

BEGROTINGSTECHNIEK EN LINEAIRE PROGRAMMERING

door
J. de Veer, ec.drs.

Interne Nota No. 60

I. Begroting en begrotingstechniek

Het woord begroten betekent oorspronkelijk het schatten van de grootte; in de administratie wordt het echter meestal gebruikt voor het schatten van de inkomsten en uitgaven van een toekomstige periode.

In de overheidsadministratie heeft het begrip zich echter verder ontwikkeld. Het is hier niet meer alleen een schatting voor inkomsten en uitgaven, maar omvat eigenlijk het gehele regeringsprogramma. De regering legt in de begrotingen het door haar uitgestippelde beleid vast en legt het in deze vorm ter goedkeuring aan de volksvertegenwoordiging voor. Aanneming van de begroting houdt eigenlijk voor de regering een mandaat en tevens een opdracht in om een bepaald beleid te voeren. Men zou de begroting kunnen definiëren als een regeringsprogramma, gezien van het aspect van inkomsten en uitgaven.

De begroting is bij het overheidsbestuur tevens een middel tot het verkrijgen van een goede coördinatie tussen de verschillende ministeries en tussen verschillende afdelingen binnen een ministerie.

In de leer van de bedrijfsorganisatie heeft de begroting ongeveer een zelfde functie als in het overheidsbestuur.

Ook hier dient de begroting tot het uitstippelen van het bedrijfsbeleid en de voortdurende controle van de uitvoering met behulp van de in de begroting vastgestelde normen. Daarnaast vormt deze ook hier echter een middel tot coördinatie van de verschillende afdelingen en functionarissen van het bedrijf. Aan de begrotingen worden bevoegdheden ontleend, maar er worden tevens verantwoordelijkheden door vastgesteld.

Men zou deze bedrijfseconomische begrotingen kunnen karakteriseren als een bedrijfsplan gezien van het aspect van kosten en opbrengsten van het bedrijf. De begroting in deze zin is een

middel om een goede uitvoering van het vastgestelde bedrijfsplan te bevorderen.

Indien in de landbouw-bedrijfseconomie over begrotingen wordt gesproken, wordt hieraan echter een andere betekenis gegeven dan in de bedrijfseconomie bij de leer van de organisatie.

In beide gevallen kan men de begroting weliswaar karakteriseren als een bedrijfsplan bezien van het aspect van de kosten en de opbrengsten van het bedrijf; het doel is echter in de landbouw-bedrijfseconomie niet een zo goed mogelijke uitvoering van een reeds vastgesteld bedrijfsplan, maar het kiezen van een zo goed mogelijk bedrijfsplan door middel van het vergelijken van de kosten en opbrengsten van verschillende bedrijfsplannen.

Begrotingstechniek kan worden omschreven als de techniek om door vergelijking van verschillende bedrijfsplannen - wat betreft de kosten en opbrengsten die eraan zijn verbonden - te komen tot de keuze van een bedrijfsplan, dat bij de bestaande technische mogelijkheden en geldende produktie-omstandigheden een maximaal resultaat oplevert. Deze definitie behoeft nog enige nadere toelichting. Het maximale bedrijfsresultaat kan als werkhypothese gelijk gesteld worden aan het hoogste inkomen, dat de boer zich als arbeider en ondernemer kan verwerven.

Hierbij moet er echter rekening mee worden gehouden, dat het opvoeren tot een maximum van het inkomen, voor de boer vaak niet de enige richtlijn is bij het nemen van zijn beslissingen. Andere factoren die de keuze van het bedrijfsplan kunnen beïnvloeden zijn de arbeidsinspanning en zorg die van de boer worden gevraagd bij de uitvoering van het bedrijfsplan en de wisselingen van het inkomen, welke van jaar tot jaar kunnen optreden als gevolg van weersomstandigheden en prijsbewegingen. De gevoeligheid van de bedrijfsuitkomsten voor weer- en prijsveranderingen loopt voor

verschillende bedrijfsplannen vaak sterk uiteen. De wijze, waarop de boer hierop reageert hangt natuurlijk af van de persoonlijke instelling van de boer, maar ook van de wijze van belastingheffing, de hoogte van de vaste kosten (o.a. pacht), de grootte van het eigen vermogen en dergelijke.

II. Het vergelijken van begrotingen

Het aantal mogelijkheden met betrekking tot de keuze van het bedrijfsplan is zeer groot. In het algemeen zijn er op het landbouwbedrijf, in het bijzonder op het akkerbouwbedrijf, een groot aantal produktiemiddelen en een grote verscheidenheid van produkten en er zijn ontelbare combinaties van produktiemiddelen en produkten mogelijk. Men behoeft slechts te zien naar de in de praktijk bestaande verscheidenheid in bedrijfstype en bedrijfsvoering om zich dat bewust te worden.

In de praktijk is echter het aantal mogelijkheden, dat overweging verdient, beperkt.

De boer beschikt over een bepaald bedrijf, waardoor de aard van de grond, de ontwatering, de grootte en ligging van de percelen, de oppervlakte en dergelijke in onderlinge samenhang en met de daaraan verbonden kosten gegeven zijn.

De keuze is hier beperkt tot het al of niet aanvaarden c.q. voortzetten van het bedrijf.

Bij de keuze van de produkten, die men wil voortbrengen is men gebonden aan de eisen van de vruchtwisseling (bijv. niet meer dan 1/3 aardappelen), de vruchtopvolging (karwij na erwten, erwten niet na vlas, etc.) en de noodzaak tot gemeenschappelijke produktie (melk-vlees, wintermelk-zomermelk, korrel-stro, bietenloof). Ook in de combinatie van de produktiefactoren zijn er zekere beperkingen. Gegeven het bedrijf is men bijvoorbeeld vaak reeds gebonden aan de minimale vaste arbeidsbezetting, die ongeacht het bedrijfsplan, benodigd is voor het in stand houden van

een goede cultuurtoestand (Louwes spreekt hier van de eigen bewerkelijkheid van het bedrijf). Ook de werktuigen- en trekkrachtinventaris met de daaraan verbonden vaste kosten is bij vele problemen reeds een gegeven, daar deze op korte termijn niet of zeer moeilijk kunnen worden gewijzigd.

In de praktijk van het begrotingswerk, wordt het aantal mogelijkheden ook nog op andere wijze beperkt. Wat betreft de mogelijkheden tot variatie van de kunstmestgift per ha bij het voortbrengen van een bepaald gewas wordt bijvoorbeeld een bepaald niveau optimaal verondersteld. Ook kunnen bepaalde combinaties reeds op het eerste gezicht als irrationeel terzijde worden gelegd (bijvoorbeeld een melkmachine op een bedrijf met 5 koeien, een maaidorser op een akkerbouwbedrijf van 15 ha enz.).

Ook indien men deze beperkingen in acht neemt, is het aantal mogelijke combinaties van produkten en produktiemiddelen in de praktijk vaak zeer groot en is derhalve, indien men een optimaal bouwplan wil ontwerpen, het opstellen en vergelijken van een groot aantal begrotingen noodzakelijk.

Om de winstgevendheid van een aantal bedrijfsplannen te vergelijken, behoeven echter niet de totale kosten en opbrengsten van elk bedrijfsplan te worden berekend en vergeleken. Er kan worden volstaan met het vergelijken van de kosten en opbrengsten die veranderen als gevolg van de wijzigingen, welke men in het bedrijfsplan wil aanbrengen.

Deze kosten welke aan het veranderen zijn en opbrengsten worden in de literatuur meestal aangeduid als directe kosten, soms ook variabele kosten; de kosten welke niet zullen veranderen, noemt men algemene of ook wel vaste kosten.

Deze indeling in directe kosten en algemene kosten is dus afhankelijk van de aard van de wijzigingen, welke men in het bedrijfsplan overweegt aan te brengen. Het zal duidelijk zijn,

dat men niet vooraf op bepaalde kosten of opbrengsten het etiketje directe of algemene kosten kan plakken.

Men zou kunnen zeggen, dat de indeling in ^{ruw} vaste en algemene kosten afhankelijk is van het niveau der beslissing, waarop men de begrotingen uitvoert. Een lopend bedrijf is gebonden aan de oppervlakte van het bedrijf, de aard van de grond, de bedrijfsgebouwen en de beslissingen, die in het verleden zijn genomen ten aanzien van de uitrusting met werktuigen en trekkracht en de omvang van de vaste arbeidsbezetting. Op korte termijn kunnen hierop meestal geen wijzigingen worden aangebracht. Bij de verdere beslissingen ten aanzien van het bedrijfsplan zullen deze kosten niet veranderen en deze kunnen buiten beschouwing worden gelaten bij het opstellen van begrotingen van deze beslissingen. Natuurlijk moet men zich bewust zijn, dat dit een vereenvoudiging is van het probleem en dat vaak, ook op betrekkelijk korte termijn, wel wijziging in de min of meer starre uitrusting van het bedrijf kan worden aangebracht.

Naarmate dieper ingrijpende wijzigingen in het bedrijfsplan worden overwogen of men vrijer is in de beslissingen ten aanzien van de uitrusting van het bedrijf, dient een groter deel van de kosten als variabel te worden beschouwd. Bij het opstellen van begrotingen voor ruilverkavelingen of nieuwe inpolderingen moeten bijvoorbeeld nagenoeg alle kosten als variabel worden beschouwd.

Een verdere vereenvoudiging en een betere hanteerbaarheid van het begrotingsstelsel worden nog verkregen door het werken met saldi van directe opbrengsten minus directe kosten per hawas of per voedereenheid (Broekhuis, Spaans, Louwes).

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de omstandigheid, dat de directe kosten en opbrengsten bij het wijzigen van de oppervlakte van een bepaald gewas of van de veebezetting vaak in dezelfde

richting en dezelfde verhouding veranderen of, anders gezegd, dat er een lineair verband bestaat tussen de oppervlakte van een bepaald gewas (c.q. de grootte van de veebezetting) en hoogte van de daaraan verbonden directe kosten en opbrengsten.

Doordat men op deze wijze een geheel complex van lineair samenhangende kosten en opbrengsten als het ware kan samenvatten, wordt het opstellen en vergelijken van een groot aantal begrotingen zeer vergemakkelijkt.

Het spreekt vanzelf, dat men deze saldimethode slechts kan toepassen als er inderdaad een lineair verband tussen kosten en opbrengsten bestaat. Toepassing van de saldimethode op begrotingen voor wijzigingen in de bedrijfsuitrusting, waarbij ook de kosten van ondeelbare produktiemiddelen veranderen, is gevaarlijk, indien men deze beperking niet in acht neemt.

III. Het bepalen van het optimale bedrijfsplan

Ondanks deze vereenvoudigingen is het echter meestal toch onmogelijk alle produktieplannen te begroten en onderling te vergelijken hoewel dit voor het bepalen van het optimale programma noodzakelijk zou zijn. Om dit bezwaar te ondervangen wordt gebruik gemaakt van methoden, die leiden tot een optimaal bedrijfsplan, zonder dat alle mogelijkheden behoeven te worden onderzocht.

Een aantal methoden zal in dit hoofdstuk in het kort worden besproken en indien dit nuttig kan zijn, met voorbeelden worden toegelicht:

1. bedrijfsvergelijking;
2. vergelijking van kostprijs en opbrengstprijs;
3. saldimethode;
4. lineaire programmering.

Deze opsomming is niet volledig. Vele van de andere methoden die toegepast worden zijn echter combinaties van of variaties op de hier genoemde.

1. Bedrijfsvergelijking

Vergelijking van bedrijven met verschillend bedrijfsplan en verschillende bedrijfsuitkomsten, die in ongeveer dezelfde externe produktie-omstandigheden verkeren, kan aanwijzingen opleveren omtrent de richting, waarin men het optimale bedrijfsplan moet zoeken. Deze methode is in het bijzonder toepasselijk bij het aanbrengen van wijzigingen in het bedrijfsplan van bestaande bedrijven. Vooral indien er grote gebreken aan het gevolgde bedrijfsplan kleven, kunnen hiermede spectaculaire resultaten worden bereikt.

Voor de bedrijfseconomische voorlichting is deze methode dan ook van veel belang en wordt hij hier en in het buitenland veel toegepast (vgl. de inleiding van Prof. Sturdock te Utrecht). De bedrijfsvergelijking heeft vaak plaats door bepaalde onderdelen van het bedrijf te testen met behulp van kengetallen (b.v. arbeidskosten en werktuigkosten per ha, aantal melkkoeien per arbeidskracht).

Over de techniek van bedrijfsvergelijking zal op deze plaats niet verder worden uitgeweid.

2. Vergelijking van kostprijs en opbrengstprij

In de praktijk ontmoet men (nog) vaak de mening, dat vergelijking van de kostprijs en de opbrengstprij van de voortgebrachte produkten aanwijzingen oplevert omtrent de wijzigingen, die men in het bedrijfsplan moet aanbrengen om een verbetering van het bedrijfsresultaat te bereiken. Dit is echter naar mijn mening een misvatting om tweeërlei reden.

In de eerste plaats geeft de kostprijs een statisch beeld en geeft deze niet aan hoe de kosten en opbrengsten zullen veranderen bij een wijziging van het bedrijfsplan, terwijl dit juist is, wat ons moet interesseren.

Een beter beeld zou worden verkregen indien men de kostprijzen en opbrengstprijzen zou vergelijken bij verschillende bedrijfsplannen. Dit is echter een omslachtige en niet betere methode in vergelijking met de begrotingsstelsels, die in de praktijk worden gehanteerd. De kostprijs is in wezen een begroting.

De tweede reden is dat de kostprijsberekening in de praktijk zeer onvolmaakt is. De verbijzondering van de kosten heeft veelal plaats door middel van verdeelsleutels, die vaak slechts bij benadering of in het geheel niet het oorzakelijke verband tussen kosten en produkt weergeven. Met het optreden van de seizoenfactor bij de aanwending van de vaste arbeidsbezetting wordt meestal in het geheel geen rekening gehouden. De voortbrenging van verschillende produkten op een landbouwbedrijf heeft eigenlijk een zo sterk gemeenschappelijk karakter, dat een kostprijsberekening per produkt onmogelijk moet worden gemaakt.

Ter illustratie volgt hieronder een voorbeeld.

Bouwplan

gewas	oppervlakte (ha)
x_1	2,50
x_2	2,50
x_3	2,50
x_4	2,50

Arbeidsfilms

Periode	Beschikbare werkbare uren	Arbeidsbehoefte per ha van de verschillende gewassen in uren			
		x_1	x_2	x_3	x_4
maart	400	40	40	40	30
april	450	25	50	20	10
mei	450	10			150
juni	450	50	20	20	90
juli	450	50		90	
aug.	460		150	40	
sept.	450				140
okt.	425	40	40	50	30
nov.t/m feb.	1600	85		40	300
		300	300	300	750

Kostprijsberekening

(De directe kosten zijn toegerekend aan de gewassen, die deze hebben veroorzaakt.

De arbeidskosten zijn verdeeld naar het aantal arbeidsuren, dat voor elk gewas is gewerkt en de kosten van werktuigen en trekkers naar de aanspraken die elk van de gewassen op de aanwezige trekkracht heeft gemaakt.

Voor de overige kosten heeft de oppervlakte de verdeelsleutel gevormd.)

	Totale kosten (gld.)	Verdeling van totale kosten			
		$2\frac{1}{2}$ ha x_1	$2\frac{1}{2}$ ha x_2	$2\frac{1}{2}$ ha x_3	$2\frac{1}{2}$ ha x_4
Dir. kosten (zaai zaad etc.)	3500	1000	500	1000	1000
Arbeidskosten	9900	1800	1800	1800	4500
Werktuigkosten	1250	200	250	700	100
Trekkerkosten	850	200	250	200	200
Pacht en overige kosten	2000	500	500	500	500
Totale kosten	17500	3700	3300	4200	6300

	Totale kosten (gld.)	Verdeling van totale kosten			
		$2\frac{1}{2}$ ha x_1	$2\frac{1}{2}$ ha x_2	$2\frac{1}{2}$ ha x_3	$2\frac{1}{2}$ ha x_4
Kosten per ha		1380	1320	1680	2520
Kg/opbrengst/ha		2000	500	5000	20000
Kostprijs per kg		0,69	2,64	0,336	0,126
Opbrengstprijis per kg		1,05	2,60	0,44	0,12
Opbrengst in gld./ha		2100	1300	2200	2400
Totale opbrengst in gld.	20000	5250	3250	5500	6000
Netto-overschot	2500				

Er zijn dus twee gewassen x_2 en x_4 , waarvan de kostprijs beneden de opbrengstprijis ligt. Moet nu de produktie van deze gewassen worden stopgezet of ingekrompen.

Wij zullen straks, bij nadere uitwerking van het voorbeeld zien, dat dit niet het geval is.

3. Saldimethode

Met behulp van de saldi van de directe opbrengsten minus directe kosten is ook getracht bij een gegeven bedrijfsuitrusting en vaste-arbeidsbezetting tot een optimaal bedrijfsplan te komen (Louwes). De gedachte, die hieraan ten grondslag ligt is, dat het voordelig moet zijn, de oppervlakte van die gewassen, die per ha het hoogste saldo van directe opbrengsten minus directe kosten opleveren zo groot mogelijk te maken en dus uit te breiden tot de uiterste grens. De grens kan onder meer worden gevormd door de capaciteit van werktuigeninventaris, trekkrachtvoorziening en arbeidsbezetting en door de eisen van de vruchtwisseling.

Op deze wijze, zo is de redenering, wordt het totale saldo van opbrengsten verminderd met directe kosten zo groot mogelijk en dus ook het bedrijfsresultaat maximaal. (De vaste kosten blijven immers per definitie gelijk).

Ook voor begrotingen voor verderstrekkende beslissingen

kan met deze methode worden gewerkt. Voor het aantrekken van losse arbeidskrachten of het inschakelen van loonwerkers zijn door Louwes voorbeelden gegeven, waarbij hij de door losse arbeiders c.q. loonwerkers bewerkte oppervlakte als een afzonderlijk gewas beschouwt.

Voor het toepassen van deze methode moet verder, evenals voor het toepassen van saldi bij vergelijking van begrotingen, voldaan zijn aan de voorwaarde dat er een lineair verband bestaat tussen de opbrengsten en kosten, die aan het veranderen zijn.

Met behulp van een nadere uitwerking van het hiervoor gegeven cijfervoorbeeld zullen de werking en de uitkomsten van deze methoden nu worden gedemonstreerd:

Wij nemen aan, dat op het hiervoor geschetste bedrijf uitsluitend de verbouw van de gewassen x_1 , x_2 , x_3 en x_4 overweging verdient en dat in verband met de eisen van de vruchtwisseling van geen enkel gewas meer dan 5 ha kan worden verbouwd.

Voorts wordt aangenomen, dat geen losse arbeiders kunnen worden aangetrokken en geen werkzaamheden aan derden kunnen worden uitbesteed.

De saldi van opbrengsten verminderd met directe kosten van deze gewassen bedragen:

	Per 1 ha x_1 (Gld.)	Per 1 ha x_2 (Gld.)	Per 1 ha x_3 (Gld.)	Per 1 ha x_4 (Gld.)
Zaaizaad	100	15	300	180
Kunstmest	70	150	80	190
Dorsen	100			
Plukken/maaien	80			
Verkoop/opslag	50	35	20	30
Totale dir.kosten	400	200	400	400
Opbrengsten per ha	2100	1300	2200	2400
Saldo van opbrengsten verminderd met dir.kosten	1700	1100	1800	2000

Voorts wordt verondersteld, dat op de hoogte van de resterende kosten (o.a. arbeidskosten, pacht, kosten van trekkers en werktuigen) althans op korte termijn, geen invloed kan worden uitgeoefend. De hoogte van deze vaste kosten is bepaald door beslissingen, die reeds eerder zijn genomen.

Om te komen tot een bedrijfsplan met een zo hoog mogelijke winst wordt nu dus het gewas met het hoogste saldo (gewas x_4) zo veel mogelijk uitgebreid.

Een blik op de arbeidsfilms leert, dat in verband met grote arbeidsbehoefte van dit gewas in mei niet meer dan 3 ha kan worden verbouwd.

Van het gewas met het naast hogere saldo, gewas x_3 , kan de oppervlakte worden uitgebreid tot 5 ha, waar de vruchtwisseling een grens stelt.

Indien besloten wordt 3 ha van gewas x_4 en 5 ha van gewas x_3 is er nog 2 ha beschikbaar voor de verbouw van de gewassen x_1 en x_2 .

Van deze beide geeft gewas x_1 het hoogste saldo. Hiervoor zijn echter in mei geen uren meer beschikbaar, omdat deze reeds geheel zijn aangewend voor het gewas x_4 . Er blijft dus slechts over de mogelijkheid om 2 ha van gewas x_2 te verbouwen.

Het totale saldo van opbrengsten boven directe kosten bedraagt:

2 ha x_2	à 1100 gld.	=	2200 gld.
5 ha x_3	à 1800 gld.	=	9000 gld.
3 ha x_4	à 2000 gld.	=	6000 gld.
totaal		=	17200 gld.

Het totaal van de vaste kosten bedraagt 14000 gld., zodat nu een netto-overschot wordt verkregen van 3200 gld. Ten opzichte van het oorspronkelijke bedrijfsplan betekent dit een verhoging

van de winst met 700 gld.

De vraag is nu of onder de gegeven omstandigheden een bedrijfsplan met een hogere winst mogelijk is en of de saldimethode dus in dit geval leidt tot het optimale bedrijfsplan.

4. Lineaire programmering

Evenals van de saldimethode is het doel van de lineaire programmering om binnen de beperkingen, welke hetzij inhaerent zijn aan het agrarische productieproces (vruchtwisseling, gemeenschappelijke produktie), hetzij samenhangen met de aard van het bedrijf, (oppervlakte van het bedrijf, bedrijfsgebouwen) hetzij veroorzaakt worden door de gegeven uitrusting van het bedrijf met trekkrachtwerktuigen en arbeid, een optimaal bedrijfsplan op te stellen.

De saldimethode tracht deze oplossing te vinden door à priori van een beperking, de bedrijfsoppervlakte, waarop uiteraard elk gewas aanspraak maakt, uit te gaan. De saldi van opbrengsten verminderd met directe kosten worden immers uitgedrukt per ha gewas.

Indien er echter nog andere beperkingen zijn, waarop door meerdere gewassen aanspraak wordt gemaakt (in ons voorbeeld onder meer de arbeidsuren in mei en juni) leidt deze methode niet altijd tot een optimale benutting van alle beperkingen.

Het is mogelijk, dat een andere beperking dan de oppervlakte belangrijker wordt. De saldimethode heeft hier echter geen oog voor; bij deze methode is er slechts één basis van denken, de beperkingen die de bedrijfsoppervlakte oplegt.

Het uitwerken van een lineaire programmering op het gegeven cijfervoorbeeld leverde het volgende bedrijfsplan op:

1,60 ha x_1	à 1700 gld.	=	2720 gld.
1,40 ha x_2	à 1100 gld.	=	1540 gld.
4,10 ha x_3	à 1800 gld.	=	7380 gld.
2,90 ha x_4	à 2000 gld.	=	<u>5800 gld.</u>
Totaal saldo			17440 gld.

Ten opzichte van het met behulp van de saldimethode opgestelde bedrijfsplan geeft dit dus een hogere winst van 240 gulden.

Door inkrimping van de verbouw van de gewassen x_3 en x_4 kunnen arbeidsuren in mei en juni worden vrijgemaakt voor de verbouw van het gewas x_1 , dat per arbeidsuur in mei en juni een hoger saldo oplevert dan respectievelijk de gewassen x_3 en x_4 (vgl. de arbeidsfilm en de saldi per ha van de gewassen).

Voor het opstellen van een optimaal programma is echter een optimale benutting van deze knelpunten van belang. De lineaire programmering kijkt naar de knelpunten welke van belang zijn, de saldimethode kan dit niet.

Bij een latere bespreking van de lineaire programmering zal dit nader kunnen worden uiteengezet. Eerst zal nu echter een verklaring van de werking van deze methode worden gegeven.

IV. Hoe werkt de lineaire programmering

De werking zal met een eenvoudig voorbeeld, dat niet aan de landbouw is ontleend, worden verklaard.

Wij nemen aan, dat wij een mengsel van koper en zilver willen produceren, dat voor 50% bestaat uit koper en voor 50% uit zilver. Hiervoor kunnen wij van de volgende grondstoffen gebruik maken, die wij moeten aankopen tegen de prijzen die er achter zijn vermeld.

<u>Grondstoffen</u>	<u>Prijs per kg in guldens</u>
A (100% koper)	f. 1,00
B (100% zilver)	f. 5,00
C (75% koper, 25% zilver)	f. 2,00
D (25% koper, 75% zilver)	f. 3,75
E (90% koper, 10% zilver)	f. 1,25

Het probleem is nu hoe tegen de laagste kostprijs het gevraagde mengsel kan worden geproduceerd.

Hierbij geldt de beperking dat de produktie uitsluitend kan plaats hebben door menging van grondstoffen en niet door afscheiding van de metalen, die in een grondstof voorkomen om de ze in een andere verhouding weer samen te voegen.

Rekenkundig kan nu worden afgeleid, dat met de ter beschikking staande ingrediënten op 6 verschillende wijzen het gevraagde mengsel kan worden bereid. (Dit geldt natuurlijk alleen, indien wij gebruik maken van slechts twee ingrediënten; alle andere bereidingsmethoden zijn echter combinaties van de hieronder genoemde 6 bereidingsmethoden.)

Wij kunnen 100 kg van dit gevraagde mengsel namelijk verkrijgen door menging van:

methode 1,	50 kg grondstof A en 50 kg grondstof B
methode 2,	33,3 kg grondstof A en 66,7 kg grondstof D
methode 3,	33,3 kg grondstof B en 66,7 kg grondstof C
methode 4,	44,4 kg grondstof B en 55,6 kg grondstof E
methode 5,	50 kg grondstof C en 50 kg grondstof D
methode 6,	61,5 kg grondstof D en 38,5 kg grondstof E

Indien de sméltkosten bij elke bereidingswijze dezelfde zijn worden de produktiekosten bepaald door de kosten van de grondstoffen.

De grondstofkosten zijn:

methode 1,	50% A en 50% B	f. 3,- per kg
methode 2,	33,3% A en 66,7% D	f. 2,83 ³ per kg
methode 3,	33,3% B en 66,7% C	f. 3,2 ⁵ per kg
methode 4,	44,4% B en 55,6% E	f. 2,92 per kg
methode 5,	50% C en 50% D	f. 2,97 ⁵ per kg
methode 6,	61,5% D en 38,5% E	f. 2,80 ³ per kg

Bij toepassing van methode 6 zijn de produktiekosten dus het laagste. Bij de oplossing van dit probleem zijn alle bereidingswijzen, die bij de gestelde beperkingen mogelijk zijn nagegaan

en vervolgens vergeleken naar produktiekosten, welke eraan zijn verbonden, waarna vervolgens de goedkoopste methode kon worden bepaald.

Wij zullen nu een oplossing voor het probleem proberen te vinden door het toepassen van de methode van de lineaire programmering.

Wij schrijven daarvoor eerst het gehele probleem in de vorm van een matrix.

Matrix I

	Te maken produkt x	Ter beschikking staande grondstoffen				
		A	B	C	D	E
Koper	50	100	0	75	25	90
Zilver	50	0	100	25	75	10
Prijs/kg	0	1,00	5,00	2,00	3,75	1,25

Verbaal uitgedrukt staat hier, dat wij een produkt willen maken dat 50% koper en 50% zilver bevat en dat wij dit kunnen bereiden door menging van de grondstoffen A, B, C, D en E, die elk koper en zilver in verschillende verhoudingen bevatten en die wij ons kunnen verschaffen tegen de prijzen, die vermeld staan in de onderste rij. Het probleem is met welke grondstoffen het gewenste produkt tegen de laagste kosten zou kunnen worden geproduceerd.

De beperking is dat wij wel grondstoffen mogen samenvoegen, maar dat wij niet het produkt mogen bereiden door de ene grondstof aan de andere te onttrekken.

Wel is dus toegestaan: $1 C + 1 D = 2 x$

$1 A + 2 D = 3 x$

Niet echter: $2 C - 1 A = 1 x$

Wiskundig kan worden afgeleid dat voor het bereiden van het produkt x kan worden volstaan met twee grondstoffen (zie artikel van Boles: n vectoren van elk n elementen vormen de basis voor een n -dimensionale vectorruimte).

Niet elke combinatie van twee grondstoffen voldoet echter aan de voorwaarde, dat het produkt uitsluitend mag worden bereid door samenvoeging van grondstoffen (b.v. uit grondstoffen B en D kan produkt x niet worden bereid; vergelijk de opsomming van produktiemogelijkheden in het begin van het hoofdstuk).

De eerste stap van de lineaire programmering is nu, dat wij het te maken produkt en de beschikbare grondstoffen gaan beschouwen als een mengsel van twee van de grondstoffen.

De keuze van deze grondstoffen is willekeurig; eenvoudigheidshalve nemen wij hiervoor de grondstoffen A en B.

De matrix wordt nu als volgt:

Matrix II

	Te maken produkt	Ter beschikking staande grondstoffen				
		A	B	C	D	E
A	50	100	0	75	25	90
B	50	0	100	25	75	10
Grondstofkosten/kg	3,00	1,00	5,00	2,00	4,00	1,40

De matrix is gelijk gebleven, doordat de grondstoffen A en B respectievelijk zuiver koper en zilver zijn. Alleen de wijze van beschouwen is anders geworden, de grondstoffen A en B zijn nu ons uitgangspunt. De grondstoffen A en B vormen als het ware nu de basis van ons denken. (De basis van de vectorruimte wordt gevormd door de vectoren A en B.)

Als prijs vullen wij nu in de grondstofkosten, als het produkt en elk van de grondstoffen zou worden bereid door menging

van de grondstoffen A en B. Een volgende stap is, dat wij op de onderste regel van de matrix in plaats van de grondstofkosten per kg het verschil tussen de onderste regel van matrix I en de onderste regel van matrix II invullen.

Matrix III

	produkt x	Grondstoffen				
		A	B	C	D	E
A	50	100	0	75	25	90
B	50	0	100	25	75	10
Prijs grondstofkosten/kg	-300	0	0	0	-0,25	-0,15

Op de onderste regel staat nu bij elke grondstof dus het verschil tussen de aanschaffingsprijs en de grondstofkosten bij bereiding door menging van de grondstoffen A en B; bij het produkt x staat een negatief getal, dat de grondstofkosten weergeeft bij bereiding van x uit de grondstoffen A en B.

Wij hebben nu de uitgangstelling voor onze lineaire programmering bereikt. Het zal duidelijk zijn, dat het doel is het getal in de laatste regel onder kolom x zo klein mogelijk te maken. Dan zijn immers de grondstofkosten ook zo laag mogelijk.

Hoe kunnen wij dit nu bereiken. Hiervoor laten wij nog eens ons oog dwalen over de onderste regel, waarbij wij opmerken dat het voordeliger is de grondstoffen D en E aan te kopen dan om deze te bereiden uit de grondstoffen A en B.

Het koper en zilver in deze grondstoffen is dus in de grondstoffen D en E kennelijk goedkoper dan bij aanschaffing in onvermengde vorm (A en B). Dit brengt ons op het idee één van deze twee grondstoffen in de basis van ons denken op te nemen.

Wij kiezen hiervoor de grondstof D, die per kg het grootste voordelige verschil oplevert.

Tot nu toe vormden de grondstoffen A en B ons uitgangspunt. Een van deze twee grondstoffen willen wij nu vervangen door grondstof D. Dit wil zeggen dat wij nu het produkt x en elk van de grondstoffen willen gaan beschouwen als een mengsel van grondstof D en één van de grondstoffen A of B. Hierbij moeten wij echter bedenken, dat produktie van x slechts mogelijk is door samenvoeging en niet door onttrekking. In verband hiermede komt vervanging van grondstof A door grondstof D in de basis van ons denken niet in aanmerking. De produktie van x door combinatie van de grondstoffen B en D is immers niet toelaatbaar, daar dit alleen denkbaar is door aan D zuiver zilver (B) te onttrekken. Wij maken derhalve nu de grondstoffen A en D tot basis van ons denken en gaan het produkt x en elk van de grondstoffen A, B, C, D en E beschouwen als een combinatie van de grondstoffen A en D.

De matrix gaat er nu als volgt uitzien:

Matrix IV

	x	A	B	C	D	E
A	0,333	1	-0,333	0,667	0	0,867
D	0,667	0	1,333	0,333	1	0,133
Prijs grondstofkosten/kg	-2,833	0	+0,333	+0,083	0	-0,1167

Het eerste wat ons opvalt in de matrix is, dat er negatieve getallen zijn verschenen in de bovenste twee rijen. Bereiding van grondstof B blijkt slechts mogelijk te zijn door A (zuiver koper) aan grondstof D te onttrekken. Dit is echter niet in strijd met onze afspraak. Wij hebben immers niet de bedoeling grondstof B (zuiver koper) te produceren. Slechts

de bereiding van produkt x door onttrekking van de ene grondstof aan de andere is ontoelaatbaar.

In de tweede plaats valt ons op, dat er in de onderste rij nu positieve getallen zijn verschenen. Het blijkt dus voordeliger te zijn sommige grondstoffen (B en C) te bereiden met behulp van de grondstoffen A en D dan door aankoop tegen de geldende aankooprijzen (natuurlijk houden wij hier geen rekening met de kosten van menging).

In matrix III zagen wij dat bij bereiding van x uit A en B de grondstofkosten 3,00 gulden per kg bedroegen, bij bereiding uit A en D blijken de grondstofkosten echter 2,833 gulden te bedragen. De vervanging van B door D heeft dus voordelen opgeleverd.

Dit brengt ons ertoe om op dezelfde weg voort te gaan. Er blijkt nog een grondstof E te zijn, waarvan de aanschaffingsprijs lager is dan de grondstofkosten bij bereiding uit A en D (het enige negatieve getal in de onderste rij bij de grondstofkolommen is het getal (- 0,1167) in kolom E).

Wij willen dus nu deze grondstof in onze "denkbasis" opnemen. Een van de grondstoffen A en D kan dus vervangen worden. (Onze basis behoeft immers slechts uit twee grondstoffen te bestaan).

Hierbij denken wij weer aan de spelregel: wel samenvoegen, niet onttrekken. Bij de bereiding van x mogen wij dus niet met negatieve hoeveelheden werken.

De grondstof A zal dus uit onze denkbasis moeten verdwijnen, indien wij de grondstof E daarin willen opnemen (zie naar het kleinste quotient bij deling van elk element van kolom x en het overeenkomstige element van kolom E met uitzondering van de elementen van de onderste rij).

Onze matrix krijgt bij de nieuwe denkbasis de volgende gedaante.

Matrix V

	x	A	B	C	D	E
E	0,385	1,15	-0,38	+0,76	0	1
D	0,615	-0,15	+1,38	0,24	1	0
Prijs grond- stofkosten/kg	-2,803	+0,09	+0,30	+0,14	0	0

In de onderste regel zijn nu in de grondstofkolommen alle getallen positief of gelijk aan 0. Dit wil zeggen dat geen enkele grondstof meer kan worden aangeschaft tegen een prijs, die ligt beneden de grondstofkosten bij bereiding uit de grondstoffen E en D. Dit brengt ons ook op het idee dat vervanging van één van de grondstoffen E en D in onze denk-basis door een andere grondstof geen voordeel meer biedt.

Wij hebben dus onze optimale "denkbasis" te pakken. Het produkt x kan het goedkoopste worden verkregen door bereiding uit D (61,5%) en E (38,5%).

De grondstofkosten bedragen dan 2,803 gulden per kg. Dit stemt overeen met de oplossing die wij langs andere weg vonden.

Wij hebben nu dus ook langs de weg van de lineaire pro-grammering het optimale produktieprogramma gevonden.

Het enige wat men zich nu nog kan afvragen of de lineaire programmering voordelen biedt boven de eerder gevolgde methode. Bij dit voorbeeld is dit niet het geval. Indien wij echter meer grondstoffen hebben en ingewikkeldermengsels leidt de program-mering wel sneller tot het doel.

Bovendien is er voor de programmering, die hier stap voor stap is besproken een eenvoudig rekenvoorschrift, waardoor de benodigde berekeningen minder uitvoerig zullen zijn dan hier het geval schijnt te zijn.

Wij zullen dan ook hierna het rekenvoorschrift uitleggen met behulp van het cijfervoorbeeld van het vorige hoofdstuk.

INTERLUDIUM

In het vorige hoofdstuk is getracht een inzicht te geven in de werking van de lineaire programmering door een eenvoudig probleem op twee verschillende wijzen tot een oplossing te brengen. Hierbij is aangekondigd, dat vervolgens het rekenvoorschrift zou worden duidelijk gemaakt met behulp van het voorbeeld van hoofdstuk III. Op verzoek van degenen, die de cursus volgden zal echter in afwijking van het aanvankelijke voornemen, eerst het rekenvoorschrift worden gedemonstreerd met behulp van het eenvoudiger voorbeeld van Hoofdstuk IV, waarna vervolgens zonder verder commentaar het verloop van de berekening van het voorbeeld van hoofdstuk III zal worden gegeven.

De weergave van het probleem in de vorm van een matrix in het vorige hoofdstuk bleek ook enkele moeilijkheden op te leveren. Wij zullen proberen door het aanbrengen van een kleine wijziging dit nog iets te verduidelijken.

In verband hiermede wordt hieronder eerst een herziene versie van matrix I (Hoofdstuk IV blz.17) gegeven.

Matrix I a

	Te maken produkt X	Ter beschikking staande grondstoffen				
		A	B	C	D	E
Koper	50	100	0	75	25	90
Zilver	50	0	100	25	75	10
Prijs/kg	3,50	1.00	5.00	2.00	3.75	1.25

Wij stellen nu dus de verkoopprijs van produkt X op f. 3,50 per kg.

Wij zullen nu ook het probleem waar wij een oplossing voor zoeken iets anders formuleren. In hoofdstuk IV blz.17 stelden wij als doel het goed X te produceren tegen zo laag mogelijke grondstofkosten.

Wij kunnen ook zeggen dat wij het verschil tussen de opbrengstprijis van X en de grondstofkosten zo groot mogelijk willen maken. Dit komt natuurlijk op hetzelfde neer, daar de opbrengstprijis een gegeven grootheid is.

Matrix III van blz.19 zal er dan als volgt uitzien.

Matrix III a	Produkt X	Grondstoffen				
		A	B	C	D	E
A	50	100	0	75	25	90
B	50	0	100	25	75	10
Prijs minus grondstofkos- ten per kg	+0,50	0	0	0	- 0,25	- 0,15

Het overschot van opbrengstprijis boven grondstofkosten bedraagt dus nu f. 0,50 per kg (d.i. 3.50 gld. - 3.00 gld.). Dit bedrag willen wij dus maximaliseren.

In de volgende matrices IV en V moeten nu op dezelfde wijze respectievelijk -2.833 en -2.803 vervangen worden door 0,667 en 0,797.

Het maximale overschot, dat behoort bij het optimale programma van matrix V is dus 0,797 gld. per kg, wat overeenkomt met grondstofkosten van $3.50 - 0,79.7 = 2,80.3$ gld. per kg.

V. Het rekenvoorschrift van de lineaire programmering

Het uitgangspunt van de berekening is matrix III a. In deze matrix zijn dus, zoals in hoofdstuk IV is aangegeven, zowel het produkt als de grondstoffen uitgedrukt als combinaties van de grondstoffen A en B. (Eenvoudigheidshalve zijn A en B gekozen; de keuze is overigens willekeurig; vgl. blz.13, hoofdstuk IV).

De onderste rij bevat de saldi van marktprijis verminderd met grondstofkosten bij bereiding uit A en B.

Het verloop van de programmering is nu dus, dat wij in het produktieproces de grondstoffen A en B willen vervangen door andere met het doel in de produktiekolom een hoger saldo van opbrengstprijis boven grondstofkosten te verkrijgen.

Hiervoor nemen wij die grondstoffen, waarvan de aankoopprijs ligt beneden de grondstofkosten bij bereiding uit A en B. (Deze grondstoffen zijn immers in vergelijking met A en B goedkoper). Dit zijn dus de grondstoffen, die in de saldo-rij een negatief saldo van opbrengstprijzen minus grondstofkosten hebben (i.c.D.en E.) Het streven is er nu op gericht de negatieve saldi uit de saldi-rij te laten verdwijnen. Zodra dit is bereikt, hebben wij namelijk het optimale programma. (Hoofdstuk IV blz.22). Wij kunnen snel tot dit doel komen door bij elke stap, die wij doen in de berekening, de kolom met het hoogste negatieve saldo aan te pakken en de grondstof van deze kolom in de plaats te stellen van één van de grondstoffen in de basis.

Wij richten nu dus onze aandacht op kolom D van matrix III a (laagste saldo van de grondstofkolommen).

Wij willen deze grondstof in zo ruim mogelijke mate gebruiken maar worden hierin beperkt door het feit, dat wij slechts kunnen produceren door samenvoegen van grondstoffen en niet door de elementen in zuivere vorm af te scheiden en in andere verhoudingen samen te voegen, waarbij dus als bijprodukt één van de elementen in zuivere vorm zou kunnen ontstaan. (Hoofdstuk IV blz. 17 onderaan).

Wij vergelijken nu de getallen in de produktiekolom X en de grondstoffenkolom D (met uitzondering van de getallen in de saldi-rij (matrix III a)).

	Produkt X	Grondstof D
A	50	25
B	50	75

Hieruit lezen wij af, dat wij - indien wij in ons productie-proces ($A + B = 2 X$) grondstof A geheel willen vervangen door D, dit moeten doen door per eenheid $\cdot \left(\frac{50}{25} =\right)$ 2 eenheden D aan te wenden.

Algehele vervanging van B door D dient te geschieden door aanwending van $(50/75 =) 2/3$ eenheden D per eenheid X.

Bij algehele vervanging van A door D kan het produktieproces worden voorgesteld als

$$(a) \quad 2D - B = X$$

Vervanging van B door D geeft

$$(b) \quad 1/3 A + 2/3 D = X$$

Produktieproces (a) is echter onmogelijk door de gestelde beperking. De enige mogelijkheid is dus, D in de plaats te stellen van B (prod. proces b).

Vertaald in een rekenvoorschrift betekent dit, dat wij, met uitsluiting van de saldi-rij, de quotiënten moeten bepalen van de elementen in de produktiekolom en daarmee corresponderende elementen in grondstofkolom D en moeten zien naar de rij met het laagste quotiënt (i.c. rij B).

Wij zullen namelijk de grondstof van deze rij uit de basis verdrijven en vervangen door D (laagste saldo).

Wij doen nu de eerste stap van de berekening en geven eerst nogmaals de uitgangsmatrix (matrix III a)

	Prod. X	Grondstoffen					Quotiënt
		A	B	C	D	E	
A	0,50	1	0	0,75	0,25	0,30	50/25
B	0,50	0	1	0,25	<u>0,75</u>	0,10	50/75
Saldo	0,50	0	0	0	-0,25	-0,15	

←



Als afzonderlijke kolom hebben wij nog toegevoegd de quotiënten van de elementen van kolom X en de corresponderende elementen van kolom D. (Bovendien zijn om didactische redenen de percentages vervangen door breuken).

Het element op de kruising van rij B en kolom D, het element (BD), neemt nu een sleutelpositie in (het is om deze reden onderstreept),¹⁾

Wij zullen nu eerst in de basis B door D vervangen. Dit heeft in het bijzonder consequenties voor kolom D. Deze zal namelijk de volgende vorm moeten krijgen.

	D
A	0
D	1
Saldo	0

Wij kunnen immers, na vervanging van B door D, 1 eenheid D produceren door 1 eenheid D aan te wenden. Het saldo van prijs verminderd met grondstofkosten is dan 0.

Deze verandering in kolom D moeten wij nu bewerkstelligen door te manipuleren met rij B, nl. deze (d.w.z. elk element van deze rij) vermenigvuldigen met een bepaalde factor; de vermenigvuldigde rij vervolgens van andere rijen aftrekken (d.w.z. elk element van de met een bepaalde factor vermenigvuldigde rij B af te trekken van het corresponderende element van een andere rij). Wij moeten er steeds zorg voor dragen, dat het verband binnen de rijen bewaard blijft.

Wij zullen eerst onze aandacht wijden aan de transformatie van rij B; voor de transformatie van deze rij kunnen wij volstaan met vermenigvuldiging van rij B met een bepaalde factor. Wij weten, dat element (BD) (rij B, kolom D) dat in de onder matrix de getalswaarde 0,75 ha, in de nieuwe matrix zal moeten worden getransformeerd in element(DD) met getalswaarde 1.

Dit doen wij dan door de gehele rij B (elk element van deze rij dus) te vermenigvuldigen met $\frac{1}{0,75}$, (delen door 0,75 dus).

1) Elk element wordt aangeduid door eerst de rij en dan de kolom waarin het voorkomt te noemen.

Het rekenvoorschrift voor de transformatie van rij B van de oude matrix tot rij D van de nieuwe matrix luidt dus: deel elk element van rij B door het element (BD) van de oude matrix, meer algemeen gezegd: deel het element op de kruising van de kolom met het laagste saldo en de rij met het laagste quotiënt op de rij met het laagste quotiënt. In plaats van rij B in de oude matrix krijgen wij nu dus:

	X	A	B	C	D	E
D	$\frac{0.50}{0.75}$	$\frac{0}{0.75}$	$\frac{1}{0.75}$	$\frac{0.25}{0.75}$	$\frac{0.75}{0.75}$	$\frac{0.10}{0.75}$

of

	X	A	B	C	D	E
D	0.67	0	1.33	0.33	1	0.133

Wij richten nu onze aandacht op de transformatie van rij A. Wij hebben reeds gezien dat element (AD), dat in de oude matrix de getalswaarde 0.25 had; in de nieuwe matrix de waarde 0 moet krijgen. Dit moeten wij dus bewerken door element (BD) (getalswaarde 0.75) met een bepaalde factor te vermenigvuldigen en vervolgens van element (AD) af te trekken. Deze factor, waarmee element (BD) moet worden vermenigvuldigd is nu het quotiënt $\frac{(AD)}{(BD)} = \frac{0.25}{0.75}$ zoals gemakkelijk zal zijn in te zien.

Dit betekent echter, dat wij om de nieuwe rij A te krijgen, elk element van rij B moeten vermenigvuldigen met de factor $\frac{(AD)}{(BD)} = \frac{0.25}{0.75}$ en vervolgens moeten aftrekken van het oorspronkelijke element van rij A.

Rij A in de nieuwe matrix wordt dus

	X	A	B	C	D	E
A	$AX - \frac{AD}{BD} BX$	$AA - \frac{AD}{BD} BA$	$AB - \frac{AD}{BD} BB$	$AC - \frac{AD}{BD} BC$	$AD - \frac{AD}{BD} BD$	$AE - \frac{AD}{BD} BE$

of

	X	A	B	C	D	E
A	0.50-0.167	1-0	0-0.33	0.75-0.087	0.25-0.25	0.90-0.033

Voor de transformatie van de overige rijen gaan wij op dezelfde wijze te werk.

Wij vermenigvuldigen dus elk element van de rij met het laagste quotiënt met een breuk, waarvan de teller bestaat uit het element op de kruising v/d te transformeren rij en de kolom met het laagste saldo en de noemer uit het element op de kruising van de rij met het laagste quotiënt en de kolom met het laagste saldo en trekken dit vervolgens af van het corresponderende element van de te transformeren rij.

Schematisch kunnen wij dit voor de saldorij als volgt weergeven.

	X	A	B	C	D	E
S	$SX - \frac{SD}{BD} BX$	$SA - \frac{SD}{BD} BA$	$SB - \frac{SD}{BD} BB$	$SC - \frac{SD}{BD} BC$	$SD - \frac{SD}{BD} BD$	$SE - \frac{SD}{BD} BE$

In cijfers wordt dit dus

	X	A	B	C	D	E
S =	$0,50 - (-0,25 \times 0,67)$	$0 - (-0,25 \times 0)$	$0 - (-0,25 \times 1,33)$	$0 - (-0,25 \times 0,33)$	$-0,25 - (-0,25 \times 1)$	$-0,15 - (-0,25 \times 0,133)$

	X	A	B	C	D	E
S =	+ 0,667	0	+ 0,33	+ 0,083	0	- 0,1167

De nieuwe rij A (rij A^1) hebben wij hiervoor schematisch als volgt weergegeven¹⁾

	X^1	A^1	B^1	C^1	D^1	E^1
A^1	$AX - \frac{AD}{BD} BX$	$AA - \frac{AD}{BD} BA$	$AB - \frac{AD}{BD} BB$	$AC - \frac{AD}{BD} BC$	$AD - \frac{AD}{BD} BD$	$AE - \frac{AD}{BD} BE$

Door omzetting krijgen wij:

	X^1	A^1	B^1	C^1	D^1	E^1
A^1	$AX - \frac{BX}{BD} AD$	$AA - \frac{BA}{BD} AD$	$AB - \frac{BB}{BD} AD$	$AC - \frac{BC}{BD} AD$	$AD - \frac{BD}{BD} AD$	$AE - \frac{BE}{BD} AD$

De rij D van de nieuwe matrix, rij D^1 kan schematisch op de volgende wijze worden geschreven.

	X^1	A^1	B^1	C^1	D^1	E^1
D^1	$\frac{BX}{BD}$	$\frac{BA}{BD}$	$\frac{BB}{BD}$	$\frac{BC}{BD}$	$\frac{BD}{BD}$	$\frac{BE}{BD}$

Wij kunnen dus de termen van de nieuwe rij A, rij A^1 uitdrukken in termen van de oude rij A en de nieuwe rij D^1

	X	A	B	C	D	E
A^1	$AX - DX^1 \cdot AD$	$AA - DA^1 \cdot AD$	$AB - DB^1 \cdot AD$	$AC - DC^1 \cdot AD$	$AD - DD^1 \cdot AD$	$AE - DE^1 \cdot AD$

Wij kunnen het rekenvoorschrift voor de transformatie van de overige rijen nu eenvoudiger formuleren.

Wij vermenigvuldigen de rij van de nieuwe matrix, die in de plaats gekomen is van de rij met het laagste quotiënt, met het element op de kruising van de te transformeren rij en de kolom met het laagste saldo in de oude matrix. Vervolgens trekken wij de op deze wijze verkregen rij af van de te transformeren rij (d.w.z. wij trekken elk element van deze rij af van het corresponderende element in de rij, die wij willen transformeren).

- 1) De rijen, kolommen en elementen van de nieuwe matrix, die wij verkrijgen na afloop van de eerste fase van de berekening zullen wij aanduiden met het suffix ¹, voor de nieuwe matrix die we verkrijgen na de tweede fase van de berekening, zullen wij het suffix ² gebruiken.

Wij hebben nu alle rijen veranderd, waarmee wij de eerste stap in de berekening hebben gedaan.

De nieuwe matrix is nu (vgl. matrix IV op blz. 20 van hfdst.IV).

	X^1	A^1	B^1	C^1	D^1	E^1
A^1	0,333	1	-0,33	0,667	0	0,867
D^1	0,67	0	1,33	0,33	1	0,133
S^1	0,667	0	0,33	0,083	0	-0,1167

De gehele bewerking wordt nu op dezelfde wijze herhaald:

1. Wij zoeken het laagste saldo op (kolom E^1)
2. Wij gaan na in welke rij het laagste quotiënt voorkomt; daar $(AX^1/AE^1) < (DX^1/DE^1)$ is dit dus rij A^1 .
3. Wij delen elk element in deze rij door het element op de kruising van deze rij met de kolom met het laagste saldo. Wij delen dus de elementen van rij A^1 door element (AE^1) .
4. Voor de transformatie van de overige rijen trekken wij van elk van deze rijen af de rij, die we verkregen door de bewerking van punt 3, vermenigvuldigd met het element op de kruising van de te transformeren rij en de kolom met het laagste saldo.

De nieuwe matrix wordt nu, in symbolen uitgedrukt (de symbolen hebben betrekking op de rijen resp. kolommen van de vorige matrix).

	X^2	A^2	B^2	C^2	D^2	E^2
E^2	$\frac{AX^1}{AE^1}$	$\frac{AA^1}{AE^1}$	$\frac{AB^1}{AE^1}$	$\frac{AC^1}{AE^1}$	$\frac{AD^1}{AE^1}$	$\frac{AE^1}{AE^1}$
D^2	$DX^1 - \frac{AX^1}{AE^1} DE^1$	$DA^1 - \frac{AA^1}{AE^1} DE^1$	$DB^1 - \frac{AB^1}{AE^1} DE^1$	$DC^1 - \frac{AC^1}{AE^1} DE^1$	$DD^1 - \frac{AD^1}{AE^1} DE^1$	$DE^1 - \frac{AE^1}{AE^1} DE^1$
S^2	$SX^1 - \frac{AX^1}{AE^1} SE^1$	$SA^1 - \frac{AA^1}{AE^1} SE^1$	$SB^1 - \frac{AB^1}{AE^1} SE^1$	$SC^1 - \frac{AC^1}{AE^1} SE^1$	$SD^1 - \frac{AD^1}{AE^1} SE^1$	$SE^1 - \frac{AE^1}{AE^1} SE^1$

De sleutelpositie van het element op de kruising van de rij met het laagste quotiënt en de kolom met het laagste saldo (element (AE^1) dus) wordt hier duidelijk gedemonstreerd; het komt in elk element van de nieuwe matrix voor.

In getallen uitgedrukt krijgt de matrix de volgende vorm.

	x^2	A^2	B^2	C^2	D^2	E^2
E^2	0,385	1,15	-0,38	+0,76	0	1
D^2	0,615	-0,15	+1,38	+0,24	1	0
	+0,797	+0,09	+0,30	+0,14	0	0

Hiermede is het optimale programma dus weer bereikt. De negatieve saldi zijn immers verdwenen en de matrix, die wij hebben verkregen is dezelfde als matrix V van hfdst. IV blz. 22 behoudens de later aangebrachte wijziging in de produktie-kolom.

Wij geven tenslotte nog het verloop van de berekening bij toepassing van de lineaire programmering op het voorbeeld van hoofdstuk III.

In afwijking van het vorige voorbeeld moeten wij hier niet zoeken naar de kolom met het laagste saldo maar naar de kolom met het hoogste saldo. Dit is geen principiële wijziging; het is slechts een verandering van teken.

Bij elke stap in de berekening is niet telkens de gehele nieuwe matrix uitgeschreven, maar alleen de rijen die veranderen. (Dit zijn dus de rijen waar in de kolom met het hoogste saldo een getal stond.)

De vervallen rijen zijn genummerd (x_1 x_2 etc.) in de volgorde, waarin ze zijn getransformeerd. De getransformeerde rijen, die ervoor in de plaats kwamen, hebben een zelfde nummer gekregen in de voorste kolom van de matrix.

Het element, dat bij de verschillende stadia van de berekening gelegen was op de kruising van de kolom met het hoogste saldo en met het laagste quotiënt is voorzien van een nummer, dat de fase van de berekening aangeeft, waarbij het een rol heeft gespeeld (dit getal correspondeert dus met de Romeinse cijfers van de voorzijde van de matrix).

Bij het opstellen van de uitgangsmatrix zijn niet alle beperkingen opgenomen (zie hoofdstuk III blz. 20). Van een deel van de beperkingen (beschikbare arbeidsuren en vruchtwisselingseisen) kan namelijk op het eerste gezicht reeds worden uitgemaakt, dat zij niet effectief zullen zijn, daar andere beperkingen voordien reeds een verdere ontplooiing van de activiteit zullen hebben verhinderd.

De arbeidsuren in maart zullen bijvoorbeeld geen beperking vormen omdat de oppervlakte niet mogelijk maakt meer dan 400 uren te besteden.

Anders dan in het vorige voorbeeld was het nodig beschikkingsactiviteiten op te nemen. Men zou deze beschikkingsactiviteiten ook passiviteiten kunnen noemen. De betekenis ervan is dat men de vrijheid heeft de gestelde beperkingen niet geheel te benutten. Indien dat voordelig is kan men dus besluiten bijv. niet alle arbeidsuren in mei te benutten. Men voert dan de activiteit -niet benutten van de arbeidsuren in mei - uit.

Deze activiteit wordt niet beloond; het saldo is 0. Invoering van deze beschikkingsactiviteiten is in de meeste gevallen noodzakelijk.

In het vorige voorbeeld zijn geen beschikkingsactiviteiten opgenomen, omdat hier nietde vrijheid bestond de gestelde beperkingen niet te benutten.

Eén van de beperkingen bestond immers uit de eis dat het produkt minstens 50% koper moest bevatten; terwijl de andere beperking de eis stelde, dat het minstens 50% zilver moest bevatten. Dit laatste betekent echter dat het produkt ook ten hoogste 50% koper mocht bevatten. Het was bij dit voorbeeld dus ook niet mogelijk meer koper in het mengsel op te nemen dan het percentage dat volgens de eerste beperking was voorgeschreven.

In het nu volgende voorbeeld zijn in de uitgangsmatrix de beschikkingsactiviteiten als basis genomen. Elk van de andere activiteiten is dus beschreven als een combinatie van de beschikkingsactiviteiten.

Het zal duidelijk zijn dat hierdoor de getalswaarde van de elementen van de uitgangsmatrix niet verandert.

Elke activiteit moet nu dus worden gezien als een combinatie van de activiteiten in de basis die een zelfde aanspraak maakt op de gestelde beperkingen als de oorspronkelijke activiteit.

De saldirij geeft dan het verschil aan tussen de saldi van de oorspronkelijke activiteiten en de combinaties van "basisactiviteiten" die daarvoor in de plaats is gesteld.

Daar de saldi van de activiteiten, die in de basis zijn opgenomen 0 zijn (het zijn immers de beschikingsactiviteiten !) verandert ook de saldirij in de uitgangsmatrix niet.

Stap in de bete- king	Nieuwe rijen	Beperkingen	Beschikbare hoeveelheden	Aanspraken op beschikbare hoeveelheden door activiteiten										vervallen rijen	
				Activiteiten						Beschikingsactiviteiten (passiviteiten)					
										(niet benutten van arbeidsuren in					
				X1 (1ha)	X2 (1ha)	X3 (1ha)	X4 (1ha)	braak laten	niet benutten van mogelijkheid tot X 1	mei	juni	juli	aug.		
I Uitgangs- matrix		oppervlakte vruchtwisselingA	1000 are	100	100	100	100	100	100	100				X 2	
		arbeidsuren mei	500 are	100			150 ¹							X 15	
		arbeidsuren juni	450 uren	10			90				100			X 1	
		arbeidsuren juli	450 uren	50	20	20	90 ²							X 3	
		arbeidsuren aug.	450 uren	50	150	30							100	X 5	
		arbeidsuren aug.	460 uren											X 6	
		Saldo		1700	1100	1800	2000							X 4	
II	X 1	X 4	3	+ 0,0667	0	0	1	0	0	0	0	0	0	X 16	
	X 2	oppervlakte	700	+ 93,33	+100	+ 100	0	+ 100	0	- 67,67	0	0	0	X 7	
	X 3	arbeidsuren juni	180	+ 44,00	+ 20	+ 20	0	0	0	- 60,00	+ 100	0	0	X 8	
	X 4	Saldo	- 6000	+ 1566,67	+1100	+1800	0	0	0	- 133,33	0	0	0	X 9	
	X 5	X 3	5	+ 0,5555	0	+	1	0	0	0	0	0	+1,111	0	X 17
	X 6	arbeidsuren aug.	310	- 15,67	+ 150	0	0	+ 100	0	0	0	0	-33,33	100	X 11
	X 7	oppervlakte	200	+ 37,78	100 ³	0	0	0	0	- 66,67	0	-111,11	0	X 10	
	X 8	arbeidsuren juni	80	+ 32,89	20	0	0	0	0	- 60,00	100	-22,22	0	X 12	
	X 9	Saldo	- 15000	+ 566,7	+1100	0	0	0	0	-133,33		- 2000		X 13	
	X 10	X	2	+ 0,3778	+	1	0	0	1	0	- 0,677	0	-1,111	0	X 18
	X 11	arbeidsuren aug.	10	- 73,37	0	0	0	- 150	0	+ 100,00	0	+133,33	100	X 19	
	X 12	arbeidsuren juni	40	- 25,33 ⁴	0	0	0	- 20	0	- 46,67	100	0	0	X 14	
	X 13	Saldo	- 17,200	+ 151,1	0	0	0	1100	0	- 866,67	0	-322,22	0	X 20	
	IV (optimaal programma)	X 14	X 1	1,5784 (ha)	1	0	0	0	-0,7895	0	- 1,8423	+3,9475	0	0	
		X 15	vruchtwiss. X 1	342,16 (are)	0	0	0	0	+78,95	100	+ 184,23	-394,75	0	0	
X 16		X 4	2,89478(are)	0	0	0	1	+0,0526	0	+ 0,7894	-0,2630	0	0		
X 17		X 3	4,1278 (ha)	0	0	1	0	+0,4386	0	+ 1,0234	-2,1930	+1,1111	0		
X 18		X 2	1,4041 (ha)	0	1	0	0	+1,2983	0	+ 0,0295	-1,4915	-1,1111	0		
	X 19	arbeidsuren aug.	125,55 (uren)	0	0	0	0	-207,90	0	- 35,13	+289,51	+133,33	100		
	X 20	Saldo	17437,50 (gld)	0	0	0	0	- 981	0	- 322	- 595	- 778	0		

3 2 2 2 2 3 2 3 3 3 1