

Modelleren zonder speciale programma's

Verruijt [1982] heeft gelijk als hij zich in dit blad afvraagt of het nog wel zin heeft om zich een calculator aan te schaffen, nu er tegen een lage prijs overal microcomputers te koop zijn die veel meer aankunnen. Niettegenstaande het feit dat een calculator die altijd in de tas zit erg handig is en blijft, vooral met de nodige programma's erbij, heb ik zijn raad ter harte genomen en zelf een Apple //e gekocht. Met zo'n apparaat in eigen beheer ging er een wereld voor mij open: Op het ene moment doet hij dienst als calculator, dan weer fungeert hij als vliegsimulator of zelfs als

die men op het plaatje wenst hoeft niet te worden geprogrammeerd. U tikt de tekst in en schuift deze over het scherm naar de plaats waar u die hebben wilt. Deze tekst wordt later met de rest van het plaatje op de printer geplot.

Bovenstaande interactieve werkwijze is bijzonder plezierig; steeds zie je wat er gebeurt en kan je ingrijpen wanneer dat nodig of gewenst is.

Modelleren met het elektronische kladblok

De boven omschreven berekeningen worden uitgevoerd door een in dit geval zelf geschreven programma. In feite is dit een werkwijze die in de toekomst steeds verder naar de achtergrond zal worden gedrongen, nog niet zozeer omdat er voor alles wel een specifiek programma zal zijn gemaakt, hoewel dat ook een rol speelt, maar vooral door nieuwe ontwikkelingen op softwaregebied (d.w.z. op het gebied van programma-tuur). Hierna zal ik u iets van deze ontwikkelingen laten zien: Grondwatermodellen, zonder speciale grondwaterprogramma's. Sterker nog, zo'n model zal zonder speciale voorbereiding binnen enkele

minuten gereed zijn! Om dit te verwezenlijken maak ik gebruik van een zogenaamd elektronisch kladblok of ook wel elektronisch werkblad genaamd, in het Engels: 'spreadsheet'.

Spreadsheets, voorlopers van de software van de toekomst

Een spreadsheet is een computerprogramma voor algemene toepassingen, waarmee de gebruiker allerlei eigen relaties tussen gegevens kan vastleggen (hierover verderop meer). De grote software-houses maken hun populaire spreadsheets geschikt voor de meest uiteenlopende micro's. De meest bekende, 'Visicalc' en 'Multiplan', zijn voor bijna alle micro-computers (personal computers) verkrijgbaar. De prijs ligt veelal in de buurt van de 700 gulden, waarvoor een dikke handleiding 'manual' wordt geleverd, tezamen met het magnetische schijfje ('floppy') met daarop het programma. Van 'Visicalc' alleen zijn er over de wereld al meer dan 300.000 exemplaren verkocht. De mogelijkheden van deze spreadsheets zijn zo uitgebreid en veelzijdig, dat veelal (mijns inziens terecht) wordt gesteld, dat alleen al

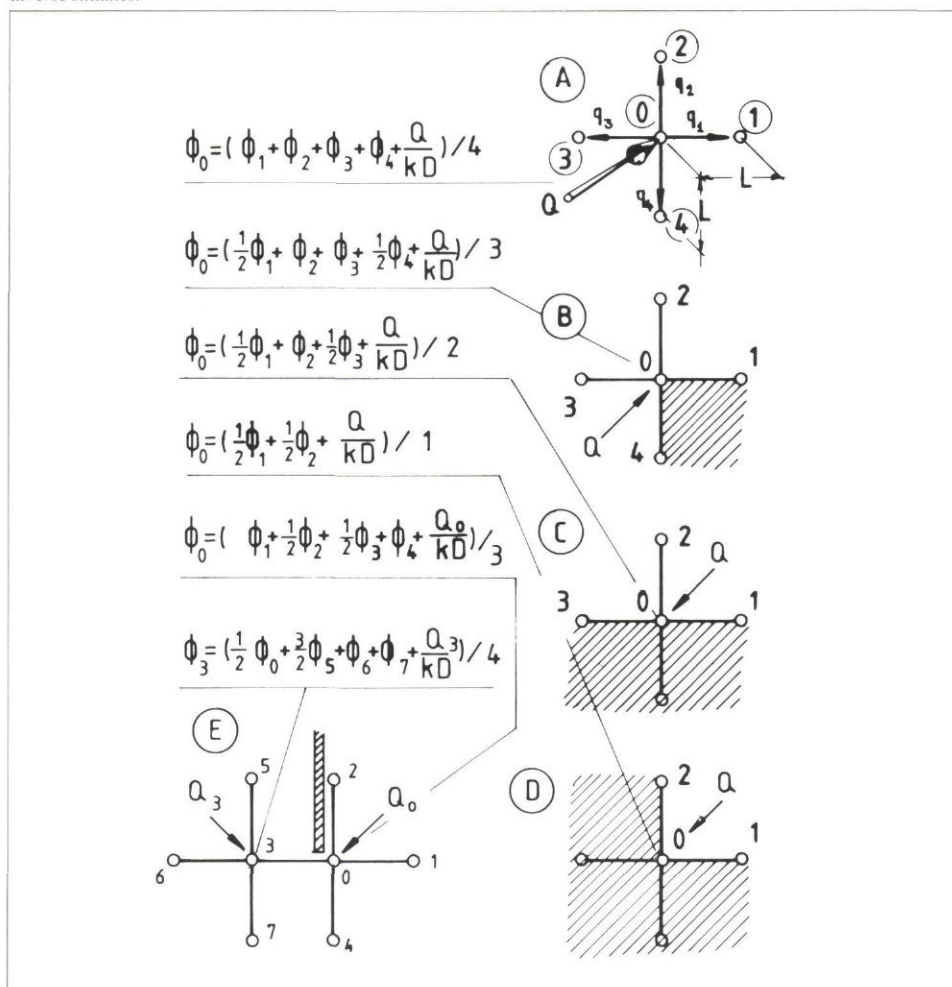


IR. T. N. OLSSTHOORN

muziekinstrument, hij tekent grafieken op het scherm maar evenzeer op de printer, voert de boekhouding van de club, rekent mijn belastingaanslag vooruit en werkt als tekstverwerker voor dit artikel. Kortom een uiterst veelzijdig apparaat dat ik niet meer zou willen missen.

Het spreekt vanzelf dat ik ook bezig ben geweest met wat serieuzer werk, in casu met programma's voor het berekenen van grondwaterstromingen. Een van de eerste programma's die ik heb geschreven beslaat zo'n 22 bladzijden papier, maar past door segmentering (dat wil zeggen opsplitsing in partjes) toch probleemloos in het 64K-geheugen van de machine. Genoemd programma rekent de plaats uit van waterdruppels onder invloed van natuurlijke stroming en een aantal infiltratie- en onttrekkingspunten, waarbij het tevens rekening houdt met dichtheidsverschillen tussen twee watersoorten. Het programma tekent op het scherm in bovenaanzicht de plaats van een kring waterdruppels. Tijdens het rekenen wandelen de druppels over het beeldscherm. Men heeft zo dus direct zicht op de grondwatersituatie en kan op elk moment ingrijpen, bijvoorbeeld als zich een interessante situatie voordoet of wanneer men de randvoorwaarden tussentijds wil bijstellen (zoals putten aan- of afzetten). Dit ingrijpen geschiedt door een willekeurige toets in te drukken. Het programma maakt zijn tijdstap af en vraagt vervolgens wat de bedoeling is: Het plaatje zoals u dat op dat moment voor u ziet plotten (dat wil zeggen door de matrixprinter laten afdrucken precies zoals het op het grafische scherm staat)? Hierna vraagt de computer, door middel van een zgn. 'menu' (lijst met keuzemogelijkheden) of en zo ja wat er eventueel nog gewijzigd moet worden alvorens verder te gaan met zijn reken- en tekenwerk. Tekst

Afb. 1 - Eenlaagsmodel: berekening van de stijghoogte in een knooppunt uit de waarden in de omliggende punten voor diverse situaties.



déze mogelijkheden de aanschaf van een micro rechtvaardigen. Zelf heb ik ervaren, dat veel van het uitgebreidere rekenwerk ten behoeve van rapporten, dat zelfs met een programmeerbare calculator toch altijd nog een aantal dagen kan vergen, met het spreadsheet veelal gemakkelijk binnen een halve dag kon worden geklaard. Door deze de facto ontwikkeling en snel om zich heen grijpende populariteit van dit soort universele programmatuur worden ook steeds meer leveranciers van grotere computer-systemen gedwongen dergelijke programmatuur beschikbaar te stellen.

Alvorens te laten zien op welke simpele wijze met een spreadsheet een grondwatermodel kan worden gemaakt, is het goed eerst op het spreadsheet zelf in te gaan. Een spreadsheet is een computerprogramma dat op het scherm een aantal rijen en kolommen in beeld brengt. Daar het aantal beschikbare vakjes vele malen groter is dan het aantal dat tegelijk op het scherm past, ziet men slechts een deel. Met de 'pijltjestoetsen' op het toetsenbord kan men echter elk gewenst deel van de totale 'matrix' in beeld brengen. U kunt nu het volgende doen: 1) In elk willekeurig vakje een tekst plaatsen (bijvoorbeeld 'pi=' en in een vakje daaronder 'r=' en in een vakje daar weer onder 'omtrek='). 2) In elk willekeurig vakje een getal plaatsen (bijvoorbeeld in het vakje naast 'pi=' het getal '3.1415965' en in het vakje naast 'r=' bijvoorbeeld het getal '7'). 3) In elk willekeurig vakje een formule plaatsen die weer willekeurig andere vakjes op willekeurige wijze met elkaar verbindt. Het getal dat de berekening van de formule in een vakje oplevert wordt in dat vakje zichtbaar. Terugkomend op ons voorbeeld: om het juiste getal in het vakje naast 'omtrek=' te krijgen rekent u nu niet eerst $2 \cdot \pi \cdot r$ op uw calculator uit om het daarna in te vullen, nee, u zegt gewoon: 'wat in dat vakje moet komen is tweemaal dat wat in het vakje naast 'pi=' staat, maal dat wat in het vakje naast 'r=' staat. Dit 'zeggen' gaat uiterst simpel door het bedienen van de pijltjes-toetsen en de toets met het maalteken (*). Nadat dit is gebeurd verschijnt het juiste getal, berekend en wel naast het vakje met 'omtrek='. Vult u een ander getal in naast 'r=', dan verschijnt de nieuwe omtrek direct in het vakje naast 'omtrek='. Op een dergelijke wijze kan elk willekeurig vakje via elke willekeurige formule met een reeks willekeurige andere vakjes worden verbonden. Hierbij bent u niet beperkt tot vermenigvuldigen en delen; er staat een grote reeks functies tot uw beschikking die u in deze formule kunt opnemen (sin, exp, ln etc.). Formules of getallen die u elders in uw kladblok opnieuw nodig heeft hoeft u natuurlijk niet over te tikken, u copieert ze

eenvoudig in de gewenste vakjes. U kunt aldus op zeer eenvoudige wijze voor u op het scherm uw eigen model opbouwen en zo bijvoorbeeld een hydraulische installatie doorrekenen of wat dan ook. Het resultaat is in elk geval een net overzicht dat niet alleen direct rapportrijp kan worden geprint, maar vanzelfsprekend ook op een 'floppy' kan worden bewaard om er eventueel later nog wat in te wijzigen of aan te vullen. Bij de betere spreadsheets kunt u ook voorwaardelijke opdrachten definiëren en kunt u itereren. Het zal uit dit betoog voor elke ingenieur wel duidelijk zijn, dat een dergelijk middel zijn persoonlijke mogelijkheden krachtig kan uitbreiden en de aanschaf van een micro daadwerkelijk loont.

Een grondwatermodel in 2 minuten

Een dergelijk elektronisch werkblad (ik gebruik 'Multiplan') maakt het mogelijk om vanuit het niets in enkele minuten tijd een grondwatermodel op te bouwen en aan het lopen te krijgen. Een apart programma is hiervoor niet nodig. Ter illustratie nemen we nu even het allereenvoudigste numerieke grondwatermodel, nl. een stationair een-laagsmodel met overal dezelfde doorlatendheid. We gaan hiertoe uit van een vierkanten-netwerk, iets dat aangenaam past bij het vakjesrooster van de spreadsheet. Deze aannamen leiden tot de vergelijking van Laplace in twee dimensies, die na discretisatie overgaat in de betrekking dat de stijghoogte in een willekeurig knooppunt (hier vakje) gelijk is aan de som van de stijghoogten van de 4 omringende knooppunten, gedeeld door 4.

(Dit is de meest eenvoudige vorm van de eindige differentiemethode, die bekend staat als relaxatiemethode).

Om dit te verwezenlijken sturen we de 'cursor' (dit is het blinkende vakje dat aangeeft waar we op het scherm zitten) met de pijltjestoetsen naar het vakje waarin de linker bovenhoek van het model moet komen. We 'zeggen' vervolgens dat het getal in dit vakje gelijk is aan: '(zijn rechter buurman + zijn boven buurman + zijn linker buurman + zijn beneden buurman) / 4'. Deze formule kopiëren we vervolgens in alle vakjes die deel gaan uitmaken van het modelgebied en . . . het model is klaar! Tot zover is hoogstens een minuut verstreken. Natuurlijk hebben we een rij vakjes aan alle zijden van het model opengelaten, om daarin eventuele randvoorwaarden aan te brengen. Is die ruimte er niet, dan kan met een eenvoudige handeling een blanco rij of kolom worden ingelast. Indien op de gekozen rand de stijghoogte nul moet zijn, dan hoeven we zelfs deze niet meer op te geven, aangezien het programma elk leeg vakje als zodanig interpreteert. Rest ons nog eventuele interne randen op te geven als putten, sloten en

dergelijke. De eenvoudigste manier is, om in de betreffende vakjes de juiste gegeven stijghoogte in te vullen. Hierna is het intoetsen van een uitroepteken genoeg om het iteratieproces te starten. Worden tijdens het itereren de veranderingen kleiner dan een duizendste dan stopt het programma automatisch. Wil men een ander criterium, dan moet dit even worden opgegeven; een kind kan de was doen!

Het aantal knopen dat op deze wijze in mijn 64K machine mogelijk is, is met rond 1.000 alleszins redelijk. Het aantal hangt vanzelfsprekend samen met de complexiteit van de gebruikte formules. Op een van de steeds goedkoper wordende 16-bits machines, waarin een megabyte of meer aan geheugenplaatsen aanwezig kan zijn, is het aantal mogelijke knopen ruim een orde groter! Zoals verderop zal blijken zijn we allerminst tot het boven aangeduide eenvoudige geval beperkt: Weerstandbiedende lagen, simultane stroming in meerdere pakketten, 3-dimensionale, zelfs tijdsafhankelijke en zuiver freatische stroming zijn enkele van de vele mogelijkheden die zonder meer met het elektronische werkblad, 'het spreadsheet, zijn te verwezenlijken; speciale grondwaterprogrammatuur is hiervoor beslist niet nodig.

Eenvoudige situatie

We beginnen met een eenvoudige situatie, namelijk een eenlaags model met overal dezelfde doorlatendheid gebaseerd op een netwerk bestaande uit vierkantjes. (Meer algemene gevallen komen later aan de orde). De reeds gegeven formule geldt voor een willekeurig punt in het eenlaags model, voor zover dat punt geheel door water is omgeven. Deze en alle volgende formules kunnen op de navolgende wijze direct worden afgeleid uit een eenvoudige waterbalans rond het beschouwde punt (continuïteitswet) in combinatie met de wet van Darcy. Voor de situatie in afbeelding 1a gaat dit als volgt:

$$\text{continuïteit: } q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = Q$$

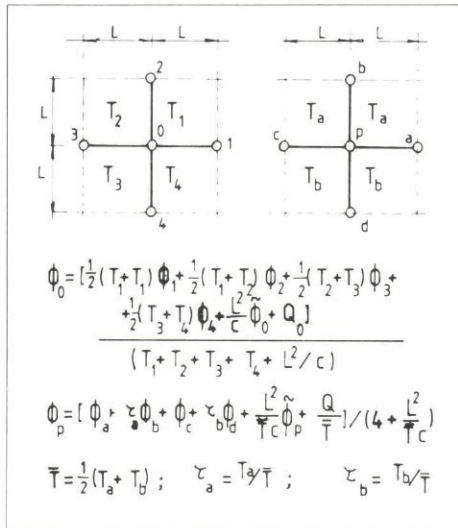
$$\text{Darcy} \quad : q_1 = (\phi_0 - \phi_1) \cdot kD \cdot L/L$$

Zodat als eindresultaat wordt verkregen:

$$\phi_0 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + Q/kD)/4$$

De reeds gegeven relaxatieformule, doch nu uitgebreid met een van buiten het model in het punt geïnjecteerde volumestroom Q [L^3/T].

In deze formules is q_i de specifieke volumestroom [L^2/T] van het punt dat in afb. 1a is aangeduid met 0 naar een van de genummerde omringende punten. ϕ is de stijghoogte in het betreffende modelknooppunt en kD het doorlaatvermogen van het watervoerende pakket [L^2/T]. L in de formule is de riblengte van het knooppuntenraster waarvan afb. 1 steeds slechts een enkel punt laat zien



Afb. 2 - Eenlaagsmodel, heterogene ondergrond: berekening van de stijghoogte in een knooppunt uit de waarden in de omringende punten.

tezamen met zijn directe burens (rekenmolecuul).

Behalve deze formules zijn formules nodig voor bijzondere knooppunten als die langs dichte wanden en dergelijke. Deze zijn op dezelfde manier af te leiden. De diverse formules voor de beschouwde eenlaags-situatie zijn in afb. 1 samengevat. De laatste figuur van afb. 1 geeft de situatie aan het einde van een dichte wand of breuk en een van de manieren waarop deze kan worden geschematiseerd.

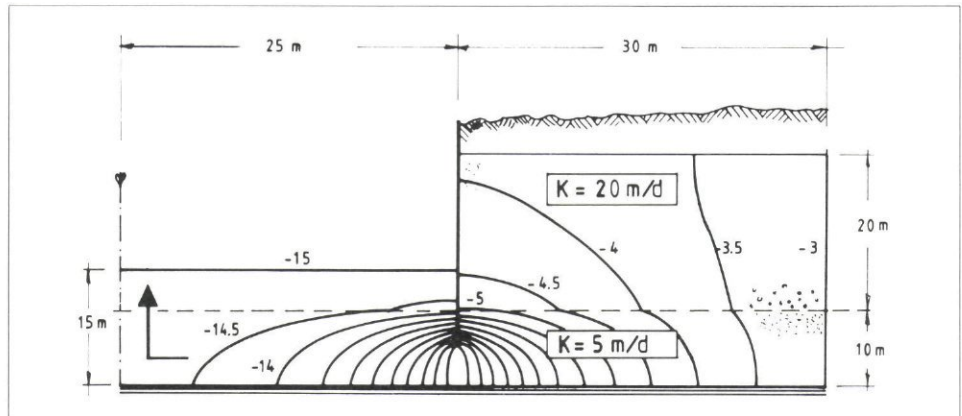
Het moge duidelijk zijn, dat de zo gegeven formules het toelaten als randvoorwaarde een debiet Q toe te passen in plaats van de stijghoogte. Omgekeerd kan voor punten waarin de stijghoogte is opgelegd direct de volumestroom worden berekend. Voor een centraal punt wordt dit:

$$Q = kD * (4\phi_0 - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4))$$

Het is nu ook direct mogelijk om neerslag in te voeren. Beschouw hiertoe Q als de neerslagsom die aan het beschouwde punt wordt toegerekend, of nog beter, breidt Q hiermee uit:

$$Q = Q + L^2 * n$$

met L de riblengte van een vierkant van het netwerk en n voor de neerslag (dimensie [L/T]). (N.B. het sterretje staat steeds voor vermenigvuldiging). Verderop zal worden getoond dat op eenvoudige wijze ook potentiaal-afhankelijke volumestromen in dit schema kunnen worden opgenomen. Wanneer het doorlaatvermogen niet constant is, kan dit in rekening worden gebracht. De betreffende relatie wordt op dezelfde wijze afgeleid, waarbij nu rekening wordt gehouden met de verschillende doorlaat-



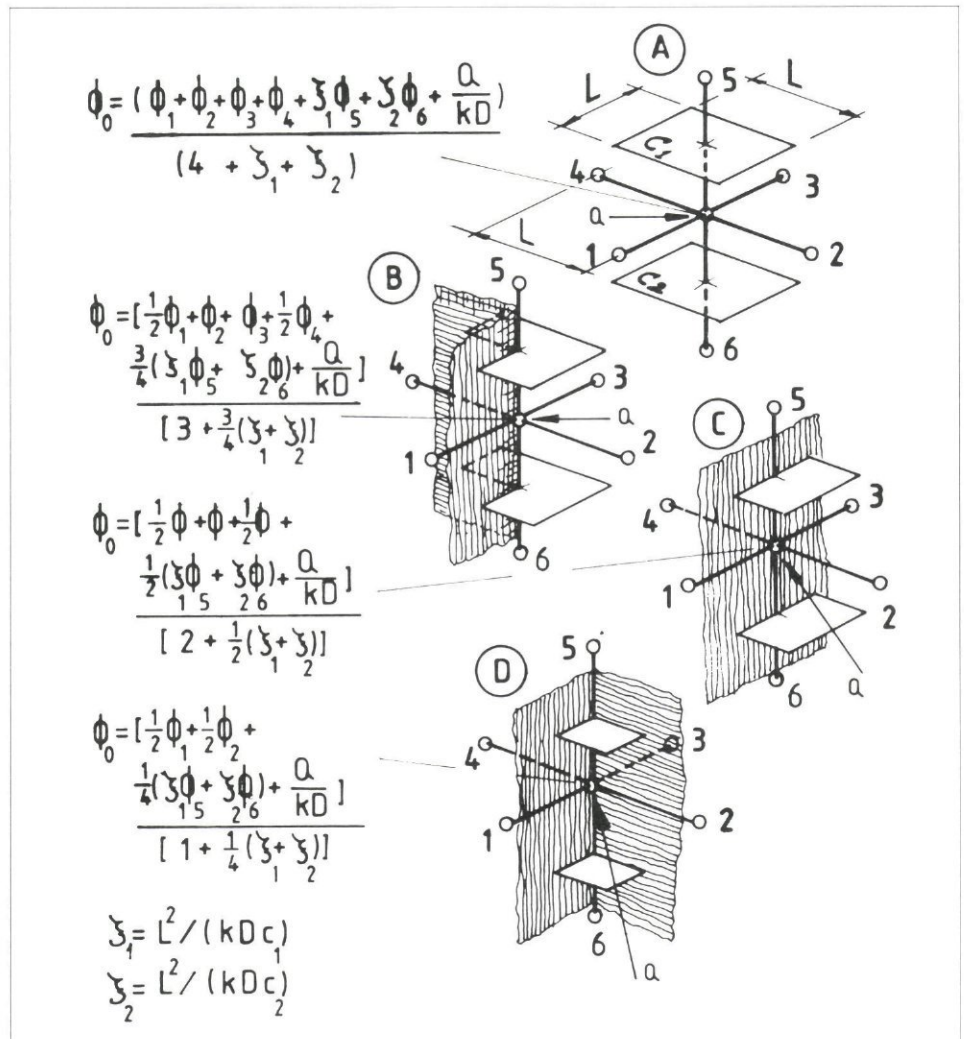
Afb. 3 - Strooming onder een damwand in verticale doorsnede. Randvoorwaarden -3m en -15 m zijn opgegeven, berekend doorstroming is 28,2 m³/d.

vermogens (zie afb. 2 links, waarbij doorlaatvermogen kD met de letter T (transmissiviteit) is aangeduid). Wanneer het doorlaatvermogen langs een rechte lijn verloopt, dan treedt een sterke vereenvoudiging op (zie afb. 2 rechts), een veel voorkomende praktische situatie.

Met de tot nu toe afgeleide betrekkingen

kunnen al heel aardige dingen worden gedaan. Bij wijze van voorbeeld geeft afb. 3 in verticale doorsnede de strooming onder een damwand, met als bijzonderheid dat het bovenste deel van het zandpakket een andere doorlatendheid heeft dan het onderste gedeelte. (Hiertoe is de laatste formule toegepast). De totale waterstroom is op de

Afb. 4 - Meerlagenmodel: berekening van de stijghoogte in een knooppunt uit de waarden in de omringende punten voor diverse situaties.



hierboven beschreven wijze met dezelfde formules berekend, eenvoudig door deze in een aantal vakjes te plaatsen en te verbinden met de vakjes met stijghoogten en de vakjes waarin de doorlatendheidscoëfficiënten zijn geplaatst. Deze waterbalans is hier gebruikt als criterium voor het afbreken van het iteratieproces (op het moment van afbreken bedroeg de totale uitstroming 28,27 m³/d en de totale instroming 28,08. Dit verschil nam per iteratieslag verder af). Het is duidelijk, dat door het veranderen van een van deze doorlatendheden een nieuwe situatie ontstaat die direct kan worden uitgerekend.

Convergentiesnelheid

Wanneer u de formules zoals gegeven toepast, dan zult u merken dat soms enkele honderden iteraties nodig kunnen zijn, iets dat nogal wat tijd kan kosten. Dit probleem treedt met name op wanneer het model slechts weinig punten heeft met een gegeven stijghoogte, in het algemeen, wanneer het probleem minder goed is geconditioneerd. Het benodigde aantal iteraties kan door overrelaxatie echter effectief worden teruggebracht.

Overrelaxatie werkt als volgt: Laat het stijghoogteverschil in een punt tussen

2 opeenvolgende iteraties gelijk zijn aan $\Delta\phi$. In dat geval wordt de oude ϕ^- dus verhoogd met $\Delta\phi$ om de nieuwe betere waarde ϕ^+ te verkrijgen. Wanneer dit proces te traag verloopt, verhogen we de oude ϕ^- niet met $\Delta\phi$ maar met $\alpha^* \Delta\phi$, waarbij de overrelaxatiecoëfficiënt α groter is dan 1. Een waarde van 1,5 à 1,7 is dikwijls in staat het iteratieproces met een orde te versnellen. We kunnen de overrelaxatie als volgt inbouwen. De nieuwe waarde ϕ^+ volgt uit:

$$\phi_0^+ = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)/4$$

De verandering $\Delta\phi$ bedraagt dus:

$$\Delta\phi_0 = \phi_0^+ - \phi_0^- = -\phi_0 + (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)/4$$

Wanneer we overrelaxeren passen we α maal deze verandering toe om de nieuwe waarde te berekenen:

$$\phi_0^+ = \phi_0^- + \alpha \Delta\phi_0$$

Uitgeschreven wordt dit:

$$\phi_0^+ = (1 - \alpha) \phi_0^- + \alpha (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)/4$$

De nieuwe waarde in het beschouwde vakje

wordt dus nu verkregen uit de waarde die reeds in het vakje stond en die van de omringende vakjes, alsmede de overrelaxatiecoëfficiënt die in een willekeurig apart vakje wordt geplaatst. Deze ingreep geldt mutatis mutandis evenzo voor alle andere reeds gegeven en nog te geven betrekkingen.

Complexere situaties

Een complexere situatie is die waarbij het beschouwde pakket aan boven- en aan onderzijde wordt afgesloten door semi-permeabele lagen (waarboven resp. onder weer andere pakketten aanwezig kunnen zijn).

Door op de reeds bekende wijze te werk te gaan ontstaat hiervoor de volgende betrekking (zie afb. 4a):

$$\phi_0 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \zeta_1 \phi_5 + \zeta_2 \phi_6 + \frac{Q}{kD}) / (4 + \zeta_1 + \zeta_2)$$

Hierin is:

$$\zeta_1 = L^2 / (kDc_1) \text{ en } \zeta_2 = L^2 / (kDc_2)$$

met C_1 , C_2 de weerstand van de semi-permeabele laag aan boven- resp. onderzijde van het beschouwde punt [t].

Op dezelfde wijze als hiervoor kan op deze formule overrelaxatie worden toegepast en kunnen de relaties worden afgeleid voor bijzondere punten langs dichte wanden in hoeken en dergelijke. Afb. 4 geeft een overzicht hiervan. Afb. 5 is een voorbeeld met simultane stroming in twee met elkaar verbonden pakketten, waarin deze betrekkingen zijn toegepast.

Het is direct duidelijk dat op deze wijze fluxen kunnen worden geïntroduceerd en opgegeven die van de stijghoogte zelf afhankelijk zijn. Het enige wat hiervoor nodig is, is een van de ζ -waarden in de formule te vervangen door of beter de reeks ζ -waarden uit te breiden met:

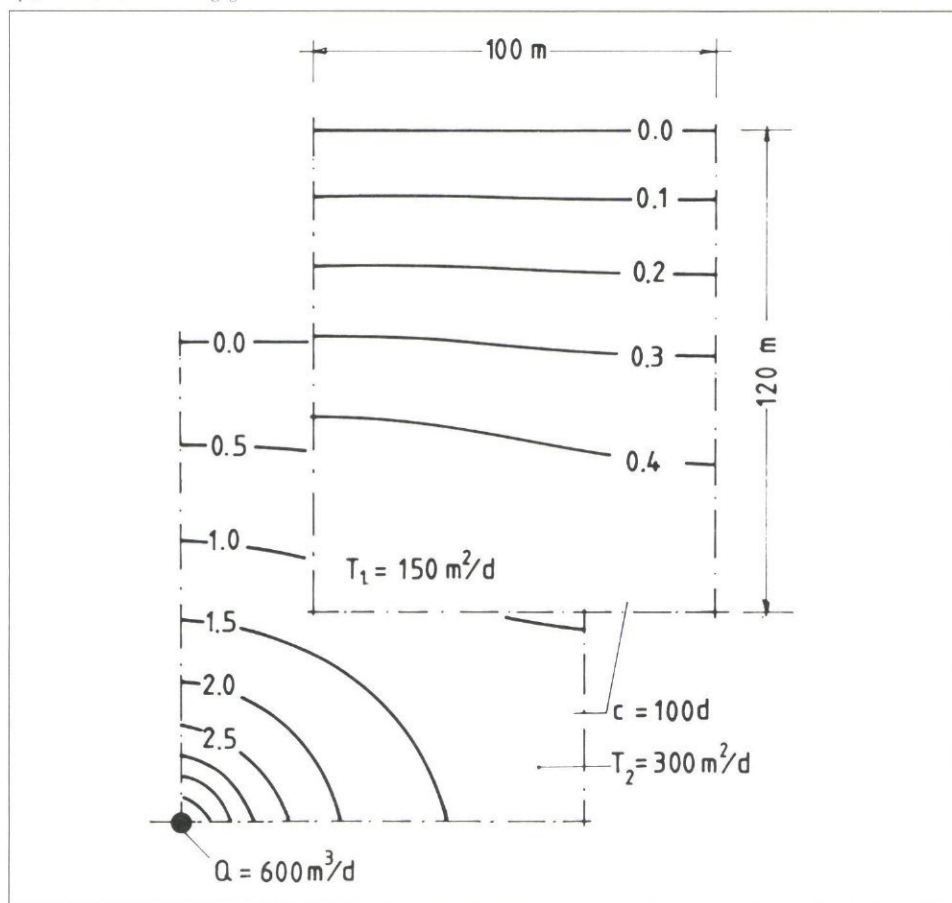
$$\phi_0 = (\dots \zeta_x \phi_x \dots) / (\dots \zeta_x \dots)$$

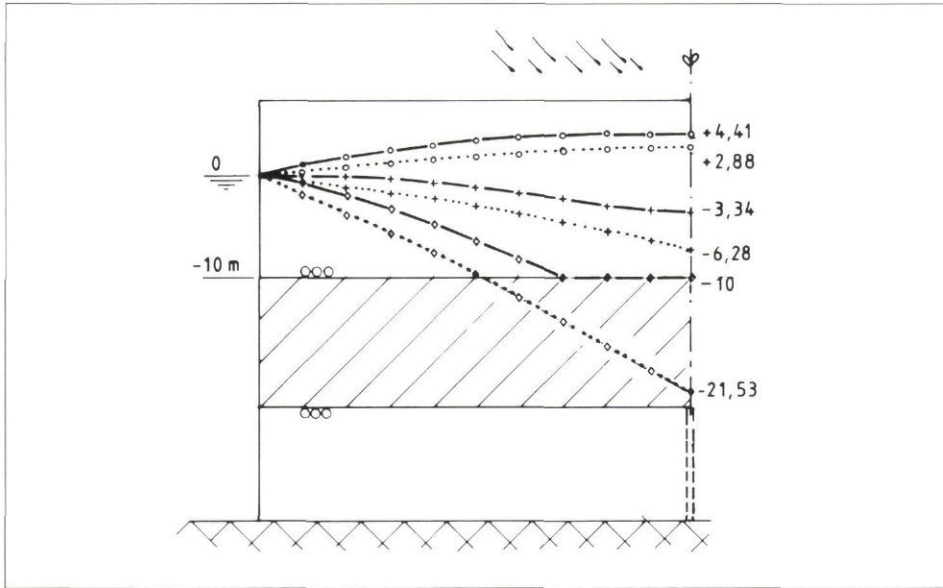
met

$$\zeta_x = \frac{A}{kDc}$$

waarin A/c de introdeweerstand voor dat punt is. A mag hierbij worden beschouwd als oppervlak van bijvoorbeeld een kanaal dat aan het beschouwde punt wordt toegerekend en c als de weerstand van de sliblaag op de kanaalbodem. Een willekeurig aantal van dergelijke 'kanalen' met elk hun eigen stijghoogte, kanaalbodemoppervlak en kanaalbodemweerstand kan op deze wijze aan het beschouwde knooppunt worden gehangen, tezamen met semi-permeabele

Afb. 5 - Simultane stroming in 2 lagen. De rand met stijghoogte 0 is opgelegd, de overige randen zijn dicht. Onttrekking vanuit een hoek in het onderpakket. Omwille van de overzichtelijkheid zijn de pakketten verschoven ten opzichte van elkaar weergegeven.





Afb. 6 - Eendimensionale, simultane stroming in 2 lagen, waarvan de bovenste zuiver freatisch is. Neerslag = 0,001 m/d. Onttrekking vanuit het onderpakket als aangegeven. Bovenste paar stijghoogtelijnen voor onttrekking = 0, middelste paar voor onttrekking = 1.200 m³/d en het onderste paar voor onttrekking = 2.400 m³/d. Bij deze onttrekking valt het bovenpakket geheel droog en valt ter plaatse de voeding naar het onderpakket weg.

lagen (wat hetzelfde is), een volumestroom Q en neerslag (wat hetzelfde als Q is).

Freatisch water

Freatisch water lijkt een probleem, omdat nu de pakketdikte zelf van de stijghoogte afhangt en hierdoor niet-lineariteit ontstaat tussen flux en stijghoogteverschil. Door toe-passing van de juiste 'truc' blijkt dit probleem mee te vallen en treedt convergentie zonder meer op. Ter introductie leiden we eerst de formule af. Het enige verschil met de voorgaande is, dat de pakketdikte D moet worden gekoppeld aan de stijghoogten enerzijds en de vloerhoogte, z , van het freatische pakket, anderzijds. Schrijf hiertoe voor de dikte tussen twee aangrenzende punten i en j het gemiddelde van de waterdiepten in punt i resp. punt j :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_j) - Z$$

Aldus geeft combinatie van Darcy en continuïteit:

$$\begin{aligned} k(\phi_0 - \phi_1) (\frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1) - Z) + \\ k(\phi_0 - \phi_2) (\frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_2) - Z) + \\ k(\phi_0 - \phi_3) (\frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_3) - Z) + \\ k(\phi_0 - \phi_4) (\frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_4) - Z) + \\ (\phi_0 - \phi_6) L^2/c = Q + nL^2 \end{aligned}$$

ofwel, na enige herordening:

$$\begin{aligned} 2\phi_0^2 - 4Z\phi_0 + \frac{L^2}{kc}\phi_0 = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \\ \phi_3^2 + \phi_4^2) - Z(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \\ L^2\phi_6/(kc) + \frac{Q}{k} + \frac{nL^2}{k} \end{aligned}$$

Deze vergelijking wordt terwille van het iteratieproces gelineariseerd door het buiten haakjes brengen van ϕ_0 :

$$\phi_0 = \left[\frac{1}{2}(\phi_1^2 + \dots + \phi_4^2) - Z(\phi_1 + \dots + \phi_4) + \frac{L^2}{kc}\phi_6 + \frac{nL^2}{k} + \frac{Q}{k} \right] / (2\phi_0 - 4Z + \frac{L^2}{ck})$$

Met andere woorden de nieuwe ϕ_0 (ϕ_0 -links) wordt berekend uit de oude ϕ_0 -noemer en de waarden in de omringende vakjes. Omwille van de algemeenheid is in deze formule tevens rekening gehouden met een semi-permeabele laag en een volumestroom Q , welke als hiervoor direct zijn uit te breiden met neerslag en potentiaalafhankelijke fluxen. Ook de laatste formule kan aan relaxatie worden onderworpen, zij het dat de betrekking in dat geval tamelijk complex wordt. Afb. 6 geeft een (omwille van eenvoudige presentatie een-dimensionaal gehouden) voorbeeld van freatisch water tussen een sloot en een dichte wand, met neerslag en een pakket eronder, dat via een semi-permeabele laag meereageert. Interessant is, dat deze betrekking voor het freatische water het toestaat dat het freatische pakket droogvalt, bijvoorbeeld door een sterke onttrekking in het pakket eronder. Numeriek ontstaan niet direct problemen wanneer $\phi_0 = Z$ (droogvallen) aangezien de noemer van de formule dan in het algemeen niet meteen nul wordt. Dit droogvallen kunnen we simuleren door gebruik te maken van voorwaardelijke formules, een optie die standaard in het spreadsheet aanwezig is. De vorm is: IF (A,B,C) wat betekent: indien A waar is

dan doen we B en anders C. In dit geval nemen we:

$$\text{IF}(\phi_0 < Z + \delta, z, \text{formule})$$

De betrekking voor de eerste komma is waar, wanneer het pakket droogvalt (stijghoogte kleiner dan pakketbasis z , δ is een willekeurig klein getal dat numerieke problemen voorkomt), tussen de komma's staat dat de stijghoogte dan op de waarde z wordt vastgehouden en achter de tweede komma komt de hierboven gegeven formule voor de freatische stroming die dus wordt uitgevoerd wanneer het pakket niet droogvalt. Dit doende introduceren we een hydrologisch probleem met het onderliggende pakket. Immers, vasthouden van de stijghoogte in het bovenste pakket impliceert een veel te grote voeding naar onderen. Dit punt wordt opgelost door ook in het onderliggende pakket voorwaardelijke formules toe te passen. Deze zijn van de vorm:

$$\text{IF}(\phi_5 < Z + \delta, \text{formule 1, formule 2})$$

Aldus, wanneer de stijghoogte ϕ_5 in het punt boven het beschouwde punt lager is dan de vloer van het bovenliggende pakket, dan passen we formule 1 toe en anders formule 2. Nu kiezen we voor formule 1 die voor de stroming zonder voeding en voor formule 2 die voor de stroming met voeding van boven. Met andere woorden deze voorwaardelijke betrekking schakelt de voeding vanuit het bovenliggende pakket af, zodra dat droogvalt. Hiermee is het probleem van het droogvallende freatische pakket effectief opgelost. In afb. 6 is dit probleem verwerkt; naarmate de onttrekking in het onderliggende pakket toeneemt zakt de stijghoogte erboven en uiteindelijk valt dit bovenpakket over een zekere lengte geheel droog.

3-dimensionale stroming

Ook 3-dimensionale stroming past zonder meer in de gevolgde methodiek. Beschouw een punt in een ruimtelijk uit kubussen opgebouwd netwerk (afb. 7). Voor de continuïteit geldt dan:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = Q$$

en voor Darcy:

$$q_{ij} = k(\phi_i - \phi_j) \frac{L^2}{L}$$

zodat in totaal:

$$\phi_0 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 + \frac{Q}{kL})/6$$

Afb. 7 geeft de situatie en formules voor punten die niet geheel door water zijn omgeven.

In het spreadsheet gaan we voor de

berekening van een 3-dimensionaal netwerk op dezelfde wijze te werk als bij meerlagenproblemen: voor elke ruimtelijke knooppuntenlaag wordt een apart veld van het spreadsheet gereserveerd en al deze velden worden aan elkaar gekoppeld. Uitbreiding van lagen geschiedt eenvoudig door de betreffende velden naar elders in het spreadsheet te kopiëren. Afb. 8 geeft een voorbeeld van een op deze wijze berekend 3-dimensionaal stromingsprobleem.

Tijdsafhankelijke stroming

Ook instationaire stroming kan zonder grote problemen met het elektronische werkblad worden aangepakt. Dit blijkt nauwelijks ingewikkelder dan de stroming in een pakket met een aangrenzende semi-permeabele laag.

Beschouw het tijdvak t_1, t_2 ter lengte Δt . Geef de stijghoogten aan het begin van dit tijdvak aan met ϕ^- en die aan het einde van het tijdvak met ϕ^+ . Laat nu ϕ (zonder merkteken) de stijghoogte zijn op een moment binnen het tijdvak waarvoor geldt dat de totale volumestroom op dat moment gelijk is aan de gemiddelde volumestroom gedurende het tijdvak. Dat dit moment bestaat volgt direct uit de middelwaardestelling.

Met deze uitgangspunten geldt de volgende waterbalans:

$$(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \Delta t + (\phi_0^+ - \phi_0^-) L^2 \mu + (\phi_0 - \phi_5) \frac{L^2}{c} \Delta t + \dots = Q \Delta t + n L^2 \Delta t$$

en met Darcy, na deling door kD en Δt :

$$+\phi_0 - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + (\phi_0^+ - \phi_0^-) \gamma + (\phi_0 - \phi_5) \frac{L^2}{c} = \frac{Q}{kD} + \frac{nL^2}{kD}$$

waarin:

$\gamma = L^2 \mu / (\Delta t \cdot kD)$ en μ de bergingscoëfficiënt [] ϕ kan worden uitgedrukt in de stijghoogten aan het begin en het einde van het beschouwde tijdvak. Laat ϕ een waarde zijn tussen 0 en 1 dan geldt:

$$\phi = \phi^- + \Theta (\phi^+ - \phi^-)$$

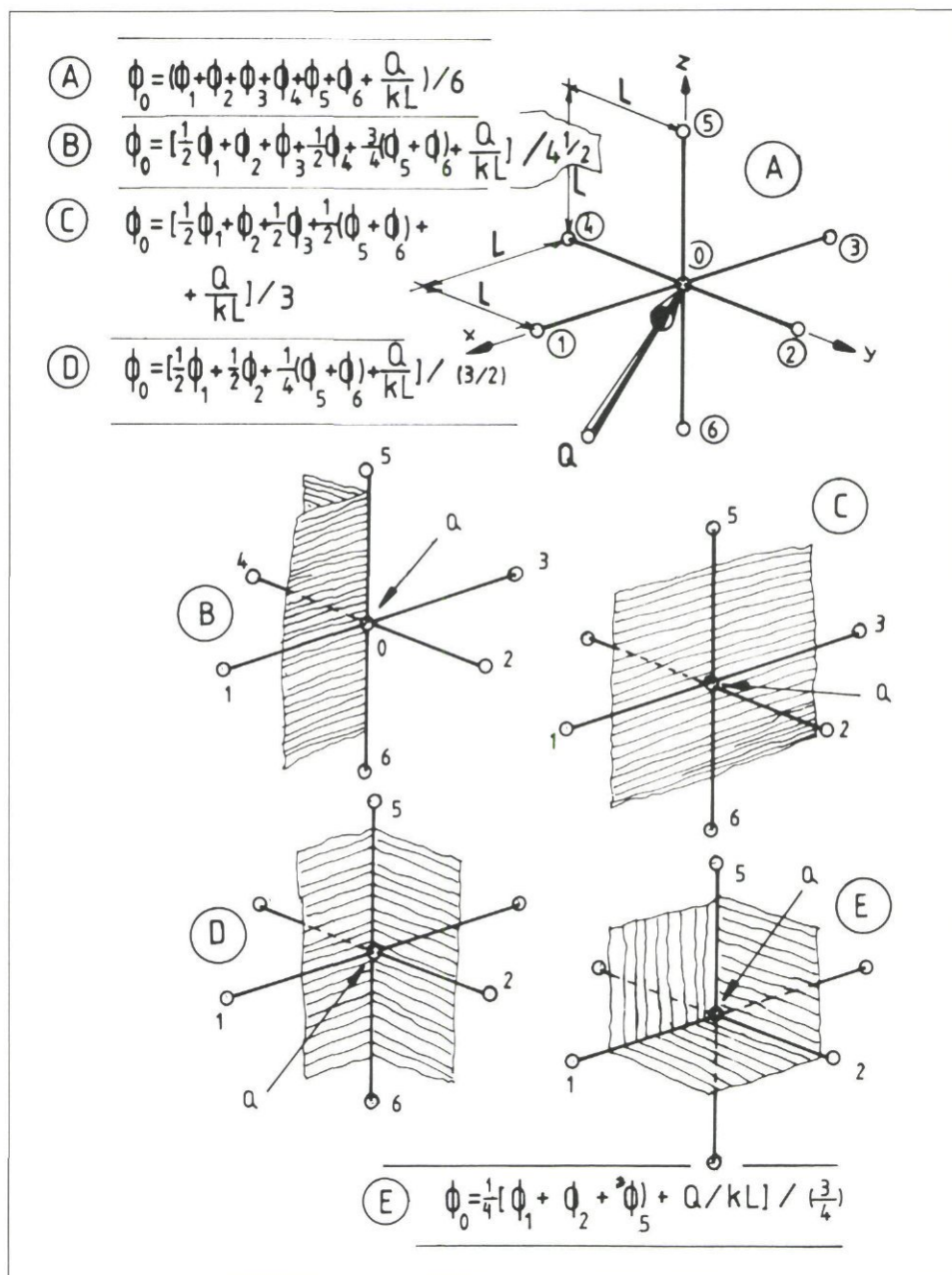
zodat:

$$\phi^+ - \phi^- = (\phi - \phi^-) / \Theta$$

Ingevuld in de formule levert dit:

$$\phi_0 = (\phi_1 + \dots + \phi_4 + \frac{\gamma}{\Theta} \phi_0^- + \frac{L^2}{kDc} \phi_5 + \dots \frac{nL^2}{kD} + \frac{Q}{kD}) / (4 + \frac{\gamma}{\Theta} + \frac{L^2}{kDc} + \dots)$$

waarmee bij gegeven Θ de stijghoogte op het bewuste tussentijdstip iteratief kan worden berekend uit de omringende stijghoogten en de stijghoogten aan het begin van het tijdvak. (U ziet aan de formule dat de tijds-



Afb. 7 - Driedimensionaal model: berekening van de stijghoogte in een knoop uit de waarden in de omringende knooppunten voor diverse situaties.

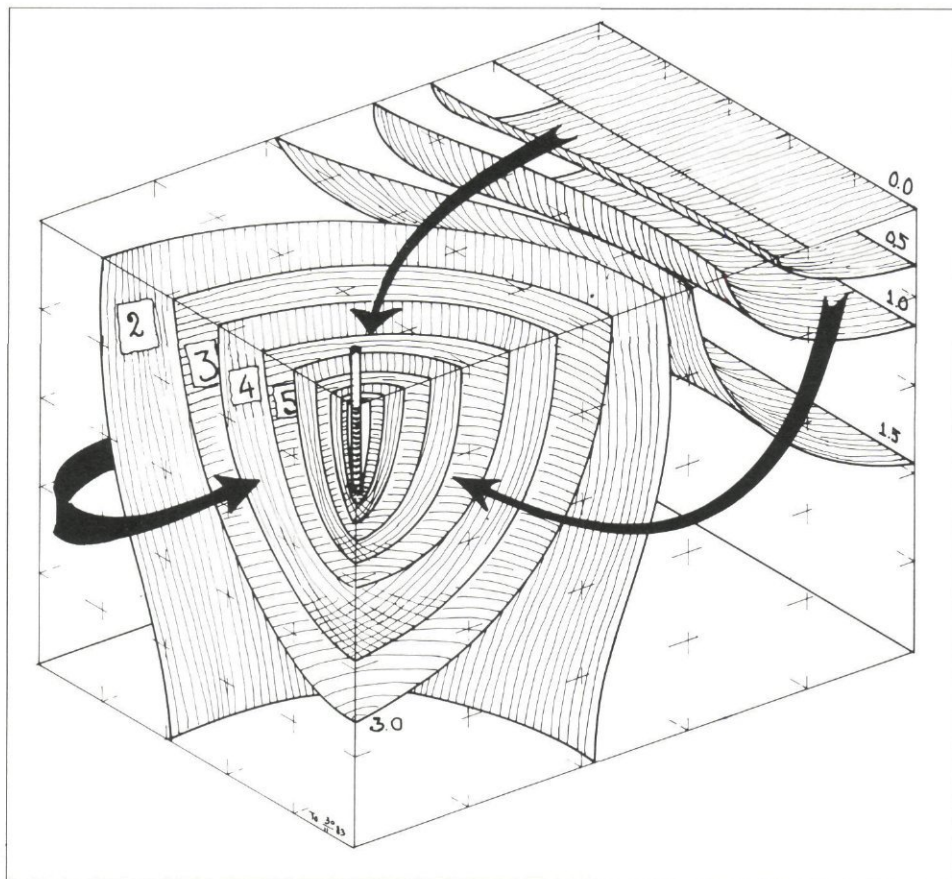
afhankelijkheid op precies dezelfde wijze in de formule terechtkomt als een semi-permeabele laag.) De stijghoogten aan het einde van het beschouwde tijdvak volgen direct uit de berekende waarden en die aan het begin van het tijdvak:

$$\phi^+ = \phi^- + (\phi - \phi^-) / \Theta$$

Deze methodiek is dezelfde als gepubliceerd door Verruijt [1972].

Door in het spreadsheet de formules voor een tijdvak op te zetten en in andere delen van het spreadsheet te kopiëren, kan de stijghoogte voor een reeks tijdstippen worden berekend. Het resultaat is een spreadsheet met in verschillende velden de stijghoogten die

gelden op verschillende tijdstippen. (Er zijn echter meer mogelijkheden, sommige geavanceerder, om dit effect te bereiken.) De waarde van Θ speelt bij de tijdsafhankelijke stroming een belangrijke rol. Deze coëfficiënt bepaalt de mate van impliciet van de berekening. Bij $\Theta = 0$ wordt volledig expliciet gerekend (schema van Euler) en bij $\Theta = 1$ volledig impliciet. $\Theta = 0.5$ vertegenwoordigt het Crank-Nicholson-schema (centrale differentie in de tijd), welke normaliter de hoogste nauwkeurigheid levert. Waarden van $\Theta > 0.5$ garanderen stabiele oplossingen, terwijl waarden < 0.5 bij ongelukkige keuze van de verhouding tussen tijdstap, vierkantgrootte, bergingscoëfficiënt en doorlaatvermogen



Afb. 8 - Berekend driedimensionaal probleem ($6 \times 6 \times 6$ knooppunten 10 m hart op hart; $k = 10$ m/d) in alzijdig gesloten blok grond ($50 \text{ m} \times 50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$). Weergegeven zijn de ruimtelijke potentiaalvlakken bij de stroming tussen een sloot (stijghoogte 0 m) en een put (stijghoogte -10 m). De berekende onttrekking bedraagt $920 \text{ m}^3/\text{d}$.

tot oscillerende oplossingen leidt.

Een praktische waarde voor Θ is $2/3$, een waarde die overeenkomt met Galerkin-benadering van de tijdsvariabele (eindige elementen). Afb. 9 geeft een voorbeeld van stationaire stroming.

Willekeurige netwerkverfijning

Willekeurige netwerkverfijning in een vierkantenraster mag als klap op de vuurpijl worden beschouwd, aangezien dit een optie is waar menig grondwatermodel-gebruiker sinds jaar en dag verlangend naar uitzag terwijl hij zat te zuchten over een van de vele doorgaans volstrekt onoverzichtelijke driehoekjes-patternen.

Beschouw nu de overgang van een grof naar een fijn netwerk, waarbij de ribbreedte van het fijne netwerk de helft is van die van het grove (dit is overigens geen dwingende eis). Afb. 10 geeft deze overgang. We stellen nu de waterbalans op voor de overgang van het fijne naar het grove netwerk waarbij de breedte van de stroombaan naar de diverse punten nauwkeurig in rekening wordt gebracht. De vergelijkingen voor de relevante punten zijn in afb. 10 opgenomen.

Wanneer het binnendeel van een netwerk op een dergelijke wijze wordt verfijnd, is er op het spreadsheet binnen het grovere netwerk

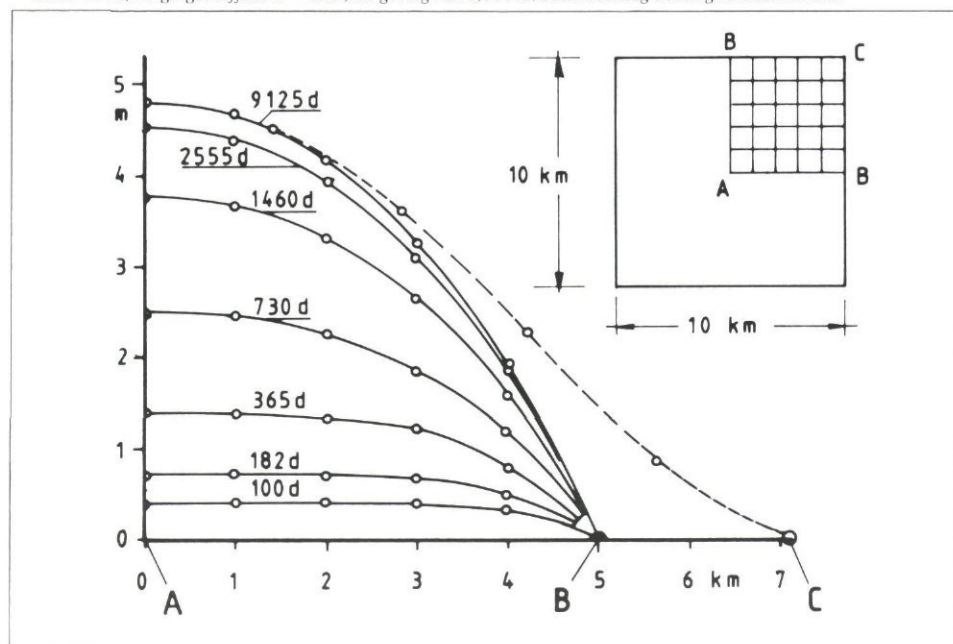
te weinig ruimte voor het grotere aantal vakjes. Dit kan worden opgelost door het fijnere deel van het netwerk elders op het spreadsheet te plaatsen en dit van daaraf aan

het grovere te koppelen. In het spreadsheet waarmee afb. 11 is berekend werd op deze wijze tewerk gegaan. U kunt echter ook van binnenuit werken. In dat geval ontstaat een zeer compact geheel aangezien voor de buitenste, grove vierkanten steeds minder vakjes nodig zijn. In afb. 11 ziet u behalve de resultaten een groot deel van het netwerk waarop de getekende stijghoogtelijnen zijn gebaseerd. Het probleem in afb. 11 heeft meer bijzonderheden: Het fijne binnengebied bestaat namelijk uit 2 lagen, gescheiden door een semi-permeabele laag. Deze twee lagen zijn op de overgang naar de eerste band met grovere vierkanten aaneengeknoopt tot een enkel totaalpakket. In het binnengebied zelf is het bovenste pakket freatisch en kan droogvallen. Door de toegepaste onttrekking (die uitsluitend in de diepere laag plaatsvond) is dit bovenste pakket ook drooggevallen en wel binnen de aangegeven stippellijn in het uitgesneden en omhoog getilde blok. Voorts bevat het onderste pakket in het binnengebied een dichte wand waar het water omheen moet stromen. De vergelijking voor deze wand is zodanig, dat hij niet een dikte heeft die gelijk is aan de ribbreedte van een vierkant van het netwerk, maar zeer dun is. In feite is het door aanpassing van de vergelijkingen mogelijk een dichte of semi-dichte wand willekeurig tussen de knooppunten te laten verlopen, zonder daarvoor de ligging van de knooppunten te moeten aanpassen of de dichte wand over de knooppunten te laten lopen.

Samenvatting en conclusies

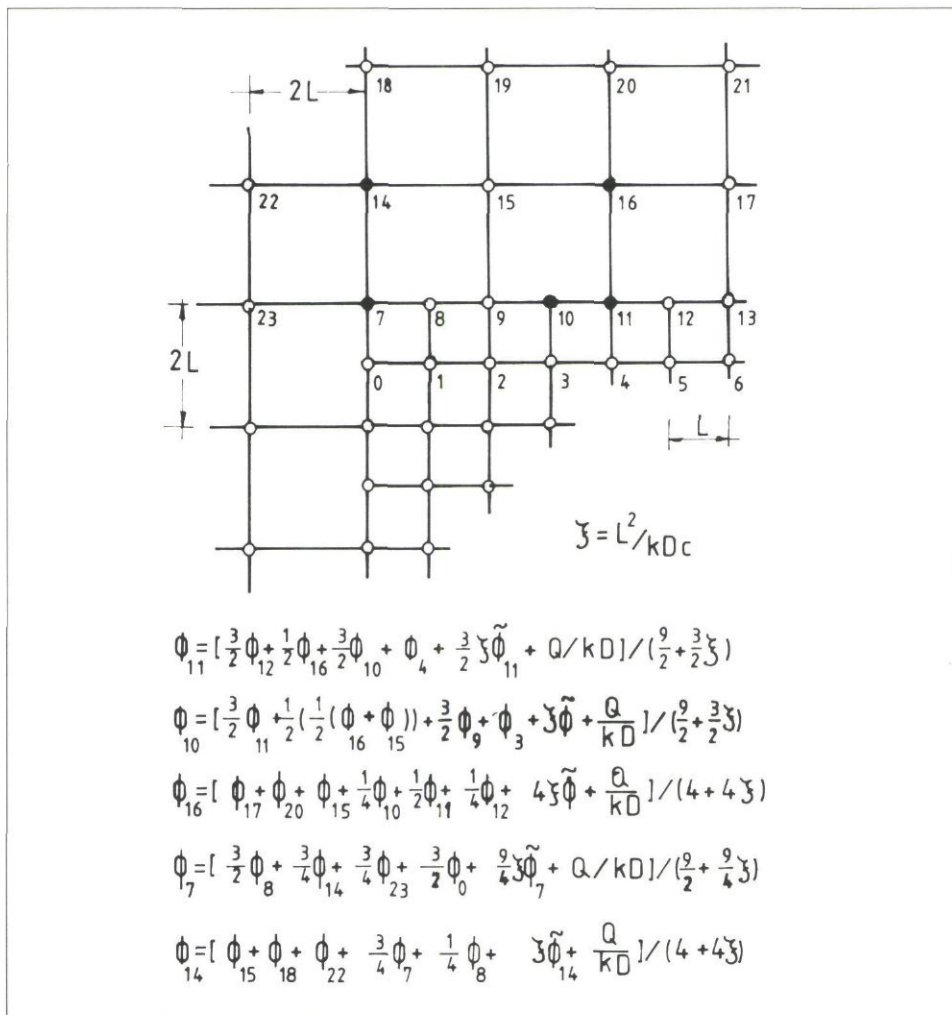
Het voorgaande artikel geeft een beeld van de mogelijkheden die een elektronisch

Afb. 9 - Berekende stijging van de ten tijde nul horizontale grondwaterstand in een vierkant gebied van $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ ($kD = 1.500 \text{ m}^2/\text{d}$; bergingscoëfficiënt = 0.25) als gevolg van 0.001 m/d aan neerslag en vastgehouden randen.



werkbld de ingenieur kan bieden. Elektronische werkbldn vormen de voorbode van een nieuwe manier van werken en een nieuwe generatie programmatuur; geen specialistische programmatuur die voor slechts enkele problemen gebruikt kan worden, maar programmatuur die geschikt is voor de meest uiteenlopende zaken. Programmatuur, bovendien, die uitblinkt door gebruiksgemak en waarvoor computerkennis absoluut overbodig is, programmatuur voorts, waarvan zelfs de maker bij lange na niet heeft kunnen voorzien waarvoor het allemaal gebruikt zou worden, programmatuur kortom, waarvan de toepassingsmogelijkheden slechts door de fantasie en creativiteit van de gebruiker worden beperkt. Een bescheiden voorbeeld van de mogelijkheden is getoond aan de hand van enkele grondwaterberekeningen. Het blijkt mogelijk om binnen enkele minuten een niet te ingewikkeld, numeriek eindige differentie-model met enkele honderden knooppunten te creëren en aan het draaien te krijgen. Tal van bezwaren en wellicht op dit moment nog onvermijdbare beperkingen blijken met wat fantasie te kunnen worden omzeild of overwonnen. In elk geval is elke hydroloog

Afb. 11 - Voorbeeld met netwerkverfijning en het effect van een damwand. Het fijne binnenste netwerk (maaswijdte 12,5 m) bevat twee watervoerende pakketten die ter plaatse van de eerste vergroving tot een groot pakket aaneen zijn geknoopt. Het bovenste pakket is zuiver freatisch en valt binnen de aangegeven stippellijn (-11,25 m) droog als gevolg van de onttrekking die uitsluitend in het diepe pakket plaatsvindt (totale onttrekking is berekend op 880 m³/d). $k_1 = 5 \text{ m/d}$; weerstand $c = 25 \text{ d}$; $k_1 D_1 = 20 \text{ m}^2/\text{d}$; kD -totaal in buitengebied = $50 \text{ m}^2/\text{d}$. De netwerkvergroving is alzijdig hetzelfde en herkenbaar uit het gebied tussen het zichtbare deel van de gegeven rand (-3 m lijn) en het fijnmazige binnengedeelte van het netwerk.



Afb. 10 - Berekening van de stijghoogte uit de omringende punten voor de kenmerkende (zwart aangegeven) knooppunten op de overgang van een grof naar een fijn netwerk.

met de aangegeven middelen in staat een breed scala van vraagstukken op te lossen zonder jaren te moeten studeren op complexe analytische oplossingen en zonder afhankelijk te zijn van mystieke modellen. Goede kennis van het begrip 'waterbalans' wordt weer vele malen belangrijker dan computerkennis of vaardigheid in programmeren ... en zo hoort het ook.

Verantwoording

Dit artikel kwam geheel onder eigen verantwoording tot stand.

Literatuur

- Verruijt, A. 'Solution of transient groundwater flow problems by the finite element method'. Water Resources Research, Vol. 8, No. 3, June 1972.
 Verruijt, A. 'Een alternatief voor programmeerbare calculators'. H₂O (15) 1982, nr. 9, p. 206-207.
 Verruijt, A. 'Theory of groundwater flow'. Macmillan, London and Basingstoke, 1970, 190 pp.

