# Toelichting op "Tussen Theis en Hantush"

C. van den Akker[1]

*In de publicatie "Tussen Theis en Hantush" in Stromingen is een partiële differentiaalvergelijking voor tijdsafhankelijke stroming naar een volkomen put in gedeeltelijk afgesloten grondwater gepresenteerd. Deze vergelijking heeft een aantal reacties opgeroepen uit de wereld van Nederlandse hydrologen. De strekking van deze reacties is dat de differentiaalvergelijking niet juist zou zijn en dat daarmee dus de fysische onderbouwing van de gepresenteerde oplossing geweld wordt aangedaan.*

*Het verdient aanbeveling de afleiding van de gepresenteerde differentiaalvergelijking nader te onderbouwen en toe te lichten en deze vergelijking op een andere wijze te presenteren. De uiteindelijk op te lossen partiële differentiaalvergelijking waarin gebruik wordt gemaakt van de Lambert W functie verandert echter niet.*

## Inleiding

In Van den Akker (2014-2) wordt voor een situatie met gedeeltelijk afgesloten grondwater de tijdsafhankelijke stroming naar een volkomen put behandeld. Samengevat wordt uitgegaan van de volgende aannames en gegevens:

- Een homogeen, regionaal watervoerend pakket met een elastische bergingscoëfficiënt, afgedekt door een slecht doorlatende laag met een uniforme hydraulische weerstand.
- Boven de slecht doorlatende laag is een gebiedsgemiddelde grondwaterstand aanwezig in een dun pakket met een verwaarloosbare horizontale stroming en een freatische bergingscoëfficiënt.
- Er geldt een logaritmisch verband tussen de gebiedsgemiddelde grondwaterstand en de oppervlaktewater afvoer per eenheidsoppervlak.
- Er is geen verdampingsreductie als gevolg van de verlaging van de grondwaterstand door de onttrekking.
- In het watervoerende pakket wordt aangenomen dat er uitsluitend horizontale grondwaterstroming is.

[1] Prof.dr.ir. C. van den Akker (cvandenakker@casema.nl)

## Afleiding van de tweede orde, partiële differentiaalvergelijking

In Van den Akker (2014-1) is afgeleid dat voor de afvoer per eenheidsoppervlak geldt:

$$U = \frac{1}{2} j + \frac{a}{c} \left\{ ln\left( \frac{-h + m_v + b}{-a} \right) \right\} \tag{1}$$

waarin:
$a$ = constante <0 [m]
$b$ = constante ≤0 [m]
$m_v$ = maaiveldhoogte ten opzichte van referentie niveau [m]

Voor de verklaring van de overige symbolen wordt verwezen naar Van den Akker (2014-1).

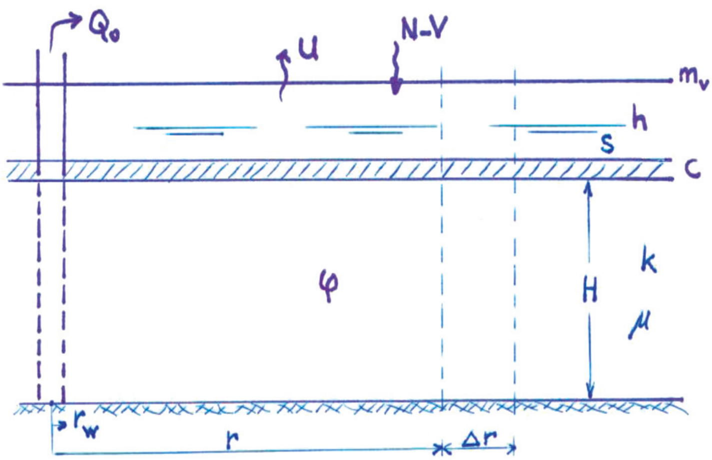
Voor de uitgangssituatie is daarmee:

$$U_0 = \frac{1}{2} j + \frac{a}{c} \left\{ ln\left( \frac{-h_0 + m_v + b}{-a} \right) \right\} \tag{2}$$

en aangezien we te maken hebben met een regionaal probleem met een uniforme neerslag minus verdamping (*N-V*) kunnen we stellen:

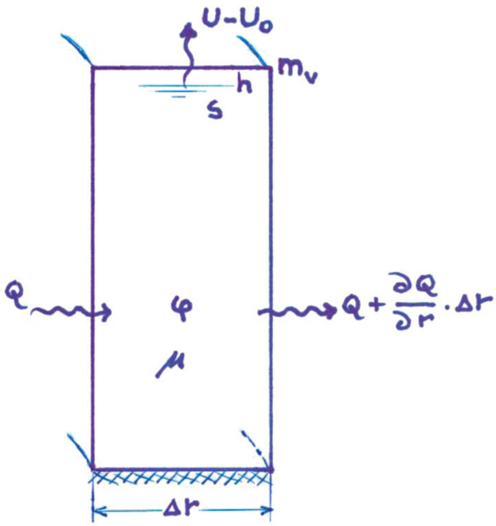
$$h_0 = \varphi_0 \tag{3}$$

In afbeelding 1 is de situatie aangegeven met een onttrekking $Q_0$ uit de volkomen put. Deze onttrekking start op $t = 0$. In deze situatie wordt de relatie tussen de afvoer per eenheidsoppervlak en de grondwaterstand gegeven door vergelijking 1.




**Afbeelding 1:** Radiaal symmetrische stroming naar een put.

In afbeelding 2 zijn voor een ringvormig element met een breedte $\Delta r$ en met de bovengrens op maaiveld en de ondergrens ter plaatse van de ondoorlatende basis de verschiltermen aangegeven tussen de uitgangssituatie en de situatie nadat de onttrekking is gestart.




**Afbeelding 2:** Waterbalans voor een ringvormig element.

Op basis van continuïteit en de wet van Darcy geldt:

$$kH\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + kH\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - (U - U_0) - s\frac{\partial h}{\partial t} - \mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

en na substitutie van vergelijking 1 en 2:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{a}{kHc}\,ln\left(\frac{-h + m_v + b}{-h_0 + m_v + b}\right) - \frac{s}{kH}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\mu}{kH}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

Deze vergelijking is samen met de uitwerking van de overdrachtsfactor de basis voor vergelijking 12 uit Van den Akker (2014-2). Vergelijking 5 geeft geen informatie over de stroming binnen het ringvormige element.
De vergelijking 5 uit Van den Akker (2014-2) geeft door de term:

$$\frac{h - \varphi}{kHc}$$

de indruk dat deze informatie er wel is. In dat verband roept met name de term met de freatische bergingscoëfficiënt vragen op. Daarom is het beter, om de discussie te vermijden, de vergelijking 5 uit Van den Akker (2014-2) te vervangen door de hier gepresenteerde vergelijking 5.

Omdat echter is aangenomen dat de logaritmische relatie tussen afvoer en grondwaterstand blijft bestaan, is daarmee, zoals is afgeleid in Van den Akker (2013), de volgende vergelijking geldig:

$$\varphi = h - m_v - b + a\,ln(-h + m_v + b) + C1 \tag{6}$$

Aangezien:

$$C1 = m_v + b - a\,ln(-h_0 + m_v + b) \tag{7}$$

volgt hieruit dat:

$$\frac{\varphi - h}{c} = \frac{a}{c}\, ln \left( \frac{-h + m_v + b}{-h_0 + m_v + b} \right) \tag{8}$$

Uiteraard geldt deze relatie alleen onder de voorwaarden en aannames die hier eerder zijn gedaan. Een substitutie in vergelijking 5 maakt het geheel niet duidelijker en wordt daarom nagelaten.

## Referenties

**Akker, C. van den** (2013) Tussen Dupuit en De Glee; in: *Stromingen* JRG 19 nr 2

**Akker, C. van den** (2014-1) Een fysische onderbouwing van de overdrachtsfactor; in: *Stromingen* JRG 20 nr 1

**Akker, C. van den** (2014-2) Tussen Theis en Hantush; in: *Stromingen* JRG 20 nr 2