LANDBOUWPROEFSTATION EN BODEMKUNDIG INSTITUUT T.N.O.
GRONINGEN

DE KARAKTERISEERING VAN DE GRANULAIRE SAMENSTELLING VAN GRONDEN

WITH SUMMARY:

THE CHARACTERISATION OF THE MECHANICAL COMPOSITION OF SOILS

W. C. VISSER

STAATSDRUKKERIJ- EN UITGEVERIJBEDRIJF

VERSL. LANDBOUWK. ONDERZ. No. 53 7 A (263—308) - 'S-GRAVENHAGE - 1947

INHOUD[1]

		Blz.
I.	Inleiding	3
II.	De aard der toevalsverdeeling	6
III.	Empirische beschrijving van de korrelgrootte-verdeeling	8
IV.	Bepaling van de constanten	21
V.	Voorbeeld van bewerking	24
VI.	Resultaten	31
VII.	Algemeene beschouwingen	35
	Samenvatting	37
	Summary	39
	Literatuur	41
	Tabellen en overzicht bewerkte gegevens	42

[1] Ir W. C. Visser, die van 1 October 1942 af verbonden is aan den Cultuur-technischen Dienst, Afdeeling Onderzoek, heeft zich in de jaren dat hij aan het Rijkslandbouwproefstation en Bodemkundig Instituut te Groningen werkzaam was, veel met het in deze mededeeling behandelde probleem bezig gehouden. Hij heeft thans deze studie nog in een publicatie vastgelegd.

I. INLEIDING

De noodzaak om vast te stellen of een zand fijn of grof is en een klei zavelig of slibrijk, bestaat vermoedelijk wel zoo lang als de landbouw zelve. De beteekenis van deze eigenschap is zoo groot, dat de granulaire samenstelling van den grond bepalend is voor het bedrijfstype. Het was al vrij vroeg in de geschiedenis van de landbouwwetenschap, dat men zich voor het in cijfers vastleggen van deze eigenschap ging interesseeren. En omdat de bepaling van de granulaire samenstelling, hoewel omslachtig, niet moeilijk was, zijn er in den loop van de jaren ongeteld vele gronden geanalyseerd naar de verdeeling van de grootte van hun gronddeeltjes. De groote belangstelling voor deze eigenschap van den grond blijkt niet slechts uit de vele analyses, welke elk proefstation in zijn archieven heeft opgestapeld; ook in de literatuur vindt men, zoowel in handboeken, welke zich speciaal met de granulaire samenstelling bezig houden, zooals die van GESSNER (4) en v. HAHN (6) als in afzonderlijke hoofdstukken of verhandelingen, het noodige over deze zaken gezegd.

Toch is men met de kennis omtrent de beteekenis van de granulaire samenstelling niet zoo gevorderd, als men eigenlijk zou hebben verwacht. Omtrent de chemische eigenschappen van den grond weet men, niettegenstaande de ongetwijfeld veel moeilijker bepaling, eigenlijk veel meer. En wanneer men dieper in deze materie doordringt, krijgt men den indruk, dat een oorzaak mede, dat men ten slotte omtrent de beteekenis van de granulaire samenstelling maar betrekkelijk oppervlakkig georiënteerd is, gelegen is in het ontbreken van een eenerzijds eenvoudige en anderzijds scherpe en doeltreffende methode tot samenvatten van de analysegegevens tot een karakteristiek.

Men treft ten aanzien van de korrelgrootte-verdeeling welbeschouwd twee richtingen van zoeken aan. De eene richting streeft naar het steeds scherper omschrijven van de korrelgrootte-verdeeling door het bepalen van steeds meer fracties, de andere richting zoekt naar het vereenvoudigen van dit uit veel getallen opgebouwde beeld tot een zoo eenvoudig mogelijke karakteristiek. Zoo ziet men dan, dat eenerzijds door een automatische registratie de nauwkeurigheid tot oneindig kleine intervallen wordt verfijnd, terwijl anderzijds bij het onderzoek naar de beteekenis van het slibgehalte men alle extra gegevens over boord zet en slechts rekening houdt met wat kleiner is dan 2 μ of dan 16 μ. Hier staat men tegenover het groote verschil, dat bestaat tusschen het *beschrijven* van een grond en het *gebruiken* van die beschrijving voor verdere studie. In het tusschen deze beide grenzen gelegen gebied, dat door een practisch bruikbare en toch nauwkeurige wijze van weergeven behoort te worden overbrugd, treft men bij het probleem van de korrelgrootte-verdeeling nog steeds een min of meer groote gaping aan.

Van verschillende zijden en vanuit verschillende gezichtspunten heeft men getracht de kloof tusschen de beschrijving van de korrelgrootte-verdeeling en het gebruik voor verdere studie te overbruggen. Tot voor kort geschiedde dit vrijwel geheel vanuit het standpunt, dat getracht moest worden, de granulaire samenstelling door een enkel-getal-karakteristiek weer te geven. Men stelde een bepaalde fractie of groep van fracties als vertegenwoordigend voor de geheele verdeeling of berekende een enkel cijfer, dat het analyseresultaat moest samenvatten. Het kenschetsen van kleigronden naar het slibgehalte en van

zandgronden naar het U- of M-cijfer zijn hiervan de welbekende voorbeelden. Zoowel practisch als volgens een meer gedetailleerde beschouwing moest dit streven echter wel vast loopen. Practisch merkte men het daaraan, dat verschillende gronden soms door hetzelfde cijfer moesten worden gekenschetst, terwijl toch duidelijk was, dat dit niet kon kloppen. Een leemig zand met 20 % slib en een door hetzelfde slibgehalte gekenschetste zavel zijn en blijven geheel verschillende gronden. Ten aanzien van het M- en U-cijfer gelden gelijksoortige bezwaren. Men dient steeds te bedenken, dat een korrelgrootte-verdeeling op zijn minst moet worden weergegeven door een maat voor de grofheid, zij het een gemiddelde korrelgrootte, een mediaan, een maximum of andere grootte-maat, waarnaast men een waarde voor de spreiding zal moeten onderscheiden. Ook hier weer is het van ondergeschikt belang, of dit een quartielwaarde of een middelbare fout of een ander getal zal zijn. Hoe men de weergave kiest, is in eerste instantie niet van belang, doch primair is hier het inzicht, dat men niet mag hopen in het algemeen een eigenschap, welke door twee cijfers wordt gekenmerkt, in een enkel getal te zullen kunnen samenvatten. In bijzondere omstandigheden, waarbij door een uniforme ontstaanswijze van verschillende gronden de eigenschappen regelmatig veranderen, is dit wat anders. Men zal bij deze gelijksoortige gronden met een enkel getal wel uit kunnen komen. Bij de karakteriseering met meer getallen blijkt dit uit het optreden van een samenhang tusschen de beschrijvende getallen. Het pleit voor de enkel-getal-karakteristiek moet echter als verloren worden beschouwd, waar het gaat om een algemeene en juiste beschrijving van de korrelgrootte-verdeeling.

Het ideaal van een juiste beschrijving zou zijn de twee-getallen-karakteristiek, bestaande uit een gemiddelde en de afwijking ten opzichte van het gemiddelde. Als representant van deze beschouwingswijze mag men de door KRUMBEIN (8) aangegeven methode aanmerken, die de korrelgrootte-verdeeling weergeeft als een logarithmisch scheeve kansverdeeling. Wanneer deze zienswijze juist was zou er alle reden zijn de natuur te bewonderen om haar eenvoud en regelmaat. De logarithmisch scheeve kansverdeeling heeft namelijk eigenschappen, welke haar voor karakteriseering van grond tot de eenvoudigst denkbare functie maakt, veel eenvoudiger dan bijvoorbeeld de normale kansverdeeling. Het is dan ook vanuit dit standpunt bezien wel jammer, dat de korrelgrootte-verdeeling bij de gronden in Nederland zoo weinig met de door KRUMBEIN voorgestelde verdeeling overeenkomt. Deze wijze van karakteriseeren, waarvan men zich wel eens afvraagt, hoe het mogelijk is dat zij in de literatuur een plaats heeft kunnen vinden, gezien den wel zeer geringen graad van nauwkeurigheid waarmede zij de korrelgrootte-verdeeling vermag weer te geven, moge dan niet bruikbaar zijn, in principe is het denkbaar, dat men in plaats van de logarithme en in plaats van de kansfunctie andere formuleeringen te baat zou kunnen nemen en dat op deze wijze toch een twee-getallen-karakteristiek zal kunnen ontstaan. Vele pogingen van schrijver dezes in die richting zijn op niets uitgeloopen, ook niet, toen naast een grofheids- en een spreidingsmaat nog een scheefheidsmaat werd te hulp geroepen om het vraagstuk gemakkelijker oplosbaar te maken, waardoor dus op een drie-getallen-karakteristiek werd overgegaan. Drie getallen lijken wel het minimum te vormen, waarvan men verwachten mag, dat zij bij de kenschetsing van de slibanalyse succes zullen geven.

(4) A 90

Nog verder in het aantal karakteriseerende eigenschappen gaat DOEGLAS (3) die de verdeelingscurve opgebouwd acht uit twee of meer afzonderlijke toppen. Daar de analyse bij meer dan twee toppen wel zeer moeilijk wordt, kan men zijn beschouwingswijze, welke voor elken top een mediaan en een spreidingsmaat doet vinden, rangschikken als een vier-getallen-karakteristiek. Er zijn ongetwijfeld enkele principieele bezwaren tegen de methode van DOEGLAS in te brengen, welke vooral neerkomen op de onduidelijke wijze, waarop met het slibgehalte rekening wordt gehouden, doch hieraan zou met weinig moeite tegemoet te komen zijn. Bezwaarlijk lijkt echter vooral de niet eenvoudige mathematische analyse van de cijfers.

Van de beschouwingswijzen welke principieel tot de veel-getallen-karakteriseering moeten worden gerekend, is de zuiver mathematische van CLARCK AFFLECK (2) van weinig belang, omdat zijn beschouwing weinig duidelijk is en vrij moeilijk lijkt wat bewerking betreft, zoodat het niet waarschijnlijk lijkt, dat deze methode veel ingang zal vinden. Deze auteur stelt voor, de korrelgrootte-verdeelingscurve te beschouwen als een superponeering van zooveel curven van een eenvoudiger gedaante, dat men den gewenschten graad van aanpassing verkrijgt.

Voor ons land van meer belang zijn de recente beschouwingen van O. DE VRIES (10), die eveneens een principieele veel-eigenschappen-karakteriseering bij zijn beschouwing omtrent de Nederlandsche gronden gebruikt, waarbij ditmaal de nadruk niet in de eerste plaats op cijfers, doch meer op visueele verschillen in de volgens gestandaardiseerde methoden weergegeven verdeelings- en sommatiecurven berust. Hier wordt gelet op den top van de fractieverdeeling en de wijze, waarop de naastliggende fracties den overgang tot den top vormen, verder wordt gelet op de mediaan, op de helling van de sommatiecurve, op den vorm van den voet van de verdeelings- en de sommatiekromme en op het verband tusschen het U-cijfer en de mediaan. Hierbij vindt men in de helling van de sommatiecurve en de breedte van de verdeelingsfiguur een parallel van de uit de mathematische voorstellingswijze bekende spreidingseigenschappen, terwijl de vorm van den voet van de krommen en de verhouding van U-cijfer tot mediaan iets over scheefheidskwesties aangeeft. In principe is dus de door DE VRIES gegeven beschouwingswijze vrijwel volledig, al zal volgens den smaak van sommigen naast deze meer visueele beoordeeling een meer exacte en in cijfers uitgedrukte maat een welkome aanvulling vormen.

In het voorgaande zal duidelijk zijn geworden dat het streven om tot een nauwkeuriger beschrijving van de korrelgrootte-verdeeling te komen, min of meer gepaard is gegaan met het karakteriseeren van de slibcurve door steeds meer eigenschappen. Daarbij ziet men soms de veeltoppigheid van de verdeelingskromme op den voorgrond geschoven, doch ook de uniformiteit in de verdeeling vindt in de door DE VRIES verzamelde gegevens voor Nederland een sterken steun. Op dit punt nemen de inzichten van AFFLECK een opmerkelijke positie in, omdat de mogelijkheid om een uniforme verdeeling als een superpositie van een aantal verdeelingen te beschouwen, bewijst dat een standpunt te vinden is, van waaruit tusschen een- en meertoppigheid geen principieel onderscheid meer is. Overigens moet men na het bezien van de vele door DE VRIES bijeengebrachte krommen welhaast tot de conclusie komen, dat het standpunt, dat in elke verdeelingscurve enkele toppen te verwachten zijn en

dat daarop de bewerkingsmethodiek moet worden opgebouwd, in het algemeen beschouwd, daar veeltoppigheid slechts zeer zelden voorkomt, de bewerking onnoodig zal compliceeren. Men zal ongetwijfeld gemakkelijker het doel van een eenvoudige karakteriseering van de korrelgrootte-verdeeling bereiken, door de eentoppige verdeeling als normaal geval te beschouwen. Voor de afwijkende gevallen als anomaliëen zal dan een speciale methode van analyseering en weergeven ontwikkeld moeten worden.

II. ALGEMEENE BESCHOUWINGEN OMTRENT DEN AARD VAN DE TOEVALS-VERDEELING

Wanneer men tot de eenvoudigste wijze van weergeven van de toevalsverdeeling van de korrelgrootten wil geraken, dan ligt het voor de hand, dat men het meeste succes zal mogen verwachten van het teruggaan tot de oorzaken, welke de deeltjes rangschikken in de veelvuldigheidsorde, welke men bij het onderzoek vindt. Als uitgangspunt zou men moeten nemen de sedimentatiewetten voor de afzetting van deeltjes uit lucht zoowel als uit water en de wetten, welke de vergruizing van gesteenten regeeren. Een onderzoek van wat in de literatuur hierover bekend is, wijst uit, dat deze tak van onderzoek nog niet zoover is voortgeschreden, dat men voor de verklaring van de granulaire samenstelling hier een basis kan vinden. Bij de sedimentatie-formules, wij noemen slechts de namen van Du Bois en Schoklitz (9) staat meer de hoeveelheid sediment in het middelpunt van de belangstelling en niet zoozeer de grofheid of fijnheid van de deeltjes. Bij de vergruizing troffen wij slechts ten aanzien van het werk van den kogelmolen enkele formules aan. Doch zoowel de formule van Kick als die van Rittinger zijn zoodanig eenvoudig van bouw, dat het duidelijk werd, dat ook hierin geen uitgangspunt voor de beschrijving van de korrelgrootte-verdeeling te vinden was.

Hiernaast staat nog een andere weg open om tot een min of meer gefundeerde formule te komen, welke weg van een meer inductieven aard is. Men gaat daarbij uit van de veronderstelling, dat aan de korrelgrootte-verdeeling een bepaalde oorzaak ten grondslag ligt, welke aan een logische kansverdeelingswet onderworpen is. Het zou al zeer toevallig zijn, indien deze wet de verdeeling van de gewichten regelde. Eerder zou men verwachten, dat de sedimentatie uit water of wind evenredig zou zijn met het oppervlak van het deeltje of met de verhouding van het oppervlak tot het gewicht. Om de gevolgen van een dergelijke veronderstelling te verduidelijken zal hier een willekeurig voorbeeld worden genomen.

Zou men kunnen aantoonen, dat de lengte van de sedimentatieweg volgens een bepaalde toevalsverdeeling gerangschikt zou kunnen worden en dat de sedimentatietijd hiervan onafhankelijk was en gemiddeld constant zou kunnen worden geacht, dan zouden ook de sedimentatie-snelheden volgens die voor den sedimentatieweg geldende toevalswet gerangschikt moeten voorkomen, daar bij constanten tijd de afgelegde weg evenredig is met de snelheid. Volgens de wet van Stokes zijn verder de snelheden evenredig met het kwadraat van de deeltjesgrootte. Dus zouden dan ook de kwadraten van de deeltjesgrootte verdeeld zijn volgens de eerst genoemde rangschikkingswet. Bij de korrelgrootte-

verdeelingscurve gaat men echter de verdeeling van de gewichten na, dus de verdeeling van de derde machten. De vraag is nu, aan welke verdeelingswet de derde machten zich onderwerpen indien de verdeeling van de tweede machten gegeven is. Symbolisch is dit om de gedachte te bepalen als volgt te verduidelijken.

Wanneer men aanneemt, dat de sedimentatiewegen verdeeld zijn volgens de toevalswet

$$W = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int e^{-a^2 f^2(s)} \, ds \qquad 1$$

waarin s de gemiddelde sedimentatieweg voorstelt, dan zouden de kwadraten van den straal verdeeld moeten worden volgens

$$W = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int e^{-b^2 f^2(r^2)} \, df(r^2) \qquad 2$$

De inhouden zouden op grond hiervan, met verwaarloozing van de juiste constanten, welke de omrekening van de sedimentatiesnelheid in den inhoud of het gewicht mogelijk maken, verdeeld zijn volgens:

$$W = \frac{cr}{\sqrt{\pi}} \int e^{-c^2 f^2(r^2)} \, df(r^2) \qquad 3$$

$$W = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int e^{-c^2 f^2(r^2) \, + \, ln \, r} \, df(r^2) \qquad 4$$

Nu is een eigenschap van de gebruikelijke normale kansverdeeling, dat de exponent een kwadraat is. Het zal echter weinig moeite kosten zich ervan te overtuigen, dat men van den exponent:

$$ln \; r - c^2 f^2(r^2)$$

in het algemeen geen kwadraat zal kunnen maken.

Met andere woorden wil dit zeggen, dat wanneer de sedimentatiewegen volgens een wet verdeeld zijn, welke op de formuleering van GAUSS is terug te brengen, de inhouden of de gewichten zich niet meer als een normale verdeeling zullen kunnen laten voorstellen.

In het algemeen zal men zijn beschouwingen omtrent de formuleering van de korrelgrootte-verdeelingscurve moeten opbouwen op de veronderstelling, dat met de grootste waarschijnlijkheid een andere macht van de diameter dan de derde macht, welke voor de gewichten geldt, een eenvoudige kansverdeeling zal blijken te bezitten. De kansfunctie zal dan geschreven moeten worden als:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int e^{-h^2 f^2(r^n) \, + \, (3-n) \, ln \, r} \, df(r^n) \qquad 5$$

Wanneer men nu uit werkelijke korrelgrootte-verdeelingsdiagrammen door de veronderstelling, dat de aantallen of de stralen dan wel de oppervlakken van de deeltjes een eenvoudige kansverdeelingswet zullen volgen, deze aantallen-stralen- of oppervlakken-verdeeling uit zou rekenen, dan zou de proef op de som moeten zijn, dat bij het uitzetten van de kansverdeeling tegen deze functie

van de korreldiameter men voor alle normale gronden een normale Gaussche kansverdeelingsfiguur zou krijgen. Had KRUMBEIN met zijn logarithmisch scheeve verdeeling van de gewichten gelijk, dan zou $n = 3$ zijn, waardoor de log r in den exponent van onze formule zou vervallen. Verder zou de functie een logarithme zijn en zou dus het uitzetten van de kans tegen de logarithme van de diameter voor de normale gevallen een verdeeling volgens GAUSS geven. De functie kan echter geen logarithme zijn, aangezien dan de exponent voor alle waarden van n in een volledig kwadraat zou zijn om te zetten en dus onafhankelijk van n, steeds een logarithmische absis tot normale verdeelingen aanleiding zou geven, dus ook voor de verdeeling van de gewichten. Helaas klopt dit niet.

De methode zal echter duidelijk zijn. Wanneer men naast de verdeelingscurve voor de derde machten van den diameter, namelijk die voor de gewichten, ook die voor andere machten berekent en in een kansschema uitzet, dan zal bij een bepaalde macht wellicht blijken, dat een enkele functieschaal voor de diameters alle verdeelingen normaal maakt. Het vraagstuk is dan opgelost. Slechts de techniek van het granulaire onderzoek, zooals men deze thans pleegt uit te voeren, is oorzaak, dat het hiervoor uitgestippelde programma van onderzoek niet verwezenlijkt kan worden. Oorzaak is, dat bij de verdeelingskrommen voor de lagere machten van x een zeer groot gedeelte van de kansfiguur in het gebied komt te liggen, waar men geen fracties meer bepaalt. Een klein gewicht aan fijne deeltjes brengt een zoo groot aantal korrels aan, dat de veel belangrijker gewichtsfracties in het grovere deel van de schaal daartegenover naar aantal in het niet kunnen vallen. In een dergelijk geval hebben de grove fracties voor de kennis van de aantallen-verdeeling weinig waarde en zou men speciaal de gewichtsverdeeling beneden 2 μ, wellicht zelfs zeer ver daar beneden, moeten kennen. Voor een hypothetisch geval van een zandgrond, welke iets grover was dan duinzand en waarvoor een mediaanwaarde van de gewichten bij 200 μ werd gekozen, berekenden wij, dat de mediaanwaarde van de oppervlakken 140 μ en die voor de aantallen 70 μ bedroeg. Bij een dergelijk geval is de berekening nog juist uitvoerbaar. Voor iets fijnere gronden begint echter het gewicht aan deeltjes beneden 16 μ reeds zoozeer mee te spreken, dat zonder de kennis van de fractie 2—16 μ geen betrouwbaar beeld meer verkregen kan worden. Voor slibhoudende gronden geldt dit in versterkte mate en voor nog fijnere fracties. Het verkrijgen van een goed beeld van de grondslagen van de korrelgrootte-verdeeling zal daarom in de eerste plaats het bepalen van veel fijnere fracties dan tot dusverre gebruikelijk is, als voorwaarde stellen.

III. EMPIRISCHE BESCHRIJVING VAN DE KORRELGROOTTE-VERDEELING

Bij een poging om de korrelgrootte-verdeeling empirisch te beschrijven kan men zich op het standpunt stellen, dat elke willekeurige curve, welke maar bij voldoende benadering de waarnemingen voor de verschillende fracties aaneenrijgt, bruikbaar is. Hiertegen is weliswaar niet veel in te brengen, doch voor den onderzoeker, die een brug tusschen de mathematische weergave en de sedimentpetrografische inzichten wil leggen, zal een al te willekeurige formule veelal

weinig bevredigend aandoen. Men zal het liefste een formule zien, welke reeds gebruik maakt van wat men ten aanzien van het toevalsproces weet of vermoedt. In de voorafgaande paragraaf werd reeds uiteengezet dat op dit punt nog geen bruikbare theorie werd opgesteld, zoodat de empirische formuleering noodzakelijkerwijze het schoonheidsgebrek met zich draagt van een eenzijdige wiskundige beschouwing. En ook in dit opzicht worden de regelen van de kunst niet opgevolgd, aangezien een kansverdeeling een eigenschap is van aantallen terwijl de aard van het waarnemingsmateriaal er wel toe noodzaakt de gewichten aan een kansbeschouwing te onderwerpen.

Bij de kansverdeeling onderscheidt men de verdeelings- en de sommatiecurve. Deze staan in geval van een niet normale curve in een betrekking tot de normale kansverdeelingskromme volgens een lijn of een formule, welke wij de *scheefheidsbetrekking* zullen noemen. Schrijft men bij de normale curve als exponent z^2 en bij een scheeve curve $f^2(x)$ dan is de formule $z = f(x)$ de scheefheidsbetrekking. Grafisch vindt men deze formule als lijn, door bij de scheeve curve de abscis x waar 10, 20, 30, enz. % van het waarnemingsmateriaal onder of boven valt, uit te zetten tegen de abscis welke bij een normale curve bij dezelfde percentages optreedt. Verder is het gebruikelijk de eerste afgeleide van x naar y van deze scheefheidsbetrekking de *reactiecurve* te noemen. Dit is dus de lijn, welke men verkrijgt door op opeenvolgende plaatsen van de curve $z = f(x)$ de cotangens te bepalen en na uitzetten van deze waarden tegen x deze punten met elkander te verbinden. Voor dit onderzoek bleek evenwel dat de afgeleide van y naar x, dus de lijn van de tangenten, een bruikbaarder punt van uitgang vormde. Wij willen deze lijn de *scheefheidsvariatie* noemen op grond van de overweging, dat indien deze variatie nul is en de tangens dus constant, men met een normale niet scheeve verdeeling te maken heeft, en dus het varieeren van den tangens het criterium van scheefheid zou kunnen vormen. De betrekking van de tangenten bij twee punten van de scheefheidsbetrekking ten opzichte van elkander zou een indicatie voor de mate van scheefheid kunnen vormen.

In het algemeen is het bekend, dat de verdeelingscurve een gevoeliger beoordeelingsbasis biedt dan de sommatiecurve. Dit is de algemeen bekende eigenschap van afgeleiden tegenover hun integraal. Ook de scheefheidsvariatie en de scheefheidsbetrekking staan ten opzichte van elkander in de relatie van afgeleide tot integraal. Ook hier is het dus een voordeel de scheefheidsvariatie als basis van het onderzoek te nemen.

In de hierna volgende beschouwing zullen een aantal variabelen herhaaldelijk in formules worden gebruikt en in verband met veranderingen in de schaal of het nulpunt worden vernoemd. Hierbij zal steeds de volgende beteekenis aan de symbolen worden gegeven:

d = korreldiameter.

x = log d.

$x_F = l_F$ = abscis waarde van het punt van flexie in de curve voor de scheefheidsbetrekking of van den top in de scheefheidsvariatielijn.

$x_M = l_M$ = mediaan van de korrelgrootte-verdeeling en x-waarde van het punt $z = o$ van de scheefheidsbetrekking.

$u = x\text{-}x_F$ = afwijking ten opzichte van het punt van flexie.

u_g = ondergrens van korrelgrootte, waar beneden de ultra-micronen niet meer als deeltjes mogen worden opgevat.

G = gewichtspercentage deeltjes dat beneden een zekere grens van grootte van de deeltjes optreedt.

z = afwijking van het gemiddelde bij een normale frequentie-verdeeling volgens de formule

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2}\, dt$$

z_F = z-waarde van het punt van flexie, behoorende bij x_F.

p = waarde van de kans integraal tusschen $-\infty$ en z.

$y = \frac{\Delta z}{\Delta x}$ = hellingstangens van de curve voor de scheefheidsbetrekking.

$a = S_f$ = spreidingsmaat voor de kansverdeeling van het fijne deel van de korrelsamenstelling.

$b = S_g$ = spreidingsmaat voor de kansverdeeling van het grove deel van de korrelsamenstelling.

$c = \mu$ = breedte modulus van de scheefheidsvariatie.

Wanneer men ter nadere bestudeering van de scheefheidsvariatie de eerste afgeleide van de scheefheidsbetrekking wenscht te bepalen, dan dient men allereerst in te gaan op de vraag, op welke wijze men deze curve zal uitzetten. Indien men differentieert naar een functie van d, kan men een geheel anders gevormde afgeleide verkrijgen dan wanneer men differentieert naar d zelve.

In de figuren 1 en 2 geven wij een indruk van het verschil in vorm, dat men voor de curve voor de scheefheidsvariatie krijgt, indien men het onderzoek uitvoert ten opzichte van de korreldiameter zelf of ten opzichte van de logarithme daarvan. De empirische beschouwingswijze brengt eigenlijk mede, dat men een groot aantal functies langs de d-as zou moeten onderzoeken om na te gaan, welke het eenvoudigste en het beste voor verdere bewerking toegankelijke beeld opleverde. Hier is het onderzoek echter niet verder gegaan dan tot d zelf en de logarithme van d, daar met deze functie reeds een zeer bruikbaar beeld werd verkregen en bovendien deze wijze van uitzetten, welke geheel parallel loopt met de methode van KRUMBEIN, zich aanpast aan de gebruikelijke techniek of wel aan de techniek, waarvan men zou kunnen verwachten dat zij voor een eenvoudige beoordeeling van de granulaire samenstelling de grootste voordeelen zal bezitten nl. de techniek van het „z—log d" diagram.

Een nadere beschouwing van figuur 1 wijst uit, dat bij gebruik van de dia-

meter zelf langs de abscis men een niet zoo eenvoudige lijn verkrijgt. Men zou de curve min of meer kunnen omschrijven als een op een parabool gelijkende lijn, welke van $z = \infty$ bij $d = o$ daalt tot $z = o$ voor $d = \infty$. Op deze paraboolachtige lijn is verder een topvormige lijn gesuperponeerd, waarvan het hoogste punt blijkbaar meer naar groote korreldiameters opschuift, naarmate de grond van een grovere samenstelling is. Bij de slibrijkste monsters ziet men niet meer

FIG. 1 De figuur geeft den indruk over de verdeeling van de korrelgewichten, welke verkregen wordt door den diameter als maatstaf te nemen bij het berekenen van de lijn voor de scheefheidsvariatie. De verkregen lijnen zijn van een type, waarbij een bergvormige figuur is gesuperponeerd op een op een parabool gelijkende dalende kromme. Het type van curve laat zich niet gemakkelijk in een formule vastleggen

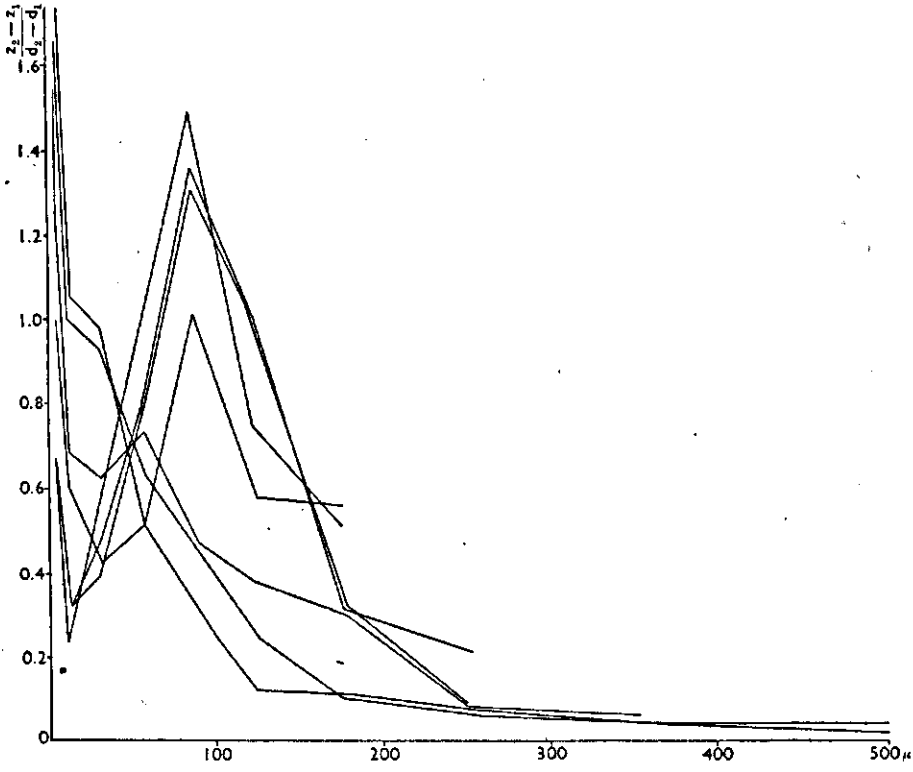

FIG. 1 *The figure gives an idea of the type of skewness of the distribution of particle weights. It does not seem possible to express this type of curve in a mathematical formula*

zoo duidelijk een top optreden maar het trapje in de lijnen wijst er op, dat de afwijking van de paraboolachtige lijn ook daar nog aanwezig is, maar door een onvoldoende nauwe schakeling van de fractiegrenzen niet meer duidelijk naar voren komt. Wellicht ook daalt de parabool sterker dan de hellingen van den top stijgen, zoodat in totaal een daling overblijft. Uit figuur 1 blijkt voldoende

duidelijk, dat vooral de wat slibhoudende gronden op deze wijze maar matig goed gekenschetst kunnen worden, althans wanneer men de gebruikelijke fractiegrenzen aanhoudt.

In figuur 2 is het beeld aanzienlijk regelmatiger. Door de sterke uitrekking, welke de logarithme aan de schaal geeft, neemt de hellingstangens sterk af en ziet men in plaats van de asymptotisch aan de z-as opstijgende tak van de

FIG. 2 Wanneer de scheefheidsvariatie wordt berekend met de logarithme van de korreldiameters als maatstaf, dan ontstaat in tegenstelling met de lijnen in figuur 1 een vrijwel symmetrische curve, welke veel op de curve voor de normale kansverdeeling gelijkt en als zoodanig in een formule kan worden weergegeven

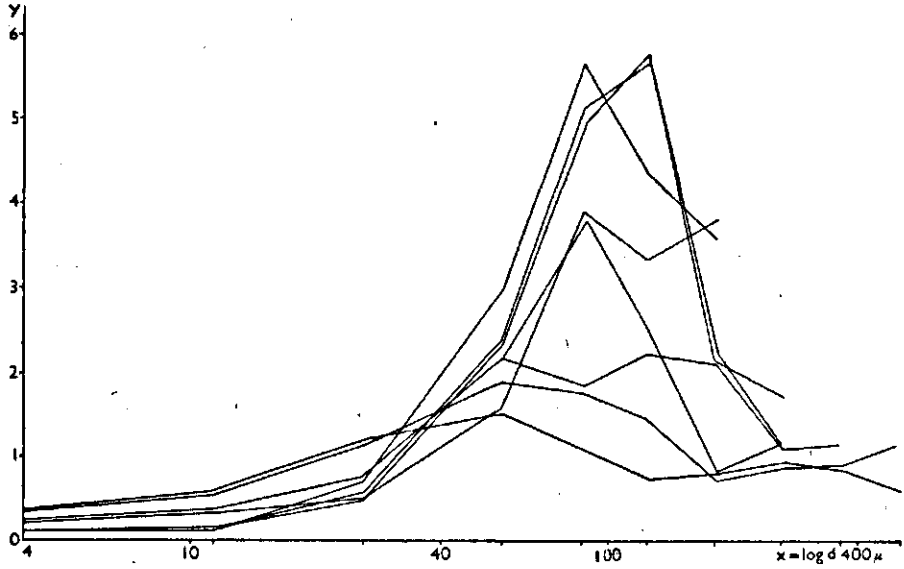

FIG. 2 *Plotting the distribution curve of the particle weights against the logarithme of the radius, one obtains a curve, which in opposition to the result in figure* 1, *is possibly symmetrical. The curve may mathematically be described as a normal probability curve*

curve een steeds meer afflauwen van de helling van den berg, welke ook hier optreedt. De berg heeft een vrij regelmatige gedaante en verheft zich bij lichte gronden hoog en stijl terwijl bij zware gronden de hoogte minder en de helling flauwer is. De symmetrische gedaante van den berg in deze figuur geeft aanleiding tot de veronderstelling, dat de formule voor de optredende gedaante van de curve eenvoudiger moet zijn dan voor die in figuur 1.

Het is van belang de gedaante, welke de curve voor de scheefheidsvariatie in figuur 2 aanneemt, meer nauwkeurig te beschouwen. Het is niet moeilijk, een formule te ontwerpen voor een symmetrisch gevormden berg. Men dient zich echter vooraf een oordeel te vormen of de hellingen van den berg ten slotte met de x-as zullen samenvallen of daar steeds een zekeren afstand boven zullen moeten blijven. Indien de hoogte van de hellingen nul zou worden, zou bij de curve van de scheefheidsbetrekking de lijn evenwijdig aan de horizontale as

gaan loopen. In figuur 3 wordt dit weergegeven door de stippellijn 1. Deze lijn zou echter willen zeggen, dat er steeds een zekere hoeveelheid materiaal aanwezig is met een diameter kleiner dan elke willekeurige maat. Dit is vanzelfsprekend een onmogelijkheid, daar men op enkele eenheden van de logarithme beneden de laagste fractiegrens reeds het gebied van moleculaire grootten bereikt. Daar beneden kunnen geen deeltjes voorkomen.

Zou men de hellingen van den berg in figuur 2 de x-as slechts tot op een zekeren afstand laten naderen, dan zou dit wijzen op een constant worden van de tangens, dus op een rechtlijnig beloop van het linkereinde van de scheefheidsbetrekking. Stippellijn 2 in figuur 3 brengt dit in beeld. Deze lijn geeft wel een mogelijkheid aan, een diameter te vinden waar beneden geen deeltjes meer voorkomen en wel bij log d $= -\infty$ of d $=$ o. Op zichzelf voldoet deze lijn dus

FIG. 3 Door redeneering kan blijken, dat de scheefheidsbetrekking nooit door de lijnen 1 en 2 kan worden weergegeven, daar dit mee zou brengen, dat nog aanmerkelijke gewichten aan deeltjes mogelijk zouden zijn met een diameter, welke nog beneden de moleculaire grootten zou kunnen liggen. Het ondereinde van de curve moet een vorm als van de lijn n°. 3 hebben

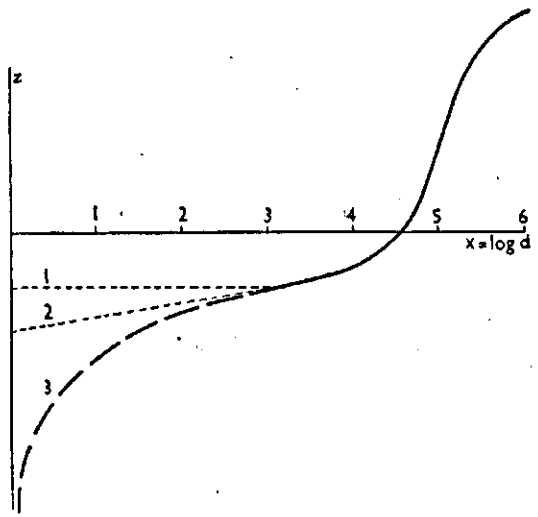

FIG. 3 *It is obvious that the type of skewness cannot be expressed by the lines* 1 *and* 2. *These lines would mean that an appreciable amount of the material must have a radius below molecular sizes. The lower part of the line must be of type* 3

wel, doch men moet bedenken, dat volgens een dergelijke veronderstelling beneden den moleculairen diameter nog vrij veel materiaal kan worden aangegeven, hetgeen principieel niet juist is en practisch ongetwijfeld niet zal voldoen, indien men ook korreldiameters van aanzienlijk geringere afmeting dan de 2 μ van thans zal gaan bepalen.

De door de stippellijn 3 afgebeelde mogelijkheid, welke aangeeft, dat bij een eindige waarde van log d voor z de waarde $-\infty$ wordt bereikt, moet logischer-

wijze dien vorm van de scheefheidsbetrekking weergeven, welke zal worden gevonden, indien men de granulaire analyse tot steeds kleinere diameters gaat uitbreiden. Als ondergrens zou men een korreldiameter van 1 $\mu\mu$ kunnen veronderstellen, aannemende dat in dat deel van de korreldiameterschaal een gronddeeltje ophoudt als zoodanig beschouwd te mogen worden en dat men daar den overgang naar het gebied van de moleculaire oplossingen moet leggen. Welke waarde voor de ondergrens men hier ten slotte zal moeten nemen is overigens van weinig belang.

Het optreden van een minimum en een maximum in de scheefheidsbetrekking wijst uit dat, tegen de logarithme van den korreldiameter uitgezet, de frequentieverdeeling van de korrelgewichten bij het normale geval tweetoppig moet zijn. Wel zal veelal de top in de ultra slibfractie van weinig belang zijn, maar vooral bij slibrijke gronden zal men naast den top in het gebied boven 2 μ een niet onaanzienlijke ophooping van gewicht bij de zeer fijne fracties moeten verwachten vermoedelijk zoo omstreeks 10 tot 100 $\mu\mu$. Deze veronderstelling wordt aanvaardbaar, indien men uitgaat van de veronderstelling, dat de deeltjes-aantallen een normale, eentoppige frequentieverdeeling volgen met den top bij zeer fijne fracties. Gaat men nu van de aantallen over op de gewichten, waartoe het aantal met de derde macht van d moet worden vermenigvuldigd, dan is het te voorzien dat ergens in de schaal de toename door de derde macht zal overwegen boven de afname van de kans en dus zal daar de frequentiecurve een stijging ondergaan. Nog weer verder op, dus bij grootere diameters, zal het aantal korrels per fractie echter sterker teruggaan dan de derde macht het gewicht van de fracties doet toenemen. Waar de derde macht ophoudt te overheerschen, bereikt men dan de neerwaartsche helling van de frequentiefiguur, welke in het door de analyse omvatte gedeelte niet steeds wordt aangetroffen.

Men kan zich dus de voorstelling maken, dat in de gebruikelijke korrelverdeelingscurve de top de plaats aangeeft, waar de afname van de kans en de toename van de derde macht elkander juist in evenwicht houden. Bij grovere korrels overweegt de invloed van de afname van de kans en ontstaat een daling, bij fijnere deeltjes overweegt de afname van de derde macht en daalt de curve eveneens. Hieruit zal duidelijk zijn, dat de korrelverdeelingscurve een vrij ingewikkeld geval van toevalsverdeeling moet worden geacht, waarvan de oorzaak vermoedelijk ten deele te zoeken is in de complicatie, welke het uitdrukken van de fracties in een gewichtsmaat met zich brengt.

De taak, welke thans verricht moet worden, bestaat uit het zoeken van een geschikte formuleering voor de scheefheidsvariatie, waarvan figuur 4 als differentiaal van curve 3 in figuur 3 de algemeene gedaante aangeeft. Het lijkt voor de hand te liggen deze figuur op te vatten als een paraboolachtige lijn, waarop een topvorm rust. In deze opvatting keert dus de beschouwing weer, welke bij de scheefheidsvariatie ten opzichte van den korreldiameter zelf bij figuur 1 werd gehouden, doch het groote verschil is nu, dat de top op het reeds zeer vlakke gedeelte van de parabool staat en daardoor veel gemakkelijker is te overzien. Wanneer men nu aanneemt, dat de ondergrens waar beneden geen deeltjes meer voor kunnen komen, bij 1 $\mu\mu$ is gelegen, is het een voordeel, de geheele fractieverdeeling in $\mu\mu$ uit te drukken. De logarithme van 1 $\mu\mu$ gelijk nul vormt dan meteen het nulpunt van de x-schaal. De top ligt dan op vier tot vijf eenheden van den oorsprong en het duidelijke begin van de linker-

helling vangt aan op $3\frac{1}{2}$ tot $4\frac{1}{2}$ eenheden. Uitzondering vormen hierop de zeer zware kleien, waar deze getallen nog aanzienlijk lager kunnen zijn.

Voor den vorm van de paraboolachtige curve zijn vrijwel geen kwantitatieve aanwijzingen voorhanden. Beneden 2 μ zijn omtrent Nederlandsche gronden vrijwel geen gegevens bekend. De eenige aanwijzing, waarover men beschikt, is het verschil in y-waarde voor de hellingen ter weerszijden van den top en op gelijken afstand daarvan verwijderd. Bedenkt men evenwel, dat men bij de rechterhelft van den top zich gewoonlijk al vrij hoog op de curve voor de scheef-

FIG. 4. Een scheefheidsbetrekking als door de lijn n°. 3 in figuur 3 wordt weergegeven wijst op een scheefheidsvariatielijn als hier weergegeven. De hooge waarden voor y bij kleine en bij matige waarde van x brengt mee, dat de frequentieverdeeling tweetoppig kan zijn. Dit behoeft niet op een mengsel van twee groepen deeltjes te wijzen, doch kan worden verklaard uit het ontstaan van de als gewichtsverdeeling uitgedrukte toevalscurve

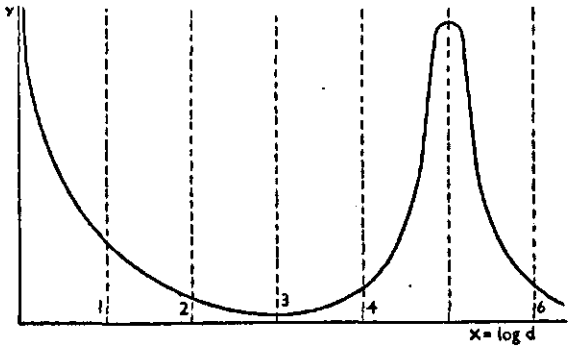

FIG. 4 *A summation curve such as number 3 in figure 3 agrees with a frequency diagram as given in figure 4. The frequency distribution of the particle size may have two maxima due to the nature of the material. This does not necessarily point to the mixing of two compounds*

heidsbetrekking bevindt, dus in het gebied van de zeer kleine restjes grove fractie, dan zal het duidelijk zijn, dat deze gegevens veelal van zoo beperkte nauwkeurigheid zijn, dat men aan die aanwijzingen geen vast richtsnoer heeft. De formuleering voor het linkergedeelte van de curve moet men bij den tegenwoordigen stand van onze kennis dus meer als symbolisch dan als exact opvatten. Men kan zich vooreerst vergenoegen met de formule

$$y_1 = \frac{a}{x} \qquad 6$$

Mogelijk zal later nog blijken, dat men beter doet, hieraan nog een constante toe te voegen of aan de x nog een van geval tot geval varieerend bedrag toe te voegen of er van af te trekken. Daarnaast bestaat de mogelijkheid, dat men beter een andere formule kan nemen. Dit alles zal slechts kunnen worden opgelost indien men de korrelgrootte-verdeeling tot veel fijnere fracties gaat

bepalen, een uitbreiding van het onderzoek, dat ook in ander opzicht zeer gewenscht is.

Een topvormige figuur kan men eveneens op zeer verschillende wijze weergeven. Nagegaan werden de mogelijkheden voor

$$y_2 = \frac{b}{u^2 + c} \qquad 7a$$

en

$$y_2 = be^{-\left(\frac{c}{u}\right)^2} \qquad 7b$$

waarbij in beide formules u de afwijking $u\text{-}u_F$ ten opzichte van de mediaan x_F van den berg weergeeft. In beide formules komt de symmetrie in de even macht van u tot uiting. Ook beperken beide formules het aantal karakteriseerende constanten tot het uiterste. Met minder dan 3 constanten, nl. b, c en x zal men een figuur als de hier beschouwde wel niet kunnen weergeven. Tevens zijn beide formules niet onpractisch, daar als integraal de eerste een bgtg oplevert, welke men in de goniometrische tabel getabuleerd vindt, terwijl de tweede formule met de kansfunctie overeenkomt, waarvan de integraal in de verhandeling van KAPTEYN en VAN UVEN (7) of, in iets minder doelmatigen vorm, bij CZUBER (5), weergegeven wordt.

Een voorloopig onderzoek gaf den indruk, dat de aansluiting aan de waarnemingen voor de kansintegraal het beste was bij de linkerhelling van den berg, terwijl de boogtangens bij de rechterhelling soms iets beter leek aan te sluiten. Het verschil tusschen beide formules is voornamelijk daarin gelegen, dat bij de kansintegraal de overgang van den „berg" in het „vlakkeland" veel scherper optreedt dan bij de boogtangens. De berg bij de laatste formule heeft een zeer breeden voet en een smallen hoogen top; bij de kansintegraal is de top lager en breeder en de voet korter en daardoor smaller. Het heeft in dit stadium nog weinig zin door nauwkeurige berekening vast te stellen, welke van beide functies, of welke andere functie de voorkeur verdient, daar het al of niet kloppen afhangt van de parabolische formule 6 voor y_1 waar omtrent nog geen gegevens beschikbaar zijn. Daar verder de kansintegraal in dit geval een logischer formule lijkt dan de boogtangens en verder de verdeeling van het bij KAPTEYN en VAN UVEN afgebeelde kanslatje met voordeel zoowel bij het bewerken van formule 7*b* voor y_2 als voor het afzetten van de z-waarde kan worden gebruikt en ten slotte het minder goed kloppen bij de onnauwkeurige waarden voor de rechterhelling van weinig belang is, is aan de boogtangens slechts beperkte aandacht gegeven en zal bij deze uiteenzetting daarop niet nader terug worden gekomen.

Ten einde van den getabuleerden vorm van de kansintegraal gebruik te kunnen maken, schrijft men de formule voor y_2 het beste als:

$$y_2 = b\frac{1}{c\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{u}{c}\right)^2} \qquad 8$$

Voert men hier als nieuwe veranderlijke in $t = \frac{u}{c}$ dan ontstaat:

$$y_2 = b\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2} \qquad 9$$

en als integraal:

$$bp = b\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2}dt\right) \qquad 10$$

waarvan men het gedeelte tusschen haken bij KAPTEYN en VAN UVEN vindt.

De geheele formule voor de scheefheidsvariatie wordt nu:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{a}{u\text{-}ug} + b\,\frac{1}{c\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{u}{c}\right)^2} \qquad 9$$

Hierin is ug de u-waarde van de ondergrens, welke bij 1 $\mu\mu$ werd gesteld. Gaat men over op de variable x dan ontstaat de formule

$$y = \frac{a}{x} + b\frac{1}{c\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x-x_F}{c}\right)^2} \qquad 10$$

In de algemeene toevalsfunctie

$$W = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{f(x)} e^{-\left(f(x)-f(x_M)\right)^2} df(x)$$

is de formule, welke hier voor y werd opgesteld, gelijk aan de afgeleide van $f(x)$ zooals bij de beschouwing over het onderscheid tusschen de scheefheidsbetrekking en de scheefheidsvariatie werd uiteengezet.

Men moet dus werken met de formules:

$$f(x) = z = \int_{-\infty}^{x}\left[\frac{a}{x} + b\,\frac{1}{c\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x-x_F}{c}\right)^2}dx\right] =$$

$$= \frac{a}{0.4343}\log x + b\frac{1}{c\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{x-x_F}{c}\right)^2}dx \qquad 11a$$

en

$$f(x_M) = z_M = \frac{a}{0.4343}\log x_M + b\,\frac{1}{c\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x_M} e^{-\left(\frac{x_M-x_F}{c}\right)^2}dx \qquad 11b$$

Op grond van deze formules kan men de kans op een zeker gewicht aan deeltjes beneden een bepaalden diameter beschrijven als:

$$G = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\left(b\,\frac{1}{c\sqrt{\pi}}\int_{x_M}^{x} e^{-\left(\frac{x-x_F}{c}\right)^2}dx + \frac{a}{0.4343}\log\frac{x}{x_M}\right)^2} df(x) \qquad 12$$

In de laatste formule is onder het differentiaal teeken de wortel van den exponent kortheidshalve weergegeven door $f(x)$.

Hiermede is de korrelgrootte-verdeelingscurve weergegeven als een vijf-getallen-karakteristiek, namelijk:

$x_M = l_M$ = de mediaan.

$x_F = l_F$ = de abscis van het punt van flexie.

$b = S_g$ = de spreiding van de verdeelingscurve voor het grovere deel van de korrelsamenstelling.

$a = S_f$ = de spreiding van de verdeelingscurve voor het fijnere deel van de korrelsamenstelling.

$c = \mu$ = de breedte modulus van de scheefheidsvariatie voor het slib.

Tijdens de afleiding werd er reeds op gewezen, dat de verdeelingscurve een betrekkelijk ingewikkelden vorm heeft en het resultaat, dat tot het beschrijven van de granulaire analyse vijf getallen noodzakelijk zijn, is hiermede in overeenstemming. Men dient ten aanzien van deze wel wat ingewikkelde karakteriseering wel te bedenken, dat men vrij zeker ook na een meer fundamenteel aanpakken van het vraagstuk wel met niet minder dan drie karakteriseerende getallen zal toe kunnen.

Verfijning van het vraagstuk van het kenschetsen van de granulaire samenstelling zal tekortkomingen van de hier gebruikte vijf-getallen-karakteristiek aan het licht kunnen brengen, waarvan bij deze voorloopige bewerking enkele lichte aanwijzingen werden gevonden. De gebruikelijke analyses zijn echter te onnauwkeurig om hierover een definitief oordeel te vellen. Zoo zal mogelijk blijken, dat de top in de scheefheidsvariatielijn niet symmetrisch is. In dat geval verwachten wij, dat de linkerkant iets steiler zal zijn dan de rechter. Verder zal het ultra-slibgedeelte nog wel twee extra constanten vragen voor een meer nauwkeurige kenschetsing, zoodat wellicht voor zeer nauwkeurig werk een acht-getallen-karakteristiek zal moeten worden opgebouwd. Dat voor practisch gebruik een dergelijke grondbeschrijving veel te omslachtig en daardoor onbruikbaar wordt, zal duidelijk zijn aan een ieder, die als taak heeft gehad, de beteekenis van samengestelde karakteristieken voor de productiviteit of ten aanzien van een andere eigenschap van den grond op te sporen. Ook de vijf-getallen-karakteristiek is in dat opzicht wel zeer ingewikkeld.

Als taak zal dan ook bij verdere bestudeering van de mogelijkheden van de vijf-getallen-karakteristiek te wachten staan een onderzoek naar den mogelijken samenhang tusschen enkele van de constanten. Hierdoor zou men in staat zijn één of meer constanten van de formule buiten beschouwing te laten. In verband hiermede is het gewenscht, dat men een duidelijk inzicht in de beteekenis van de vijf getallen heeft. Aan de hand van figuur 5 kan dit als volgt nader verduidelijkt worden.

In de curve voor de scheefheidsbetrekking is de waarde van l_M met groote scherpte af te lezen op de plaats, waar deze curve de lijn $z = 0$ snijdt. De waarde voor l_F, de abscis van het punt van flexie, is minder nauwkeurig te bepalen, daar de onvermijdelijke onnauwkeurigheden in de waarnemingen het herhaaldelijk moeilijk zullen maken, aan de lijn voor de scheefheidsbetrekking de juiste

plaats van het buigpunt aan te wijzen. Om de andere constanten hun plaats in de figuur aan te wijzen moet men in gedachten een splitsing maken tusschen het logarithmische en het exponentieele deel van de curve. Bij uniform grove zanden zal veelal de sommatiecurve voor de fijnste fracties wel ongeveer samenvallen met de logarithmische curve. Deze zet zich verder aan het rechtereinde van de s-vormige exponentieele lijn weer voort, doch hier ontbreken vrijwel

FIG. 5 Niet alle constanten, welke ter kenschetsing van de korrelgrootte-verdeeling worden voorgesteld hebben in de grafische weergave van de lijnen voor de toevalsbeschrijving een even duidelijke pendant. In deze figuur zijn de waarden voor de 5 constanten als kenmerkende lengten in de curve voor de scheefheidsvariatie (boven) en de scheefheidsbetrekking (onder) weergegeven

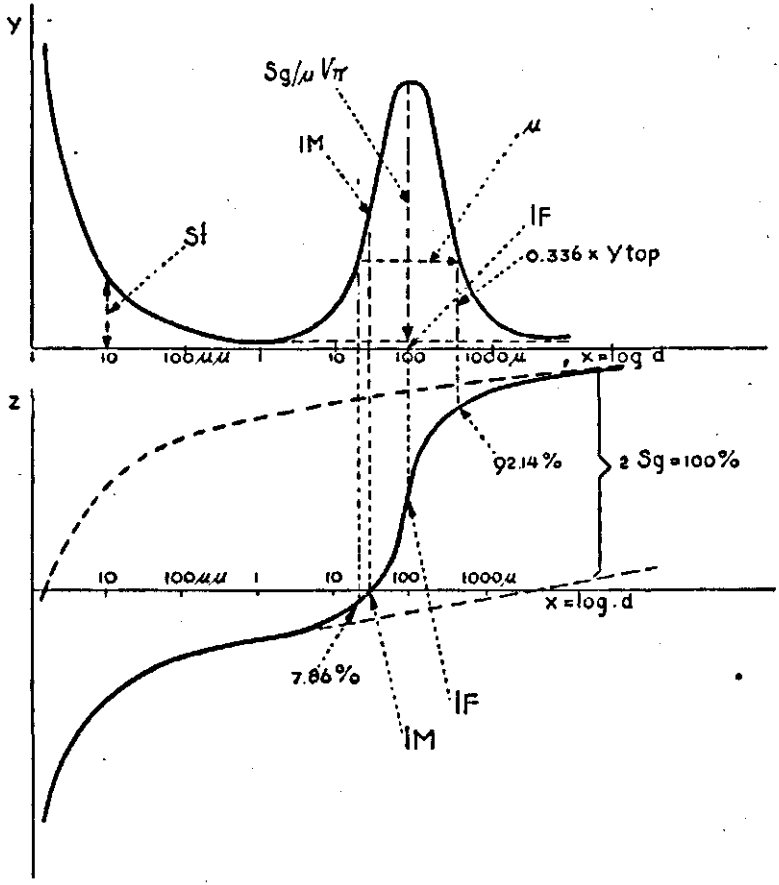

FIG. 5 *The constants of the 5 value characteristic of the sedimentation analyses have a definite meaning in the probability diagrams. This meaning is given in the above diagrams*

steeds de analysegegevens, doordat de fracties in dit meest rechtsche deel te klein worden om te kunnen worden bepaald. Toch kan men, wegens de ongeveer

symmetrische gedaante van de exponentieele curve ten opzichte van het buigpunt, wel ongeveer schatten, hoe de lijn zou moeten loopen. Nu is de stijging van de logarithmische lijn per eenheid van de logarithme gelijk aan $\frac{a}{0.4343}$. Hieruit kan men de beteekenis van a afleiden en een, zij het zeer onnauwkeurige, schatting omtrent de waarde maken. Men overziet in de geheele figuur de waarde van x indien de fracties tusschen 2 μ en 1000 μ liggen, zooals veelal het geval is, slechts van 3,30 tot 6, waarbij de diameter in $\mu\mu$ is uitgedrukt. De waarde van log x varieert dientengevolge slechts tusschen 0,50 en 0,80, zoodat dat niet meer dan $\frac{3}{4}$ a stijging in de logarithmische curve oplevert. En over slechts een gering gedeelte van dit traject is de logarithmische curve met eenige benadering te schatten. De S_f-waarde is dus een maat voor de snelheid van stijgen van de logarithmische curve, welke uit de figuur slechts met zeer beperkte nauwkeurigheid kan worden afgelezen.

Het exponentieele gedeelte van de formule bestaat uit b maal de kansintegraal, welke maximaal gelijk 1 is. De s-vormige lijn stijgt dus ten opzichte van de logarithmische curve over een afstand b vanaf het punt, waar zij de logarithmische curve verlaat tot waar zij boven rechts weer asymptotisch in de boven begrenzende logarithmische curve overgaat. De waarde S_g is dus een maat voor de verticale spreidingsbreedte van de exponentieele curve. De s-vormige lijn kan echter, wanneer de asymptoten onder en boven vaststaan, nog vlakker of steiler loopen. Hiervoor is de c of μ een maat. Wanneer men vanaf de verticale projectie van het punt, waar de s-vormige lijn zich het 0.0786ste gedeelte van den afstand b van de logarithmische lijn verwijderd heeft, meet tot de verticale projectie van het punt van flexie, dan heeft men daarmede de waarde van c gevonden. De μ is dus een maat voor de horizontale uitgebreidheid van de s-vormige curve evenals de S_g een maat is voor de verticale uitbreiding. De waarde 0,0786 komt overeen met het getal uit de kanstabel behoorende bij een waarde van den exponent gelijk 1.

Ook in de scheefheidsvariatiecurve kan men de constanten terug vinden. Daar waar de top van den berg optreedt, vindt men blijkbaar de abscis voor l_P. De waarde van l_M blijkt in deze lijn geen markant punt uit te maken. De constante S_f is hier een maat voor de daling van de parabolische lijn, waar de bergvormige lijn op rust. Bij 1 μ is de hoogte van deze parabolische lijn, gezien de waarde van $x = 3$, gelijk aan 1/3 S_f, bij 1000 μ is de hoogte gedaald tot 1/6 S_f. De waarde voor S_g is als zoodanig niet in de figuur vertegenwoordigd. De top van den berg echter verheft zich tot een hoogte boven de parabolische lijn, welke uitgedrukt wordt door de betrekking $S_g/\mu\sqrt{\pi}$. De waarde voor μ ten slotte komt in de figuur in de breedte van den berg tot uiting. Wanneer men het punt opzoekt, waar de hoogte van den berg gedaald is tot 0.336 maal de hoogte van den top, dan is de abscis van dit punt juist de waarde μ kleiner of grooter dan de abscis van den top. De μ beheerscht dus de breedte van den berg en met de S_g samen bepaalt deze constante de hoogte van den berg. De grootste hoogte van den berg, dus tevens de helling van de lijn voor de scheefheidsbetrekking, is ongeveer gelijk aan

$$\frac{a}{0.4343\, x_p} + \frac{b}{c\,\sqrt{\pi}} \qquad 13$$

In werkelijkheid is de top nog iets hooger en ligt iets meer naar links dan met x_F overeenkomt, doch dit mag wel verwaarloosd worden. Wanneer men in staat is met eenige redelijke zekerheid de waarde van μ te schatten door of in de lijn voor de scheefheidsbetrekking het punt op 0.0786 maal de tusschenruimte tusschen de asymptoten te bepalen, of door in de lijn voor de scheefheidsvariatie de punten op 0.336 maal de hoogte van den top vast te stellen, dan kan men uit de formule voor de hellingstangens

$$\frac{0.4343\ x}{a} + \frac{0.336\ b}{c\ \sqrt{\pi}}$$

berekenderwijze een indruk van de waarde van de constanten verkrijgen.

Men houde wel in het oog, dat deze beschouwingen zich bezig houden met de scheefheidsvariatie en de scheefheidsbetrekking en niet met de hieraan zoo nauw verwante sommatie- en verdeelingscurve. Voor deze laatstgenoemde lijnen gelden echter andere criteria, welke wel is waar weinig verschillen, maar daarom een des te scherper onderscheiding vragen.

IV. BEPALING VAN DE CONSTANTEN

Het vaststellen van de constanten brengt zeer verschillende moeilijkheden mee, al naar het getal, dat men wenscht te bepalen en de aard en vorm van de slibcurve, welke bewerkt zal worden.

De waarde van l_M is uit de sommatiefiguur uiterst gemakkelijk en met groote scherpte te bepalen, zoolang men met gronden te maken heeft met minder dan de helft van het materiaal beneden de laagste fractiegrens. Zoodra bij een granulaire analyse meer dan 50 % van het materiaal tot de fijnste fractie behoort en men bij de scheefheidsbetrekking geen snijding met de lijn voor $z = 0$ krijgt, is de analyse te onvolledig om bewerkt te kunnen worden. Om de curve goed te kunnen karakteriseeren moet een fijnere fractie worden bepaald. Uit het werk van SØREN BERG (1) krijgt men den indruk, dat voor kleigronden de laagste fractiegrens wel beneden 100 $\mu\mu$ zal moeten worden gelegd, wil men steeds een mediaan kunnen vaststellen, terwijl voor de bepaling van het punt van flexie de grens wellicht op 30 of 40 $\mu\mu$ zal moeten worden gesteld.

Ook de waarden S_f en S_g kunnen zonder moeite worden bepaald. Men kan daarbij gebruik maken van de formule

$$\frac{z - z_M}{\log x - \log x_M} = S_g \frac{p - p_M}{\log x - \log x_M} + \frac{0.4343}{S_f} \qquad 14$$

Hier staat p voor de kans welke met de waarde van z is verbonden. In bovenstaande formule vindt men S_g en S_f uit een lineaire vergelijking als hellingstangens en als afstand welke van de z-as wordt afgesneden.

Moeilijkheden kunnen er echter optreden met de bepaling van l_F en van μ. Voor beide waarde speelt de soms onvoldoende nauwkeurigheid van de in geringe hoeveelheid aanwezige grofste fracties bij het bepalen van deze constanten herhaaldelijk parten. Mede van invloed kan zijn, dat bij sommige monsters het verschil tusschen l_M en l_F groot is en l_F daardoor de waarden van den korreldiameter nadert waarboven practisch geen materiaal meer voorkomt. Men moet dan ook de gevallen onderscheiden, waar l_F en de hoogte van den top redelijk goed vast te stellen zijn en waar dit niet het geval is.

Indien de plaats en hoogteligging van den top kunnen worden vastgesteld, dient men een eerste schatting van de waarde van a te maken en de y overal met $\frac{a}{x}$ te verminderen. Men houdt zoo in hoofdzaak de y_2-waarden van den berg over. Hiervan kan men de beschrijvende constanten bepalen door vergelijking met de theoretische kansverdeelingskromme. Voor de theoretische figuur, waaromtrent men de gegevens uit de kolomverschillen van staat 1 bij CZUBER kan afleiden, kan meestal volstaan worden met het hier navolgende tabelletje, dat de hoogte y_2 in deelen van de hoogte $y_t = b/c\sqrt{\pi}$ van den berg geeft en de afwijkingen van het punt l_F in eenheden $\frac{u}{c}$.

(Zie ook formule 9.)

STAAT 1

$$y_2 = ny_t = \frac{nb}{c\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

n	$\frac{u}{c}$	n	$\frac{u}{c}$
1,00	0,0000	0,50	0,8326
0,99	0,1003	0,40	0,9573
0,98	0,1378	0,338	1,0000
0,97	0,1742	0,30	1,0913
0,95	0,2215	0,20	1,2687
0,90	0,3246	0,10	1,5175
0,80	0,4724	0,05	1,7309
0,70	0,5973	0,01	2,1461
0,60	0,7147	0,005	2,2981

Van deze gegevens kan men nu op drieërlei wijze gebruik maken. Wanneer men de hoogte van den berg in de met n correspondeerende deelen indeelt en de afwijking ten opzichte van l_F uitzet tegen de waarden u/c uit de tabel, krijgt men een rechte lijn door den oorsprong met een hellingstangens $1/c$. Er bestaat een mogelijkheid, dat de lijn niet door den oorsprong gaat, maar deze op eenigen afstand passeert. Dit wijst uit, dat men l_F niet geheel goed heeft geschat. De afstand, waarop de lijn den oorsprong passeert, is een maat voor de correctie, welke men aan l_F moet aanbrengen.

In twee gevallen verkrijgt men geen rechte lijn. In de eerste plaats kan de hoogte van den top onjuist zijn beoordeeld en in de tweede plaats kan de a verkeerd zijn geschat. De eerste fout blijkt het duidelijkste bij hooge waarden van n, de tweede fout bij lage waarden.

Heeft men de hoogte van den top overschat dan zijn de waarden u/c uit de tabel te groot tegenover de u-waarden uit de figuur. In de grafiek, waarin de u-waarden tegen de u/c-waarden worden uitgezet, zal men veelal nog wel een ongeveer rechte lijn kunnen vaststellen, doch deze zal de u = 0-lijn reeds voor den oorsprong passeeren en er dus onderdoor gaan. Dezelfde lijn voor de andere

zijde van den berg vertoont eenzelfde verschijnsel, doch wegens het negatief zijn van u en u/c passeert deze lijn den oorsprong aan de zijde van de positieve u-waarden. De hellingstangens blijft daarbij wel ongeveer dezelfde, maar de twee takken van de lijn liggen niet in het verlengde van elkander. Heeft men voor de hoogte van den top een te lage waarde vastgesteld, dan gaan met dezelfde u-waarden te lage waarden voor u/c samen en passeert de positieve tak van de lijn den oorsprong bij positieve u-waarden, terwijl de negatieve tak bij negatieve u-waarden de u-as snijdt. Men kan zoo de keuze van de hoogte van den top controleeren en eventueel herstellen.

Bij een te laag gekozen waarde voor a vindt men bij een waarde voor u/c een te hooge waarde voor u zoodat de lijn, naarmate deze zich verder van den oorsprong verwijdert, sterker van de u/c-as afbuigt. Bij een te hoog gekozen waarde voor a blijven de waarden voor u te laag en zal de lijn steeds meer evenwijdig aan de u/c-as gaan loopen. Zijn deze afwijkingen zoowel ten gevolge van de keuze van de hoogte van den top als ten gevolge van de keuze van a niet te groot, dan kan men met behoorlijke zekerheid c uitmeten.

Wanneer men de waarde voor c toch niet voldoende vertrouwt, kan men met een voorloopige schatting van c de x-schaal van de lijn voor de scheefheidsvariatie omzetten in een u/c-schaal. Zet men nu de met a/x verminderde waarde van y uit tegen de geïnterpoleerde waarde van n uit staat I, welke met deze u/c-waarden overeenkomt, dan moet een rechte lijn door den oorsprong ontstaan. Snijdt deze lijn de as voor de gecorrigeerde y-waarde boven of onder de as, dan toont dit aan, dat de correctie te klein of te groot is geweest. Hieruit kan men een indruk verkrijgen van de grootte van de noodzakelijke wijziging in de correctie. Op deze wijze kan men de keuze van de a-waarde nader onderzoeken.

Een andere mogelijkheid is, om bij gekozen waarden van n de waarden van u en u/c tegen elkander uit te zetten. Hierbij moet eveneens de lijn door den oorsprong gaan en heeft men, indien een dergelijke snijding niet optreedt, een aanwijzing omtrent de onjuiste schatting van l_F.

Van veel belang zijn al deze correcties doorgaans niet, zoolang men maar een redelijke schatting voor de waarde van c kan maken. Wel van belang kan deze methode van correctie soms echter zijn, indien de waarnemingen in de buurt van den top door onnauwkeurigheden of door toeval wat veel geleden hebben. Een redmiddel worden deze onderzoekingen echter, indien door het niet vertegenwoordigd zijn van de rechterhelft van den berg, de plaats en hoogte van den top niet kan worden vastgesteld. Herhaaldelijk wordt het dan zeer moeilijk behoorlijk kloppende waarden te verkrijgen en men zal soms verplicht zijn met enkele waarden voor de hoogte van den top en enkele waarden van a te probeeren de combinatie te vinden, welke de punten het beste op een rechte lijn brengt.

In het algemeen is het vraagstuk van de karakteriseering van het topvormige deel van de kanskromme zeer eenvoudig.

Het betreft het door affine transformatie, dus door een vergrootings-transformatie in twee loodrecht op elkander staande richtingen met een eventueele verschuiving, tot dekking brengen van twee gelijksoortige krommen. Het zou te ver voeren hier in te gaan op de voor landmeetkundig gebruik gereed liggende vereffeningstheorie voor deze transformatie, welke hier zou zijn toe te passen, terwijl de behandeling van de correctie via lijnvereffening hier ook te omslach-

tig zou zijn, daar het slechts gaat om een goede waarde voor c en l_F. De waarden voor a en b zijn langs den reeds genoemden weg van oplossing uit een lineaire vergelijking in z en p met goede nauwkeurigheid vast te stellen.

Voor een bewerking in het groot van deze korrelgrootte-verdeelingslijnen zij hier nog opgemerkt, dat door projectie van een theoretische curve op de gevonden lijn voor de scheefheidsvariatie een oplossing snel moet zijn te verkrijgen. Door verschuiving van het beeld uit de waarnemingen kan men de correcties aan de a en l_F doen plaatsvinden. Door verkorting van den afstand tusschen het scherm en het projectietoestel kan men verder de tophoogte in orde maken, terwijl door draaien van het geprojecteerde beeld of van het scherm om een verticale as, men bij een voldoende evenwijdige stralenbundel de aanpassing van de c-waarde in orde kan brengen. Er is dus een zuiver mechanische oplossing mogelijk, welke nog veel zal versnellen, indien het construeeren van de scheefheidsvariatie uit de scheefheidsbetrekking met een daartoe geschikt toestel eveneens mechanisch wordt verricht.

V. VOORBEELD VAN BEWERKING

In het volgende voorbeeld willen wij twee gevallen behandelen, waarvan één een fraai geval met duidelijk linker- en rechterhelling van den berg voorstelt, terwijl in het andere geval de moeilijkheid onder oogen diende te worden gezien, dat noch de ligging, noch de hoogte van den top met eenige benadering kon worden vastgesteld, terwijl de afwezigheid van de rechterhelling geen eenvoudige mogelijkheid bood, het onzekere gedeelte bij den top te overbruggen.

De goede overeenkomst treedt daarbij bij het monster No. 15 op, de minder fraaie serie gegevens treft men bij No. 54 aan.

In figuur 6 vindt men de scheefheidsbetrekkingen weergegeven, terwijl daarnaast de scheefheidsvariatie staat afgebeeld. Dat voor monster 54 geen fraai beeld te verwachten valt, blijkt uit den onregelmatigen loop in het interval van 104 tot 147 μ. In welke van beide fracties de afwijking schuilt, valt niet duidelijk vast te stellen.

Bij de analysecijfers van het monster No. 54 kan men, om van de aanwijzing gebruik te maken, welke de linkerhelling omtrent de ligging van den top en de waarde van c geeft, van de volgende kunstgreep gebruik maken.

Uit

$$y_2 = \frac{b}{c\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

leidt men af:

$$log\ y_2 - log\ \frac{b}{c\sqrt{\pi}} = -\left(\frac{u}{c}\right)^2\ log\ e$$

$$\sqrt{log\ \frac{b}{c\sqrt{\pi}} - log\ y_2} = 0{,}659\ u\ \frac{1}{c} \qquad 15$$

Hierbij geeft de term links van het gelijkteeken de hoogte y_2 (zie formule 8) van de helling in deelen van de hoogte $b/c\ \sqrt{\pi}$ van den top weer uit welk getal de logarithme genomen is. Uit deze logarithme is de wortel berekend. De y_2

stelt daarbij de hoogte van den berg ten opzichte van de a/x-lijn voor op elk willekeurig punt. De waarde $b/c\sqrt{\pi}$ geeft de hoogte van den top van den berg weer en kan dus eveneens met eenige benadering worden uitgemeten. Achter

FIG. 6 Werkteekening voor het bepalen van de constanten x_M, x_F en c bij het moeilijk te bewerken monster No. 54. De waarde x_M wordt afgelezen waar de lijn voor de scheefheidsbetrekking de horizontale as snijdt, de waarde x_F bij de snijding van lijn c en de horizontale as, terwijl μ uit de helling van lijn c volgt. Voor de constructie van lijn c zie de tekst

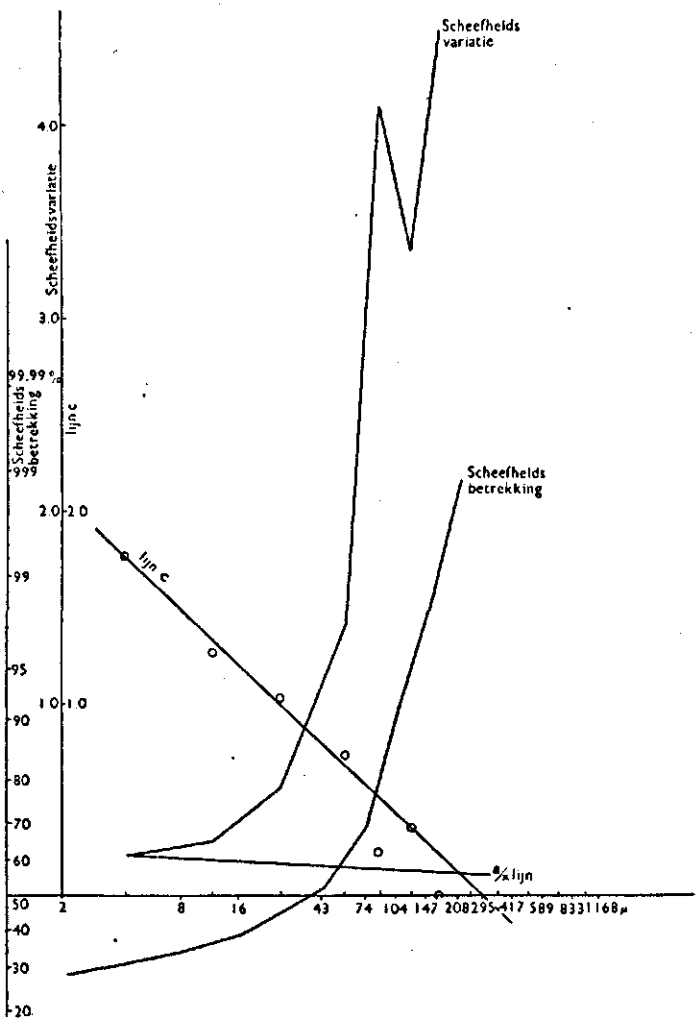

FIG. 6 *Graphical determination of the constants. The value x_M is being read at the intersection of the curve „scheefheidsbetrekking" and the horizontal axis, x_F at the intersection of line* c *and the same axis. The value for μ is derived from the angle of line* c. *Line* c *is obtained by plotting the observed frecuency diagram against the theoretical values of Table I. The determination is given for a case, where the solution is not easy to find*

het gelijkteeken vindt men de waarde u, dus de schaalwaarde langs de horizontale as, vermenigvuldigd met de constante $\sqrt{\log e}$ welke men met ruim voldoende nauwkeurigheid op 0,659 kan stellen. Ten slotte vindt men in $1/c$ de

FIG. 7 Werkteekening voor het bepalen van de constanten x_M, x_F en c bij het eenvoudig te bewerken monster No. 15. De plaats van aflezen van de constanten is als in figuur 6. De waarde c is hier evenwel op een andere manier afgeleid en wel uit de door kruisjes aangegeven bij de deelen van de tophoogte van de lijn voor de scheefheidsvariatie ten opzichte van de lijn voor a/x

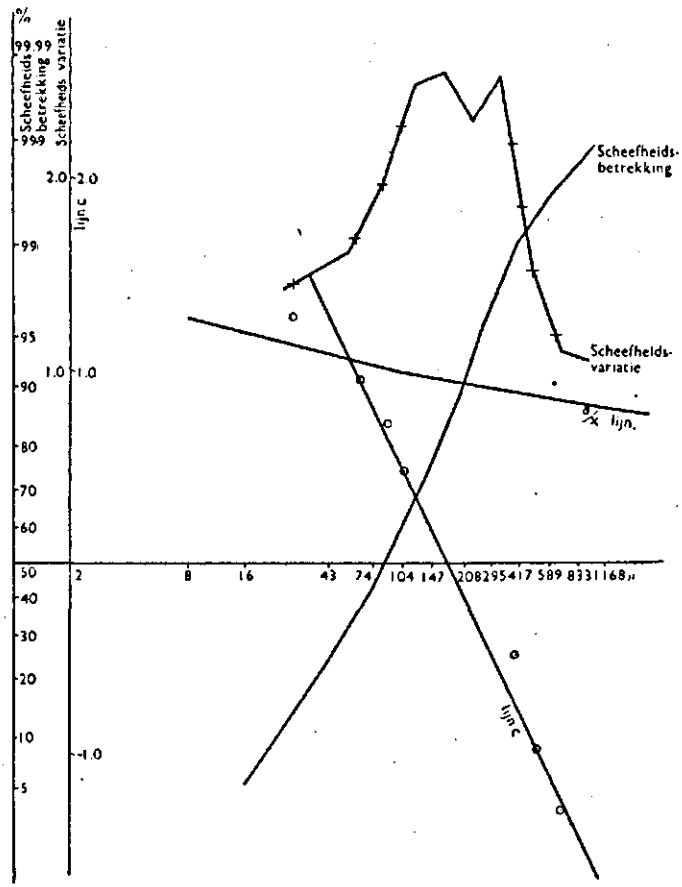

FIG. 7 *For the case with an easy solution the same graphical determination as fig.* 6 *is depicted*

waarde, welke gezocht wordt. Men vindt dit getal, door tegen de u den vorm vóór het gelijkteeken uit te zetten. De hellingstangens in figuur 6 van de met c aangeduide lijn door de stippen is dan $0.659/c$. De doorsnijding met de u-as geeft de waarde aan waar de top van den berg moet worden gezocht, hetgeen tevens het nulpunt van de u-schaal is. Zoo vindt men in dit geval voor het nulpunt van de u-schaal $x = 5{,}517$, terwijl c gelijk 0,72 blijkt te mogen worden aangenomen.

Eenzelfde berekening als voor No. 54 zou ook bij No. 15 gevolgd kunnen worden. Doordat hier echter beide hellingen van den berg vertegenwoordigd zijn, zie figuur 7, kan men wat eenvoudiger tot de vaststelling van c en x_F geraken door de u/c-waarde bij verschillende hoogten van de helling op te zoeken en tegen x uit te zetten. Allereerst moet een ruwe schatting van de waarde a gemaakt worden, zoodat men de hyperbool kan berekenen, waarop de berg gesuperponeerd is.

Men moet in dit geval er op letten, dat slechts de top van den berg met de direct aangrenzende gedeelten van de helling vertegenwoordigd zijn, terwijl door het ontbreken van fractiegewichten fijner dan 16 μ of grover dan 1168 μ de in het vlakke gedeelte van de kromme overgaande deelen van de hellingen ontbreken. Het punt, waar de hellingen van den berg de hyperbool asymptotisch naderen, moet blijkens den vorm van de hellingen nogal wat lager liggen dan de laagste uiteinden van de beide hellingen, welke bekend zijn.

Het lijkt een goede schatting te zijn voor a de waarde 5 aan te nemen. De hiermede berekende hyperbool werd als a/x-lijn aangegeven. De hoogte van den berg ten opzichte van deze lijn is bij den top omstreeks 1,6 eenheden. Met kruisjes is nu langs de hellingen van den berg aangegeven, waar de hoogte ten opzichte van de lijn a/x 20 %, 40 %, 60 % of 80 % van de hoogte van den top uitmaakt. Volgens Tabel I is daar ter plaatse de waarde van u/c gelijk aan 1,269, 0,957, 0,715 en 0,472. Deze waarden werden verticaal tegen de betreffende u-waarde uitgezet, hier weergegeven door omkringde stippen, waardoor de lijn c gelegd kan worden. Uit deze lijn kan nu worden afgelezen, dat c — de cotangens van de lijn door deze stippen — omstreeks 0,48 bedraagt, terwijl de x-as wordt doorsneden bij $x_F = 5{,}267$. De stippen sluiten niet al te fraai bij de lijn c aan, omdat door de onregelmatigheid in den top van den berg de rechterhelling in het hoogere gedeelte wat te steil loopt. Bij het leggen van de lijn door de punten is hier wat rekening mede gehouden.

Uit de sommatielijnen kan men ten slotte zonder moeite de waarde van de mediaan x_M aflezen, waarvoor men voor het monster No. 54 het getal 4,560 en voor No. 15 het getal 4,941 vindt. Met deze waarden voor de abscis van de mediaan en het punt van flexie en met de spreidingsmodulus van den berg kan men overgaan tot de bepaling van de beide laatste constanten a en b, welke nog niet definitief bekend zijn. Om een zoo goed mogelijke aansluiting te verkrijgen aan de verrichte waarnemingen, berekent men deze laatste constanten het beste uit de scheefheidsbetrekking.

De hiertoe noodzakelijke berekening willen wij aan de hand van Tabel I nader toelichten, waarbij ook een gedeelte, waarvan de resultaten reeds in de berekening van c en x_F een aandeel hadden, hier achteraf nog nader zal worden toegelicht.

In kolom 1 van Tabel I vindt men de fractiegrenzen aangegeven. Kolom 2 vermeldt de logarithme van de fractiegrenzen welke x wordt genoemd. Kolom 3 geeft de logarithme van x, hetgeen dus de logarithme van de logarithme van de fractiegrenzen beteekent. Daarna geeft kolom 4 den afstand in x tusschen de opeenvolgende fractiegrenzen en kolom 5 het midden tusschen twee van deze, in x uitgedrukte, opeenvolgende fractiegrenzen. Deze cijferrijen hebben alle vijf betrekking op de bij de slib- en zeefanalyse gebruikte fractiegrenzen alleen. Maakt men dus steeds van gestandaardiseerde zeefwijdten gebruik, dan kunnen

deze 5 kolommen eens voor al worden berekend. In kolom 6 vindt men de gesommeerde en in procenten of deelen van de eenheid uitgedrukte fractiegewichten in de z-schaal uitgedrukt, waarbij dus van een daartoe geschikte tabel gebruik werd gemaakt. De gesommeerde procenten zelve zijn ter besparing van ruimte weggelaten. De z-waarden, uitgezet tegen x, leverden curven voor de scheefheidsbetrekking op, welke voor beide monsters in de figuren 6 en 7 werden weergegeven.

De scheefheidsvariatie is hiervan de differentiaalkromme, dus de lijn welke de grootte van de hellingstangenten aangeeft.

Deze werden berekend door de z-verschillen uit kolom 7 te deelen door de x-verschillen uit kolom 4. Deze quotienten staan onder de aanduiding y in kolom 8 aangegeven. Wanneer de y-waarden tegen de middens van de fractie-intervallen welke kolom 5 geeft, worden uitgezet, ontstaan de bergvormige scheefheidsvariatiecurven, welke eveneens in figuur 6 en 7 werden weergegeven. Uit deze laatste curven werd de abscis van het punt van flexie x_F en de breedtemodulus c van de scheefheidsvariatie afgeleid.

Met deze beide constanten x_F en c worden nu de getallen in de kolommen 9 en 10 gevonden, waarin $x\text{-}x_F$ en $(x\text{-}x_F)/c$ getabuleerd werden. Dit laatste getal is nu in maateenheden van z uitgedrukt en kan met behulp van een kanstabel in de eenheid p worden omgerekend, waarbij men wel er aan moet denken, dat in dit geval de beteekenis geheel anders is dan de gebruikelijke, daar de kansformule hier werd toegepast om de scheefheidsbetrekking te karakteriseeren en niet om een waarschijnlijkheid uit te drukken. Er bestaat daarom alleen een formeele gelijkheid aan de kansverdeelingswet. Men berekent hier een gedeelte van de ordinaat van de scheefheidsbetrekking nl. uit:

$$z = \frac{a}{0{,}4343}\ log\ x + b\frac{1}{c\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{x-x_F}{c}\right)^2} dx = \frac{a}{0{,}4343}\ log\ x + b\,p$$

berekent men den factor p. Daar men evenwel $z\text{-}z_M$ moet kennen, moet de waarde p nog worden verminderd met p_M, welk laatste getal, dat voor een afzonderlijk monster constant is, berekend wordt uit x_M. Er wordt hier er van afgezien deze berekening, welke geheel gelijk is aan wat in de kolommen 9, 10 en 11 van Tabel I werd becijferd, hier volledig weer te geven. Voor de monsters 54 en 15 werd voor p_M respectievelijk gevonden 0,0301 en 0,1685. Door deze bedragen van p af te trekken verkrijgt men de in kolom 12 aangegeven waarden voor $p\text{-}p_M$.

Het berekenen van de constanten a en b kan, zooals reeds eerder werd opgemerkt, het beste geschieden volgens de formule

$$\frac{z-z_M}{log\ x-log\ x_M} = b\ \frac{p-p_M}{log\ x-log\ x_M} + \frac{a}{0{,}4343} \qquad 14$$

Hiertoe berekent men uit $x_M = 4{,}560$ en 4,941 de waarde van $log\ x_M$ op 0,6590 en 0,6938. Door de waarden voor $log\ x$ met deze bedragen te verminderen, verkrijgt men de getallen uit kolom 13. Door de getallen in de kolommen 6 en 12 door die uit 13 te deelen krijgt men een lineaire vergelijking in a en b. De quotienten vindt men in de kolommen 14 en 15.

In figuur 8 zijn de in laatstgenoemde kolommen berekende waarden nu tegen elkander uitgezet. Hier is nu dan tenslotte door de voorafgaande becijferingen de korrelgrootte-verdeelingscurve in een rechte lijn omgezet. Reeds dadelijk valt op, dat de waarnemingen in figuur 7 bij het monster No. 54 weinig regelmatig zijn uitgevallen, terwijl daarentegen die bij No. 15 zeer fraai zich om de rechte groepeeren. Het eene wat ver afwijkende punt voor d = 104 μ

FIG. 8. Nadat de constanten x_M, x_F en c zijn vastgesteld, kan men de beide overblijvende constanten a en b bepalen door het tegen elkander afzetten van de langs de assen van de figuur aangegeven grootheden. Bij monster 15 groepeeren de kruisjes zich door den meer regelmatigen vorm van de toevalskromme beter om een rechte lijn dan de kringetjes voor lijn 54 dit doen. Deze minder groote regelmaat van de gegevens voor monster 54 bleek reeds in den loop van de lijnen in figuur 6

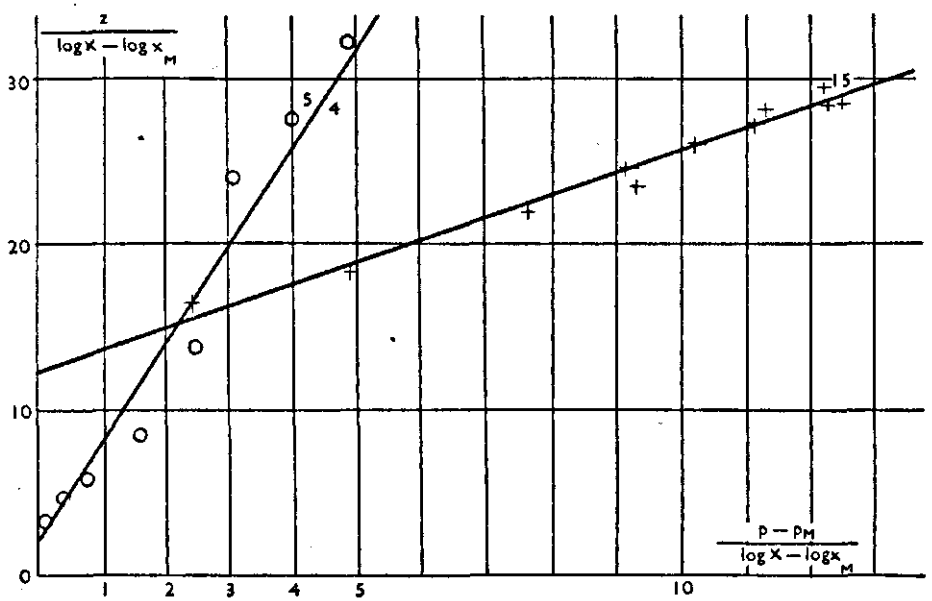

FIG. 8. *After determining the constants x_M, x_F and c, one derives the remaining constants by means of plotting the known parts of formula* 14 *against each other. The values a and b are found as intersection with the y-axis and the angle of the lines, drawn through the plotted data*

kan verklaard worden uit de kleine waarden, welke voor het berekenen van de kolommen 14 en 15 op elkander gedeeld werden. De waarnemings- en afrondingsfouten gaan dan zwaar wegen. De rechte lijn, welke door de punten van het monster No. 54 werd gelegd, kan wellicht iets anders uitvallen, indien men de lijn nauwkeurig en met in acht nemen van de gewichten van de waarnemingen ging berekenen. Ook dan blijven de beide constanten met een betrekkelijk groote onzekerheid belast. Bij het monster No. 15 daarentegen is de ligging van de lijn behoorlijk nauwkeurig aan te geven. De onbekende constanten kan men uit deze lijnen vinden als de hellingshoek van de lijn en het van de y-as afgesneden deel.

De uitkomst is:

monster	$a/0{,}4343$	a	b
54	1,32	0,57	6,12
15	12,04	5,23	1,35

Met deze beide constanten is de karakterisering van de beide korrelgrootte-verdeelingskrommen volgens de hiervoor uiteengezette methodiek voltooid.

Naast de karakterisering van een korrelgrootte-verdeelingskromme is het weergeven van de vereffende curve van belang. Met behulp van een dergelijke kromme kan men met een nauwkeurigheid, welke beheerscht wordt door de juistheid van de veronderstelling van het regelmatige beloop van deze curven, de vermoedelijke waarden van niet bepaalde fracties berekenen. Ook wederom afhankelijk van de juistheid van de grondleggende veronderstellingen, kan men door extrapolatie een indruk krijgen van de verhoudingen bij de zeer fijne of zeer grove fracties. Een dergelijke handelwijze is, zooals bekend mag worden verondersteld, van beperkte betrouwbaarheid, maar bij reeds vroeger geanalyseerde monsters, waarbij de mogelijkheid van uitbreiden van het onderzoek niet bestaat, is dit de eenige mogelijkheid, om iets over deze extreme fracties te leeren kennen.

De berekening geschiedt nu zoodanig, dat de in Tabel I vermelde kolommen 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12 en 13 worden uitgerekend voor de korneldoorsneden, welke men in de beschouwing wil betrekken. Daarna wordt uit kolom 12 een nieuwe kolom samengesteld, door alle getallen met de laatste gevonden constante b te vermenigvuldigen. Verder worden de waarden in kolom 13 met a vermenigvuldigd en de uitkomsten in beide kolommen bij elkander opgeteld. Zoo ontstaat de uitkomst van de formule

$$z = s = a\ (log\ x — log\ x_M) + b\ (p — p_M)$$

Hierin heeft z weer de gebruikelijke beteekenis van variabele uit de kansverdeelingsformule en ordinaat van de curve voor de scheefheidsbetrekking. De waarde s, waarmee de z-waarde lineair verbonden is, heeft echter een andere beteekenis. Deze grootheid vertegenwoordigt een nieuwe variabele langs de x-as, welke alleen van den korreldiameter afhankelijk is, maar deze diameter in zoodanige schaal weergeeft, dat de korrelgrootte-verdeelingscurve in een normale verdeeling volgens GAUSS overgaat. Vervangt men dus de d- door de s-variabele dan worden allerlei bewerkingen zooals middelen, berekenen van fouten en bepalen van waarschijnlijkheden vereenvoudigd tot de bij de normale curve gebruikelijke techniek. Ten slotte biedt een dergelijke berekening de mogelijkheid een indruk te verkrijgen of de veronderstellingen, waarop de ontwikkelde formule berust, waarschijnlijk zijn. Daartoe werd de berekening van $z = s$ bij de beide hier als voorbeeld aangehaalde monsters uitgestrekt over een veel breeder traject van diameters dan door de analyse werd beslagen. De resultaten zijn neergelegd in Tabel II.

De beide als voorbeeld gekozen monsters vormen min of meer uitersten in type. Monster 54 is een middelzware zavel, welke opvalt door groote fracties in de fijn zand regionen en zeer kleine fracties naar de slibkant toe niettegen-

staande een hoog slibgehalte. Monster 15 daarentegen heeft bij de diameters van zoowel het fijnere als het grovere deel van het zand maar matig groote fracties. De typische verschillen kwamen bij de curven voor de scheefheidsvariatie reeds tot uiting.

Ten gevolge van de geringe grootte van de fijnste fracties uit de analyse bij een in verhouding hoog slibgehalte ziet men tot de 2 $\mu\mu$ fractie toe nog aanzienlijke hoeveelheden fijne deeltjes bij het zavelmonster. Bij monster No. 15, dat een tamelijk fijn hoogterraszand is, ziet men dat beneden 2 μ geen materiaal van beteekenis meer voorkomt. De bovengrens vindt men bij de zavel bij 300 μ terwijl bij het zand de honderd procent eerst bij grint van 5 cm diameter wordt bereikt. Hierbij worden de gezamenlijke fracties kleiner dan 0,01 % verwaarloosd. Uit de z-waarde blijkt echter, dat er op grovere blokken nog steeds een zekere kans is. Zoo wijst een $z = 3{,}16$ er op, dat een steenblok van 20 cm diameter eens voorkomt op 2000 m³ grond, en een zwerfsteen van 1 m diameter kan eens op 30 000 m³ grond worden verwacht blijkens een waarde van $z = 3{,}64$. Dergelijke getallen lijken niet zoo vreemd. De groote zwerfsteenen zijn zeer zeldzame extremen van de korrelgrootte-verdeeling, welke, doordat ze zoo sterk opvallen, een afzonderlijk verschijnsel lijken te zijn. In werkelijkheid echter behooren deze blokken geheel binnen de kansverdeeling, welke voor het zand en het slib geldt. Bij den zavelgrond zijn dergelijke grove deelen niet te verwachten. In procenten van het gewicht uitgedrukt is eenzelfde geringe kans reeds bij zandkorrels van 400 tot 500 μ te verwachten en van deeltjes van 800 μ geeft de z-waarde aan, dat de kans nog slechts 1 op 10^{11} is, zoodat men slechts een enkel korreltje van dezen diameter in $\pm$ 5000 m³ grond mag verwachten.

De verdeeling naar den ultraslib-kant is veel minder gefundeerd en dientengevolge van veel minder waarde. De wenschelijkheid van nader onderzoek, speciaal naar de korrelgrootte-verdeeling in het ultraslib-gedeelte werd reeds bepleit. Het resultaat bij het monster No. 54 dat een derde deel van het slib kleiner dan 2 μ zelfs kleiner zou zijn dan 20 $\mu\mu$ lijkt op het eerste gezicht niet zoo heel waarschijnlijk. Wellicht zal nader onderzoek daarom aantoonen, dat de gebruikte formule voor het ultraslib-deel nog eenige wijziging behoeft.

VI. RESULTATEN

Bij in totaal elf monsters werd nagegaan of de voorgestelde procedure steeds van toepassing mocht worden geacht. Ten einde dit na te gaan werden analyses van zeer verschillende kleisoorten aan een bewerking onderworpen. Gekozen werden eenige analyses uit een kleiprofiel, dat van een vrij zware klei aan het oppervlak naar diepere lagen in een lichte zavel overging. Ook werd een zeezand uit een zavelprofiel aan de berekening onderworpen, waarnaast nog drie zanden van opklimmende grofheid werden bewerkt. Ten einde een indruk te verkrijgen in hoeverre ook zeer zware kleigronden, welke grootendeels fijner waren dan 2 μ, volgens dezelfde lijnen mogen worden beschouwd, werden uit het reeds eerder genoemde artikel van Søren Berg drie van de door hem tot een korrelfijnheid van enkele tientallen $\mu\mu$ geanalyseerde zware kleien in de beschouwing betrokken. Wat voor kleitypen het waren, welke door hem geanalyseerd werden, vindt men in zijn artikel niet nauwkeurig om-

schreven. De kleien, welke door BERG worden aangegeven met Wildsteiner Ton (a), Engelsche Ball Clay LBB (b) en met nat gemalen Engelsche blauwe klei (c) werden voor de berekening gekozen, waarbij de eigenaardigheid, dat klei c ten opzichte van klei b een lagere waarde voor de mediaan toonde hoewel het gehalte deelen beneden 2 μ voor de laatste klei het hoogste was, mede de keuze bepaalde. Dit is een voorbeeld van de mogelijkheden, waar elke enkelegetallen-karakteristiek schipbreuk op moet lijden, namelijk dat met het enkele getal de karakteriseering zoo onvolledig is, dat het niet mogelijk is, een dergelijk getal te gebruiken om de monsters wat betreft een andere eenvoudige eigenschap in de goede volgorde te plaatsen.

Het bleek bij de uitgevoerde berekeningen steeds, dat de ontworpen formule voldoende soepel was om met goede nauwkeurigheid de korrelgrootte-verdeelingscurve weer te geven. Ook werd geen aanwijzing gevonden, dat de S-vorm van de scheefheidsbetrekking zoodanig was, dat het gebruik van de sommatiecurve van de normale kansverdeeling een gewrongen oplossing moest worden geacht, welke beter door een sommatiecurve van een scheeve verdeeling zou dienen te worden vervangen. De symmetrische S-vorm heeft, rekening houdende met de nauwkeurigheid van de bepalingen, bij alle monsters wel voldaan.

Een goede mogelijkheid tot het toetsen van de juistheid van de veronderstelling omtrent het beloop van de curven in het gedeelte met kleinere korreldiameters dan door den S-vorm gewoonlijk wordt omvat, werd geboden bij de drie zeer fijne kleien. De geringe afstand tusschen den S-vorm en het nulpunt van de x-schaal hield de mogelijkheid in, een eventueele onjuistheid van de veronderstelde verdeeling volgens *log* x tot uiting te doen komen. Ook hierbij bleek echter, dat dit deel van de formuleering niet tot moeilijkheden aanleiding gaf. Behoudens de mogelijkheid, dat speciaal daartoe aangezet onderzoek bij met het oog op de toetsing van het *log* x-deel van de formule uitgezochte monsters, nog tot een scherpere wijze van weergeven kan leiden, gaf het verrichte onderzoek vertrouwen in de bruikbaarheid van de ontworpen formule.

In tabel III geven wij een overzicht van de gevonden vijf-getallen-karakteristiek, waaraan in de 2e en 3e kolom de tot dusverre gebruikelijke kenmerkende getallen van het gehalte aan deelen beneden 2 μ en de mediaan voorafgaan, zoodat men zich in de beter bekende karakteristieken een indruk van de eigenschappen van het monster kan vormen.

Aan deze tabel werden nog twee kolommen toegevoegd, welke bij het beoordeelen van het monster een verduidelijking kunnen vormen.

Voor een goed begrip zal vooral de beteekenis van de gevonden beschrijvende getallen naar voren worden gebracht. Men dient daarbij als algemeene gedaante van de verdeelingscurve in gedachte te houden, dat dit een scheeve, hoogtoppige curve is. Dit wil zeggen, dat de verdeelingscurve van een smaller en hooger type is dan de Gaussche curve, terwijl het 50 % punt niet met den top van deze curve samenvalt en de twee helften van de verdeelingscurve ten opzichte van den top niet symmetrisch zijn.

De beteekenis van de l_M-waarde, welke de ligging van het 50 % punt aangeeft, biedt geen moeilijkheden. Door de logarithme terug te zoeken vindt men de mediaan in $\mu\mu$. Voor bewerkingsdoeleinden zal vrij zeker de l_M-waarde te verkiezen zijn boven de M-waarde zelf wegens de groote beteekenis, welke men van kleine variaties bij de lage waarden voor fijne kleien mag verwachten, terwijl

bij grove zanden met hooge M-waarde veel grootere variaties van zeer ondergeschikte beteekenis zullen blijken te zijn. De l_M komt aan deze verdeeling van de gewenschte nauwkeurigheid van uitdrukken van de mediaanwaarde tegemoet.

De l_F is de abscis van het punt van flexie en geeft in samenhang met de l_M een inzicht in de scheefheid van de verdeelingscurve. De beoordeeling wordt in dit geval vereenvoudigd door het verschil tusschen beide genoemde waarden als maat te nemen en bij de beoordeeling de l_F-waarde te laten vervallen. Het verschil, dat een maat voor de asymmetrie van de verdeelingscurve is, wordt in tabel III onder de aanduiding A weergegeven. Een van nul afwijkende waarde van A wil nu zeggen, dat de top van de verdeelingscurve niet samenvalt met het 50 % punt en dat de voet van de verdeelingscurve aan de eene zijde van den top lager en breeder is dan aan de andere zijde. Naarmate het getal A hooger is, is de asymmetrie sterker, terwijl een positieve waarde wijst op een lagen breeden voet aan de zijde van de kleine diameters, terwijl een negatieve waarde wijst op een hoogen smallen voet aan dien kant. Verder ligt de top steeds tusschen het 50 % punt en het punt van flexie in en daar bij de abscis van den top de fractie te vinden is, welke het sterkste vertegenwoordigd is, moet men deze bij één positieve A-waarde zoeken boven de mediaan en bij een negatieve waarde van A naar beneden. De juiste plaats van den top kan slechts uit een berekening blijken. Hiertoe moet de waarde van x worden berekend, waarvoor de exponent in formule 5, welke voor G werd afgeleid, gelijk nul is. Indien de waarde voor A nul is, heeft men te maken met een korrelgrootte-verdeeling, welke symmetrisch is, doch nog steeds hoogtoppig. In dit geval vallen mediaan, punt van flexie en top samen. Bij deze beschouwing is het uitzetten van de diameters in logarithmische schaal voorwaarde.

Bij de grofste zanden en de fijnste kleien treedt deze symmetrie vrijwel op. Het zijn vermoedelijk de monsters, welke aan een selecteerenden invloed van wind of water onderworpen zijn geweest, waar de asymmetrie het sterkste voorkomt. Door den aard van de logarithmische schaal mag men bij de zwaarste gronden de grootste asymmetrie verwachten, terwijl ook de hierna te bespreken uniformiteit van het monster een zekeren samenhang met de asymmetrie moet toonen.

De spreiding van de verdeeling in het ultraslib-gedeelte of juister uitgedrukt in het gedeelte van de schaal, waar de S-vorm geen invloed meer heeft, welke eigenschap met S_f wordt aangegeven, is een maat voor de grootte van de extreem kleine, zoowel als de extreem groote fracties. Is dit getal hoog, dan nemen deze fracties snel af naar meer extreme waarden en heeft men dus een monster met een verdeelingscurve met smallen voet. De vorm van den voet wordt echter niet enkel door de waarde van S_f bepaald. Ook de fijnheid van het monster, dus bijv. de l_M-waarde is hier van invloed. Naarmate het monster fijner is, wordt een hooge waarde voor S_f minder waarschijnlijk. Vermoedelijk zal de S_f-waarde, zoolang niet wordt overgegaan tot het bepalen van veel fijnere fracties dan thans, een weinig belangrijke eigenschap blijken te zijn. De beteekenis zal voor deze zeer fijne fracties grooter zijn dan voor de thans bepaalde korreldiameters. Verder valt het moeilijk, de S_f-waarde een duidelijk omschreven beteekenis in de sommatie- of de verdeelingscurve te geven, daar men pas een geldige vergelijking kan maken, indien men bij meer dan twee maal de μ-waarde onder of boven x_F — bij gelijke waarden van x — de helling

van de sommatiecurven of den vorm van den voet van de verdeelingscurven tegenover elkander stelt. Over het algemeen zullen daar de fracties echter zoo klein zijn, dat deze zich aan de analyse onttrekken. Aan de beteekenis van de S_f-waarde zal daarom mede wegens de nog iets problematische juistheid van dit deel van de formule, niet te veel aandacht behoeven te worden besteed.

Van veel grooter beteekenis is de S_g-waarde. Door dit getal wordt een belangrijke inlichting verschaft omtrent de mate van hoogtoppigheid van de kromme. In het algemeen kan men zeggen, dat een hoog getal een groote gelijkvormigheid in de korrelgrofheid aanwijst, waarbij dus het grootste deel van het materiaal binnen nauwe fractiegrenzen opgehoopt voorkomt. Echter hebben ook de andere getallen hierop eenigen invloed. De hoogte van den top van de verdeelingscurve is wat moeilijk te berekenen. Daar echter dit punt niet ver verwijdert ligt van het punt van flexie, waar de hoogte van de verdeelingscurve uit de formule:

$$\frac{S_f}{x_F} + \frac{S_g}{\mu\sqrt{\pi}} \qquad 16$$

het eenvoudigste te berekenen valt, kan men de gelijkvormigheid door de berekening van deze waarde met weinig moeite wat beter benaderen. De uitkomst hiervan vindt men in de kolom B van Tabel III aangegeven.

De beteekenis van het getal μ ten slotte is weer niet duidelijk in de sommatie- of de verdeelingscurve aan te geven. Het is een parameter, welke zoowel op de asymmetrie als op de hoogtoppigheid een zekeren invloed heeft. Zoo komt bij groote waarde van μ de asymmetrie wat duidelijker tot uiting, terwijl de hoogtoppigheid afneemt.

Aan de afgeleide constanten zijn blijkens voorgaande beschouwing drie waarden te ontleenen, welke met het visueele beeld van de curve voor de granulaire samenstelling in verband te brengen zijn terwijl twee van de getallen, hoewel voor de karakteriseering eveneens van belang, niet op eenvoudige wijze met een opvallende eigenschap van deze curve geparalleliseerd kunnen worden. Wanneer men deze drie zichtbare eigenschappen van de curve voor de granulaire samenstelling aan de betreffende getallen in Tabel III voor de verschillende monsters vergelijkt, dan blijken de drie zeer fijne kleien een vrijwel symmetrische verdeelingscurve te bezitten, met de strekking dat de rechtervoet van de toevalskromme wat breeder is dan de linkerzijde. De uniformiteit in grootte van de deeltjes is niet groot; er komt een vrij groot gehalte aan fijne deeltjes voor naast deeltjes, welke nogal wat grover zijn dan het gemiddelde. Bij de klei-zavel serie 52 tot 54, waarvan de monsters uit eenzelfde profiel komen en een samenhangende serie vormen, gaat een grootere fijnheid gepaard met een grootere asymmetrie en een geringere uniformiteit. Bij het monster 52 is de asymmetrie zeer sterk, met een buitengewoon uitgerekten linkervoet van de toevalscurve, terwijl bij monster 55 de uniformiteit door het nagenoeg ontbreken van de slibfractie in dit zandige monster, een hooge waarde aanneemt. Het zeezand monster, dat uit een ander profiel werd genomen en dus niet met de voorafgaande vier monsters behoeft samen te hangen, is nog uniformer van samenstelling terwijl de asymmetrie geringer blijkt te zijn. De nogal wat afwijkende waarden voor S_g en μ bij monster 54 zal men ver-

moedelijk moeten toeschrijven aan den onregelmatigen loop van de sommatiecurve bij de grofste fracties. Wellicht moet men hier aan een kleine onnauwkeurigheid in de uitkomst van de analyse denken. Bij de drie zanden is de uniformiteit bij monster 15 matig evenals de asymmetrie. Bij de monsters 1 en 7 treft men een betrekkelijk groote uniformiteit aan bij een vrijwel symmetrische toevalscurve, hetgeen er op wijst, dat bij deze monsters in verhouding minder fijn materiaal optreedt dan bij monster 15.

Bij het in woorden beschrijven van de korrelgrootte-verdeelingscurve kan men de finesses van de vijf-getallen-karakteristiek niet tot uitdrukking brengen, temeer omdat van de S_f en de μ-waarde vrijwel geen gebruik kan worden gemaakt en verder naast het feit van de asymmetrie de vorm, waarin deze eigenschap optreedt, vrijwel niet onder woorden kan worden gebracht. Het zal duidelijk zijn dat hier ook niet het doel van de karakteriseering door getallen gelegen is, aangezien de sommatiecurve, zonder nadere berekeningen of bewerking, dezelfde inzichten veel eenvoudiger kan leveren. Deze beschouwing heeft dan ook vooral ten doel, aan te geven welke indrukken men aan de getallen kan verbinden. De reden van het bepalen van de vijf-getallen-karakteristiek is gelegen in het verkrijgen van die kwantitatieve weergave van de granulaire analyse, welke door het visueele beeld van de sommatiecurve niet gegeven kan worden. Voornamelijk de grootere nauwkeurigheid en de volledigheid zijn de voordeelen van de uiteengezette beschouwingsmethode. Waar die overbodig worden geacht vervalt ook de beteekenis van het gebruik van de ontworpen formule.

VII. ALGEMEENE BESCHOUWINGEN

De poging, om de granulaire samenstelling van een grond met enkele kenschetsende getallen vast te leggen, heeft geleid tot een vrij omvangrijke methodiek van berekenen, terwijl de karakteriseering, welke ten slotte door vijf getallen plaats vindt, eveneens vrij ingewikkeld is, wanneer men althans aan gebruik voor de practijk of voor eenvoudiger vormen van onderzoek denkt. Het uitvoeren van een berekening van een enkel monster, ook indien van allerlei werk besparende mogelijkheden van de rekenmachine gebruik wordt gemaakt, is een vrij tijdroovend werk. Ongetwijfeld kan men door een aantal monsters tegelijk te behandelen en door het gebruik van hulpdiagrammen of projectiemethoden wel tot een versnelling van de berekening komen. Maar de vraag, wat de beteekenis van de karakteriseering van de granulaire samenstelling in verband met landbouwkundig of bodemkundig onderzoek kan zijn, wordt door de resultaten niet zoo opvallend beantwoord, dat verdere discussie daaromtrent overbodig is.

Veel werk wordt nog elken dag verricht om de thans in zwang zijnde karakteriseering van de slibanalyse te verbeteren. Men gaat na, bij welke grens men het meeste voordeel de slibfractie kan beëindigen, men toetst eenvoudige vocht- of zwaartecijfers aan fractiegewichten of korreloppervlaktecijfers, waarvan de beteekenis geenszins vaststaat en verricht in het algemeen werk, dat op zeer wankele basis berust. Aan dergelijk soort onderzoek kan nimmer een eind komen, omdat men teveel variatiemogelijkheden buiten beschouwing

laat. Het is daarom in de eerste plaats een kwestie van doeltreffendheid, wanneer men eerst nauwkeurig tracht vast te stellen, hoe men de granulaire samenstelling als punt van uitgang zal kunnen weergeven. Ook dan nog blijven beperkingen bestaan. Met de grofheid van de deeltjes verandert de mineralogische samenstelling van het materiaal, welke veranderlijke in de vijf constanten van de korrelgrootte-verdeelingscurve vanzelfsprekend niet tot uitdrukking komt. Men dient echter bij het beoordeelen van deze veel-getallen-karakteristiek steeds te bedenken, dat indien de methodiek van weergeven de werkelijke korrelgrootte-verdeeling goed vermag te volgen, de constanten niet slechts de gewichtsverdeeling vermogen weer te geven, maar evenzeer ten aanzien van aantallen of oppervlakken maatgevend zullen zijn, ook zonder dat men door een verdere omrekening eerst nog de gewichtsverdeelingscurve in een aantallen- of oppervlakken-verdeelingscurve om moet zetten. De oppervlakken-verdeeling of die van de aantallen ligt in de constanten van de gewichtsverdeeling volledig opgesloten.

In dit verband moet het belang worden gezien van een nauwkeurige kennis van de korrelgrootte-verdeeling in het gebied van het slib en het ultra-slib. Indien men van het monster 54 de oppervlakken-verdeeling zou nagaan, dan zou de top van de verdeelingscurve vermoedelijk bij enkele $\mu\mu$ grootte liggen, indien althans de in Tabel II berekende verdeeling juist zou zijn. Voor vele eigenschappen zal het zwaartepunt liggen bij korreldiameters, waarover de normale thans in zwang zijnde granulaire analyse geen opheldering meer geeft. Terwijl voor zanden met weinig of geen deelen beneden 2 μ de gegeven karakteristiek wel voor de meeste doeleinden geheel zal voldoen, zal voor de kenschetsing van kleigronden een voorafgaande studie van de korrelgrootte-verdeeling in het slibgedeelte van de verdeelingscurve zeer gewenscht zijn, om te voorkomen dat ook in dit geval werk wordt verricht dat door onvoldoende fundament niet tot een definitief resultaat kan leiden.

Terwijl de bepaling van de constanten eenigszins tijdroovend is, hoewel mogelijkheden van vereenvoudiging en versnelling door mechaniseering bestaan, zal het gebruik van de vijf-getallen-karakteristiek voor het leggen van een verband met andere eigenschappen van grond of gewas niet eenvoudig zijn. Wanneer men slechts een enkel getal ter aanduiding van de slibanalyse gebruikt, is een andere eigenschap in een grafiek eenvoudig daartegen uit te zetten. Met een veel-getallen-karakteristiek gaan op dit punt grootere methodische moeilijkheden ontstaan, welke vermoedelijk veelal opgelost zullen worden door een deel van de constanten buiten beschouwing te laten, doch dan vervalt de grond voor het bepalen van een meer ingewikkelde karakteristiek. Men zal tot scherpere methoden van bewerking van de cijfers moeten overgaan, welke methoden, hoewel minder bekend, voor het gebruik ook inderdaad gereed liggen. Het lijkt mogelijk, door het gebruik van de vijf-getallen-karakteristiek de studie van de beteekenis van de granulaire analyse op een betere basis te plaatsen, waardoor allerlei problemen, de grofheid van den grond betreffende, tot een meer definitieve oplossing kunnen worden gebracht dan thans het geval is. En althans moge deze bijdrage tot de kennis van de granulaire samenstelling van den grond er op wijzen, dat dit vraagstuk vrij moeilijk is en aanzienlijk gecompliceerder moet worden geacht dan uit de veelal gevolgde eenvoudige beschouwingswijzen wel zou volgen.

SAMENVATTING

De ontwikkeling van de kenschetsing van gronden, wat betreft de deeltjesgrootte, laat duidelijk twee verschillende en tegengestelde richtingen onderscheiden. De slibanalyse, gebruikt als methode ter beschrijving van den grond, wordt vervolmaakt in de richting van steeds grootere verfijning. De automatische vastlegging van het verloop van het slibproces vormt hier een uiterste grens. Deze waarnemingen zijn echter voor het practisch gebruik bij de bestudeering van correlaties met andere eigenschappen te gecompliceerd. Bij dergelijk werk gebruikt men daarom gewoonlijk een enkele getal-karakteristiek als het slibgehalte of het gemiddelde deeltjes-grootte. De verfijning van de beschrijving van de deeltjes-grootte verdeeling, welke men thans met de slibanalyse bereikt, overtreft de mogelijkheden van statistische verwerking verre. Wil men nieuwe mogelijkheden voor verder onderzoek ontwikkelen, dan is vereenvoudiging van de beschrijving van de slibcurve noodzakelijk.

Men moet de deeltjes-grootte verdeeling als een kansvraagstuk beschouwen. Het blijkt een scheeve frequentie-curve te zijn. Deze scheefheid is ten deele het gevolg van de niet lineaire wet, welke de sedimentatie beheerscht, ten deele het gevolg, dat het bij dit toevalsvraagstuk niet de volumina zijn, welke den grondslag vormen voor een normale verdeeling, maar mogelijk de oppervlakten of stralen van de deeltjes. De verdeelingsfunctie kan een gedaante bezitten als weergegeven in formule 5, met $f(r)$ als aanduiding voor het type van de scheefheid van de oorspronkelijke waarschijnlijkheidsfunctie, welke nauw met de normale verdeeling samenhangt, en n de macht van r.

Langs dezen weg zou men de deeltjes-grootte verdeeling fundamenteel kunnen benaderen, indien men voldoende gegevens omtrent de zeer kleine deeltjes ter beschikking had. Dit is echter zeer moeilijk te verwerkelijken. Het is mogelijk, dat de zeer kleine fracties zeer groote aantallen deeltjes bevatten. Het zeer geringe gewicht per deeltje is echter oorzaak, dat deze deeltjes aan analytische bepaling ontsnappen. Het fundamenteele onderzoek van dit vraagstuk zal slechts slagen, indien de korrelgrootte-verdeeling tot de veel kleinere deeltjes en de veel geringere hoeveelheden wordt voortgezet, welke men in het gedeelte van de slibcurve met de fijnste gronddeeltjes mag verwachten.

In de huidige phase van het onderzoek kan men alleen empirisch te werk gaan. Wij veronderstellen, dat een zekere onbekende functie van het gewicht van de fracties normaal verdeeld zal zijn. Zet men de kansverdeeling tegen een logarithmische of metrische functie van den straal uit, dan toont vergelijking van de figuren 1 en 2, dat de logarithmische schaal gunstiger beginpunt voor het opstellen van een mathematische functie lijkt te bieden. De empirische formule zal men kunnen construeeren door die voor een normale frequentie-curve formule 8) te superponeeren op een parabool (formule 6). Dit levert formule 9 en na verdere uitwerking wordt formule 12 verkregen.

Op deze wijze wordt de deeltjesgrootte-verdeelingscurve gekenschetst als door 5-getallen karakteristiek, waarin $x_M = l_M$ de gemiddelde straal beteekent $x_F = l_F$ de straal van het buigpunt van de reactie-curve, $a = Sg$ en $b = Sf$ constanten van den aard van een middelbare fout resp. voor het grovere en fijnere gedeelte van de deeltjes-grootte verdeeling en $c = \mu$ een modulus van

scheefheid aangeeft. In fig. 5 worden deze beteekenissen aangeduid met de bijschriften l_M, l_F, Sg, Sf en μ.

De berekening van deze constanten wordt tot in eenig detail behandeld. De figuren 6, 7 en 8 hebben betrekking op de oplossing van vergelijking 12. Van een aantal slibcurven, welke grafisch in fig. 9 als een logarithmisch waarschijnlijkheidsdiagram worden afgebeeld, werden de constanten bepaald en in Tabel II bijeengebracht. Uit deze 5 constanten werden 2 nieuwe variabelen afgeleid, A het verschil tusschen l_M en l_F, B de oplossing van formule 16, A beschrijft de asymmetrie van de kromme, B geeft een waarde voor de uniformiteit van de deeltjes-grootten. De constanten Sf en μ blijken slechts een geringe beteekenis te bezitten. De belangrijkste constanten zijn: l_M, B en in iets mindere mate A.

De beteekenis van deze meer verfijnde kenschetsing van de resultaten van de slib-analyse lijkt te liggen in het gebruik bij fundamenteele vraagstukken betreffende de relatie tusschen het slibgehalte of de grofheid van gronden en de chemische of physische eigenschappen. Met de ondoelmatige beschrijvingen, tot dusverre in gebruik, moeten dit soort van onderzoekingen op niets uitloopen.

SUMMARY

In the development of the characterisation of soils as to particle size, two different and contrary trends may be clearly distinguished. With the sedimentation analysis for the purpose of soil description, the development tends to increasing refinement. In the automatic recording of the sedimentation-process, it reaches its extreme limits. For practical use in the study of correlations with other properties, these data are, however, of too complicated a character. Usually a single value, such as the clay content or the mean particle size, is used for this kind of work. The detailed precision of the description of the particle size-distribution, attained by the sedimentation analysis goes far beyond the possibilities of the statistical analysis. A simplification of the characterisation of the sedimentation curve is necessary if new possibilities for further study are to be developed.

The particle size distribution must be considered a problem of probability. It appears to be a skew frequency curve. The skewness is partly due to the non-linear-reaction, which governs sedimentation, partly to the fact, that not the volumes of the particles form a basis for a normal distribution, but the surfaces or the radii of the particles. The distribution function might take the shape given in formula 5, with $f(r)$ giving the type of skewness of the initial probability function, which bears a close relation to the normal function, and n the power of r. On these lines the particle size distribution might be approached in principle, if sufficient data for the very small particle sizes were available. These, however, are very difficult to assess. The very small fractions may contain very large numbers of particles. Because of their very low weight, however, these particles escape analytical determination. The fundamental solution of this problem will only be found, if the particle size distribution is being continued down to far smaller radii and far smaller amounts of material, such as one may expect in that part of the distribution curve which has the finest particles.

In this phase of the investigations only an empiric approach seems possible. We suppose, that a certain unknown function of the fraction weight is normaly distributed. Comparing fig. 1 and 2, in which the probability function is plotted against the metric or logarithmic value of the radius, it seems, that the logarithm yields a better starting-point for the empiric formula.

The formula may be constructed by superimposing the formula for the normal frequency curve (formula 8) on a parabola (formula 6). This yields formula 9, and after further elaboration formula 12 is attained.

In this way, the particle size distribution curve is given as a five value characteristic, with $x_M = l_M$ as mean radius, $x_F = l_F$ the radius of the point of flexion of the reaction curve, $a = Sg$ and $b = Sf$ constants of a nature of a mean error, resp. for the coarser and finer part of the particle distribution and $c = \mu$ as a module for the skewness. In fig. 5 this is shown with the indications l_M, l_F, Sg, Sf and μ.

The determination of the constants is dealt with in some detail. The figures 6, 7 and 8 refer to the solution of equation 12. Of a number of particle size distribution curves, graphically depicted in fig. 9 in a logarithmic probability diagram, the constants are determined and compiled in Table III. From these

5 constants two new values are derived, A the difference between l_M and l_F, B the solution of formula 16. A describes the asymmetry of the curve, B gives a value for the uniformity of the particle sizes. The constants S_f and μ appear to be of little significance. The most important constants are l_M, B and to a lesser extent A.

The importance of this more detailed characterisation of the results of the sedimentation analysis seems to lie in its use in fundamental problems of the relation between the clay content or the coarseness of a soil and its physical or chemical properties. With the inadequate descriptions, hitherto in use, this kind of research must lead astray.

LITERATUUR

1. Berg, S. Untersuchung über Korngrössenverteilung. *Kolloïd Beihefte*, **53** (1941) 149—378.

2. Clarck Affleck *Soil Science*, **2**, **38**, 1934, 113.

3. Doeglas D. J. en Smithuysen, W. C. B. De interpretatie van de resultaten van korrelgroote analysen. *Geologie en Mijnbouw*. **3** (1941) 273—285 en 291—302.

4. Gessner, H. Die Schlammanalyse, (1931).

5. Czuber, E. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Teubners Sammlung von Lehrbücher auf dem Gebiet der mathematischen Wisschenschaft, Band IX, **1** (1938).

6. Hahn, v. Dispersoïdanalyse, (1938).

7. Kapteyn, J. C. en Uven, M. J. Skew frequency curves in biology and statistics 2nd paper. *Mededeelingen van het astronomische laboratorium te Groningen*, Hoitsema, (1916).

8. Krumbein, W. C. en Pettijohn, F. J. Manual of sedimentary petrography, (1938).

9. Schijf, J. B. en Thijsse, J. B. Metingen van zandtransport, *de Ingenieur*, **06** 11 Juli (1941).

10. Vries, O. de De granulaire samenstelling van Nederlandsche grondsoorten. *Verslagen Landbouwkundige Onderzoekingen*, **48** (11) A (1942) 1—144.

OVERZICHT VAN DE BEWERKTE GRONDMONSTERS

Voor het overzichtelijk weergeven van de granulaire verdeeling van grondmonsters leent zich ongetwijfeld het beste de door KRUMBEIN voorgestelde schalenkeuze, waarbij de logarithme van de korreldiameter als abscis en het gesommeerde percentage van de fracties volgens de kansverdeelingsschaal als ordinaat wordt genomen. In figuur 9 zijn alle bewerkte korrelgrootte-verdeelingscurven in één grafiek bijeengebracht. De hier weergegeven curven zijn de lijnen, welke als de afbeelding van de scheefheidsbetrekking werden aangeduid.

De curven *a*, *b* en *c* gelden voor de drie zeer fijne kleien, welke in het artikel van SØREN BERG werden beschreven en respectievelijk als Wildsteiner Ton, Engelsche Ball Clay LBB en nat, gemalen Engelsche blauwe klei werden aangegeven, zonder dat een nadere beschrijving werd gegeven.

De monsters 52 tot 55 stammen uit een profiel in de Julianapolder ten noorden van Hornhuizen in Groningen en werden genomen van diepten welke respectievelijk 25, 35, 65 en 75 cm. bedroegen. In dit typische wadprofiel daalde het slibgehalte van 59% in de bovenste laag op 46, 35 en 14 % in de daaronder liggende lagen. De vier monsters geven een indruk van den gebruikelijken bouw van het wad, waar een zwaardere klei in de bovenlagen rust op een zandigen ondergrond.

Het monster 18 stamt uit een profiel ten zuiden van Hornhuizen, waar de ondergrond op 175 cm. diepte geheel uit zeezand bestaat en slechts 4% slib fijner dan 16 μ bevat. Het monster kan, hoewel het op een andere plaats werd genomen, wel ongeveer worden beschouwd als een geval, dat bij de vorige serie wadprofielmonsters aansluit.

De drie zandmonsters 1, 7 en 15 werden gekozen met dalend U-cijfer. Het grofste monster n°. 1 stamt uit het fluvioglaciale zand van Assel op de Veluwe met een U-cijfer gelijk 19. Monster 7 met een U-cijfer van 70 werd in den ondergrond van het fluvioglaciale zand van Loosdrecht ter diepte van $\pm$ 100 cm genomen. Het fijne zand van monster 15 werd op 120 cm diepte genomen te Drunen in hoogterraszand en heeft een U-cijfer van 160. Deze drie monsters zijn representanten van de gebruikelijke samenstelling van zanden met verschillende grofheid.

General survey of the treated particle size distribution curves. In fig. 9. the curves are depicted as logarithmic probability curves, a method which seems most suitable for a simple representation of the results. The clay-sorts, a, b and c are very fine clay-soils analysed to very small particle sizes by SØREN BERG.

The samples 52—55 *are taken from a marine deposit, soil reclaimed from the sea in* 1923 *at different depths.*

Sample 18 *was taken from older marine soil in the neighbourhood. The sandy soils* 1, 7 *and* 15 *were taken form glacial layers and selected for their increasing coarseness.*

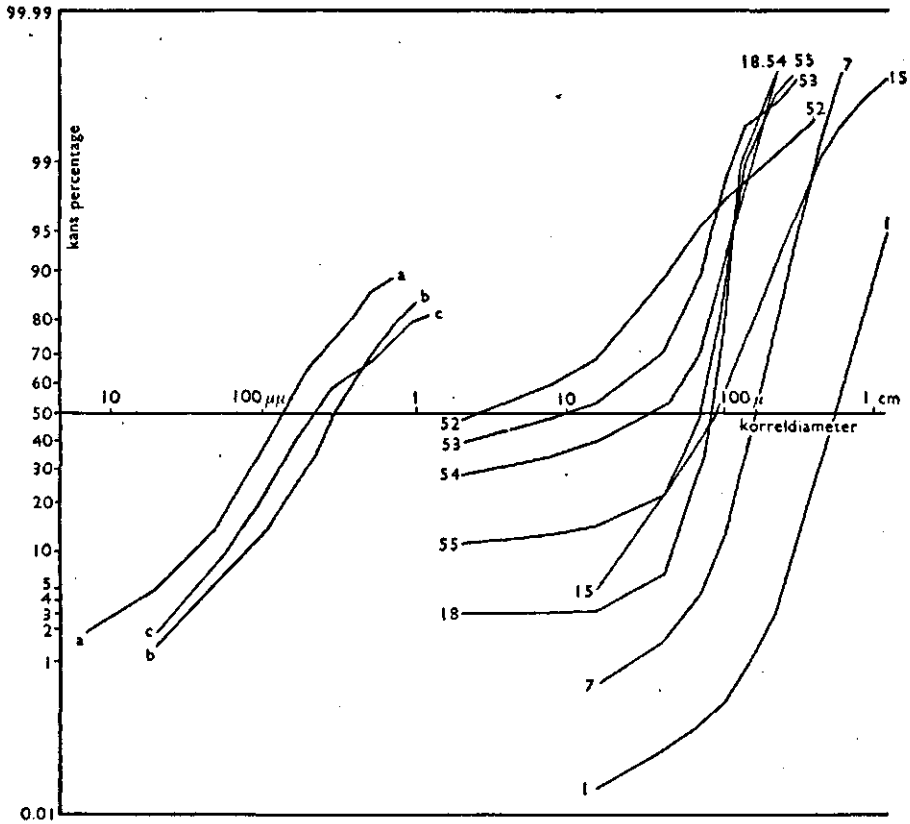

FIG 9 Overzicht van de bewerkte korrelgrootte-verdeelingscurven

TABEL III

Monstor	Slib $<2\mu$	M	l_M	l_F	S_g	S_f	μ	A	B
a	93	0,13	2,122	2,034	0,45	1,82	0,66	—0,088	1,8
b	78	0,22	2,347	2,070	1,56	0,67	0,61	—0,277	1,4
c	90	0,29	2,469	2,452	1,07	1,65	0,75	—0,017	1,7
52	48	2,6	3,417	4,700	1,44	1,01	0,44	1,283	1,6
53	38	12	4,064	4,910	1,14	1,78	0,41	0,846	2,7
54	29	36	4,560	5,517	0,57	6,12	0,72	0,957	4,9
55	11	74	4,869	5,025	0,54	2,88	0,30	0,156	5,5
18	3	83	4,920	5,025	0,69	3,73	0,30	0,105	7,2
15	0,25	87	4,941	5,267	5,23	1,35	0,48	0,326	2,6
7	0,15	167	5,222	5,242	2,37	2,68	0,39	0,020	4,3
1	0,01	542	5,734	5,763	1,51	4,06	0,70	0,029	3,5

Results of a semi-graphic solution of formula 12 *for* 11 *soil samples. The numbers may indicate the range within which the constants may be expected to vary.*

TABEL I

d	x	$\log x$	$x_{n+1} - x_n$	$\frac{+1 + x^n}{2}$	z		Δz		y		$x - x_F$		$\frac{x - x_F}{c}$		p		$p - p_M$		$\log x - \log x_M$		$\frac{z}{\log x - \log x_M}$		$\frac{p - p_M}{\log x - \log x_M}$	
1	2	3	4	5	6		7		8		9		10		11		12		13		14		15	
					54	15	54	15	54	15	54	15	54	15	54	15	54	15	54	15	54	15	54	15
2	3,3010	0,5186	—	—	—0,402	—	—	—	—	—	—2,216	—	—3,078	—	0,0000	—	—0,0301	—	—0,1404	—	2,86	—	0,21	—
			0,6021	3,6020	—	—	0,129	—	0,214	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	3,9031	0,5914	—	—	—0,273	—	—	—	—	—	—1,614	—	—2,242	—	0,0008	—	—0,0293	—	—0,0676	—	4,04	—	0,43	—
			0,3010	4,0536	—	—	0 087	—	0 289	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	4,2041	0,6237	—	—	—0 186	—1 130	—	—	—	—	—1,313	—1,063	—1,824	—2,214	0,0049	0,0009	—0,0252	—0,1676	—0,0353	—0,0701	5,27	16,12	0,71	2,39
			0,4294	4,4188	—	—	0,244	0,612	0,568	1,425	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
43	4,6335	0,6659	—	—	+0,058	—0,518	—	—	—	—	—0,883	—0,633	—1,226	—1,321	0,0415	0,0309	+0,0114	—0,1376	+0,0069	—0,0279	8,14	18,57	1,65	4,93
			0,2357	4,7513	—	—	0,326	0,379	1,383	1,608	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
74	4,8692	0,6875	—	—	+0,384	—0,139	—	—	—	—	—0,648	—0,389	—0,900	—0,829	0,1015	0,1205	+0,0714	—0,0480	+0,0285	—0,0063	13,47	22,06	2,51	7,62
			0,1478	4,9431	—	—	0,611	0,291	4,133	1,969	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
104	5,0170	0,7004	—	—	+0,995	+0,152	—	—	—	—	—0,500	—0,250	—0,695	—0,521	0,1619	0,2307	+0,1318	+0,0622	+0,0414	+0,0066	24,03	23,03	3,18	9,42
			0,1503	5,0921	—	—	0,503	0,374	3,340	2,489	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
147	5,1673	0,7132	—	—	+1,498	+0,526	—	—	—	—	—0,350	—0,100	—0,486	—0,208	0,2460	0,3843	+0,0542	+0,2158	+0,0542	+0,0134	27,64	27,11	3,98	11,12
			0,1508	5,2427	—	—	0,676	0,385	4,483	2,553	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
208	5,3181	0,7257	—	—	+2,174	+0,911	—	—	—	—	—0,199	+0,051	—0,276	+0,106	0,3482	0,5596	+0,3181	+0,3911	+0,0667	+0,0319	32,59	28,56	4,77	12,26
			0,1517	5,3940	—	—	—	0,349	—	2,300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
295	5,4698	0,7380	—	—	—	+1,260	—	—	—	—	—	+0,203	—	+0,423	—	0,7251	—	+0,5566	—	+0,0442	—	28,51	—	12,59
			0,1503	5,5450	—	—	—	0,379	—	2,522	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
417	5,6201	0,7497	—	—	—	+1,639	—	—	—	—	—	+0,353	—	+0,735	—	0,8507	—	+0,6822	—	+0,0559	—	29,32	—	12,20
			0,1500	5,6951	—	—	—	0,231	—	1,540	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
589	5,7701	0,7612	—	—	—	+1,870	—	—	—	—	—	+0,503	—	+1,048	—	0,9308	—	+0,7623	—	+0,0674	—	27,75	—	11,31
			0,1505	5,8453	—	—	—	0,165	—	1,096	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
833	5,9206,	0,7724	—	—	—	+2,035	—	—	—	—	—	+0,653	—	+1,360	—	0,9728	—	+0,8063	—	+0,0786	—	25,89	—	10,26
			0,1468	5,9940	—	—	—	0,154	—	1,049	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1168	6,0674	0,7830	—	—	—	+2,189	—	—	—	—	—	+0,800	—	+1,666	—	0,9908	—	+0,8223	—	+0,0892	—	24,54	—	9,22

Computation scheme for the semigraphic solution of formula 12. *Column* 6 *gives the line „skewness-relation" in figure* 6 *and* 9. *Dividing column* 7 *by column* 4 *gives column* 8. *These numbers give the lines „skewness-relation" in figure* 6 *and* 7. *From these data line c and the value c are derived. Used in column* 10 *this leads to the columns* 14 *and* 15 *which give the known parts of formula* 14 *and lead over the diagram in figure* 8 *to the solution of the values a and b.*

TABEL II

Monster No. 54

d	2	5	10	20	50	100	200	500	1000 $\mu\mu$	2	8	16	43	74	104	147	208	295	417	589	833	1168 μ	2	5	10	20	50	100 cm
$z = s$	—1,742	—1,259	—1,054	—0,903	—0,750	—0,657	—0,576	—0,485	—0,424	—0,369	—0,268	—0,201	+0,079	+0,475	+0,862	+1,393	+2,035	+2,756	+3,482	+4,169	+4,765	+5,234	+5,735	+6,091	+6,170	+6,204	+6,236	+6,258
p %	0,69	3,75	6,77	9,98	14,44	17,64	20,76	24,64	27,45	30,49	35,24	38,81	54,45	74,92	88,86	97,55	99,80	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Monster No. 15

$z = s$	—14,858	—10,453	—8,580	—7,204	—5,806	—4,965	—4,223	—3,389	—2,836	—1,336	—1,460	—1,070	—0,522	—0,141	+0,163	+0,525	+0,912	+1,283	+1,594	+1,840	+2,035	+2,184	+2,394	+2,715	+2,715	+3,165	+3,442	+3,643
p %	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,05	1,95	6,51	23,02	42,10	59,12	77,11	90,14	96,52	98,79	99,54	99,80	99,90	99,96	99,99	100	100	100	100

Results of the use in formula 12 *of the computed constants z. Is the value of the probability function, p % the probability in percent. It is interesting to note the small but existing probability of big boulders in the soil of sample* 15, *boulders of the dolmen or Hunebeds, present in this region. These boulders belong to the particle size distribution of this sandy material and are clearly no mixture of a different origin.*