vwo-campus - Lesbrief

Toeval en voorspelbaarheid

Vragen@VWO-campus.net
0317-484959
www.VWO-campus.net

WAGENINGEN UNIVERSITEIT
University for Life Sciences

Toeval en voorspelbaarheid

Doelgroep
Klas 4 t/m 6 havo en vwo

Vakken en domeinen
Biologie, Economie, Algemene natuurwetenschappen VWO, Wiskunde

Niveau
***

Tijdsduur
Afhankelijk van het uitgevoerde project 1 tot 3 dagen

Aard lesbrief
Theoretisch en praktisch op de computer. Als voorbereiding is het aan te raden de lesbrief "Beknopte handleiding voor Derive 5.0 for Windows" uit te voeren.

Werkvorm
Individueel

Colofon
Auteurs
Lia Hemerik, leerstoelgroep Wiskundige en Statistische Methoden

WU opleiding
Kansberekening en matrix rekenen komen in alle Wageningse opleidingen aan bod.

Eindredactie
Petra Naber-van den Heuvel, VWO-campus

Wageningen Universiteit
Februari 2001
Laatst aangepast 8-07-02

Extra kopieën en *docentenbijlage* aan te vragen bij:
VWO-campus
Vragen@VWO-campus.net
0317-484959
of via:
WWW.VWO-campus.net

Samenvatting

Bij een heleboel processen hebben we te maken met kansen waarmee bepaalde gebeurtenissen plaats kunnen vinden. Zo kunnen in de loop van de tijd bakkers of benzinepompen door reclamecampagnes en verschillen in service elkaar klanten afhandig maken. Als de kansen waarmee klanten van de ene middenstander naar de andere middenstander overlopen door de tijd heen gelijk blijven dan kan worden voorspeld hoe de verhouding van de aantallen klanten van de verschillende middenstanders na verloop van tijd zal zijn. Hoewel het proces met kansen wordt beschreven, ligt de verdeling over de verschillende middenstanders na verloop van tijd vast. Gedragingen van beesten of dierparen blijken onder bepaalde voorwaarden ook met zo'n zelfde soort kansproces beschreven te kunnen worden. In deze tekst behandelen we eerst wat matrices zijn. Vervolgens wordt de overgangs- of waarschijnlijkheidsmatrix besproken, die het proces van het herverdelen van klanten over middenstanders beschrijft of het overgaan van het ene soort gedrag naar het andere soort gedrag. Aan de hand van enkele voorbeelden en opdrachten worden eigenschappen belicht van de matrices, die het (kans)proces beschrijven.

Inhoudsopgave

Toeval en voorspelbaarheid

Inleiding

Overal om ons heen spelen kansprocessen een rol. Sommige van deze kansprocessen kunnen beschreven worden met kansen die in de loop van de tijd constant zijn. In dat geval kan zo'n kansproces beschreven worden met een waarschijnlijkheidsmatrix. We noemden in de samenvatting al het voorbeeld dat in de loop van de tijd bakkers of benzinepompen door reclamecampagnes en verschillen in service elkaar klanten afhandig kunnen maken. Zoals we zullen zien is het verloop van zo'n proces met kansen beschreven. Echter, de verdeling over de verschillende middenstanders na verloop van tijd blijkt alleen af te hangen van specifieke waarschijnlijkheidsmatrix en in het geheel niet van de verdeling van klanten waarmee wordt begonnen.
In deze tekst behandelen we eerst wat matrices en vectoren zijn en hoe een matrix-vector product wordt uitgerekend. Vervolgens bespreken we de overgangs- of waarschijnlijkheidsmatrix, die het proces van het herverdelen van klanten over middenstanders beschrijft of het overgaan van het ene soort gedrag naar het andere soort gedrag.
We illustreren aan de hand van enkele voorbeelden eigenschappen van de matrices, die het (kans)proces beschrijven. De voorbeelden zijn uit een breed gebied afkomstig: we nemen bijvoorbeeld onder de loep het weer in het land van de tovenaar van Oz, de verdeling van klanten over verschillende benzinepompen (Schelp, Osse en Exacto), de verdeling van dieren of dierparen over bepaalde gedragscategorieën en de verdeling van genotypen over klassen. Wanneer we het hebben over de verdeling van cellen in een weefselkweek over de twee verschillende toestanden "delende" en "niet-delende" cellen, dan hebben we het over een groeiende populatie en dus niet meer over alleen een kansproces.

Theorie

In het wiskunde B programma van het huidige VWO komt matrixrekening niet aan de orde. In het wiskunde A programma wordt het wel behandeld. Om de concepten matrix, matrix-vector vermenigvuldiging en matrix-matrix vermenigvuldiging duidelijk te maken volgt hieronder eerst een technisch stukje over het rekenen met matrices.

Wat is een matrix en wat is een vector?
Een matrix is een blok getallen gerangschikt in een aantal (horizontale) rijen en een aantal (verticale) kolommen. Het aantal rijen en kolommen kan gelijk zijn. In dat geval spreken we van een vierkante matrix.

Voorbeelden:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ is een 2 x 3 matrix met 2 rijen en 3 kolommen; B = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ is een 4 x 3 matrix met 4 rijen en 3 kolommen; C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ is een 4 x 2 matrix met 4 rijen en 2 kolommen; D= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ is een 2 x 2 matrix met 2 rijen en 2 kolommen. Matrix D is een voorbeeld van een vierkante matrix.

Een kolomvector is een matrix met slechts één kolom. Een rijvector daarentegen is een matrix van slechts één rij.

Voorbeelden:
h= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een 2 x 1 matrix of een kolomvector van 2 getallen; i = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ is een 1 x 2 matrix of een rijvector van 2 getallen; j= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ is een 3 x 1 matrix of een kolomvector met 3 getallen

Vermenigvuldigen van matrices en vectoren.

Matrices kunnen met vectoren worden vermenigvuldigd. Alleen als het aantal kolommen van de matrix M gelijk is aan het aantal rijen (=aantal getallen) in een kolomvector y, dan kan de vermenigvuldiging M y worden uitgevoerd. De uitkomst is dan een kolomvector met hetzelfde aantal rijen als de matrix M. In de nu volgende figuren wordt geïllustreerd hoe de uitkomst van een matrix-vector produkt wordt berekend.

We beschouwen de matrix $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ en de kolomvector $y = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Het resultaat van de berekening van het matrix-vector produkt M y is dan $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 39 \\ 71 \end{pmatrix}$.

Stap 1:
De getallen van de eerste rij van matrix M worden stuk voor stuk vermenigvuldigd met de getallen van de vector y en vervolgens bij elkaar opgeteld.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dit levert het getal 0 x 6 + 1 x 7 + 4 x 8 = 39 (het bovenste getal van vector M * y).

Stap 2:
De getallen van de tweede rij van matrix M worden eveneens stuk voor stuk vermenigvuldigd met de getallen van de vector y en vervolgens bij elkaar opgeteld.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dit levert het getal 2 x 6 + 5 x 7 + 3 x 8 = 71 (het onderste getal van vector M y).

Vermenigvuldigen van matrices.

Matrices kunnen ook met elkaar worden vermenigvuldigd. We beschouwen weer de matrix $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ en vermenigvuldigen die nu met de matrix $N = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$. Het resultaat van de berekening van dit matrix-matrix produkt M N is dan $\begin{pmatrix} 39 & 14 \\ 71 & 21 \end{pmatrix}$.

De stappen 1 en 2 zoals bij de Matrix-vector vermenigvuldiging leveren hetzelfde resultaat op als hierboven voor M y. Met de tweede kolom van matrix N vermenigvuldigen wordt geillustreerd in onderstaande figuur (de stappen 3 en 4).

Stap 3:
De getallen van de eerste rij van matrix M worden stuk voor stuk vermenigvuldigd met de getallen van de tweede kolom van matrix N en vervolgens bij elkaar opgeteld.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 1 \quad 4} \\ 2 \quad 5 \quad 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & \boxed{1} \\ 7 & \boxed{2} \\ 8 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Dit levert het getal 0 x 1 + 1 x 2 + 4 x 3 = 14 (het getal rechtsboven in matrix M N).

Stap 4:
De getallen van de tweede rij van matrix M worden ook weer stuk voor stuk vermenigvuldigd met de getallen van de tweede kolom van matrix N en vervolgens bij elkaar opgeteld.

$$\begin{pmatrix} 0 \quad 1 \quad 4 \\ \boxed{2 \quad 5 \quad 3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & \boxed{1} \\ 7 & \boxed{2} \\ 8 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Dit levert het getal 2 x 1 + 5 x 2 + 3 x 3 = 21 (het rechtsonder getal in matrix M N).

Let op: MN levert een 2 x 2 matrix, maar NM geeft een 3 x 3 matrix. Er geldt dus dat MN $\neq$ NM. Je kan zelf nagaan dat NM = $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 27 \\ 4 & 17 & 34 \\ 6 & 23 & 41 \end{pmatrix}$.

Om de zojuist uitgelegde matrix-vector vermenigvuldiging te doorgronden is het van belang om even enkele eenvoudige opdrachten te maken. In de paragraaf over de populaties in de tijd met Leslie-matrices gaan we rekenen met vierkante matrices. In het praktische gedeelte en bij de uitleg van Leslie-matrices wordt er van uit gegaan dat de lezers enige ervaring met Derive 5.0 for Windows hebben. Om de lezer in de gelegenheid te stellen zich de basale vaardigheden in Derive 5.0 for Windows eigen te maken, verwijzen we naar de voor dit doel geschreven “Beknopte handleiding Derive 5.0 for Windows”. Er zij opgemerkt dat er ook een stukje tekst is waarin het gebruik van een bepaald type grafische rekenmachine nl. De CASIO CPX-9850 GB plus wordt behandeld (voor zover dit het rekenen met matrices en vectoren betreft).

Opdracht 1

Welke vermenigvuldigingen uit het volgende rijtje kunnen wel worden uitgevoerd en welke niet? De letters die hier staan verwijzen naar de matrices en vectoren uit de bovenstaande voorbeelden.
A h; A i; A j; B h; B i; B j; C h; C i; C j; D h; D i; D j.

Opdracht 2

Bereken de produkten E z, Fz, E F en F E als E = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, F = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ en z = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Merk op</u> dat E F en F E een totaal verschillende matrix opleveren.

Waarschijnlijkheidsmatrices

Nu komen we eindelijk aan bij de kern van de zaak: processen waarvan het verloop door toeval wordt bepaald willen we in beeld brengen door meerdere matrix-vector vermenigvuldigingen na elkaar uit te voeren. Om die berekeningen niet zelf te hoeven doen maken we gebruik van het computeralgebra programma Derive 5.0 voor Windows. Mensen die dit programma nog nooit hebben gebruikt verwijzen we naar het bestaan van de korte handleiding Derive 5.0 for windows. Deze is in dezelfde reeks uitgegeven.

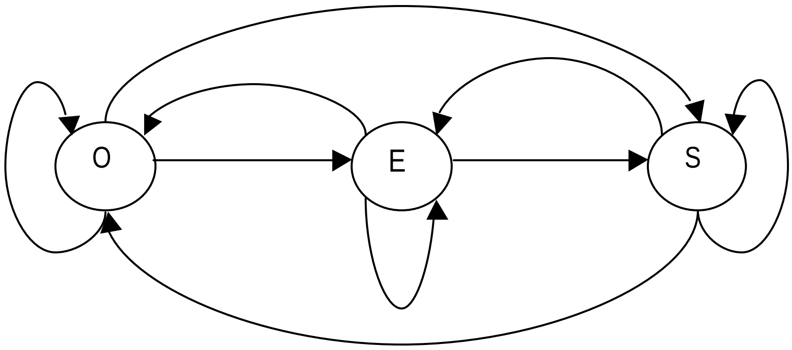
Wat zijn nu precies de zaken waarin we geinteresseerd zijn? In het eerste voorbeeld willen we graag weten hoe het totaal aantal mensen dat regelmatig benzine tankt in een niet zo grote stad (zeg 10000 inwoners) zich na het openen van een nieuw benzinetankstation gaat verdelen als klanten over de (nu) drie benzinepompen.

In een niet zo grote stad heeft zich kort geleden een derde benzinepomphouder gevestigd. Nu hebben bewoners van deze gemeente de keus uit tankstations van Osse, Exacto en Schelp. De klantenkring bestaat in totaal uit 10000 autobezitters, waarvan er nu (een maand na de opening van het Schelp tankstation) al 500 regelmatig bij de nieuwkomer tanken. Exacto heeft momenteel het grootste markt-aandeel namelijk 5500 klanten. Het verloop in de tijd van de verdelingen van klanten over de tankstations ontwikkelt zich volgens het proces v(1)=M v(0), v(2)=M v(1) enz. Met de aantallen klanten van Osse, Exacto en Schelp na t maanden in vector v(t) zodanig dat

v (0) = $\begin{pmatrix} O(0) \\ E(0) \\ S(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 5500 \\ 500 \end{pmatrix}$ en de overgangsmatrix M = $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 & 0,0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0,0 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix}$

Opdracht 3.

a. Met in je achterhoofd hoe de vermenigvuldiging van matrices en vectoren wordt uitgevoerd kun je in het figuur op de volgende bladzijde de goede overgangskansen bij de pijlen invullen.



b. Wat is de verdeling van de klanten over de drie tankstations Osse, Exacto en Schelp na 2, 4 en 6 maanden, resp. v(2), v(4) en v(6)?

In Derive 5.0 pak je dit als volgt aan (links staat wat je in Derive intypt en rechts staat als commentaar gegeven wat deze instructie doet).

#1 [4000; 5500; 500] geeft de beginverdeling van klanten als kolomvector

#2
$$\begin{pmatrix} 4000 \\ 5500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

#3 [0.8, 0.05, 0; 0.2, 0.7, 0.2; 0, 0.25, 0.8] hier geef je de matrix van drie rijen en drie kolommen op

#4
$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.25 & 0.8 \end{pmatrix}$$

#5 [0.8, 0.05, 0; 0.2, 0.7, 0.2; 0, 0.25, 0.8]^2 [4000; 5500; 500]
na return krijg je de volgende regel te zien

#6
$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.25 & 0.8 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 4000 \\ 5500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

doe nu "≈" en er volgt het antwoord namelijk v(2)

#7
$$\begin{pmatrix} 3017.5 \\ 4375 \\ 2607.5 \end{pmatrix}$$

Bereken nu zelf met Derive 5.0 v(4) en v(6).

c. Welk deel van de klantenkring zal uiteindelijk bij Schelp gaan tanken? Kijk hiervoor bijvoorbeeld na honderd tijdstappen en vergelijk de uitkomst met die na 101 tijdstappen.

Conclusie

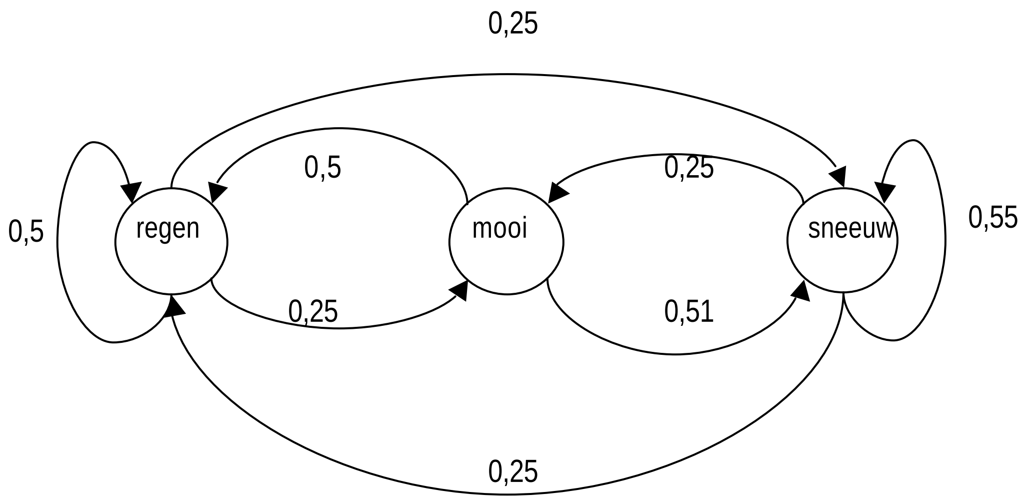
Merk op, dat de som van de getallen in een kolom gelijk is aan 1: alle overgangsmogelijkheden hebben een kans met een waarde groter of gelijk aan nul en alle kansen opgeteld geeft een kans 1 zodat we geen mogelijkheid over het hoofd hebben gezien. Uit onderdeel c. van bovenstaand voorbeeld blijkt dat er een vector is die na vermenigvuldiging met de waarschijnlijkheidsmatrix zichzelf is gebleven. Dit heet de stabiele verdeling en die hoort dus karakteristiek bij een bepaalde waarschijnlijkheidsmatrix.
Met de bovenstaande kennis in huis kunnen we enkele opdrachten uitvoeren. Van de opdrachten is een uitwerking beschikbaar, maar van de voorgestelde projecten niet. Hier worden alleen enkele suggesties gedaan om een en ander uit te zoeken, wat in een verslag kan worden opgetekend.

Opdrachten

Om enigzins thuis te raken in Derive 5.0 voor windows raden we aan om de lesbrief “Beknopte handleiding voor Derive 5.0 for windows” eerst door te werken. In deze handleiding staan enkele korte opdrachten waardoor de gebruiker vertrouwd wordt gemaakt met die stukken van Derive 5.0 die betrekking hebben op het rekenen met matrices en vectoren. Nadat zo de nodige ervaring is opgedaan kan het geleerde in praktijk worden gebracht bij het maken van de volgende opdrachten.

Opdracht 4: Het weer in het land van Oz.

In het land van de tovenaar van Oz worden drie weerstypen onderscheiden: mooi weer, regen en sneeuw. Het komt er nooit voor dat het twee dagen achter elkaar mooi weer is. Als het mooi weer is is het even waarschijnlijk dat het de volgende dag sneeuwt als dat het de volgende dag regent. Op een sneeuw- (of regen-) dag is de kans dat het de volgende dag hetzelfde weer is gelijk aan een half. Als het nu sneeuwt (of regent) is de kans dat het weer verandert gelijkelijk verdeeld over de twee andere weerstypen mooi of regen (mooi of sneeuw).Het een enander is samengevat in de onderstaande figuur.



Als de huidige weerstoestand bekend is kan met de volgende overgangsmatrix M het weer op de volgende dag worden berekend. Laat de huidige weerstoestand voorgesteld worden met de vector y dan geldt dat y = $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ een regenachtige dag voorstelt, y = $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ een mooie dag en y = $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ een dag met sneeuw.

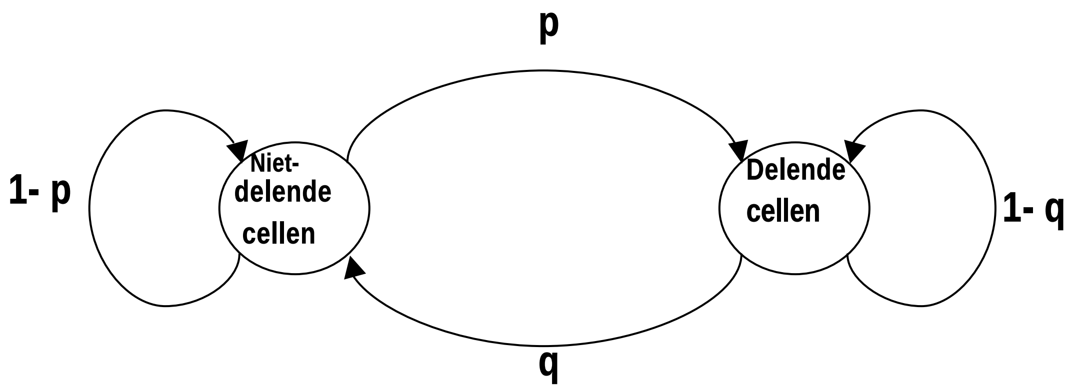
a. Bepaal de matrix N die samenvat hoe het weer in het land van Oz zich van dag tot dag ontwikkelt.

b. Het is vandaag (1) een regenachtige dag, (2) een stralende dag of (3) een dag met heftige sneeuwval in het land van Oz. Bepaal in elk van de drie gevallen welk weer het meest waarschijnlijk is voor overmorgen.

c. Hoe is de verhouding tussen regenachtige, stralende- of sneeuwdagen op de lange duur?

Opdracht 5: Al dan niet delende cellen

We nemen aan dat een organisme niet groeit maar alleen zijn cellen vervangt. Alle organismen vervangen voortdurend de cellen waaruit hun lichaam bestaat. Niet alle cellen delen tegelijkertijd. Elke cel apart heeft een bepaalde kans per tijdseenheid p om tot delen over te gaan als deze op het huidige tijdstip niet aan het delen is. Analoog heeft elke cel die zich momenteel deelt een kans per tijdseenheid q om een cel in ruste te worden (zie figuur).



Als een lichaam op tijdstip 0 uit D(0) delende en N(0) niet-delende cellen bestaat en de tijd in uren wordt gemeten, dan geldt dat 1 uur later het lichaam bestaat uit D(1) delende en N(1) niet-delende cellen met $\begin{pmatrix} D(1) \\ N(1) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} D(0) \\ N(0) \end{pmatrix}$ en de matrix M die hoort bij bovenstaande figuur, namelijk M=$\begin{pmatrix} 1-q & p \\ q & 1-p \end{pmatrix}$.

a. Neem eens p = 0,2 en q = 0,3 . Bepaal van 10000 cellen waarvan 90% nu niet deelt hoeveel procent dat na 5 respectievelijk 10 tijdseenheden is. Hoe is de *verhouding* uiteindelijk (zeg na honderd tijdstappen)?

b. Derive kan dezelfde soort berekeningen maken voor willekeurige p en q. Om te bereiken dat Derive met de letters p en q rekent en niet met een of andere waarde typen we eerst in p:=p en op een volgende regele q:=q.

(1) Om te berekenen hoe bij willekeurige p en q de *verhouding* tussen delende en niet-delende cellen uiteindelijk is, kan je met Derive $M \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ berekenen. Wat kan je uit het resultaat concluderen met betrekking tot de uiteindelijke verdeling van de cellen over de twee toestanden (delend en niet-delend)?

Opdracht 6: Moeder-kind binding bij Rhesusapen

Bij het observeren van gedrag van één of meerdere dieren blijkt vaak dat bepaalde gedragingen elkaar regelmatig opvolgen. Als de kans dat een dier(paar) een periode later met (gezamenlijk) gedrag *B* bezig is slechts afhangt van het gedrag (zeg *A*) dat het nu vertoont dan kan het gedrag met een zogeheten discreet Markovproces worden beschreven. Dat houdt in dat een overgangsmatrix kan worden opgesteld voor de kansen per periode dat een bepaald gedrag gevolgd wordt door hetzelfde of een ander gedrag.

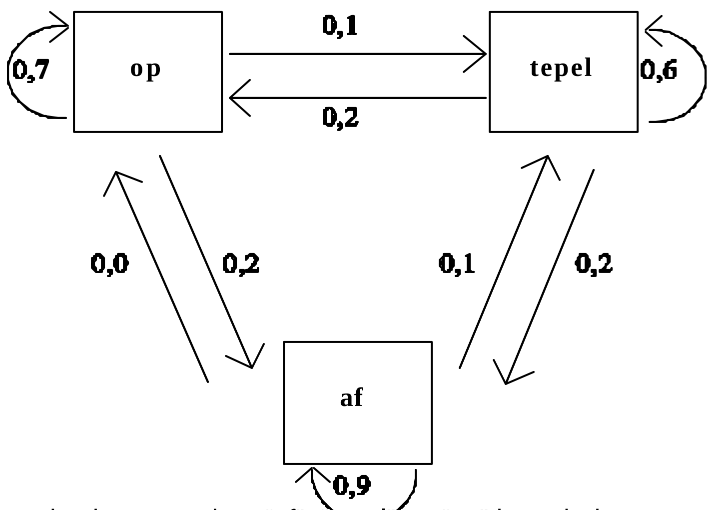
Na observatie van de wisselwerking tussen enkele moeders Rhesusaap en hun kinderen blijkt dat er drie situaties onderscheiden kunnen worden die voldoen aan het Markovkriterium "slechts de huidige toestand bepaalt wat er in de toekomst gebeurt." Het verleden telt dus niet mee om de toekomstige situatie waarin moeder en kind zich bevinden te bepalen. Als gevolg van deze observatie beschrijven we hier de moeder-kind interactie bij Rhesusapen met drie toestanden waarin moeder en kind zijn aan te treffen:

1. af: moeder en kind doen individueel iets, maar worden niet in elkaars buurt aangetroffen

2. tepel: het kind zit bij de moeder en speelt met haar tepel of drinkt (intiem contact)

3. op: het kind zit bij de moeder en niet aan haar tepel.

Stel een gedragsbioloog observeert een aantal moeder-kind paren (zeg 10), waarvan de kinderen aan het begin van de observatie allemaal los lopen. De verdeling van de moeder-kind paren over de verschillende gedragstoestanden kan worden berekend als de overgangsmatrix bekend is. In onderstaande figuur staan naast de pijltjes die de toestanden verbinden waarden gegeven voor de kans dat na verloop van een minuut een bepaalde toestandsovergang heeft plaatsgevonden. Bijvoorbeeld de kans dat er een gedragsverandering heeft plaatsgevonden van 'op' naar 'op' is gelijk aan 0,7 per minuut.



Het aantal paren bezig met gedrag “af”, “tepel” en “op” in periode *n* geven we aan met de vector (A(n), T(n), O(n)). Elke periode duurt 1 minuut.

a. Wat is de beginverdeling van de moeder-kindparen over de drie toestanden?

b. Stel de vergelijkingen op waarin A(n+1), T(n+1) en O(n+1) worden uitgedrukt in A(n), T(n) en O(n). Als je het makkelijker vindt om alleen de matrix M op te stellen dan mag dat ook.

Laat alvorens verder te gaan het opgestelde stelsel vergelijkingen controleren door jouw docent(e)!

c. Voer de matrix en de beginvector in Derive in en bekijk voor dit begin het verloop van de aantallen moeder-kind paren in alledrie de toestanden door de tijd heen.

d. Om het aantalsverloop te volgen proberen we verschillende beginverdelingen. Bepaal voor de volgende beginverdelingen v(0) de verdeling over de drie toestanden na 2, 20 en 60 minuten.

$$v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e. Hoe verhouden de aantallen paren in de verschillende toestanden zich uiteindelijk tot elkaar?

Opdracht 7: Overerving van eigenschappen door kruisbestuiving

Genen zijn de dragers van erfelijke eigenschappen. De eenvoudigste manier van overerving vind plaats als een eigenschap slechts door één gen op één plaats op het genoom wordt gecodeerd door slechts twee verschillende typen (= allelen). De twee allelen noemen we doorgaans A en a, waarbij A staat voor het type dat dominant is en a voor het recessieve type. Elk gen ligt op twee verschillende chromosomen. Daarom wordt de typering van een (diploied) organisme gegeven door een tweetal van de typeringen van de allelen aan elkaar te schrijven. Zo zouden we als de volgorde van notatie er toe doet de volgende vier combinaties kunnen krijgen: AA, Aa, aa en aA. Echter Aa en aA kunnen niet onderscheiden worden. Daarom worden de individuen van een soort in drie klassen onderverdeeld:
AA homozygoot met beide allelen dominant
aa homozygoot met beide allelen recessief
Aa heterozygoot met zowel een dominant als een recessief allel.

We gaan ons vanaf nu richten op een plantenpopulatie waarin de individuen zich door zelfbestuiving voortplanten. Deze populatie planten kunnen we in een bepaalde generatie n karakteriseren door een vector v(n) met drie getallen die van onder naar boven de frequenties van de (geno)typen AA, Aa en aa voorstellen.

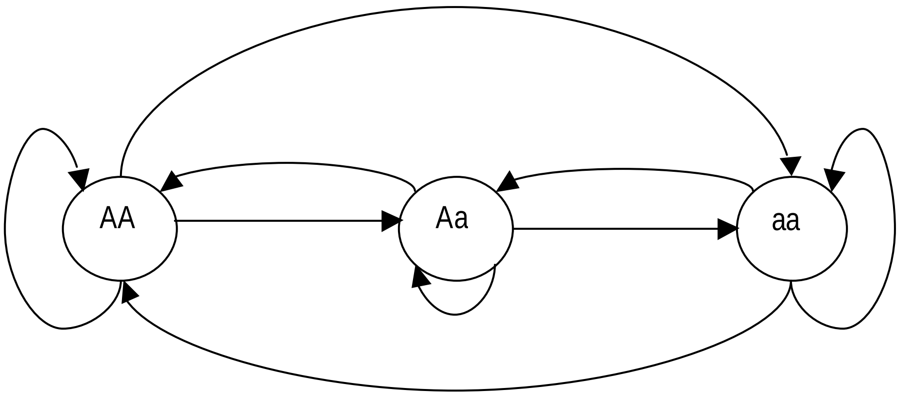
$$v(n) = \begin{pmatrix} f_{AA} \\ f_{Aa} \\ f_{aa} \end{pmatrix}$$

We willen de frequentie van de verschillende genotypen door de tijd heen in beeld brengen. Daartoe moeten we weten hoe de verhouding van genotypen in het nageslacht van de drie verschillend genotypen is na zelfbestuiving. We houden er geen rekening mee dat een allel kan muteren. Als een genotype AA zichzelf bestuift dan kan er alleen het genotypen AA uit ontstaan. Eenzelfde redenering geldt voor het genotype aa. Uit het genotype Aa daarentegen kunnen alledrie de genotypen in een bepaalde verhouding tot elkaar ontstaan.

Toeval en voorspelbaarheid

Nadat de genomen gehalveerd zijn in een reductiedeling kan in elke helft een A-allel of een a-allel zitten. Wanneer we aannemen dat de twee halvegenomen lukraak met elkaar versmelten dan kan er een AA-, een Aa-, een aA- of een aa-genotype ontstaan met dezelfde kans. We beschouwen Aa en aA echter als hetzelfde genotype en uit een Aa zelfbestuivingsproces komt dus met kans 0,25 een AA-, met kans 0,5 een Aa- en met kans 0,25 een aa-genotype.

a. Vul in onderstaande figuur de overgangskansen in en stel de overgangsmatrix D voor de freqenties van genotypen in de volgend generatie op.



b. Stel je begint met de genotypen AA,Aa en aa in een verhouding van 2:1:1. Wat is de verhouding dan na 1, 2, 10 en 20 generaties.

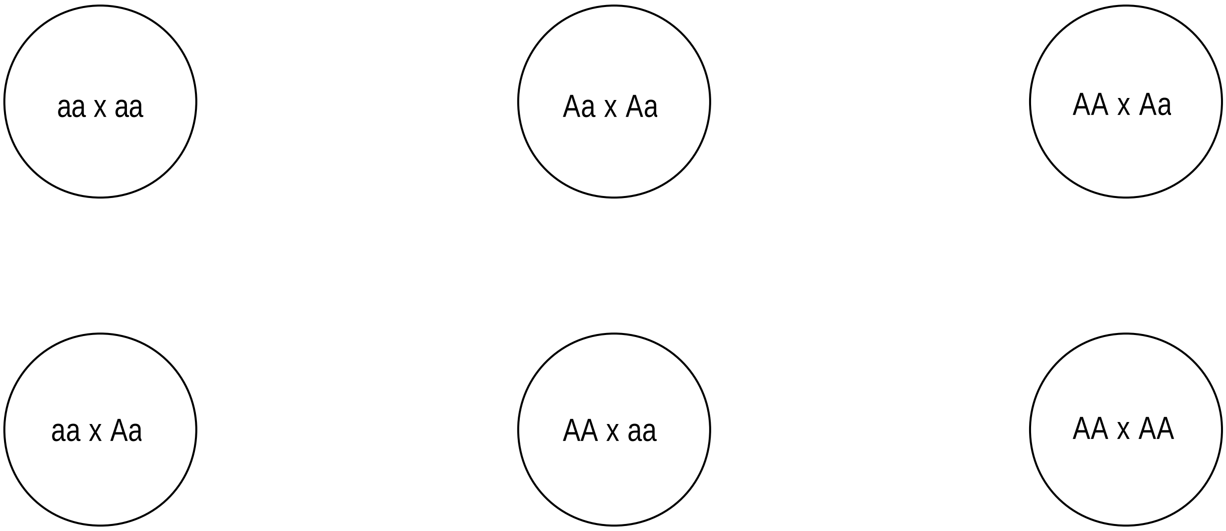
c. Wat gebeurt er op den duur in een populatie van zelfbestuivende planten? Begin eens met verschillende beginverhouding en bereken in ieder geval de verdeling na 30 generaties. Bv. beginverhoudingen 1:2:1, of 1:8:1 of 1:9:0

d. Wat is de biologische interpretatie van de uiteindelijke frequenties uit onderdeel c.? Met andere woorden: wat gebeurt er precies?

Suggesties voor projecten

Project 1 Voortgezette Broer-Zuster kruising.

Heel vaak wil men als proefdieren homozygote beesten gebruiken. De snelste manier om genetisch gezien eenvormig materiaal te verkrijgen is door in te telen via voortgezette broer-zuster kruising. We kijken weer naar slechts één plek op het genoom en gaan er vanuit dat het wat betreft genotype niet uitmaakt wie er het mannetje is en wie het vrouwtje in een bepaald kruisingspaar. Bijvoorbeeld in het paar AA x aa kan het mannetje aa of AA zijn dat maakt voor de combinaties in het nageslacht niet uit. We gaan nu het verloop van de 6 paarcombinaties (zie onderstaande figuur) in de tijd (per generatie) vervolgen. Wanneer we de beide genotypen (van mannetje en vrouwtje) weten dan kunnen we met de Mendelwetten (vraag biologiedocent(e) als dit niet bekend is) de kansen op de verschillende soorten paartjes in de volgende generatie berekenen.



Als voorbeeld geven we hier de moeilijkste combinatie uit een ouderpaar Aa x Aa wordt met kans 0,25 een AA kind geboren, met kans 0,5 een Aa kind en met kans 0,25 een aa kind. Als nakomelingen van een Aa x Aa paar weer met elkaar gekruist worden is de kans op de parencombinaties weergegeven in de onderstaande tabel.

Ouderpaar (Aa x Aa)	AA (kans 0,25)	Aa (kans 0,5)	aa (kans 0,25)
AA (kans 0,25)	AA x AA (kans 0,25 x 0,25)	Aa x AA (kans 0,5 x 0,25)	aa x AA (kans 0,25 x 0,25)
Aa (kans 0,5)	AA x Aa (kans 0,25 x 0,5)	Aa x Aa (kans 0,5 x 0,5)	aa x Aa (kans 0,25 x 0,5)
aa (kans 0,25)	AA x aa (kans 0,25 x 0,25)	Aa x aa (kans 0,5 x 0,25)	aa x aa (kans 0,25 x 0,25)

De kansen om elk van de 6 ouderpaarcombinaties te verkrijgen in een volgende generatie volgt door optelling van de kansen uit bovenstaand schema.

Door voor de overige 5 ouderpaarcombinaties eenzelfde berekening uit te voeren worden alle overgangskansen bekend. Deze kunnen met de overgangspijltjes in bovenstaand figuur ingevuld worden en er kan een 6 x 6 matrix worden opgesteld waarmee een beeld kan worden verkregen over de verdeling van de genotypen combinaties in broer-zuster paren onder voortgezette broer-zuster kruising.

Project 2:
Neem zelf een proces uit een of ander vakgebied en teken de figuur met overgangskansen en stel de bijbehorende matrix op.
Voorbeelden
1. vraag de biologieleraar om voorbeelden van een andere soort van genetische overerving
2. binnen de economie zijn voorbeelden van klantenbinding zoals in het eerste voorbeeld (opdracht 3) is aangekaart

Project 3: Vermenigvuldiging door deling.

In tegenstelling tot de aanname bij opdracht 5 nemen we nu een groeiende hoeveelheid cellen in een celkweek onder de loep: deze worden op eenzelfde manier als boven onderscheiden in twee ontwikkelingsfasen, de delende en niet-delende cellen. Op tijdstip t (in uren) is D(t) het aantal cellen dat bezig is met delen en N(t) het aantal cellen dat niet bezig is met delen. De verdeling van de cellen over de twee ontwikkelingsfasen verandert per uur volgens:

$$p(t+1) = Mp(t), \text{ met } p(t)=\begin{pmatrix} D(t) \\ N(t) \end{pmatrix} \text{ en } M=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ 1{,}0 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Op t = 0 is de verdeling $p(0)=\begin{pmatrix} 100 \\ 4000 \end{pmatrix}$.

Het zij opgemerkt dat de kolomsommen nu niet meer gelijk zijn aan 1. Het proces bevat nog wel een belangrijke stochastische (door toeval bepaalde) component. De volgende onderdelen dienen om de gedachte te bepalen. Je krijgt inzicht in het verloop van het proces.

a. Bereken het tijdsverloop (begin bijvoorbeeld met p(1) en p(2)).

b. Op tijdstip 0 begonnen we met een celkweek van in totaal 4100 cellen. Hoeveel cellen bevat de kweek na 12 uur? Aanwijzing: definieer om het totaal aantal cellen in de kweek op een gegeven tijdstip te bepalen een hulpvector $h:=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Wat is de verhouding tussen het aantal cellen op tijdstip t en op tijdstip t+1?

d. Bereken de verhouding tussen het totaal aantal cellen op tijdstip t=1 (namelijk (D(1)+N(1))/(D(0)+N(0))),en voor t= 2 en t= 3? Verandert er iets in deze verhouding?

e. Bereken de verhouding voor t=30 en t=31. Verandert er iets in deze verhouding?

f. Is de verhouding tussen het aantal delende en niet-delende cellen in het begin aan verandering onderhevig? (Kijk naar D(0)/(D(0)+N(0)), D(1)/(D(1)+N(1)) etc.)

g. Stabiliseert die verhouding tussen het aantal delende en niet-delende cellen na verloop van tijd? (Bekijk hiertoe de verhouding op een tijdstip later dan 30 uur)

Matrixberekeningen met de grafische rekenmachine

De aanwijzingen in het volgende stuk slaan op het gebruik van de grafische rekenmachine CASIO CPX-9850 GB plus.

Invoeren van matrices
Kies het MAT-menu (opties)
We gaan als voorbeeld de matrix van opdracht 1 invoeren:
Selecteer daartoe Mat A en type voor het aantal rijen (3) en kolommen (3):
We gaan als voorbeeld de matrix van opdracht 1 invoeren:
Selecteer daartoe Mat A en type voor het aantal rijen (3) en kolommen (3):

3 [EXE] 3 [EXE]

Nu kun je achtereenvolgens de elementen van de matrix A invullen; de elementen worden gescheiden met de toets:

[EXE]

De volgorde van de elementen is: begin met het matrix-element in te voeren dat linksboven in de hoek staat. Eerst worden zo alle elementen van de bovenste rij ingevoerd en vervolgens de tweede rij (te beginnen met het meest linkse element) en zo verder. Kies nadat je alle matrix-elementen hebt ingevoerd de toets:

[EXIT]

Selecteer vervolgens Mat P en type

3 [EXE] 1 [EXE]

Vul de elementen van vector P(0) in en kies ter afsluiting

[EXIT]

Selecteer vervolgens Mat E en type

1 [EXE] 3 [EXE]

De rijvector E krijgt waarde 1 voor elk element; kies e [EXIT] naar het hoofdmenu.

Het vermenigvuldigen van matrices
Het vermenigvuldigen van matrices gebeurt in het [RUN] menu (optie 1). Kies [OPTN] en vervolgens [MAT]

Toeval en voorspelbaarheid

Mat ALPHA Mat ALPHA EXE

Kies A P

Maak het scherm leeg met AC

Kies Mat ALPHA A^2 Mat ALPHA P EXE

Maak het scherm weer leeg.

Kies Mat ALPHA E Mat ALPHA A^10 Mat ALPHA P EXE

Je kunt het gevonden resultaat intypen en via → ALPHA slaan.