aanpassingsprocedure wel te ondervangen (zie par. 4.2.4.), het feit blijft dat het voor de praktijk gemakkelijker is indien direct een éénduidig indexcijfer wordt berekend.

Het bovenstaand overziend, lijkt het verantwoord de Törnqvist kettingindexcijfers als de 'beste' te adviseren. Vooral als nog in ogenschouw wordt genomen dat de Törnqvist indices gezien kunnen worden als kwadratische benaderingen van de theoretisch juiste indexcijfers bij middenprijzen en middennutsniveau (zie par. 2.2.2.). Hiermee is natuurlijk niet gezegd dat de andere indexeringsmethoden weinig waarde hebben. Met name de Laspeyres en Paasche indexcijfers geven interessante informatie over prijs- en hoeveelheidsreacties zoals uit het voorbeeld in par. 3.2 bleek. Uit dit voorbeeld bleek dat de Fisher indices maar weinig afweken van de Törnqvist indices, hetgeen bij bestudering van de formules wel begrijpelijk is. Bij gebrek aan rekenapparatuur kan dus zonder gevaar op grove over- of onderschatting het Fisher kettingindexcijfer (evt. Drobisch) berekend en gebruikt worden.

3.4 Regressie-analyse met het prijsindexcijfer als te verklaren en het hoeveelheidsindexcijfer als belangrijkste verklarende variabele

Uit het voorbeeld van paragraaf 3.2 blijkt dat een toename van het hoeveelheidsindexcijfer gepaard gaat met een afname van het prijsindexcijfer. Dit is in overeenstemming met de economische theorie volgens welke er een negatief verband moet bestaan tussen prijs en aangeboden hoeveelheid. Met behulp van de regressie-analyse kan de kwantitatieve omvang van dit verband worden gemeten. Uit de geschatte regressiecoëfficiënten kunnen dan prijsflexibiliteiten worden berekend. De prijsflexibiliteit in een bepaald punt wordt gedefinieerd als $\frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p}$. Hierin is q de aangeboden hoeveelheid en p de prijs. De prijsflexibiliteit zal van produkt tot produkt verschillen. Afhankelijk van het feit of substitutie, complementaire dan wel neutrale goederen worden geaggregeerd, zal in een model waarin indexcijfers als variabelen voorkomen, de prijsflexibiliteit op een lager, hoger dan wel op een zelfde niveau komen te liggen als in de modellen van de individuele goederen. Voor het cijfermateriaal van paragraaf 3, 2 wordt dat in deze paragraaf nagegaan. Eerst worden regressie-analyses uitgevoerd en prijsflexibiliteiten berekend voor de individuele produkten en vervolgens voor de aggregatie van die produkten. Hiervoor worden de Törnqvist indexcijfers gebruikt. Omdat vroeger onderzoek uitgewezen heeft dat sla, tomaten en komkommers neutrale produkten zijn ten opzichte van elkaar mag worden verwacht dat de prijsflexibiliteit berekend uit

het geaggrereerde model op ongeveer hetzelfde niveau zal liggen als de prijsflexibiliteiten die berekend zijn uit de modellen die op de afzonderlijke produkten betrekking hebben. In de regressiemodellen wordt de prijs resp. het prijsindexcijfer als verklarende en de hoeveelheid resp. het hoeveelheidsindexcijfer als verklarende variabele beschouwd. Bij tomaten en komkommers is bovendien het concurrerend aanbod in het model opgenomen. Voor sla waren deze cijfers, die zijn ontleend aan het vademecum voor de glastuinbouw 1975/1976, niet aanwezig.

Verder is van de volgende veronderstellingen uitgegaan :

1. Het verband tussen de prijzen en hoeveelheden is dubbellogarithmisch.
2. De 'vraagcurve' is in de loop der jaren voor de maand april niet verschoven.
3. De residuën worden onafhankelijk van elkaar verondersteld met verwachting nul en normaal verdeeld. (Eventueel na uitschakeling van autocorrelatie).

ad 1. Deze veronderstelling heeft als consequentie dat de flexibiliteit in ieder punt van de functie gelijk is aan de geschatte regressiecoëfficiënt.

ad 2. Deze voorwaarde is noodzakelijk wil het überhaupt mogelijk zijn om flexibiliteit te meten.

ad 3. Deze veronderstelling maakt het mogelijk dat er betrouwbaarheidsuitspraken over de geschatte coëfficiënten gedaan kunnen worden.

Of deze veronderstellingen ten aanzien van het cijfermateriaal verantwoord zijn, is in dit geval niet zo verschrikkelijk relevant. Het gaat in deze paragraaf meer om een illustratie van het gebruik van de regressieanalyse en de berekening van prijsflexibiliteiten op een model met indexcijfers als variabelen en het vergelijken van de resultaten met de resultaten van de modellen waarin dezelfde produkten maar niet geaggregeerd in voorkomen en waarop dezelfde bewerkingen zijn toegepast, dan om het doen van voor de praktijk bruikbare uitspraken over het cijfermateriaal.

Voor de individuele produkten werden de volgende functies berekend :

A Tomaten

1. $\ln p = 5.63 - .242 \ln q + .153 \ln q_{c.A}$

$(.0278)_{0.5}$ $(.0187)_{0.5}$ $(.0957)_{20}$

$R^2 = 94$

n = 15 De prijsflexibiliteit van q is 0.242.

p = prijs per kg
q = hoeveelheid in mln. kg
$q_{c.A}$ = hoeveelheid concurrerend aanbod in mln. kg

Het teken van de coëfficiënt die de invloed van het concurrerend aanbod weergeeft is tegengesteld aan wat wordt verwacht. Omdat de coëfficiënt niet significant afwijkt van nul (betr. 95%) is de regressie nogmaals uitgevoerd, nu met alleen q als verklarende variabele

2. $\ln p = 5.89 - .250 \ln q$

$(.0215)_{05}$ $(.0191)_{05}$

$R^2 = 93$

n = 15 De prijsflexibiliteit van q is o,25.

B Komkommers

3. $\ln p = 5.07 - .1898 \ln q - .0889 \ln q_{c.A}$

$(\pm 0.0328)_{05}$ $(\pm .1245)_{20}$ $(\pm .0326)_{2}$

$R^2 = 77$

n = 15 De prijsflexibiliteit van q is 0.1898.

Het aanbod blijkt bij betrouwbaarheid van 95% niet signific ant van nul te verschillen. Dit onverwachte resultaat kan echter worden veroorzaakt door de hoge intercorrelatie tussen q en $q_{c.A}$. Een regressie met alleen q als verklarende variabele levert op :

4. $\ln p = 5.69 - .4534 \ln q$
$(\pm 0.0412).5 \quad (\pm 0958).5$

$R^2 = 63$

n = 15 De prijsflexibiliteit van q is 0.4534

Ondanks de lagere waarde voor R^2 lijkt dit model toch beter te voldoen. Door de in kwantitatieve zin dominerende rol van q t.o.v. $q_{c.A}$ (zie vademecum glastuinbouw) kan deze laatste zonder bezwaar worden weggelaten zodat geen last meer van multicollineariteit wordt ondervonden.

C Sla

5. $\ln p = 8,74 - 1.43 \ln q$
$(\pm .0698).5 \quad (\pm .445).5$

$R^2 = 44$

n = 15 De prijsflexibiliteit is 1.43.

Opvallend is de lage R^2. Aan de residuën is te zien dat deze lage waarde vooral wordt veroorzaakt door de uitkomst van 1961 en in iets mindere mate door de uitkomsten van 1962 en 1972. In die jaren was het aanbod normaal maar waren de prijzen bijzonder hoog of bijzonder laag. Het opnemen van extra verklarende variabelen (dummy's) zou de R^2 kunnen verhogen. Dit is echter niet gedaan. Opvallend is ook de hoge prijsflexibiliteit van sla in vergelijking met tomaten en komkommers. Dit duidt op een verzadigde markt.

D Sla, komkommers en tomaten geaggregeerd

6. $\ln pi = 6,664 - .536 \ln q_i + .307 + .0410 \ln q_{C.A.K.}$
$(\pm .0414).5 \quad (\pm .1883)2 \quad (\pm .2237)10 \quad (\pm .0677)50$

$R^2 = 77$

n = 15. De prijsflexibiliteit van q = 0.536.
De coëfficiënten q van $\ln_q$ C.A.T. en $\ln q_{C.A.K.}$ verschillen niet significant van nul bij betrouwbaarheid 95%. Ook is het teken tegengesteld aan wat verwacht wordt.

Pi = prijsindexcijfer
qi = hoeveelheidsindexcijfer
C.A.T. = concurrerend aanbod tomaten
C.A.K. = concurrerend aanbod komkommers

Omdat bovendien het aandeel van het concurrerend aanbod in het totale aanbod relatief gering is, is de regressie opnieuw uitgevoerd maar nu zonder deze twee variabelen.

7) $\ln p_i = 6.811 - .461 \ln q_i$
$(\pm .0411).5 \quad (\pm .0779).5$

$R^2 = 73$
n = 15 De prijsflexibiliteit van qi is 0.461.

Als rekening wordt gehouden met de relatieve belangrijkheid van de drie produkten dan zou de prijsflexilbiliteit, bij neutrale goederen, op een iets hoger niveau moeten liggen. Geconcludeerd kan derhalve worden dat volgens dit model de drie produkten in lichte mate complementair zijn. Gezien echter het grote gedeelte in de prijsschommelingen dat niet wordt verklaard door de hoeveelheid van met name sla, is een dergelijke conclusie niet meer dan een aanwijzing voor complementatiteit die met de nodige omzichtigheid dient te worden geïnterpreteerd.

LITERATUURLIJST

1. Vademecum voor de tuinbouw 1975/1976
2. T. Kloek (1966) Indexcijfers
3. Bruce D. Mudgett (1951) Indexnumbers
4. G. Hamming (1975) Gedachten over indexcijfers en seizoenpatronen
5. P.A. Samuelson and S. Swamy (1974) Invariant Economic Index Numbers. The american economic review. sept. 1974
6. H. Theil (1965). The information approach to demand analysis Econometrica jan. 1965
7. T. Kloek and G.M. de Wit (1961) Best Linear and Best Linear unbiased index numbers. Econometrica oct. 1961
8. Subramanian Swamy (1965) Consistency of Fisher's Tests. Econometrica July 1965
9. Merril and Fox Introduction to Economic Statistics
10. Dictaten Economische Kwantitatieve Analyse vakgroep Alg. Agr. Economie L.H. Wageningen
11. Dictaten Wiskundige en Toegepaste Statistiek vakgroep wiskunde L.H. Wageningen