

Nogmaals: Niet stationaire stroming van zoet en zout grondwater met de elementenmethode

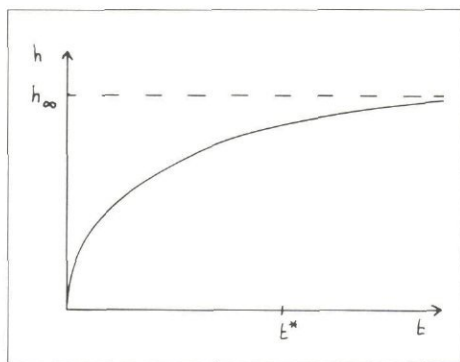
Naar aanleiding van het artikel van prof. dr. ir. A. Verruijt en ir. J. B. S. Gan in H_2O , nr. 24/83, betreffende enige aspecten van niet-stationaire stroming van zoet en zout grondwater, schrijft ir. J. D. Leenen te Nijmegen het volgende:

Hoewel toetsprobleem nr. 1 een stationaire eindtoestand kent, die ook wordt afgeleid, komt niet aan de orde wat nu eigenlijk de tijdsduur is, waarop deze stationaire toestand zich instelt. Dat enig inzicht hierin interessant kan zijn, moge uit het volgende blijken. In het artikel wordt gesproken van 'kleine waarden van de tijd' en het 'allereerste begin' van het proces. Deze begrippen kunnen pas betekenis krijgen wanneer een referentiewaarde wordt aangegeven waarmee ik wil zeggen dat een muis klein is vergeleken met een olifant, maar groot ten opzichte van een vlo.

Hoewel het theoretisch oneindig lang duurt voor de stationaire toestand zich instelt, is echter, evenals bij exponentiële processen, een tijdconstante aan te geven die de snelheid van het proces bepaalt. Deze tijdconstante volgt uit de systeemparameters. Stel de tijdconstante t^* , dan blijkt voor het beschouwde toetsprobleem dat

$$t^* = \frac{L^2 S}{\alpha k (H - h_0)}$$

Met de in het artikel gehanteerde getalwaarden volgt dat $t^* \approx 7,3$ jaar. Zonder de (niet-stationaire) d.v. op te lossen kan daarmee reeds een ruwe schets van het gedrag van de hoogte van het scheidingsvlak ter plaatse van $x = 0$ gemaakt worden (zie afb.).



Ruwe schets van het gedrag van de verhoging van het grensvlak op $x = 0$.

Het beschouwde tijdsinterval van 20 dagen blijkt dermate klein ten opzichte van de tijdconstante van het proces (nl. $1/130 t^*$), dat daarop de kromming van de functie (ook in numerieke vorm) nauwelijks tot uiting kan komen. Het is dan ook gevaarlijk om op basis van tabel II te concluderen dat de verhoging van het grensvlak op $x = 0$ voor $t \ll t^*$ zich lineair gedraagt. Dit zal uit een nadere analyse moeten blijken zoals prof. Verruijt in het artikel ook stelt. Zo ook valt het aspect van

de analytische benadering dat $\frac{\partial h}{\partial t}$ oneindig groot is voor $x = 0$ en $t \downarrow 0$ eigenlijk uit tabel I niet af te leiden, maar komt wel in de wortelfunctie van formule 20 tot uiting. Overigens heb ik de stellige indruk dat in deze tabel een vergissing geslopen is. Bijsturing daarvan verandert afb. 7 en het bijbehorende commentaar aanzienlijk, in die zin dat de eenvoudige analytische benadering ten opzichte van het numerieke model SNARK een behoorlijke opwaardering verdient.

Het zou wat betreft deze waardering wellicht ook interessant zijn om de onderlinge vergelijking over een groter tijdsinterval (bijv. $1/20$ à $1/10 t^*$) na te gaan. Wat betreft het numerieke deel van § 4 het volgende: De nauwkeurigheid van de oplossing wordt zoals bekend bepaald door de stapgrootte (plaats). Het is dan ook een logische procedure om deze stapgrootte af te laten hangen van een zekere nauwkeurigheidseis waaraan voldaan moet worden. Is eenmaal de plaatsstap gekozen, dan volgt met een stabiliteitscriterium als formule 34, de tijdstap.

Uit de tekst (en o.a. formule 34) maak ik op dat een rekenschema is gehanteerd waarbij de fout van orde Δx^2 is. De genoemde stapgrootte van 2 m ($= 0,004 L$) geeft daarmee een nauwkeurigheid van orde-grootte $(0,004)^2 \cdot (H - h_0) \approx 0,5$ mm, hetgeen mijns inziens het doel voorbij schiet (0,006% van maximale stijging). Een fout van 1% van de maximale stijging komt nog alleszins acceptabel over ($\approx 7,5$ cm) waarmee de stapgrootte $\Delta x = 25$ m wordt en de bijbehorende tijdstap ca. 3,3 dagen. Hiermee kan een periode van bijv. 5 jaar in slechts 600 tijdstappen doorgerekend worden tegen geringe kosten.

Halvering van de fout leidt in dit geval tot een verdubbeling van het aantal tijdstappen. Halvering van de plaatsstap leidt tot een verviervoudiging van het aantal tijdstappen. Het is dan ook van bijzonder belang de nauwkeurigheidseis ruime aandacht te geven bij deze berekeningen.

In het algemeen zou ik ervoor willen pleiten om een geohydrologisch probleem (overigens elk fysisch probleem) zoals gepresenteerd in het artikel (zowel analytisch als numeriek), geheel in dimensieloze vorm aan te pakken. Hierdoor worden schaalverschillen opgeheven en variabelen onderling vergelijkbaar. Dikwijls kan daarmee ook ten aanzien van het nodige aantal tijdstappen in een numerieke berekening, een belangrijke winst geboekt worden.

Naschrift

De heer Leenen verdient veel dank voor zijn commentaar, en vooral voor zijn speurzin,

omdat hij heeft ontdekt dat er een discrepantie is tussen formule (20) uit ons artikel en de daarbij behorende tabel. De fout is er vermoedelijk ingeslopen doordat we op een zeker moment het debiet van de put zijn gaan aangeven met $1/2 Q$ in plaats van Q . De vergelijking in afb. 7 moet daarom inderdaad ook worden aangepast, maar de conclusie blijft toch wel dat echt goede resultaten alleen kunnen worden verkregen met een numeriek model. De opmerkingen van de heer Leenen over de grootte van de tijdstappen durf ik niet geheel te onderschrijven. Het programma SWIFT werkt met elementen in een vertikaal vlak, en dan kan men wel de horizontale afmetingen groot kiezen, maar de verticale afmetingen van een element zijn begrensd, door de laagdikte, tot enige meters. En te vrezen valt dat de kleinste element-afmeting bepalend is voor de stabiliteit van het proces, zoals experimenteel ook blijkt. De slechte (want dure) werking van dat programma heeft geleid tot een verdere ontwikkeling van het programma SNARK, dat met elementen in een horizontaal vlak werkt, en met over de hoogte geïntegreerde variabelen. In dit programma zijn grotere afmetingen inderdaad mogelijk. Belangrijker is nog dat de meest recente versies van dat programma werken met een impliciet proces in de tijd, en essentieel stabiel zijn. Het gehele tijdsafhankelijke proces kan dan in zo'n 20 of 40, steeds groter wordende, tijdstappen worden doorlopen.

Dat de verhoging van het grensvlak zich in het begin lineair met de tijd gedraagt (en dus niet met de wortel uit de tijd, zoals de foutieve 'analytische' oplossing stelt) volgt het eenvoudigst uit een speciale oplossing voor de toestand op het tijdstip $t = 0$. Dat kan men doen met Fourier-analyse, of bijvoorbeeld met de vortex-theorie. Men vindt dan een eindige waarde voor de verticale snelheid op het grensvlak, en omdat $ds = v \cdot dt$ betekent dit dat de verhoging in het begin lineair met de tijd verloopt.

De laatste opmerking van de heer Leenen betreft zijn voorkeur voor dimensieloze grootheden. Die voorkeur onderschrijf ik voor analytische beschouwingen, en misschien voor sommige eenvoudige numerieke modellen. Voor de elementenmethode, waarbij men de vorm en de eigenschappen van de elementen in principe kiest op grond van fysische overwegingen, zie ik daarin nogal wat nadelen, vooral bij niet-lineaire problemen. Bovendien zal men toch bij voorkeur een algemeen bruikbaar programma maken, en dan is het voor de gebruiker het handigst als de in te voeren grootheden fysische betekenis hebben.

A. Verruijt

● ● ●