HET RELATIVITEITSBEGINSEL [1])

DOOR

M. J. VAN UVEN

I. INLEIDING.

De natuurkunde heeft ons sedert haar bestaan als zelfstandige wetenschap telkens verrassingen bereid. Elke nieuwe theorie, die samenhang bracht tusschen tevoren gescheiden gebieden van ons natuurkennen, werkte eenigszins verbijsterend door de ongedwongenheid waarmee ze vastgewortelde opvattingen aanrandde; ze bracht den een in verrukking, vervulde den ander met afgrijzen, wekte bij een derde hilariteit op, al naar gelang van hun ontvankelijkheid voor nieuwe denkbeelden. Om ons te bepalen bij de laatste eeuw, hoe hebben de theorieën: dat electriciteit en magnetisme uit één natuurkracht voortspruiten, dat warmte een vorm is van arbeidsvermogen van beweging, dat het licht een electromagnetisch verschijnsel is, dat de electriciteit atomistisch verdeeld is, dat zelfs het arbeidsvermogen slechts bij afgepaste porties overgedragen wordt, — hoe hebben al deze theorieën ons beeld van de natuurverschijnselen geleidelijk maar grondig gewijzigd!

Toch kan men niet zeggen, dat de natuurkunde sedert GALILEI (± 1600) en NEWTON (± 1700) op de denkgewoonten van haar beoefenaars buitensporige aanslagen deed; de wijsgeerige grondbegrippen werden vrijwel onaangetast gelaten; aan de intuïtieve voorstellingen werd geen noemenswaard geweld aangedaan.

Hoe moet het ons dan wel te moede zijn tegenover een theorie, die onze dierbaarste overtuigingen doet wankelen,

[1]) Dit opstel is, op enkele aanvullingen na, het verslag van een tweetal voordrachten door den schrijver gehouden voor het Natuurwetenschappelijk Gezelschap te Wageningen op 15 en 23 Oct. 1917.

die van ons het offer eischt, dat we onze zekerste wijsgeerige geloofswaarden prijsgeven! Zulk een natuurbeschouwing zullen we voorzeker, hoe gaarne we ook bereid zijn ons inzicht te verruimen, met groote terughouding gewapend tegemoet treden. Maar onze houding tegenover zulk een theorie zal niet alleen het kenmerk dragen van een zekere nuchtere kritiek, ze zal ook getuigen van geestdriftige belangstelling voor een natuurwetenschappelijk kunstwerk; en die belangstelling zal, zoodra we ons opgeheven gevoelen naar de gedachtensfeer, waarin die kunstschepping het aanzijn kreeg, geleidelijk overgaan in bewonderend begrijpen.

Van zulk een wetenschappelijk-hooge geboorte nu is de leer van de *relativiteit der bewegingen*, waarmee sedert korten tijd (1915) Albert Einstein de natuurwetenschap heeft verrijkt en die zulk een vermetelen aanslag heeft gepleegd niet alleen op de natuurkundige maar ook op de wijsgeerige gronddenkbeelden der meeste natuuronderzoekers, dat het zeker niet gewaagd is, in navolging van Planck, haar te vergelijken met de scheppingsdaad van Copernicus, die, met minachting van de toenmalige theologisch-wijsgeerige dogma's, het ingewikkelde wereldstelsel van Ptolemaeus ontwarde tot ons zonnestelsel.

Het spreekt vanzelf, dat een theorie, die zoo diep in de intuïtieve voorstellingen grijpt en daarenboven zich van de meest abstracte wiskundige beelden bedient, zich niet bijzonder leent tot een lichtbevattelijke behandeling. Van den hoorder of lezer wordt verlangd, dat hij de operatieve verwijdering van enkele hinderlijke vergroeiingen in zijn geestesorgaan als een opluchting ondervindt, terwijl hij zich eigenlijk in 't geheel niet onwel voelde en aan genezing niet de minste behoefte had. Bovendien zal het wiskundig betoog, dat, om tot een iets meer dan oppervlakkig inzicht te geraken, helaas onvermijdelijk is, menigmaal een beroep moeten doen op het — gelukkig zelden ontbrekend — gevoel voor analogie, zoowel in algebraïschen als in meetkundigen zin. Moge niettemin de volgende uiteenzetting een zij 't ook ruwe schets geven van de wijze, waarop de theorie wiskundig is verwerkt.

De leer van de relativiteit der bewegingen is in twee tempo's ontworpen. In 1905 kwam EINSTEIN te voorschijn met een relativiteitsbeginsel, dat in zekeren zin kon beschouwd worden als sluitstuk van de onderzoekingen van onzen landgenoot Prof. H. A. LORENTZ over de electromagnetische verschijnselen in zich bewegende lichamen. In 1915 gaf EINSTEIN van deze eerste theorie een uitbreiding, die haar tot den hoogsten graad van algemeenheid opvoerde. Vandaar dat men, in tegenstelling met het *algemeen relativiteitsbeginsel* van 1915, de in 1905 verschenen theorie aanduidt met den naam: *bijzonder relativiteitsbeginsel.*

We zullen eerst het bijzondere relativiteitsbeginsel bespreken; deze theorie vormt, in overeenstemming met de historische lijn, de natuurlijke en onontbeerlijke inleiding tot het algemeene relativiteitsbeginsel.

De beide relativiteitsbeginsels spreken van de betrekkelijkheid der beweging. Wat hebben we onder deze betrekkelijkheid der beweging te verstaan?

Een beweging of plaatsverandering kan eerst dan volledig omschreven worden, als men opgeeft *ten opzichte van welke omgeving* de verandering van plaats beschouwd wordt. Een beweging zou alleen dan absoluut kunnen genoemd worden, wanneer er een ruimtelijke omgeving bestond, waarvan het ongerijmd ware te onderstellen dat ze zich beweegt. Zulk een ruimtelijke omgeving nu is logisch onbestaanbaar. Niemand kan op logische gronden bewijzen, dat een persoon, die zichzelf in rust beschouwt, inderdaad in rust verkeert of integendeel zich beweegt. Het eenige wat van hem gezegd kan worden is dat hij rust of zich beweegt t.o. van een zekere stoffelijke omgeving; maar de persoon zelf heeft het volste recht deze omgeving als stilstaand te beschouwen of haar zulk een beweging toe te kennen, dat hij zelf in rust is. Een absolute, objectieve beweging is dus ondenkbaar, d.w.z. logisch onmogelijk. In logischen zin is alle beweging betrekkelijk, d.w.z. eerst bepaald zoodra de omgeving wordt aangegeven t.o. waarvan de beweging plaats heeft.

Hoewel nu ons denkvermogen zich tegen de volstrektheid der bewegingen verzet, heeft toch de natuurkunde tot voor zeer korten tijd geleerd, dat de meeste bewegingen een zekere mate van objectiviteit hadden, dat m. a. w. de waarnemingen ons een omgeving aanwezen, waaraan een bijzonder bevoorrechte plaats toekwam, in dien zin, dat de natuurwetten een opvallend eenvoudige uitdrukking kregen, wanneer die omgeving in rust of hoogstens in een eenparig-rechtlijnige beweging werd gedacht. Deze omgeving viel, zoo nauwkeurig als de waarnemingen dat konden aantoonen, samen met de omgeving zooals die gevormd wordt door het geheel van de voor ons zichtbare vaste sterren. De gedaante der natuurwetten zou, als men de rust (of de eenparig-rechtlijnige beweging) van het sterrenstelsel opgaf, zóoveel ingewikkelder, om niet te zeggen: zóo totaal onbruikbaar worden, dat men aan dien bijzonderen bewegingstoestand van het sterrenstelsel een wezenlijk, een absoluut karakter ging toekennen, niettegenstaande wij ons geen enkele beweging anders dan relatief kunnen denken.

Het is nu aan Einstein gelukt aan te toonen, dat de bevoorrechting van het sterrenstelsel (later van den aether) en de daarmee samenhangende bijzondere vorm der natuurwetten berustten op een vooroordeel in onze natuurbeschouwing. Door dit vooroordeel te overwinnen heeft Einstein niet alleen het sterrenstelsel en den aether onttroond en zoo de natuurbeschrijving in overeenstemming gebracht met de a-prioristische wetten van ons denken, maar tevens de wijsgeerige grondslagen van ons natuurkennen van een *natuurkundig* standpunt uit belicht en ons opnieuw getoond, dat de wijsbegeerte en de natuurkunde niet elkaars vijanden zijn, maar integendeel elkaars bondgenooten in de jacht naar natuurkennis.

II. HET RELATIVITEITSBEGINSEL DER KLASSIEKE MECHANICA.

Om een denkbeeld te krijgen van de draagwijdte der relativiteitstheorie zullen we in 't kort aangeven hoe de voorstellingen aangaande den aard der beweging zich in den loop der eeuwen hebben ontwikkeld.

We beginnen daartoe met hetgeen Aristoteles (384—322 v. Chr.) omtrent de beweging leerde.

Volgens Aristoteles staat de aarde stil; binnen deze stilstaande aarde ligt het middelpunt der wereld. Alle voorwerpen of lichamen hebben hun plaats van bestemming, de zware beneden (d. i. zoo dicht mogelijk bij het middelpunt der wereld), de lichte (bijv. de dampen) boven. Elk lichaam tracht door een „natuurlijke" beweging zijn plaats van bestemming te bereiken. De zware voorwerpen doen dit door te „vallen". Slechts door een „kunstmatige" beweging (bijv. een worp) kunnen de lichamen van hun plaats van bestemming verwijderd worden.

Bij ARISTOTELES wordt *alle beweging geconstateerd t. o. van de vaste, rustende aarde.*

De natuurlijke beweging der aardsche lichamen is *rechtlijnig* (de zware voorwerpen vallen *recht* naar beneden). Daarentegen volbrengen de eeuwige hemellichamen van nature de eindelooze, onvergankelijke, steeds gelijkmatige cirkelbeweging om het middelpunt der wereld.

Elke beweging, *ook de gelijkmatige*, eischt — als *verandering van plaats* — een *oorzaak*, hetzij deze oorzaak in de „natuur" der dingen ligt, zooals bij de natuurlijke beweging, hetzij ze kunstmatig is, zooals bijv. bij een wagen, die om met gelijkmatige snelheid voort te gaan voortdurend getrokken of geduwd moet worden. Alleen de rust, d. w. z. de rust t. o. van de aarde, behoeft geen oorzaak.

Wie onbevangen deze „bewegingsleer" beoordeelt en er rekening mee houdt, dat ten tijde van ARISTOTELES nog geen natuurkundige proeven genomen werden ten einde aan de natuur concrete vragen te stellen, zal moeilijk kunnen ontkomen aan een gevoel van bewondering voor een zóo eenvoudige en zóo harmonieuze natuurverklaring. Het behoeft ons dan ook geenszins te verbazen, dat het wereldbeeld van ARISTOTELES bijna twintig eeuwen lang voor het eenig ware heeft gegolden, althans bij de groote massa der „geleerden", die liever a priori, met de oogen dicht, uit hun theologische bespiegelingen een wereldschema samenstelden, waaraan de stoffelijke werkelijkheid zich maar moest aanpassen, dan hun handen, ja zelfs hun geest te verontreinigen door aanraking met het vuile stof en deszelfs minderwaardige eigenschappen.

Met des te meer eerbied worden we vervuld jegens de mannen, die zich aan het hardnekkige vooroordeel tegen proefondervindelijk onderzoek wisten te ontworstelen. Met voorbijgaan zelfs van LEONARDO DA VINCI (1452—1519) en COPERNICUS (1473—1543), zullen we het eerst stilstaan bij

Galileo Galilei (1564—1642), die het eerst de wetten der valbeweging stelselmatig uit opzettelijk daartoe ingerichte proeven afleidde en zoo den grondslag legde van een bewegingsleer in den strengen zin, dien wij eraan hechten.

Galilei nam waar, dat de valsnelheid in vertikale richting in gelijke tijdsintervallen met gelijke bedragen toeneemt, dat m. a. w. de *versnelling* (d. i. de snelheidsvermeerdering per tijdseenheid) constant is, of, in onze uitdrukkingswijze: dat de valbeweging eenparig versneld is. Verder merkte Galilei op, dat de beweging langs een hellend vlak gelijksoortig is met die van den vrijen val, dat n.l. alleen het bedrag van de versnelling kleiner is, en wel des te geringer, naarmate het hellend vlak een kleineren hoek maakt met het horizontale vlak. Uit de wijze, waarop de versnelling met dezen hoek afneemt, besloot Galilei, dat bij de beweging in een horizontaal vlak (waarbij deze hoek nul is) de versnelling nul is, dat m. a. w. de snelheid niet veranderd wordt, dus een standvastige waarde behoudt.

Volgens Galilei was dus het kenmerkende der valbeweging niet de snelheid maar de versnelling, en deze *versnelling* moest een oorzaak hebben, moest te danken zijn aan een kracht vergelijkbaar met de trekkracht, die wij zelf met onze spieren kunnen uitoefenen. Bij afwezigheid van een kracht verdwijnt niet de snelheid maar de versnelling, d.i. de verandering in snelheid, hetzij in grootte, hetzij in richting, hetzij in beide. Zoodoende werd door Galilei onder alle bewegingsvormen één bijzondere uitverkoren, voor welker instandhouding geen kracht vereischt werd, n.l. de *eenparig-rechtlijnige beweging*. F

[Is dan wel absoluut genomen eenige geen beweging & vraagt dan niet noodzakelijk om een versnelling. Daarentegen verandering om een versnelling vraagt.

Uit het hier medegedeelde blijkt, hoezeer het standpunt van Galilei afweek van dat van Aristoteles, die voor *alle* bewegingen, óók voor de eenparig-rechtlijnige, een oorzaak noodig oordeelde. F

F Vergelijken we echter betrekkelijk rust of betrekkelijk eenparige beweging dan is of van de een of van de ander een versnelling noodig.

Dat een lichaam, waarop geen kracht werkt, volhardt in den toestand van rust of eenparig-rechtlijnige beweging waarin het zich eenmaal bevindt, wordt uitgedrukt in de wet der z.g. *traagheid* (d.i. weerzin tegen verandering van bewegingstoestand). Deze wet is, hoewel het beginsel ervan rechtstreeks uit de proeven van Galilei volgde, voor het eerst duidelijk geformuleerd door onzen landgenoot Christiaan Huygens (1629—1695). De wet der traagheid was verder een van de grondbeginselen van de bewegingsleer van ISAAC NEWTON (1642—1727).

We willen nu nagaan welk een invloed de wet van de traagheid heeft op de natuurwetten. De natuurwetten geven aan hoe de tusschen verschillende lichamen werkende natuurkrachten afhangen van den onderlingen stand der lichamen. Hierbij worden voorloopig de electromagnetische krachten (om een later te vermelden reden) buiten spel gelaten, zoodat we alleen de z.g. „mechanische" natuurwetten in onze beschouwing opnemen.

Terwille van den eenvoud der voorstelling zullen we onze „natuur" beperken tot een zekere rechte lijn AB, tusschen welker punten al of niet krachten werkzaam zijn.

Het punt P (zie fig. 1) moge zich (onder den invloed van een standvastige kracht) met een eenparig versnelde beweging langs AB bewegen; zijn aanvangssnelheid (snelheid op den tijd $t = 0$ sec.) zij 10 M. p. sec., de versnelling, d.i. de snelheidstoename per seconde, zij 1 M. p. sec.

FIG. 1.

De snelheid en de versnelling worden positief gerekend in de richting van A naar B.

Het punt Q blijve in rust.

Het punt R bewege zich met een eenparige snelheid van 5 M. p. sec. naar Q toe; de snelheid van R bedraagt dus voortdurend —5 M. p. sec.

Het punt S neme deel aan een eenparig versnelde beweging. Zijn aanvangssnelheid zij 20 M. p. sec. in de richting van Q; deze moge afnemen met 3 M. p. sec.; d.w.z. zijn snelheid op den tijd $t = 0$ is —20 M. p. sec., en de versnelling, die een verzwakking van deze negatieve snelheid bewerkt, bedraagt + 3 M. p. sec.

Men vindt dan op den tijd:	0 sec.	1 sec.	2 sec.	3 sec.	
voor de snelheid van P t.o. van Q	10	11	12	13	M. p. sec.
„ „ „ „ R „ „ Q	—5	—5	—5	—5	„ „ „
„ „ „ „ S „ „ Q	—20	—17	—14	—11	„ „ „
dus „ „ „ „ P „ „ R	15	16	17	18	„ „ „
„ „ „ „ P „ „ S	30	28	26	24	„ „ „

De versnelling van P t.o. van R is dus 1 M. p. sec., die van P t.o. van S' daarentegen —2 M. p. sec. (een vertraging van 2 M. p. sec.).

Hieruit blijkt, dat de versnelling van P t.o. van het zich met eenparige snelheid bewegende punt R *even groot* is als t.o. van het rustende punt Q, daarentegen verschillend van de versnelling t.o. van het „versnelde" punt S.

Wordt nu uitsluitend de versnelling van P aangegeven, dan kan men niet zeggen of het punt, t.o. waarvan de versnelling is geconstateerd, in rust is dan wel in een eenparig-rechtlijnige beweging. Men kan dus aan de geheele lijn een eenparige snelheid (bijv. die van R) meedeelen, zonder dat de versnelling van P er door gewijzigd wordt; daarentegen zou een *versnelde* beweging van de geheele lijn (bijv. met S mee) wel degelijk de versnelling van P doen veranderen. Uit de opgave van alle op de lijn AB voorkomende *versnellingen* kan men nooit te weten komen of de geheele lijn zich misschien met een eenparige snelheid beweegt. Geeft men aan de geheele lijn, d.i. aan al haar punten dezelfde eenparige snelheid boven degene die ze eventueel reeds hebben, dan behouden alle punten hun oude versnellingen.

Evenmin veranderen door die aangebrachte snelheid hun onderlinge afstanden. Nu zijn de versnellingen in de lijnvormige wereld AB te danken aan krachten, die door 't eene punt van AB op 't andere worden uitgeoefend; en het bedrag van die krachten, dus ook van die versnellingen, hangt bij mechanische, d.z. niet-electromagnetische verschijnselen uitsluitend af van de onderlinge ligging der op elkaar werkende punten. De aard van deze afhankelijkheid, de wijze waarop de krachten afhangen van de onderlinge afstanden, wordt uitgedrukt door een mechanische „natuurwet" (men denke bijv. aan de aantrekkingswet van Newton, waar de aantrekkende kracht omgekeerd evenredig is met het kwadraat van den afstand, of aan de wet der elasticiteit, volgens welke de kracht waarmee een veer teruggetrokken wordt evenredig is met de uitwijking uit den evenwichtsstand). Daar nu de beide bestanddeelen van de natuurwet: de kracht en de onderlinge ligging, onveranderd blijven bij het aanbrengen van een eenparige snelheid, zal ook de samenhang tusschen krachten en liggingen door die eenparige snelheid onaangetast blijven, of: zullen de natuurwetten ondanks de aan de *geheele* lijn meegedeelde *eenparige* snelheid hun vorm behouden. *Maar dan kunnen de natuurwetten ons ook nooit uitsluitsel geven aangaande een eventueele eenparige snelheid, waaraan het beschouwde puntenstelsel als geheel deelneemt!*

Wat hier voor een „lijnvormige wereld" is besproken, is evenzeer van kracht voor onze ervaringswereld in drie ruimteafmetingen: Geldt een bepaalde gedaante der natuurwetten t.o. van een zekere omgeving, bijv. t.o. van het sterrenstelsel, dan geldt ze in gelijke mate t.o. van een andere omgeving, die t.o. van de eerste een eenparig-rechtlijnige beweging heeft. Deze uitspraak vormt den inhoud van het *relativiteitsbeginsel der klassieke mechanica*. Volgens de klassieke werktuigkunde met haar „mechanische natuurwetten" (waarvan Newton de grondslagen heeft gelegd) is dus niet eens die omgeving, t.o. waarvan de natuurwetten hun eenvoudigste gedaante krijgen, ondubbelzinnig bepaald; deze is slechts bepaald op een eenparige snelheid na. De klassieke mechanica kent derhalve geen absolute ruimte, waarvan de rusttoestand vaststaat. De absolute rust van het sterrenstelsel als geheel bijv. wordt door geen enkele mechanische natuurwet bewezen of zelfs aannemelijk gemaakt.

Daarentegen veranderen de natuurwetten wèl, wanneer men aan de omgeving t.o. waarvan die wetten opgesteld zijn, een versnelling meedeelt, dus een verandering van de snelheid, hetzij in grootte, hetzij in richting, hetzij in beide. Men kan bijv. van een draaiende ruimte (bijv. een draaimolen) *niet* met hetzelfde recht beweren, dat ze stilstaat, aangezien bij de draaiende beweging de snelheid telkens van richting verandert; terwijl hier de *onderlinge* ligging der punten dezelfde blijft, geven de versnellingen aanleiding tot traagheidsweerstanden (de z.g. middelpuntvliedende kracht), die het draaiende stelsel in wezen doen verschillen van het rustende. In de klassieke mechanica zijn de *snelheden relatief*, maar de *versnellingen absoluut*.

Voordat we overgaan tot de niet-mechanische natuurwetten, zullen we een *grafische voorstelling* ontwerpen van het overgaan van een bepaalde omgeving op een andere, die t.o. van de eerste een eenparig-rechtlijnige beweging heeft, en dus — in den zin der klassieke mechanica — ermee gelijkwaardig is.

Bij de wiskundige inkleeding der natuurwetten wordt de plaats van een punt veelal aangegeven door de afstanden van dat punt tot drie onderling loodrechte vlakken (bijv. wanden van een vertrek); deze afstanden heeten de (rechthoekige) „coördinaten" van het punt. Beperkt men zich tot een plat vlak, dan wordt de ligging van een punt aangewezen door de afstanden tot twee (meestal onderling loodrechte) lijnen. Ook hier spreekt men van de coördinaten van het punt; de eene heet de „abscis" (letterlijk: afgesneden lijnstuk), de andere de „ordinaat". Beschouwt men slechts de punten van een enkele lijn, dan wordt de plaats van een punt op die lijn aangewezen door den afstand van het punt tot een aangenomen nulpunt, welke afstand ook hier abscis heet.

Terwille van den eenvoud der voorstelling zullen we onze wereld niet verder uitstrekken dan tot een zekere (onbegrensd gedachte) rechte lijn, waarop alle punten hun resp. abscissen hebben. We zullen zulk een abscis voorstellen door x.

De natuurkrachten, die tusschen de verschillende punten werken, zullen de plaats dier punten telkens wijzigen, zoodat de volledige kennis van onze lijnvormige ruimtewereld eerst bereikt is, als we den toestand van de lijn *op elk oogenblik* kennen. We kunnen de heele geschiedenis van dit „lijnland" in beeld brengen door alle „momentopnamen" van de — bijv. vertikaal gedachte — lijn naast elkaar te plaatsen en zoodoende een „wereldfilm" te construeeren. Wanneer we de voorzorg nemen, dat momentopnamen die met gelijke tijdstusschenruimten zijn genomen op onderling gelijken (horizontalen) afstand naast elkaar gerangschikt worden, dan krijgen we in het vlak een figuur, waarvan de horizontale afmeting een beeld geeft van den tijd (dien we aanduiden met t). We nemen voorloopig aan, dat alle beelden van het (in rust blijvende) nulpunt O zich bevinden op de (horizontale) loodlijn, die we in O_0 op de beginopname l_0 van de lijn kunnen oprichten (zie fig. 2).

Voor deze (horizontale) loodlijn is dan voortdurend $x = 0$ (daar de afstand van het nulpunt O tot zichzelf natuurlijk nul is). Nu zal de horizontale lijn P_0P_1 de geschiedenis afbeelden van het punt P, dat voortdurend denzelfden afstand OP ($= O_0P_0 = O_1P_1$) tot het nulpunt bewaart; is die afstand bijv. 2 lengte-eenheden (bijv. 2 c.M. of 2 K.M.), dan geldt voor deze geheele lijn $P_0P_1 \ldots x = 2$.

De beginopname (of begintoestand) O_0P_0 van ons lijnland moge correspondeeren met den tijd $t = 0$. Stelt dan bijv. O_1P_1 de opname (toestand) vóór na 3 tijdseenheden (bijv. 3 sec. of 3 jaren), dan geldt voor de heele lijn $O_1P_1 \ldots t = 3$.

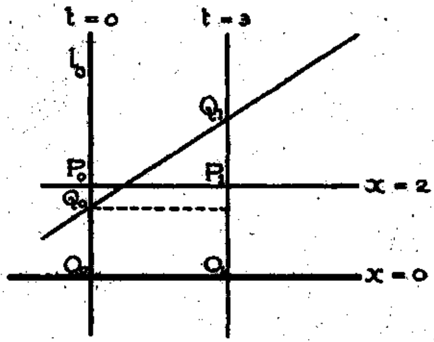

FIG. 2.

Beweegt een punt Q zich met *standvastige* snelheid langs de lijn-wereld, dus zóo, dat in gelijke tijden gelijke wegen worden doorloopen, en zijn afstand x tot O dus regelmatig met den tijd toeneemt (of afneemt), dan zal de geschiedenis van dat punt Q afgebeeld worden door een meetkundige plaats van punten, waarvoor de toename van x evenredig is met de toename van t. Deze meetkundige plaats is blijkbaar een *rechte lijn* en het is duidelijk dat de verhouding van de aangroeiingen van x en t d. i. de *snelheid* van die eenparige beweging, wordt gemeten door de z.g. richtingstangens van de lijn Q_0Q_1, d. i. de tangens van den hoek, dien Q_0Q_1 maakt met O_0O_1. Bij snelheden in de richting van O naar P is deze hoek scherp, bij tegengesteld gerichte snelheden is hij stomp.

In 't algemeen zal van elk punt van onze lijnvormige ruimte de bewegingstoestand afgebeeld worden door een meetkundige plaats in ons lengte-tijd-vlak (x,t-vlak). Van punten die standvastige snelheid hebben is die meetkundige plaats een *rechte* lijn, van de punten, die een veranderlijke snelheid hebben zal die meetkundige plaats een *kromme* lijn zijn. In navolging van HERMANN MINKOWSKI (1864—1909) zullen we in 't algemeen deze meetkundige plaats de *wereldlijn* van het punt noemen.

We kunnen ons nu als volgt uitdrukken: Punten met standvastige snelheid hebben rechte wereldlijnen; van punten met veranderlijke snelheid zijn de wereldlijnen kromme lijnen. Rustende punten hebben hun (rechte) wereldlijnen evenwijdig met O_0O_1. Men zou deze lijnen dus ook *rustlijnen* kunnen noemen. De lijnen loodrecht op de rustlijnen kunnen gevoeglijk *gelijktijdigheidslijnen* heeten; men kan ze, als men wil, beschouwen als de wereldlijnen van punten, die zich met oneindige snelheid bewegen.

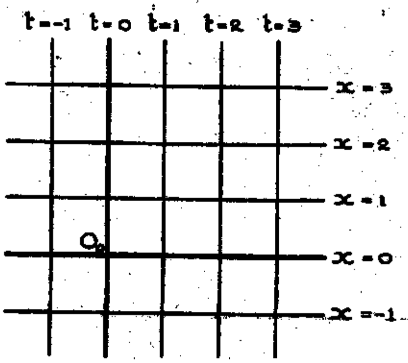

FIG. 3.

Voor de natuurbeschrijving t.o. van zekere omgeving — dat wil hier zeggen: t.o. van zeker als *rustend* aangenomen nulpunt O — is 't dus voldoende, dat men van elke gebeurtenis kan aangeven, hoe groot de bij die gebeurtenis behoorende waarden van x en t zijn, dat men m. a. w. in staat is van elke gebeurtenis het *beeldpunt* („wereldpunt" van Minkowski) te construeeren in het rechthoekig netwerk der rustlijnen en gelijktijdigheidslijnen (zie fig. 3).

Thans gaan we ons voorstellen, dat de geheele lijnvormige ruimte een eenparige snelheid v krijgt t.o. van haar vroegeren stand. Deze beweging zal men afbeelden door van alle punten van de beginopname l_0, d. i. van de gelijktijdigheidslijn $t = 0$, onderling evenwijdige wereldlijnen te laten uitgaan met (gemeenschappelijke) richtingstangens v, dus evenwijdig met de lijn door O_0 waarvoor geldt $x = v.t$ (fig. 4). Hoe zal nu de „natuurbeschrijving" luiden van het standpunt van een waarnemer, die aan dezelfde eenparige beweging deelneemt?

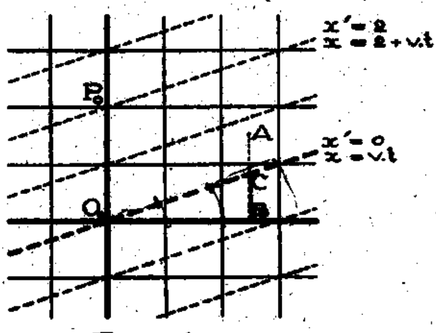

FIG. 4.

De wereldlijnen evenwijdig aan $x = vt$ zullen voor hem *rustlijnen* zijn. Wanneer hij zijn abscissen x' afrekent van het punt, dat op den tijd $t = 0$ met O_0 samenviel en dus de wereldlijn $x = v.t$ heeft, dan zal hij deze wereldlijn aanduiden door $x' = 0$. En de wereldlijn, die door 't punt P_0 ($x = 2$, $t = 0$) gaat en waaraan de stilstaande waarnemer de vergelijking $x = 2 + vt$ toekent, zal voor den meebewegenden waarnemer heeten $x' = 2$.

De rustlijnen van den eenen waarnemer zijn dus geen rustlijnen voor den ander. Daarentegen zullen beide waarnemers er wèl dezelfde gelijktijdigheidslijnen op na houden.

Wanneer slechts eenmaal ervoor gezorgd is dat het oogenblik, dat de stilstaande waarnemer $t = 0$ noemde, ook door den bewegenden waarnemer — wiens tijd t' moge heeten — aangeduid wordt door $t' = 0$, en ook dat het tempo van den tijd voor beide gelijk is (dat de klokken denzelfden gang hebben), dan is bovendien steeds voldaan aan de gelijkheid $t' = t$.

Een willekeurige gebeurtenis, met beeldpunt A, die door den stilstaanden waarnemer door de getallen x, t wordt beschreven, wordt door den bewegenden waarnemer aangeduid met de getallen x', t'.

Daar $t = O_0B$, $x = AB$; $CB = v \times O_0B = v \times t$, $AC = x'$, volgen uit $AC = AB - CB$ en uit het gelijkblijven van den tijd de betrekkingen

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - v.t \\ t' = t \end{array} \right. \quad \text{of} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' + v.t' \\ t = t' \end{array} \right. \qquad \text{(I)}$$

Hiermee is aangegeven door welke „transformatie van coördinaten" men overgaat van het stelsel (x,t) op het stelsel (x', t') of vice versa, wanneer men bij zijn beschrijving van de lijnvormige wereld in lengte en tijd zijn waarnemingsstandpunt in een eenparige beweging laat deelen. De genoemde transformatieformules zijn afgeleid in de onderstelling, dat de gebeurtenis $x = 0$, $t = 0$ ook in 't andere stelsel $x' = 0$, $t' = 0$ heet, terwijl bovendien stilzwijgend is aangenomen, dat de eenheden van lengte en tijd door den beschouwden overgang niet gewijzigd worden.

Nu kunnen we over de lengte- en tijdcoördinaten niet altijd zóó beschikken dat $x = 0$, $t = 0$ samengaat met $x' = 0$, $t' = 0$. Wanneer echter eenzelfde gebeurtenis G_0 in 't eene stelsel door x_0, t_0, in 't andere door x_0', t_0' wordt weergegeven en een willekeurige andere gebeurtenis G door x, t resp. x', t', dan zullen voor de *verschillen* $X = x - x_0$ en $T = t - t_0$ resp. $X' = x' - x_0'$ en $T' = t' - t_0'$ dezelfde formules gelden, die hierboven voor x en t, x' en t' zijn afgeleid; immers deze vier verschillen verdwijnen alle tegelijk — $X = 0$, $T = 0$; $X' = 0$, $T' = 0$ — wanneer we G met G_0 laten samenvallen.

Terwijl onder de beperkende voorwaarde $(x = 0, t = 0) =$

$=(x' = 0,\ t' = 0)$ de tijd t zelf onveranderlijk bleef, zal in het algemeene geval dat *wel* het *tempo* maar *niet* het *nulpunt* van den tijd behouden blijft, de uitdrukking $T = t - t_0$ in de analoge gedaante $T' = t' - t_0'$ overgaan.

In het algemeen kunnen we dus zeggen, dat onze transformatieformules feitelijk betrekking hebben op *verschillen* van gelijknamige coördinaten. In de wiskunde zijn zulke formules van bijzonder belang, wanneer die verschillen oneindig klein zijn. Men vergelijkt dan twee gebeurtenissen, die zoowel in plaats als in tijd oneindig dicht bij elkaar liggen; men beschouwt als het ware een oneindig kleine (elementaire) toestandsverandering. Zulke oneindig kleine aangroeiingen („differentialen") worden aangeduid door het voorvoegsel d; zoo schrijft men in ons geval

$$x - x_0 = dx,\ t - t_0 = dt;\ x' - x_0' = dx',\ t' - t_0' = dt'.$$

Het voorvoegsel d is onafscheidelijk van de letter waarvoor het geplaatst is en mag vooral niet als factor behandeld worden! In plaats van $(dx)^2$ mag men dan ook schrijven dx^2, enz.

In deze nieuwe schrijfwijze heeft men dus

$$\begin{cases} dx' = dx - v.dt \\ dt' = dt \end{cases} \text{of} \begin{cases} dx = dx' + v.dt' \\ dt = dt', \end{cases} \tag{Ia}$$

waarvan in 't bijzonder de betrekking

$$dt = dt'. \tag{Ib}$$

uitdrukt, dat het tempo, waarin de tijd verloopt, voor de transformatie ongevoelig is. Uit (Ia) volgt nog

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v.$$

Nu is $\frac{dx}{dt}$, als quotient van een weg (dx) gedeeld door den voor het afleggen van dien weg benoodigden tijd (dt) gelijk aan de snelheid u, waarmee een punt zich in de lijnvormige ruimtewereld verplaatst, welke snelheid gemeten is in het stelsel (x,t) dat in rust verkeert. Deze zelfde snelheid $u = \frac{dx}{dt}$ wordt echter voor een waarnemer, die aan de eenparige beweging (met snelheid v) van het stelsel (x', t') deelneemt, beschreven door het quotient $\frac{dx'}{dt'} = u'$. Tusschen de snelheden u en u' bestaat dus de betrekking

$$u' = u - v \text{ of } u = u' + v, \tag{Ic}$$

welke den regel aangeeft, volgens welke in de klassieke mechanica de snelheden langs een rechte lijn worden samengesteld.

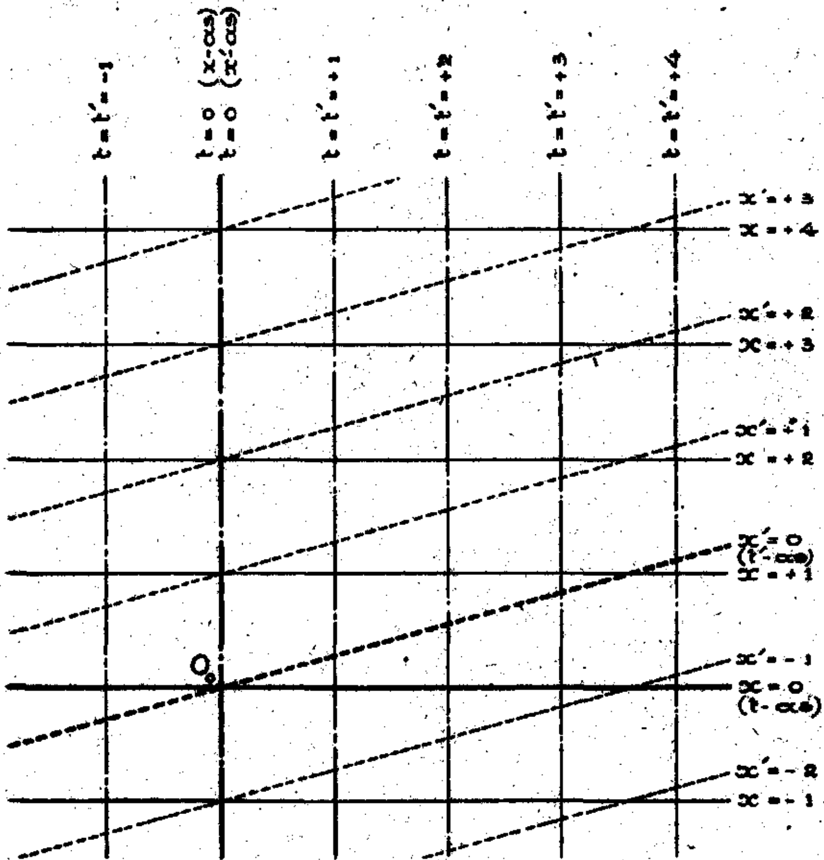

FIG. 5.

KLASSIEKE MECHANICA.

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

OF

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t' \end{cases}$$

De wiskundige betrekkingen tusschen x en t (of tusschen dx en dt) die mechanische natuurwetten vertolken, zullen, wanneer men voor x en t (resp. dx en dt) de zooeven afgeleide uitdrukkingen substitueert, precies dezelfde gedaante krijgen in x' en t' (resp. dx' en dt'): de formules der mechanische natuurwetten zijn bestand tegen de hierboven onderzochte coördinatentransformatie.

De „eindige" coördinatentransformatie (I), met de beperkende voorwaarde dat $x = 0$, $t = 0$ overeenkomt met $x' = 0$, $t' = 0$, gaat in de grafische voorstelling gepaard met een vervorming van het coördinaten-netwerk, zooals die in fig. 5 is geschetst. Het oude netwerk (doorgetrokken lijnen en gepuntstreepte lijnen) bestaat uit vierkanten, het nieuwe netwerk (stippellijnen en gepuntstreepte lijnen) uit parallelogrammen. Beide netwerken hebben de (gepuntstreepte) gelijktijdigheidslijnen gemeen.

III. DE BEWEGING TEN OPZICHTE VAN DEN AETHER.

Tot dusver hebben we uitdrukkelijk ondersteld, dat de beschouwde verschijnselen van mechanischen aard zouden zijn en daarbij dus de electromagnetische verschijnselen buitengesloten. Deze laatste toch eischen een ander verklaringsbeginsel dan de mechanische. Het is voor ons doel onnoodig uitvoerig het verschil in verklaringsmethode te bespreken; we kunnen volstaan met de vermelding, dat de electromagnetische verschijnselen de aanwezigheid hebben doen onderstellen van een allesdoordringende middenstof, den *aether*, waarin de electrische en magnetische werkingen zich voortplanten, en waaraan dan ook de overbrenging van het licht is opgedragen.

In verband met de beschouwingen, die ons tot dusver bezig hielden, dringt zich de vraag op: welke is de bewegingstoestand van dezen aether? Heeft het zin dezen aether in rust te verklaren? Stel, dat zelfs het mededeelen van een *eenparige* snelheid aan dezen aether den eenvoud der natuurwetten verstoorde, dan zou het toch zeker niet geheel zinneloos zijn aan dezen aether een absolute rust toe te kennen, en de ruimte, t.o. waarvan de aether rust, als de absolute ruimte te betitelen.

Hoe de bewegingstoestand van den aether ook moge zijn, in elk geval zullen de stoffelijke voorwerpen in het algemeen niet voortdurend rusten t.o. van den aether; ze zullen dus in den regel een anderen bewegingstoestand hebben dan deze. De aarde bijv. zal bij haar kringloop om de zon telkens een andere snelheid t.o. van den aether hebben.

De aarde zou alleen dan in rust zijn t.o. van den aether, wanneer ze den omringenden aether meezoog; maar zelfs in dit geval zou slechts dat deel van den aether, dat zich in de onmiddellijke nabijheid der aarde bevindt, t.o. van de aarde in rust verkeeren. Deze onderstelling is inderdaad op grond van de uitkomst van eenige proeven opgeworpen. Andere proeven daarentegen, betreffende de lichtbeweging in de buurt van de aarde (speciaal de aberratie der vaste sterren), hebben het meesleepen van den aether door de aarde voor onmogelijk verklaard, zoodat men wel gedwongen is aan te nemen, dat de aarde door den aether voortvliegt, en dat dus omgekeerd voor den aardbewoner de aether door de aarde „heenblaast". Zulk een „aetherwind" moet dan echter door electromagnetische- of lichtproeven kunnen worden aangetoond.

Een van de manieren om dit te doen berust op de volgende overwegingen:

Een staaf AB, ter lengte l, draagt in B een spiegel (zie fig. 6). Uit A wordt een lichtsein uitgezonden, dat tegen B teruggekaatst wordt en weer in A terugkomt. Gevraagd: hoeveel tijd gebruikt het licht voor dien weg?

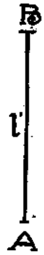

FIG. 6.

Het antwoord valt verschillend uit naarmate men aanneemt:

a) dat de staaf in den aether rust

b) dat de staaf een (eenparige) snelheid heeft in haar lengterichting

c) dat de staaf een (eenparige) snelheid heeft loodrecht op haar lengterichting.

We zullen deze drie gevallen achtereenvolgens onderzoeken.

De voortplantingssnelheid van het licht in den rustenden aether worde aangeduid door c (c.M. per sec.); de waarde van c is in de ledige ruimte, en bij benadering ook in lucht, ongeveer 30.000.000.000 (overeenkomende met 300.000 K.M. p. sec.).

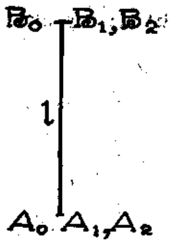

FIG. 6α.

De plaatsen der verschillende punten op

het oogenblik van 't vertrek van 't licht uit A, van spiegeling in B en van terugkomst in A worden onderscheidenlijk aangegeven door de indices 0, 1, 2 (bijv. A_0, A_1, A_2, enz.).

a) De staaf rust t.o. van den aether (er is aetherstilte) (fig. 6a).

De punten A_1 en A_2 vallen dus samen met A_0; B_1 en B_2 met B_0. Voor den weg A_0B_1, die l c.M. lang is, gebruikt het licht $t_1 = \frac{l}{c}$ sec., voor den weg B_1A_2, die eveneens l c.M. lang is, wordt evenveel gevergd, nl. $t_2 = \frac{l}{c}$ sec. De geheele tijdsduur is dus

$$T = t_1 + t_2 = \frac{2l}{c}.$$

b) De staaf heeft een eenparige snelheid v (c.M. p. sec.) t.o. van den aether in de richting van A naar B (fig. 6b).

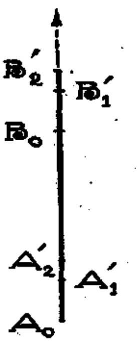

FIG. 6b.

De staaf loopt nu eerst met het licht mee, daarna er tegenin. Op het oogenblik van terugkomst is het punt A in A_2' gekomen. Tusschen het oogenblik dat het licht uit A_0 vertrekt en dat het in A_2' terugkomt ligt het oogenblik van spiegeling in B_1'. Daar het licht eerst B moet inhalen, daarna A tegemoet gaat, is de tijd voor den heenweg A_0B_1' langer dan die voor den terugweg $B_1'A_2'$ (zoodat B_1' ligt voorbij het midden van $B_0'B_2'$). Deze tijden bedragen

$$t_1' = \frac{A_0B_1'}{c} \quad , \quad t_2' = \frac{B_1'A_2'}{c}.$$

Het geheele verschijnsel vordert dus den tijd

$$T' = t_1' + t_2' = \frac{A_0B_1' + B_1'A_2'}{c}.$$

In denzelfden tijd T' is A van A_0 uit met de snelheid v in A_2' gekomen, zoodat

$$T' = \frac{A_0A_2'}{v}.$$

Nu volgt uit $A_0A_2' = A_0B_1' - B_1'A_2'$:

$$T' = \frac{A_0B_1' + B_1'A_2'}{c} = \frac{A_0B_1' - B_1'A_2'}{v} = \frac{c}{v}\,(t_1' - t_2'). \qquad (1)$$

Verder is

$$B_0B_1' = A_0A_1' = v.t_1' \quad , \quad A_1'A_2' = v.t_2',$$

dus

$A_0B_1' = A_0B_0 + B_0B_1' = l + v.t_1'$, $B_1'A_2' = B_1'A_1' - A_1'A_2' = l - v.t_2'$,

en

$$A_0B_1' + B_1'A_2' = 2l + v\,(t_1' - t_2')$$

of, krachtens (1),

$$cT' = 2l + \frac{v^2}{c}T',$$

zoodat

$$\left(c - \frac{v^2}{c}\right)T' = 2l,$$

of

$$T' = \frac{2l}{c} \times \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

of

$$T' = \frac{T}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

De tijd T' is dus *langer* dan de tijd T.

c) De staaf heeft een eenparige snelheid v (c.M. p. sec.) t.o. van den aether loodrecht op haar lengterichting (fig. 6c).

De totale tijd T'' wordt nu besteed 1° door het punt A om te komen van A_0 naar A_2'', 2° door het licht om den weg $A_0B_1''A_2''$ af te leggen. Men heeft dus

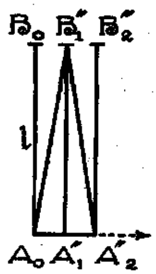

Fig. 6c.

$$T'' = \frac{A_0A_2''}{v} = \frac{A_0B_1'' + B_1''A_2''}{c} =$$

$$= \frac{2\sqrt{l^2 + {}^1/_4 A_0A_2''^2}}{c} = \frac{\sqrt{4l^2 + v^2T''^2}}{c},$$

dus

$$4l^2 + v^2T''^2 = c^2T''^2,$$

waaruit

$$T''^2 = \frac{4l^2}{c^2 - v^2} = \frac{4l^2}{c^2} \times \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

of

$$T'' = \frac{2l}{c} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hier is T'' grooter dan T, maar kleiner dan T', omdat $T'' = T' \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

De factor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ zal in het vervolg een belangrijke rol vervullen; we zullen hem aanduiden door k en dus stellen:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

De factor k is grooter dan 1 en neemt toe naarmate v tot c nadert. Stelt men $v = c$, dan wordt k oneindig groot.

Voor den lichttijd is dus in de drie gevallen gevonden:

$$\text{a)} \ldots \; T = \frac{2l}{c}; \quad \text{b)} \ldots \; T' = k^2.\frac{2l}{c} = k^2.T; \quad \text{c)} \ldots \; T'' = k.\frac{2l}{c} = k.T.$$

De drie lichttijden zijn dus alle drie ongelijk als gevolg van de omstandigheid dat de staaf een *verschillende eenparige* beweging had t.o. van den aether.

Het is dus voor de wiskundige uitdrukking der natuurwetten geenszins onverschillig of de aether in rust wordt gedacht dan wel in eenparige beweging. Het relativiteitsbeginsel der klassieke mechanica geldt derhalve niet voor electromagnetische- en lichtverschijnselen.

Alvorens verder te gaan zullen we van de beide gevallen a) en b), waarbij de wereld beperkt blijft tot de lijn die AB draagt, het wereldfilm ontwerpen.

We zullen als eenheid van tijd nemen de seconde en als eenheid van lengte, niet den centimeter, maar de lengte van c c.M. = 30.000.000.000 c.M. = 300.000 K.M. Daarmee bereiken we, dat de eenheid van snelheid gelijk is aan de snelheid van het licht t.o. van den rustenden aether, zoodat deze lichtsnelheid door het getal 1 (of —1) wordt uitgedrukt. De wereldlijn van een lichtsein in rustenden aether is dus een rechte lijn, waarvan de richtingstangens +1 of —1 is, dus een lijn, die een hoek van 45° of 135° maakt met de rustlijnen.

In het eerste geval (a), waar A en B in rust blijven, zijn de wereldlijnen van A en B rustlijnen ($A_0A_1A_2$ en $B_0B_1B_2$) (zie fig. 7). Het lichtsein, dat op den tijd $t = 0$ uit A_0 ($x = 0$) vertrekt, heeft tot wereldlijn de lijn door A_0 die een hoek van 45° maakt met de rustlijn $A_0A_1A_2$. De spiegeling tegen B, d. i. de ontmoeting tusschen het lichtsein en den spiegel, wordt nu weergegeven door het snijpunt B_1 van de wereldlijn van het lichtsein en die van den spiegel. Daarna krijgt het teruggaande lichtsein de wereldlijn B_1A_2, die een hoek van 135° maakt met de rustlijn B_0B_1.

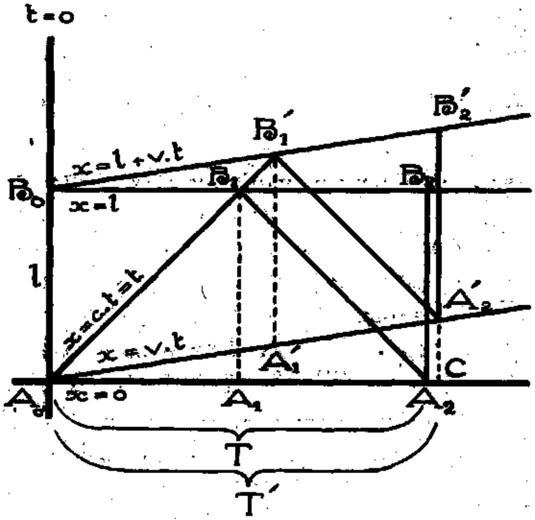

FIG. 7.

Tenslotte wordt de terugkomst in A voorgesteld door het snijpunt A_2 van de wereldlijn van het lichtsein met die van 't punt A. De totale verbruikte tijd wordt nu afgelezen op de rustlijn; men vindt ervoor het bedrag $T = A_0A_2 = 2 \times A_0A_1 = 2l : tg B_1A_0A_1 = 2l$ (aangezien in ons eenhedenstelsel $c = 1$ is).

In het tweede geval hebben alle punten van de staaf AB evenwijdige wereldlijnen, die een (kleinen) hoek maken met de rustlijnen. Zoo heeft A de wereldlijn $A_0A_1'A_2'$ $(x = v.t)$, B de wereldlijn $B_0B_1'B_2'$ $(x = l + v.t)$. Het lichtsein heeft in 't begin dezelfde geschiedenis als in 't eerste geval: het vertrekt op den tijd $t = 0$ met de snelheid 1 uit A. De ontmoeting met den spiegel wordt nu echter door een ander punt afgebeeld, n.l. door het snijpunt B_1' van de lichtwereldlijn met de spiegelwereldlijn. Hierna krijgt het lichtsein bij zijn teruggang de wereldlijn $B_1'A_2'$, die 135° maakt met de rustlijnen. De terugkomst in A eindelijk wordt weergegeven door het snijpunt A_2' van de wereldlijn van het terugkeerende lichtsein en die van 't punt A. De totale bestede tijdsduur T' wordt nu gevonden in den horizontalen afstand A_0C tusschen de gelijktijdigheidslijnen A_0B_0 en $A_2'B_2'$. Ook uit de figuur blijkt dat hij grooter is dan de oorspronkelijke tijdsduur T, die aangewezen wordt door A_0A_2.

De in het voorgaande besproken lichtproef is inderdaad uitgevoerd door MICHELSON en MORLEY (1881 en 1887). Daar men niet kon beschikken over aetherstilte — de aarde heeft altijd een zekere snelheid t.o. van den aether — heeft men zich moeten bepalen tot de gevallen b) en c). De proef (over welker opstelling we hier niet in bijzonderheden kunnen treden) was erop ingericht het verschil tusschen T' en T'' aan het licht te brengen. Het verhoudingsgetal $k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ van deze tijden wijkt des te sterker van 1 af, naarmate v dichter tot c nadert. Nu is de grootste snelheid, die we met onze instrumenten t.o. van den aether kunnen bereiken, die waarmee de aarde in haar baan om de zon voortvliegt. Deze snelheid is ongeveer 30 K.M. per sec., dus 0,0001 van de lichtsnelheid c, zoodat $k = 1 : \sqrt{1-0{,}0001^2}$, hetgeen ongeveer gelijk is aan $1 + {}^1/_2 \times 0{,}0001^2 = 1{,}000.000.005$. Het verschil tusschen de beide lichttijden is dus bijzonder klein. Toch was de nauwkeurigheid met behulp van een interferentie-methode zoo hoog opgevoerd, dat men ${}^1/_{20}$ van het te verwachten bedrag zou hebben kunnen waarnemen; zoodat men zeker was het theoretische verschil tusschen T' en T'' te constateeren. En wat leerde de proef?... *Geen spoor van eenig verschil tusschen* T' en T''! De proef leverde

$$T'' = T',$$

een uitkomst lijnrecht in strijd met de voorstelling, die men zich van de electromagnetische- en lichtverschijnselen had gevormd en waaraan men toch te zeer gehecht was geworden om haar zoomaar voetstoots prijs te geven. Hoe dus dit negatieve resultaat te rijmen met de leer van het electromagnetisme en van den aether?

IV. HET BIJZONDER RELATIVITEITSBEGINSEL.

Als de theorie verlangt, dat T'' en T' ongelijk zijn, en de proef uitwijst, dat ze wèl gelijk zijn, dan moet de theorie, zoo niet gewijzigd, dan toch aangevuld worden. De vraag is, dan: welke invloed heft den factor k in de vergelijking $T' = kT''$ op?

De theorie eischt, dat de tijd, dien 't licht gebruikt om denzelfden afstand l heen en terug af te leggen, verschillend uitvalt naarmate de beweging van de staaf plaats heeft in de lengterichting of loodrecht erop; de proef leert, dat die lichttijden wèl gelijk zijn. Welnu, zou die gelijkheid van de lichttijden niet daarvan het gevolg kunnen zijn, dat die afstand l, waarvan men het als van-zelf-sprekend beschouwde, dat ze in beide gevallen dezelfde waarde had, inderdaad in 't eene geval een *andere* waarde had dan in 't andere geval? Wanneer de bewuste afstand l eens in 't geval van de beweging in de lengterichting k maal zoo klein was als in 't geval der daarop loodrechte beweging, zou dit tengevolge hebben, dat de lichttijd T' in 't eerste geval, in plaats van k maal zoo groot, *even* groot zou uitvallen als de lichttijd T'' van 't tweede geval.

Deze hypothese nu is door Lorentz (1892) en Fitz-Gerald (1893) opgesteld om den negatieven uitslag van de proef van Michelson en Morley te verklaren.

Volgens Lorentz en Fitz-Gerald ondergaat dus een staaf l, die zich met een snelheid v t.o. van den aether beweegt, juist daardoor een lengteverkorting in de richting der beweging, en wel in reden van k tot 1, d. i. van $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ tot 1, of van 1 tot $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. De ware lengte van de staaf bedraagt dus tengevolge van de z.g. „Lorentz-verkorting"

$$l' = \frac{l}{k} = l\sqrt{1-\frac{c^2}{v^2}}.$$

Loodrecht op de bewegingsrichting heeft *geen* lengteverandering plaats. Een bol zal dus bij zijn beweging door den aether de gedaante aannemen van een (afgeplatte) omwentelingsellipsoïde, waarvan de omwentelingsas k maal zoo klein is als de middellijn van den aequator.

De boven behandelde wiskundige afleidingen geven nu voor den lichttijd T':

$$T' = k^2 \times \frac{2l'}{c} = k^2 \times \frac{2\frac{l}{k}}{c} = k \times \frac{2l}{c} = T'',$$

gelijk te verwachten was.

De hier beschouwde Lorentz-verkorting zal in bijna alle voorkomende gevallen uiterst gering zijn, daar bijna alle snelheden, waarover we kunnen beschikken, onbeteekenend zijn vergeleken met de lichtsnelheid. Zelfs in 't geval van onze grootste mechanische snelheid, die van de aarde om de zon, bedraagt de factor k, zooals we reeds hierboven aangaven, slechts 1,000.000.005. Toch zou deze lengteverandering door onze fijne meetwerktuigen wel aan 't licht gebracht kunnen worden, ware het niet, dat die Lorentzverkorting krachtens haar wezen onwaarneembaar is voor ieder die in de beweging deelt. Immers, niet alleen de te meten staaf, maar ook alle geijkte meetstaven, die *erlangs* worden gelegd, ondergaan precies dezelfde betrekkelijke verkorting. Voor het waarnemen der Lorentz-verkorting zou noodig zijn, dat men een staaf, welker rustlengte men kent, kon meten terwijl ze voorbij den stilstaanden waarnemer vloog.

Met de invoering van de Lorentz-verkorting was dus de tegenspraak tusschen de theorie en de feiten weggenomen.

Maar voor de theorie was het vraagstuk daarmee nog niet van de baan. Voor de uitkomst van de proef was het nu onverschillig hoe het toestel t.o. van zijn bewegingsrichting georiënteerd was; de bewegingsrichting kon dus ook niet uit deze proef afgeleid worden, of — zooals we ook kunnen zeggen — van de snelheid t.o. van den aether was *wel* de *richting relatief*, maar *niet* de *grootte*.

Bij zulk een gedeeltelijke relativiteit konden de natuurkundigen zich niet neerleggen. Er moest dus naar gestreefd worden om *ook* de *grootte relatief* te maken, d.w.z. om de formules zóó te wijzigen, dat voor den lichttijd $T' = T''$ nu ook dezelfde waarde te voorschijn kwam als voor den lichttijd T in rustenden aether.

De theoretische formules moesten onafhankelijk gemaakt worden van een eventueele eenparig-rechtlijnige beweging t.o. van den aether.

LORENTZ bewerkte in 1895 [1]) deze onafhankelijkheid door in plaats van den tijd t een hulpgrootheid τ in te voeren, met t verbonden door de formule $\tau = \frac{t}{k}$ of $t = k.\tau$ [2]). Door nu de rol, die de tijd in de natuurwetten speelt, te laten overnemen door deze *wiskundige hulpgrootheid* τ, werd be-

[1]) H. A. LORENTZ: Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden, 1895.

[2]) Prof. LORENTZ voert een factor k in, die met zeer groote nauwkeurigheid de hier ingevoerde grootheid $k = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ benadert.

reikt, dat de betrekkingen tusschen de ruimtelijke coördinaten en deze hulpgrootheid τ (door LORENTZ *plaatstijd* genoemd) dezelfde bleven, met welke eenparige rechtlijnige snelheid het stelsel zich ook t.o. van den aether bewoog.

De betrekking $t = k \times \tau$ geeft aan, dat het bedrag τ (in plaatstijd) overeenkomt met een t gelijk aan $k \times \tau$, dus met een k maal zoo groot bedrag in waren tijd; het is dus alsof de plaatstijd k maal zoo langzaam verloopt als de ware tijd. Alleen bij rust t.o. van den aether is $k = 1$; dan is de plaatstijd geheel gelijk aan den waren tijd.

De grootheid τ wordt in de formules ingevoerd door overal voor t haar waarde $k \times \tau$ te substitueeren. Met den lichttijd T' komt dan een waarde τ' overeen bepaald door $T' = k.\tau'$. Daarentegen zal de lichttijd T bij rust t.o. van den aether gelijk zijn aan den correspondeerenden plaatstijd τ ($T = \tau$). Uit de betrekking $T' = kT$ volgt dus door vertaling in plaatstijd: $k.\tau' = k.\tau$ of $\tau' = \tau$. In plaatstijd uitgedrukt is dus de lichttijd bij eenparigen aetherwind even groot als bij aetherstilte.

Door het invoeren van dezen *fictieven plaatstijd* worden de formules (men denke bijv. aan $\tau' = \tau$ van zooeven) *formeel* onafhankelijk van elke eenparig-rechtlijnige beweging t.o. van den aether, wordt m. a. w. deze beweging *formeel relatief* gemaakt.

Deze relativeering is inderdaad *formeel*. Die plaatstijd, waarvan het tempo afhangt van de snelheid t.o. van den aether, is toch niet meer dan een fictie, geheel verschillend van onzen werkelijken tijd, met zijn onwrikbaar standvastigen gang, onaandoenlijk voor zulke bijkomstige invloeden als beweging t.o. van een zekere, op natuurkundigen grondslag gedefinieerde omgeving! Zulk een uit natuurkundige ervaring a posteriori afgeleide plaatstijd kan voor ons met onzen aangeboren tijd-zin toch nooit in de plaats treden van onzen a priori gegeven waren tijd!

Althans, zoo zou men meenen! In 1905 echter komt EINSTEIN [1]) te voorschijn met de verklaring, dat die plaatstijd van LORENTZ in 't geheel geen fictie is, maar volle werkelijkheid. Voor EINSTEIN berust het onderscheid tusschen

[1]) A. EINSTEIN: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Physik, 17. (1905).

den veranderlijken plaatstijd en den onverstoorbaren waren tijd op vooroordeel, op een verkeerde wijsgeerige redeneering. Wat wij tijd noemen is toch — KANT leerde het reeds – een schema, waarin wij onze ervaringen rangschikken, en dus in hooge mate afhankelijk van den aard dier ervaringen. Wanneer dan de tijd een zoo subjectief begrip is, waarom zouden dan niet twee personen elkaars tijdmaten verschillend kunnen beoordeelen?

Hoe weinig er ook van wijsgeerig standpunt tegen de zienswijze van EINSTEIN moge zijn in te brengen, toch kost het groote moeite ons van het door EINSTEIN zoo gehekelde vooroordeel te bevrijden, en vele natuurkundigen kennen ook nu nog, na zoovele jaren van discussie, aan den tijd een absolute beteekenis toe, waarnaast de veranderlijke plaatstijd slechts als wiskundige hulpgrootheid recht van bestaan heeft.

De Lorentz-verkorting ontmoet geen ernstigen principieelen tegenstand, althans niet meer. Tegen het automatisch korter worden van alle lengten in een bepaalde richting verzet zich ook niet onze intuïtieve voorstelling. We hebben een verkorting, een vervorming van alle lichamen zoo dikwijls waargenomen (bijv. door temperatuurverschillen) dat het ons in 't geheel geen moeite kost die toe te schrijven aan een of andere oorzaak als bijv. de bewegingstoestand t.o. van den aether, welke als overdrager der electromagnetische verschijnselen toch wel een grooten invloed op de materie zal hebben!

Maar de tijd, op welks voortschrijden geen enkele invloed vat heeft! De tijd, die zoowel in ons wereldbeeld als in onze formules optreedt als de onafhankelijk-veranderlijke! Nooit zullen we zeggen: de tijd is veranderd omdat we volwassen zijn geworden, maar wèl wordt onze lichaamslengte, althans in 't spraakgebruik, verklaard uit onzen leeftijd! Dien tijd voor subjectief te verklaren, ... dàt offer is bijna tè groot!

Toch zullen we dat offer gewillig brengen. Tot belooning zullen we verrijkt worden met een dieper inzicht in den natuursamenhang en met een wereldbeeld, welks aanschouwing ons de hoogste aesthetische bevrediging verschaft.

We hebben dus gezien, dat de aan Lorentz-verkorting onderhevige lengte en de door EINSTEIN voor reëel verklaarde plaatstijd samen de formules der natuurwetten onafhankelijk maken van een eenparig-rechtlijnigen bewegingstoestand t.o. van den aether; dat dus de eenparig-rechtlijnige beweging t.o. van den aether relatief gemaakt is. Het relativiteitsbeginsel der klassieke mechanica strekt zich dus *toch* ook uit over de electromagnetische verschijnselen, zij het ten koste van de onveranderlijkheid van lengtemaat en tijdmaat, die het kenmerk der oude mechanica waren.

Daar een eenparige snelheid t.o. van den aether toch nooit waarneembaar is, vindt EINSTEIN dat de aether voortaan in de electromagnetische theorie wel gemist kan worden en stelt hij voor hem af te schaffen. Daarvoor zijn echter nog lang niet alle natuurkundigen te vinden.

Laten we, alvorens de draagwijdte van het nieuwe beginsel te onderzoeken, het nog eenmaal formuleeren:

Beschouwen we twee stelsels A en P, en nemen we aan dat ze, wanneer ze t.o. van elkaar in rust zijn, dezelfde lengtemaat en dezelfde tijdmaat (gang van de klok) hebben, dan zal een eenparige beweging (met de snelheid v) van P langs A tengevolge hebben, dat voor den stilstaanden waarnemer in A de meetstaven van P k maal te kort zijn en de klokken van P k maal te langzaam loopen $\left(k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$. De lengte van 1 c.M. in 't zich bewegende stelsel P wordt door den bewoner van A waargenomen als $\frac{1}{k}$ c.M., en de tijdsduur van 1 sec. in 't bewegende stelsel P wordt door den bewoner van A bepaald op k sec.

Hoe beoordeelt nu een medebewegende waarnemer in P de maten in het rustende stelsel A? Voor den waarnemer in P bestaat het verschijnsel daarin, dat het stelsel A hem met de snelheid v voorbijvliegt. Voor hem doet zich de lengte, die in A 1 c.M. wordt genoemd, voor als een lengte van $\frac{1}{k}$ c.M. en de tijdsduur die in A 1 sec. heet, als een tijdsduur van k sec. Deze laatste uitkomst, die onmiddellijk voortvloeit uit de betrekkelijkheid van de beweging van P t.o. van A (of van A t.o. van P) schijnt in verband met de waarnemingen van den bewoner van A

paradoxaal. De ervaringen van de bewoners van A en P schijnen tegenstrijdig te zijn, ... dat wil zeggen: tegenstrijdig voor iemand, die gelooft aan de eenig ware lengte van den centimeter en aan den eenig waren tijdsduur van de seconde! Maar die eenig ware maten voor lengte en tijd *zijn er niet!* De lengte van den centimeter en de duur van de seconde zijn begrippen, waaromtrent alleen overeenstemming is te bereiken tusschen waarnemers, die t.o. van elkaar in rust zijn. De paradox verdwijnt, zoodra men zich er rekenschap van geeft, dat lengte en tijdsduur alleen voor bepaling vatbaar zijn *met betrekking tot deze of gene omgeving.*

Het bijzondere relativiteitsbeginsel, waarmede we ons nu bezighouden — bijzonder, in zooverre slechts de eenparige rechtlijnige beweging relatief gemaakt is — verlangt, dat elke waarnemer, welke snelheid hij ook t.o. van den aether moge hebben, hetzelfde bedrag constateert voor de snelheid van het licht [1]). Immers de waarde van deze lichtsnelheid mag niet afhankelijk zijn van zijn eigen snelheid t.o. van den aether, daar deze laatste anders door lichtproeven waarneembaar zou worden. Trouwens, uit het schema van de proef van MICHELSON volgt ook, dat de snelheid door den stilstaanden waarnemer even groot wordt beoordeeld als door den zich bewegenden waarnemer; immers beide noemen hun staaflengte l en hun lichttijd $\tau = T$.

Omgekeerd kan men zeggen, dat de relativiteit en de constantheid der lichtsnelheid de Lorentz-verkorting en de klokvertraging eischen.

Dat een zekere snelheid altijd even groot uitvalt, welke snelheid de waarnemer ook moge hebben, is vierkant in strijd met de beginselen der oude mechanica, die leert, dat de snelheden, als ze gelijk gericht zijn, algebraïsch moeten worden samengevoegd en, als ze niet gelijke richting hebben, door parallelogramconstructie.

De nieuwe mechanica zal dus een anderen samenstellingsregel voor de snelheden moeten geven.

1) Hierbij wordt natuurlijk vooropgesteld, dat de doorloopen middenstof optisch homogeen is, dat de brekingsindex overal dezelfde waarde heeft. Waar sprake is van de constante waarde der lichtsnelheid, zullen we het oog hebben op de snelheid in de *ledige ruimte,* ten bedrage van ong. 300.000 K.M. p. sec.

Daar een snelheid v grooter dan c den factor k imaginair zou maken, is voor snelheden grooter dan de lichtsnelheid in de nieuwe mechanica geen plaats. In de mechanica van het bijzondere relativiteitsbeginsel is de lichtsnelheid derhalve de grootst mogelijke snelheid; het is de grenswaarde, die een natuurkundige snelheid niet kan overschrijden. Natuurlijk doet in de nieuwe mechanica het bestaan van zulk een grenssnelheid overal zijn invloed gelden. Het zou ons te ver voeren in bijzonderheden na te gaan, hoe men zich „mechanisch" moet voorstellen, dat een niet-electromagnetische snelheid als 't ware automatisch beneden de lichtsnelheid blijft. Het zal echter reeds aanstonds duidelijk zijn, dat de nieuwe mechanica in al haar onderdeelen fundamenteele afwijkingen vertoont van de klassieke. Toch zullen deze afwijkingen, van hoeveel belang theoretisch ook, in de praktijk nauwelijks merkbaar zijn. Alle afwijkingen toch krijgen eerst een waarneembaar bedrag, wanneer de optredende snelheden eenigszins vergelijkbaar worden met de lichtsnelheid. Hoe grooter de lichtsnelheid is t.o. van die mechanische snelheden, hoe nauwkeuriger de oude mechanica de nieuwe benadert. Men kan het ook aldus uitdrukken: de oude mechanica is het grensgeval van de nieuwe mechanica, wanneer men in deze laatste de lichtsnelheid onbeperkt laat toenemen, oneindig groot laat worden.

De regels der oude mechanica zullen dus voor de gewone mechanische vraagstukken nog zeer bruikbaar blijven, en de klassieke mechanica, die, als bijzonder geval van de nieuwe [$c = \infty$ (oneindig)], eenvoudiger formules heeft dan deze laatste, is dan ook nog lang niet uitgeleefd!

We zullen thans gaan onderzoeken hoe het lengte-tijdnetwerk van ons wereldfilm moet vervormd worden, als we overgaan op een omgeving met andere snelheid.

Evenals vroeger beschouwen we één lengte-afmeting x en den tijd t. De eenheden kiezen we weer zóodanig, dat de lichtsnelheid door het getal 1 (of -1) wordt aangewezen. De wereldlijn van een lichtsein, dat op den tijd $t = 0$ uit O $(x = 0)$ vertrekt, deelt dus den hoek tusschen de tijd-as $(x = 0)$ en de lengte-as $(t = 0)$ middendoor; ze beantwoordt aan de vergelijking $x = t$.

Het oorspronkelijk netwerk, behoorende bij het rustende stelsel A (met lengte x en tijd t) bestaat, evenals vroeger, uit vierkanten; de diagonalen van deze vierkanten zijn steeds wereldlijnen van lichtseinen.

We denken ons nu een stelsel P, dat een snelheid v heeft t.o. van A. De wereldlijn van het punt, dat op den tijd $t = 0$ met $O\,(x = 0)$ samenviel, gaat door O_0 $(x = 0,\ t = 0)$ en maakt met de rustlijn $x = 0$ een hoek, waarvan de tangens is v. Voor elk punt van die lijn geldt dus $x = v.t$.

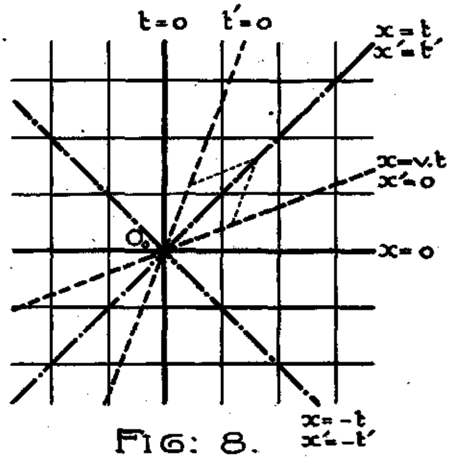

FIG: 8.

We nemen aan dat een bewoner van P zijn lengte x' meet van het punt, dat op den tijd $t = 0$ met O samenviel en dat hij het oogenblik van dit samenvallen ook als het nulpunt van zijn tijd t' kiest; dan geldt dus voor het punt O_0 niet alleen $x = 0$, $t = 0$ maar ook $x' = 0$, $t' = 0$. Voor de geheele wereldlijn $x = v.t$ geldt nu, daar ze rustlijn is in het stelsel P: $x' = 0$.

Nu verlangen we, dat de voortplantingssnelheid van het lichtsein uit O in het nieuwe stelsel ook 1 bedraagt, en dat dus de bijbehoorende wereldlijn tot vergelijking heeft $x' = t'$.

Worden de eenheden van lengte en tijd ook in 't nieuwe stelsel door onderling gelijke lijnstukken weergegeven, dan zal de lijn $x' = t'$ diagonaal moeten worden van de *ruit*, die op de beide nieuwe eenheden van lengte en tijd is geconstrueerd; de nieuwe gelijktijdigheidslijn $t' = 0$ zal dan niet meer samenvallen met de oude as $t = 0$, maar met deze laatste denzelfden hoek maken als de nieuwe rustlijn $x' = 0$ met de oude $x = 0$, zóodanig, dat de wereldlijn $x = t$ of $x' = t'$ den hoek tusschen $x' = 0$ en $t' = 0$ middendoordeelt (fig. 8).

Het nieuwe netwerk, behoorend bij het bewegende stelsel (met lengte x' en tijd t'), zal dus uit *ruiten* bestaan (fig. 9).

De eenheid van t' moet zóo groot zijn, dat ze, beoordeeld in het oude stelsel, de waarde k heeft, dat m.a.w.

haar gelijktijdigheidslijn den afstand k heeft van de oude as $t = o$. Men kan dus de nieuwe eenheid construeeren, door in 't punt $x = o$, $t = k$ de loodlijn op $x = o$ op te richten. Waar deze loodlijn de nieuwe rustlijn $x' = o$ snijdt, ligt het uiteinde van de nieuwe eenheid.

De eenheid van lengte is een even groote lijn gelegen op een nieuwe gelijktijdigheidslijn, bijv. op $t' = o$.

Hiermee hebben we het nieuwe schema volledig beschreven en geconstrueerd. We zijn dus in staat van elk punt zijn nieuwe coördinaten x' en t' aan te geven.

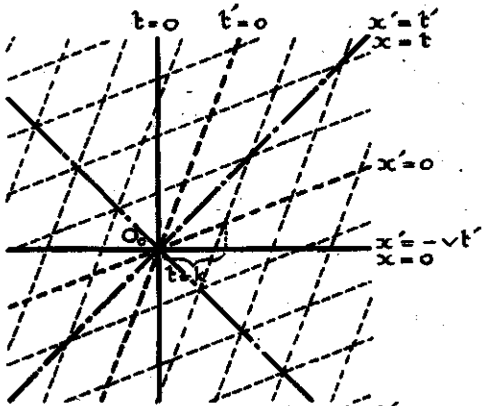

FIG. 9.

Tusschen de grootheden x en t, die bij een bepaald wereldpunt (gebeurtenis) behooren, eenerzijds en de bij hetzelfde punt behoorende grootheden x' en t' anderzijds bestaan betrekkingen, die natuurlijk door de wijze, waarop de nieuwe coördinaten zijn ingevoerd, geheel bepaald zijn.

We zullen echter deze betrekkingen niet door een meetkundig betoog uit de figuur, maar door een „werktuigkundige" redeneering afleiden.

We beschouwen daartoe een staaf AB in rust. Het punt A zij nulpunt van telling, de lengte van AB zij X. Stellen we de abscis van een punt op AB, d. i. zijn afstand tot A, voor door x, dan geldt voor $A: x = o$ en voor $B: x = X$.

Daarnaast denken we ons een staaf PQ, waarop P als nulpunt van telling dient. De lengte van PQ moge X' bedragen. Noemt men x' de abscis van een punt van PQ, dan geldt voor $P: x' = o$ en voor $Q: x' = X'$.

We nemen aan, dat PQ aanvankelijk in rust verkeert t.o. van de staaf AB en dat in dien betrekkelijken rusttoestand een waarnemer op AB precies dezelfde lengteeenheid bezit als een waarnemer op PQ. De waarnemer op AB en die op PQ zijn 't er dus over eens, dat de lengte van AB X en die van PQ X' bedraagt. Bovendien zullen in dien betrekkelijken rusttoestand de klokken van AB precies even snel loopen als de klokken van PQ. Een tijdsduur, dien de man in AB T noemt, krijgt ook van den man in PQ de waarde T.

We laten nu PQ met een snelheid v in de richting van P naar Q rakelings voorbij AB schieten. Het oogenblik, waarop het punt P het punt A passeert, wordt *zoowel op AB als op PQ* als nulpunt van den tijd t resp. t' aangegenomen. Het gaan van P langs A is dus een gebeurtenis in plaats en tijd, die door een waarnemer op AB beschreven wordt door $x = 0$, $t = 0$ en door een waarnemer op PQ door $x' = 0$, $t' = 0$.

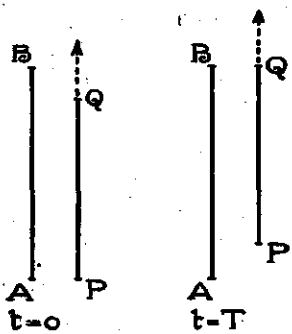

FIG. 10.

We beschouwen nu het oogenblik, dat het punt Q het punt B passeert. Volgens een waarnemer op AB moge het T tijdseenheden later zijn dan het oogenblik waarop P aan A voorbijging. Voor die passage van Q langs B geldt dus, beschouwd van het standpunt van den waarnemer op AB : $x = X$, $t = T$ (fig. 10).

De waarnemer op AB kan, als hij bekend is met de lengte X' van PQ, de waarde van T berekenen. Hij redeneert dan aldus: PQ krijgt door zijn snelheid v een Lorentz-verkorting, waardoor zijn lengte wordt $\frac{X'}{k} = X' \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Toen P het punt A passeerde, had Q nog af te leggen een stuk gelijk aan $X - \frac{X'}{k}$; daar de snelheid van Q v bedraagt, heeft Q daarover een tijd noodig gelijk aan

$$T = \left(X - \frac{X'}{k}\right) : v. \tag{2}$$

Dit alles is het oordeel van den waarnemer op AB. De laatste formule, die aangeeft hoe men T berekent, als men X en X' kent, kan herleid worden tot

$$X' = k\ (X - v.T), \tag{3}$$

in welken vorm ze leert, hoe men, door waarneming van de grootheden X en T *in het stelsel AB*, de lengte X' kan *berekenen* van de staaf PQ, *zooals een waarnemer op* PQ *zelf die beoordeelt.*

Laten we ons thans plaatsen op het standpunt van een waarnemer op PQ. Volgens dezen beweegt zich niet PQ maar juist AB, en wel met de snelheid v in de richting van B naar A! De ontmoeting van B en Q zal volgens hem plaats hebben na T' tijdseenheden, dus op den tijd $t' = T'$ (fig. 11). Voor den waarnemer op PQ heeft de staaf AB een Lorentz-verkorting ondergaan, waardoor haar lengte is geworden $\frac{X}{k}$; om Q voorbij te komen had het punt B dus nog af te leggen den afstand $\frac{X}{k} - X'$, en wel met de snelheid v, dus in den tijd

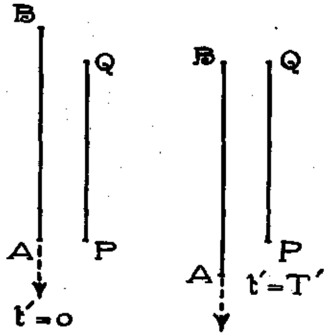

FIG. 11.

$$T' = \left(\frac{X}{k} - X'\right) : v. \tag{4}$$

Uit deze laatste vergelijking volgt nog

$$X = k\,(X' + v.T'). \tag{5}$$

Deze vergelijking (5) kan ook als onmiddellijk gevolg van (3) worden beschouwd [evenals (4) van (2)]; immers de overgang van het eene stelsel op het andere komt slechts neer op het verwisselen van X met X', T met T' en v met $-v$.

De beide uitdrukkingen (2) en (3) voor den tijdsduur tusschen het elkaar passeeren van P en A en het elkaar passeeren van Q en B, naar gelang deze tijdsduur van AB of van PQ uit beoordeeld wordt, stellen in 't geheel niet hetzelfde bedrag voor.

Ware PQ, gemeten in rust t.o. van AB, *even* lang geweest als AB, waren we dus uitgegaan van $X' = X$, dan zou voor AB het oogenblik $Q = B$ gevallen zijn *na* het oogenblik $P = A$; daarentegen zou dan voor PQ het oogenblik $B = Q$ gevallen zijn *voor* het oogenblik $A = P$, terwijl iemand, die van de Lorentz-verkorting niets afwist, zou verklaren, dat die oogenblikken moeten samenvallen.

Hier treedt duidelijk aan het licht, dat zelfs onze begrippen „voor" en „na" relatief zijn geworden, dat de volgorde in den tijd eerst beteekenis krijgt *in verband met den bewegingstoestand* van den tijdmeter (waarnemer en klok).

Substitueeren we in (4) voor X' de uitdrukking (3), dan komt er:

$$T' = \left(\frac{X}{k} - kX + kvT\right) : v = kT + \left(\frac{1}{k} - k\right)\frac{X}{v} = kT + \frac{k}{v}X\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) =$$

$$= kT + \frac{k}{v}X\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = kT - \frac{kv}{c^2}X$$

of

$$T' = k\left(T - \frac{v}{c^2}X\right); \tag{6}$$

naast deze formule krijgen we ook

$$T = k\left(T' + \frac{v}{c^2}X'\right). \tag{7}$$

De in de formules (3), (5), (6) en (7) optredende grootheden X, T; X', T' kunnen, daar de snelheid v en de lengten der staven willekeurig zijn gekozen, beschouwd worden als de coördinaten van een zekere gebeurtenis (het passeeren van B en Q). Alleen zijn deze coördinaten in zooverre niet algemeen, als uitdrukkelijk vooropgesteld is, dat de gebeurtenis $X = 0$, $T = 0$ (het passeeren van A en P) in het andere stelsel heet $X' = 0$, $T' = 0$.

Gaan we nu over op onze gewone schrijfwijze x, t; x', t', dan kunnen we onze uitkomst als volgt formuleeren:

Heeft men in twee zich met de eenparige snelheid v t.o. van elkaar bewegende stelsels de lengte- en tijdcoördinaten (x, t) en (x', t') zóodanig vastgelegd, dat de gebeurtenis, die in 't eene stelsel $x = 0$, $t = 0$ heet, in 't andere stelsel eveneens $x' = 0$, $t' = 0$ heet, dan gelden tusschen de lengte- en tijdcoördinaten x, t resp. x', t' van dezelfde gebeurtenis, waar en wanneer deze ook moge voorvallen, de betrekkingen:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= k(x - v.t) \\ t' &= k\left(t - \frac{v}{c^2}.x\right)\end{aligned}\right. \text{ of } \left\{\begin{aligned} x &= k(x' + v.t') \\ t &= k\left(t' + \frac{v}{c^2}.x'\right)\end{aligned}\right., \text{ waarbij } k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{II}$$

Dit zijn nu de formules voor de coördinatentransformatie behoorende bij het bijzondere relativiteitsbeginsel.

Wanneer we c oneindig groot onderstellen, wordt $\frac{v}{c^2} = 0$ en $k = 1$, zoodat de formules (II) overgaan in de formules (I) der klassieke mechanica.

Terwijl bij de transformatie der klassieke mechanica de tijd onveranderd bleef, hetgeen tot uiting kwam in de formule $t' = t$, is de tijd in de nieuwe mechanica terdege afhankelijk van het stelsel waarin we hem beschouwen.

Ook hier echter bestaat een uitdrukking in x en t, die precies dezelfde gedaante krijgt in x' en t', wanneer we van de coördinaten x, t overgaan op de coördinaten x', t' met behulp van de formules (II). Deze uitdrukking luidt:

$$t^2 - \frac{x^2}{c^2}.$$

Inderdaad vinden we door herleiding (met gebruikmaking van $k^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$):

$$t^2 - \frac{x^2}{c^2} = k^2\left(t'^2 + \frac{2v}{c^2}.x't' + \frac{v^2}{c^4}.x'^2\right) - \frac{k^2}{c^2}\left(x'^2 + 2v.x't' + v^2.t'^2\right) =$$

$$= k^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'^2 - \frac{k^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x'^2 = t'^2 - \frac{x'^2}{c^2}.$$

De uitdrukking $t^2 - \frac{x^2}{c^2}$ is dus bestand tegen verandering van stelsel. Is bijv. eenmaal $t^2 - \frac{x^2}{c^2} = 0$, of $x = \pm\, c.t$, dan blijft dit waar in elk ander (met eenparige snelheid voorbijtrekkend) stelsel. Nu drukt $x = \pm\, c.t$ uit, dat de lengte x met de snelheid c doorloopen wordt, dat er dus een *lichtsein* wordt uitgezonden. Daar echter de voortplantingssnelheid van het licht in *elk* zich eenparig bewegend stelsel de waarde c heeft, is ook om die reden de vergelijking $x' = \pm\, c.t'$ een gevolg van $x = \pm\, c.t$, dus $t'^2 - \frac{x'^2}{c^2} = 0$ van $t^2 - \frac{x^2}{c^2} = 0$.

Zooals we reeds herhaaldelijk opmerkten, zijn de in 't vorige gebruikte coördinaten x, t; x', t' zoo gekozen, dat $x = 0$, $t = 0$ samengaat met $x' = 0$, $t' = 0$. Nu kunnen we over de lengte- en tijdcoördinaten niet altijd op zulk een eenvoudige wijze beschikken. Herhalen we de redeneering aan het eind van Hoofdstuk II, dan komen we tot het besluit, dat onze formules, die onder de voorwaarde $x=0$, $t=0$; $x'=0$, $t'=0$, voor x, t; x', t' golden, in 't algemeen gelden voor *coördinaatverschillen* $x-x_0$, $t-t_0$; $x'-x_0'$, $t'-t_0'$, en dus in 't bijzonder ook voor de „differentialen" dx, dt; dx', dt'.

Men heeft dus de volgende „differentiaalformules":

$$\left\{\begin{aligned} dx' &= k\,(dx - v.dt) \\ dt' &= k\left(dt - \frac{v}{c^2}\cdot dx\right) \end{aligned}\right. \quad \text{of} \quad \left\{\begin{aligned} dx &= k\,(dx' + v.dt') \\ dt &= k\left(dt' + \frac{v}{c^2}\cdot dx'\right) \end{aligned}\right. \tag{IIa}$$

$$\text{waarbij } k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

en

$$dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} = dt'^2 - \frac{dx'^2}{c^2}. \tag{IIb}$$

Duidt men den vorm $dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}$ door een enkel symbool $d\tau^2$ aan, zoodat

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}, \tag{8}$$

dan wordt de vergelijking (IIb):

$$d\tau^2 = d\tau'^2. \tag{IIbb}$$

Uit (IIa) vindt men

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v.dt}{dt - \frac{v}{c^2}.dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}},$$

Zooals we bij de afleiding der formule (Ic) betoogd hebben, stelt $\frac{dx}{dt} = u$ de snelheid voor, waarmee het beschouwde punt zich op zeker oogenblik langs de lijnvormige ruimtewereld verplaatst, en wel gemeten in het oorspronkelijke stelsel; evenzoo beteekent $\frac{dx'}{dt'} = u'$ de waarde, die in het tweede stelsel aan de snelheid dier beweging wordt toegekend. Tusschen u en u' bestaat derhalve de betrekking:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad \text{of} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \tag{IIc}$$

Dit is nu de regel voor de samenstelling van snelheden op een rechte lijn. Stelt men $u = c$, dan vindt men ook

$u' = c$, gelijk te verwachten was. Voor $c = \infty$ gaat de formule (IIc) over in de formule (Ic) der klassieke mechanica [1].

Ook hier kunnen we de vergelijkingen (II) formeel vereenvoudigen door de lichtsnelheid c gelijk te stellen aan 1 (hetgeen neerkomt op een bijzondere keuze der eenheden, bijv. de secunde en 300.000 K.M.). De formules (II), (IIa), (IIb) en (IIc) gaan dan resp. over in

$$\begin{cases} x' = k(x - v.t) \\ t' = k(t - v.x) \end{cases} \text{ of } \begin{cases} x = k(x' + v.t') \\ t = k(t' + v.x') \end{cases} \left(k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right), \quad \text{(II')}$$

$$\begin{cases} dx' = k(dx - v.dt) \\ dt' = k(dt - v.dx) \end{cases} \text{ of } \begin{cases} dx = k(dx' + v.dt') \\ dt = k(dt' + v.dx') \end{cases} \left(k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right), \quad \text{(II'a)}$$

$$dt^2 - dx^2 = dt'^2 - dx'^2, \quad \text{(II'b)}$$

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv} \text{ of } u = \frac{u' + v}{1 + u'v}, \quad \text{(II'c)},$$

terwijl de vergelijking (8) in dit geval luidt:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2. \quad \text{(8')}$$

De snelheid v is hier dus uitgedrukt als fractie van de lichtsnelheid. Door de bijzondere keuze $c = 1$ hebben de formules een uiterlijke gedaante gekregen, waarin het onderscheid tusschen x en t, althans uit *wiskundig* oogpunt, zoo goed als geheel verdwenen is. Deze symmetrie in den bouw der vergelijkingen, die bij de formules der klassieke mechanica geheel ontbreekt, heeft MINKOWSKI ertoe gebracht den tijd als een denkbeeldige ruimtegrootheid te beschouwen [2]. Door zoodoende van de eigenschappen der transformatieformules een eenvoudige meetkundige vertolking te geven, heeft MINKOWSKI de denkbeelden van EINSTEIN krachtig helpen verbreiden.

Zooals we reeds vroeger gevonden hebben, gaat bij de transformatie krachtens het bijzondere relativiteitsbeginsel het vierkanten-netwerk over in een ruiten-netwerk, terwijl de onveranderlijke wereldlijnen der lichtseinen, bij de eenhedenkeuze $c = 1$, de hoeken tusschen de assen middendoordeelen (zie fig. 8 en fig. 9).

---

[1] $d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ is de differentiaal van een grootheid τ, die overeenkomt met den plaatstijd van LORENTZ, en door MINKOWSKI „Eigenzeit" is genoemd.

[2] H. MINKOWSKI: Raum und Zeit. Leipzig, 1909.

Daar $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$, zal de figuur, voor welker punten geldt:

$$t^2 - x^2 = a,$$

in 't nieuwe stelsel dezelfde vergelijking krijgen (n.l. $t'^2 - x'^2 = a$). Deze figuur is een *rechthoekige hyperbool*, waarvan de asymptoten samenvallen met de (onveranderlijke) bissectrices der assen.

De tijdseenheid in het nieuwe stelsel, dus de eenheid van t', wordt van de rustlijn $x' = 0$ afgesneden door de rechthoekige hyperbool $t^2 - x^2 = +1$, (immers voor deze geldt ook $t'^2 - x'^2 = +1$, zoodat de lijn $x' = 0$ haar snijdt in twee punten, waarvoor $t' = \pm 1$); de (even lange) lengte-eenheid wordt van de gelijktijdigheidslijn $t' = 0$ afgesneden door de rechthoekige hyperbool $t^2 - x^2 = -1$.

In fig. 12 is de vervorming van het netwerk weergegeven. De getrokken lijnen vormen het (oorspronkelijke) vierkanten-netwerk; de gestippelde lijnen het (nieuwe) ruiten-netwerk; de onveranderlijke lijnen $t^2 - x^2 = +1$, $t^2 - x^2 = -1$ en $t^2 - x^2 = 0$ (d.w.z. $t = +x$ en $t = -x$) zijn gepuntstreept.

In het lengte-tijd-vlak van de klassieke mechanica was een rechte lijn, opgevat als wereldlijn, steeds het beeld van een eenparige beweging [1]. Ook in het nieuwe wereldfilm stelt de rechte lijn, in haar functie van wereldlijn, steeds een eenparige beweging voor. Immers t.o. van het oorspronkelijke vierkanten-net geldt deze uitspraak evengoed als t.o. van het precies eender gebouwde aanvangsnet der oude mechanica. Nu beantwoordt de wereldlijn van een beweging, die eenparig (rechtlijnig) is t.o. van het stelsel met rechthoekige coördinaten, aan een vergelijking tusschen x en t van den eersten graad, dus van den vorm $x = x_0 + v.t$. Deze vergelijking gaat echter door transformatie over in een vergelijking in x' en t', die eveneens van den eersten graad is, dus $x' = x'_0 + v.t'$. Deze laatste betrekking drukt echter uit, dat, als t' toeneemt met p, x' toeneemt met $v' \times p$. De aangroeiingen van de abscis zijn dus evenredig met die van den tijd, en dit is juist het kenmerk van een eenparige beweging. Derhalve:

In het werelddiagram van het bijzondere relativiteits-

[1] Daar de geheele door ons beschouwde wereld een *rechte* lijn, is deze eenparige beweging tevens rechtlijnig.

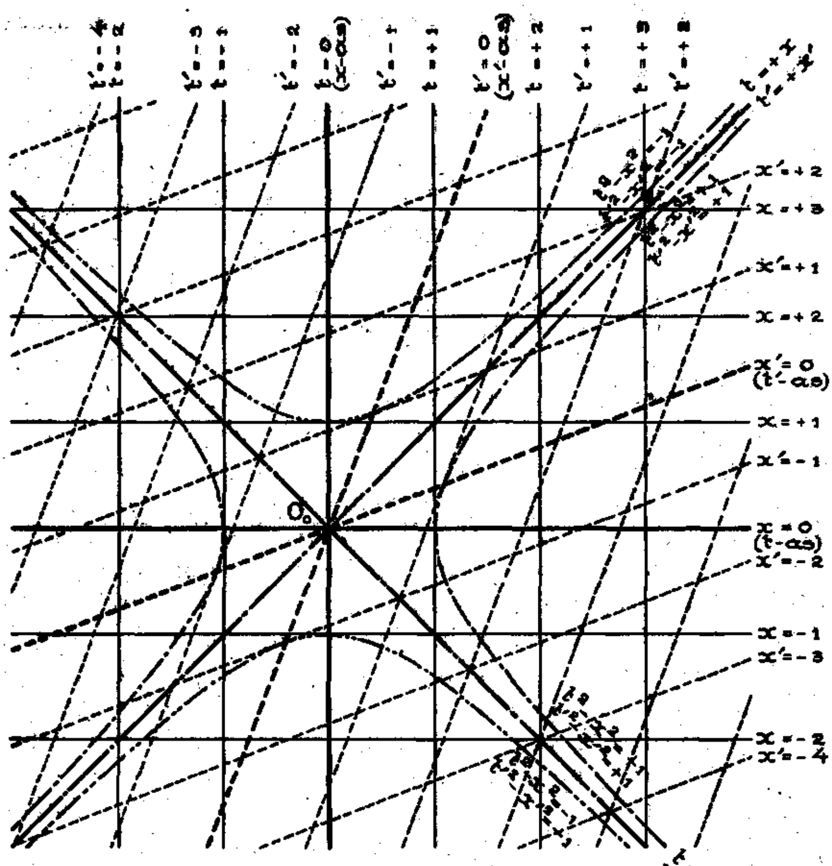

FIG. 12.

BIJZONDER RELATIVITEITSBEGINSEL.

$$\begin{cases} x' = k(x - vt) \\ t' = k(t - vx) \end{cases}$$

OF

$$\begin{cases} x = k(x' + vt') \\ t = k(t' + vx') \end{cases}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

beginsel is de *rechte lijn* wereldlijn van de eenparige (rechtlijnige) beweging.

Deze stelling is voor ons van groot gewicht. Ze zal ons dienen als punt van uitgang bij de wiskundige behandeling van het algemeene relativiteitsbeginsel.

V. DE GELIJKHEID VAN TRAGE EN ZWARE MASSA.

Het bijzondere relativiteitsbeginsel behoort, in den vorm zooals het hierboven beschreven is, tot de bewegingsleer of cinematica; de eenige begrippen, die in de transformatieformules (II) optreden, zijn lengte, tijd en het uit deze twee zuiver-wiskundig afleidbare begrip snelheid.

Nu kan de bewegingsleer in ontelbare stijlen opgebouwd worden. Evenmin als de klassieke bewegingsleer is de cinematica van het bijzondere relativiteitsbeginsel de eenig ware. In plaats van de transformatieformules (I) of (II) had men tallooze andere transformaties kunnen opstellen en daarop een bewegingsleer grondvesten. Welk stel men uitkiest, hangt ervan af, welke *natuurkundige* feiten men ermee wil verklaren en van welke natuurkundige grondbeginselen men uitgaat. Zoo waren het de electromagnetische verschijnselen, die de klassieke mechanica in ongunst brachten en ertoe leidden de onveranderlijkheid van de tijdmaat prijs te geven, maar daarvoor in de plaats de onveranderlijkheid van een zekere grenssnelheid (de lichtsnelheid) aan te nemen.

Terwijl men dus de theorie van het bijzondere relativiteitsbeginsel uitsluitend met cinematische hulpmiddelen kan ontwikkelen, wordt in de leer van het algemeene relativiteitsbeginsel een voorname rol gespeeld door een, wel is waar werktuigkundig, maar niet cinematisch begrip, n.l. het begrip *massa*.

Ter wille van een behoorlijke analyse van dit begrip „massa" moeten we enkele zeer bekende natuurkundige verschijnselen in herinnering brengen.

Geeft men aan een stilstaand voorwerp, bijv. een wagon, een stoot, dan geraakt het in beweging; de toestand van rust gaat over in een bewegingstoestand met een zekere snelheid, bijv. van 1 M. per sec.; de aanvankelijke snelheid van 0 M. per sec. wordt gewijzigd in de snelheid van 1 M. per sec.; er heeft een *snelheidsverandering*, een *versnelling* plaats.

Een dergelijke stoot kan evenzeer een aanvankelijke snelheid vergrooten of verkleinen.

Een voortdurend werkende kracht brengt een voortdurende snelheidsverandering, een voortdurende, zij 't misschien veranderlijke, versnelling teweeg.

Constateert men, dat verschillende krachten aan een zelfde voorwerp verschillende versnellingen geven, dan stelt men, in navolging van NEWTON, de grootten dier krachten evenredig met de versnellingen die ze teweegbrengen. Is eenmaal deze evenredigheid vooropgesteld, dan kan men ook omgekeerd zeggen, dat verschillende op een zelfde lichaam werkende krachten versnellingen ten gevolge hebben, wier bedrag evenredig is met de grootte dier krachten, zoodat bijv. een tweemaal zoo groote kracht een tweemaal zoo groote versnelling bewerkt.

Een zelfde stoot geeft aan verschillende voorwerpen in 't algemeen verschillende versnellingen. Dezelfde stoot, die aan een stilstaanden wagon een snelheid van 1 M. per sec., dus een (oogenblikkelijke) versnelling van 1 M. per sec. meedeelt, heeft ten gevolge dat een uit twee dergelijke wagons bestaande stilstaande trein een *half zoo groote* snelheid dus een snelheid van $1/_2$ M. per sec. krijgt, bewerkt dus een (oogenblikkelijke) versnelling van $1/_2$ M. per sec.

Om aan den uit twee wagons bestaanden trein *dezelfde* versnelling te kunnen geven als aan den enkelen wagon, moet ook een tweemaal zoo groote kracht aangewend worden.

Ook zal het minder inspanning kosten, een geringere kracht vereischen om aan een houten wagon een bepaalde versnelling te geven dan aan een ijzeren wagon.

Voor dezelfde versnelling zijn dus bij verschillende voorwerpen in 't algemeen verschillende krachten noodig; de grootte van die kracht hangt af van de grootte van het voorwerp en van den aard van het materiaal waaruit het bestaat. Men kan aan de voorwerpen een attribuut toekennen, waarvan het bedrag evenredig is met de grootte van de kracht, die een gegeven versnelling bewerkt; dit attribuut kunnen we ruwweg noemen: de „hoeveelheid stof" van het voorwerp. Hoe grooter de hoeveelheid stof is, hoe grooter kracht verlangd wordt voor een gegeven versnelling, hoe kleiner versnelling een gegeven kracht vermag te geven.

Nu is de versnelling de afwijking van de rechtlijnig-eenparige beweging, die het voorwerp, als er *geen* kracht op werkt, krachtens zijn *traagheid* behoudt. Hoe grooter de hoeveelheid stof, des te geringer is het effect van een gegeven kracht, des te sterker verzet het voorwerp zich tegen de bewegingsverandering, des te „trager" is het voorwerp. In plaats van „hoeveelheid stof" spreekt men daarom van *trage massa*.

We kunnen de traagheidsverschijnselen aldus beschrijven: Een voorwerp heeft voor een gegeven versnelling (snelheidsvermeerdering of snelheidsvermindering) een kracht noodig, die evenredig is met zijn *trage massa*, en krijgt onder den invloed van een gegeven kracht een versnelling, die omgekeerd evenredig is met zijn trage massa.

De bepaling van het begrip „trage massa" steunt geheel en al op de ervaring aangaande de „traagheidsverschijnselen". Deze stellen ons in staat van elk voorwerp de trage massa aan te geven, zoodra we een keuze gedaan hebben voor de *eenheid* van trage massa (bijv. die van 1 c.M.^{3} water bij 4° C., het *gram*).

De hier besproken trage massa treedt ook op in een groep van verschijnselen, geheel verschillend van de traagheidsverschijnselen, en wel bij de algemeene aantrekkingskracht.

De algemeene aantrekkingskracht, waarmee Newton ons bekend heeft gemaakt, openbaart zich in 't bijzonder op het oppervlak van onze aarde in de zwaartekracht of „gravitatie", waarvan reeds Galilei de wetten heeft opgespoord.

Laten we ons eerst duidelijk rekenschap geven van de eigenschappen van deze aantrekkingskracht (die in haar algemeenen vorm ook „gravitatie" genoemd wordt). Daartoe willen we ons verbeelden, dat alle voorwerpen op aarde *niet* onderhevig zijn aan de ons bekende zwaartekracht, maar aan een andere natuurkracht die elk los voorwerp *met dezelfde kracht* omlaag trekt (alsof aan elk voorwerp een koord ware bevestigd, aan welks andere uiteinde steeds met *dezelfde* kracht werd getrokken). In dat geval zouden verschillende voorwerpen verschillende „valversnellingen" krijgen naar gelang van hun (verschillende) trage massa. Van een voorwerp zou de valversnelling omgekeerd evenredig zijn met zijn trage massa. Had van twee voorwerpen het eene een tweemaal zoo groote trage massa, als het andere, dan zou het eerste ook half zoo snel vallen als het tweede.

Constateerde men omgekeerd, dat een lichaam des te langzamer viel, naarmate het grooter trage massa had, zoodanig, dat de valversnelling half zoo groot werd, als de trage massa verdubbeld werd, dan zou men daaruit besluiten, dat elk lichaam *met dezelfde kracht* door de aarde werd aangetrokken. Elk voorwerp zou dan ook op een tafel of op onze hand dezelfde drukking uitoefenen, zou m. a. w. „even zwaar" zijn, *hetzelfde gewicht* hebben.

Het *gewicht* van een voorwerp, d. i. de kracht waarmee de aarde het omlaag trekt, zou dan niets te maken hebben met zijn trage massa.

Wat wordt nu echter inderdaad op onze aarde waargenomen? Wanneer we onze proeven nemen op het oppervlak der aarde, dus op denzelfden afstand van het aantrekkingsmiddelpunt, dan bevinden we, dat alle voorwerpen *tengevolge van de zwaartekracht even snel vallen*, dus *dezelfde versnelling* krijgen. Maar dan moet ook deze gravitatie voor de verschillende voorwerpen verschillend zijn, en wel recht evenredig met de trage massa van de voorwerpen: een lichaam met de dubbele trage massa moet met de dubbele kracht aangetrokken worden, wil de gravitatie dezelfde versnelling bewerken. Blijkens de *gelijke* versnelling van alle lichamen is dus de op hen werkende aantrekkende kracht, d. i. hun *gewicht*, *evenredig met hun trage massa.*

Noemen we het attribuut van een voorwerp, dat zijn gewicht, d. i. het bedrag der aantrekkingskracht, bepaalt, de „*zware massa*" van het voorwerp, dan kunnen we zeggen, dat deze zware massa evenredig is met de trage massa van hetzelfde voorwerp. Door een geschikte keuze van de *eenheid* van zware massa (bijv. die van 1 c.M.^{3} water bij 4° C.) kunnen we bereiken, dat de zware massa steeds *gelijk is aan* de trage massa. Uit de gelijke valversnelling besluiten we dus, dat *van elk lichaam de zware* (of *graviteerende*) *massa gelijk is aan de trage massa.*

De gelijkheid van deze beide soorten van massa is dus niet iets van-zelf-sprekends; ze is een ervaringsfeit; ze is dus in zekeren zin toevallig, d.w.z. niet logisch noodzakelijk. Van deze toevalligheid is men zich lang niet altijd even duidelijk bewust geweest. De gelijkheid van zware en trage massa werd vroeger zoo natuurlijk gevonden, dat men slechts één begrip massa in de natuurkunde verwerkte en dit nu eens definieerde met behulp van de gravitatie, dan weer met behulp der traagheidsverschijnselen. Eerst EINSTEIN heeft deze gelijkheid in haar volle beteekenis „ontdekt". EINSTEIN vond deze gelijkheid, wel verre van van-zelfsprekend, integendeel zoo opvallend, dat er „wat achter moest zitten", dat er een diepere grond voor moest zijn. Voor EINSTEIN wees deze overeenstemming tusschen de beide massa's op een innigen samenhang tusschen de beide groepen van verschijnselen, voor welker beschrijving die beide soorten van massa waren ingevoerd, tusschen de traagheidsverschijnselen en de gravitatieverschijnselen. Hiermee opende zich een hoopvol verschiet. Er bestond nu kans, dat ons een nieuwe blik zou worden gegund in het wezen der algemeene aantrekkingskracht, die weerbarstige natuurkracht, die tot dusver hardnekkig aan alle verklaringspogingen weerstand had geboden. Wie weet, misschien zou men zelfs wel bevrijd worden van dat onverteerbare begrip, naar 't scheen onvermijdelijk in de beschrijving der gravitatie, het begrip „werking op afstand".

VI. HET AEQUIVALENTIEBEGINSEL.

Het door EINSTEIN ontdekte verband tusschen de traagheids- en de gravitatieverschijnselen is, na het hierboven behandelde, met geringe moeïte in te zien.

We denken ons een spoortrein, die op een rechte baan (richting bijv. Zuid → Noord) wordt voortgetrokken. Binnen in een coupé van dien trein zullen dan alle punten in denzelfden bewegingstoestand verkeeren. Wordt de locomotief langzaam aangezet, dan krijgen al die punten *eenzelfde versnelling*. We zullen aannemen, dat het aanzetten zoo geleidelijk geschiedt, dat gedurende eenigen tijd de versnelling standvastig is, bijv. 1 snelheidseenheid (1 M. per sec.) per secunde.

We stellen ons nu binnen den coupé een persoon voor, die, doordat de gordijntjes dicht zijn, niets ziet van de buitenwereld, d. i. de spoorbaan en omgeving, en die door gebrek aan natuurkundige kennis geen besef heeft van de wet van de traagheid. Zoolang de trein stilstaat, zal zijn werktuigkundige ervaring zich bepalen tot het constateeren van de zwaartekracht; hij zal waarnemen, dat alle voorwerpen even snel naar beneden vallen en dat deze voorwerpen, als ze op een bank liggen en zoo verhinderd worden te vallen, op die bank een drukking uitoefenen, zooals ook de persoon zelf zich (zittend) tegen de bank of (staande) tegen den vloer aangedrukt voelt. Onze coupébewoner schrijft deze val- en drukkingsverschijnselen na eenig overleg toe aan een naar beneden gerichte aantrekkingskracht, die aan alle lichamen dezelfde versnelling geeft, dus aan een zwaartekracht, zooals wij die kennen. En wij, die hem in natuurkennis verre overtreffen, geven hem in zijn verklaringswijze gelijk.

Nu wordt, zonder dat de coupébewoner recht weet, wat er gebeurt, de locomotief aangezet, tengevolge waarvan de trein een (naar we onderstellen) standvastige horizontale versnelling krijgt, bijv. in Noordelijke richting. Wat zal nu de coupébewoner waarnemen? Rijdt hij achteruit (zie fig. 13) dan zal hij t.o. van de bank een versnelling krijgen, waardoor hij, als hij zich niet vasthoudt of door wrijving tegengehouden wordt, van de bank afvliegt. Diezelfde versnelling zal hij bij alle losse voorwerpen waarnemen. Rijdt hij daarentegen vooruit, dan zal hij zich plotseling tegen den rug van de bank gedrukt voelen, zooals ook alle voorwerpen tegen den Zuidwand gaan drukken. Die drukking zal evenredig zijn met de trage massa van den persoon of het voorwerp, *dus ook met de zware massa*, de eenige, die de coupébewoner kent.

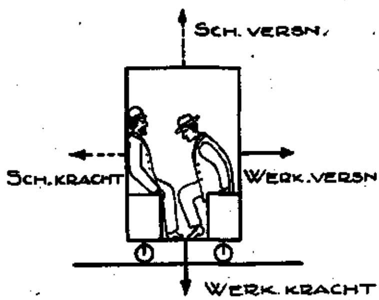

Fig. 13.

In beide gevallen zal hij, die van traagheidsverschijnselen niets afweet, verklaren, dat er een horizontale (in Zuidelijke richting) trekkende kracht is opgetreden, die op hem en alle in den coupé aanwezige voorwerpen werkt, die aan alle lichamen dezelfde versnelling geeft en aan alle lichamen een „horizontaal gewicht" verleent evenredig met hun zware massa, en die dus van geheel denzelfden aard is als de vertikale (naar beneden) trekkende kracht, die hij reeds vroeger kende.

Wij echter, met onze grootere natuurkennis, geven hem ditmaal geen gelijk! Wij toch, die de beweging van den geheelen trein kennen, weten dat de kracht, die hij waarneemt, slechts *schijn* is, dat zijn waarnemingen slechts traagheidsverschijnselen betreffen! Maar . . . geven we ons eens onbevangen rekenschap van wat werkelijk wordt waargenomen, dan komen we al spoedig tot het inzicht, dat de verklaring van den coupébewoner nog zoo gek niet was, dat ze, zij 't misschien minder eenvoudig, niettemin *even juist* is als de onze.

Onze coupébewoner heeft dus het volste recht de verschijnselen, die wij met de traagheidswet verklaren, te wijten aan een voortdurende horizontaal werkende kracht.

We stellen ons nu eens een tweeden coupébewoner voor, die niet alleen die genoemde verschijnselen — naar onze opvatting terecht — aan traagheidswerkingen toeschrijft, maar zelfs zulk een grondigen afkeer heeft van aantrekkende krachten, dat hij ook van de zwaartekracht — die wij wèl erkennen — het bestaan loochent. Hij dan beweert, dat de heele coupé (trein) een standvastige versnelling heeft, *naar boven* gericht. Aan die versnelling nemen alle voorwerpen deel, die met den coupé vast verbonden zijn, of die op de bank liggen en bij wijze van traagheidsprotest op die bank drukken met een kracht evenredig met hun *trage* massa. Daarentegen zullen de „vrije" voorwerpen, die los zijn, dus niet met de bank mee opgetild worden, in die versnelling *niet* deelen, en krachtens hun traagheid in rust blijven of in een eventueele eenparige beweging. Dit volharden in hun ouden bewegingstoestand openbaart zich echter daarin, dat ze ten opzichte van den coupé een versnelling naar beneden krijgen, en wel alle *dezelfde versnelling*. Aldus redeneert onze zwaartekracht-afschaffer.

Mogen wij hem nú ongelijk geven? Neen! Zijn verklaring van de betrekkelijke versnelling tusschen coupé en vrij voorwerp moge minder eenvoudig zijn van de onze, minder juist is ze zeker niet!

We zien hieruit, dat een standvastige versnelling, dank zij de traagheid, dezelfde verschijnselen teweegbrengt als een tegengesteld gerichte standvastige aantrekkingskracht, die, evenals onze zwaartekracht, aan elk lichaam, wat ook zijn massa of andere natuurkundige eigenschappen zijn, dezelfde versnelling geeft, — en dat omgekeerd de werking van zoo'n dergelijke standvastige aantrekkingskracht geheel overeenkomt met de traagheidseffecten van een tegengesteld gerichte standvastige versnelling.

We beschouwen nu een draaimolen, die regelmatig ronddraait. De draaimolen moge geheel dichtgetimmerd zijn, zoodat een persoon, die op den molen staat, geen kennis heeft van de buitenwereld en dus ook niet kan constateeren, dat hij zich voortdurend in een andere richting beweegt. De vraag is ook hier, wat zal zulk een persoon waarnemen? Blijkbaar alleen de z.g. „middelpuntvliedende kracht". De waarnemer zal zich naar den buitenwand toe getrokken voelen (zie fig. 14). Geeft hij aan die trekkende kracht geheel gehoor, dan is zijn versnelling voortdurend gericht volgens de lijn, die den persoon met de as verbindt, en wel van de as af. Het bedrag van de versnelling is verschillend op verschillende afstanden van de as (het is met dien afstand evenredig); maar *elk* voorwerp, dat zich op een zelfden gegeven afstand van de as bevindt, krijgt dezelfde versnelling. Wordt daarentegen de persoon of het voorwerp in zijn beweging van de as af verhinderd, bijv. door den tegenstand van den wand, dan openbaart zich die middelpuntvliedende kracht in een drukking, die, behalve van den afstand tot de as, afhangt van de trage massa van den persoon of het voorwerp, en wel daarmee evenredig is. Het is dus voor dien waarnemer alsof er een horizontale gravitatie werkt, die overal van de as af is gericht, en waarvan het bedrag verandert met den afstand tot de as. En wanneer hij aan die gravitatie realiteit toekent en niet weten wil van traagheidswerkingen, dan staat het ons wel vrij om die verklaringswijze onpraktisch te noemen, maar niet om haar als ondeugdelijk te verwerpen. De waarnemer op den draaimolen zal er zich van zijn standpunt tereeht over verwonderen, dat wij in onze werktuigkunde met zulk een spitsvondige redeneering die middelpuntvliedende kracht, die toch ieder aan den lijve kan voelen, weggoochelen.

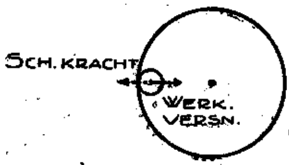

FIG. 14.

Zoowel in het voorbeeld van den spoorwegcoupé als in dat van den draaimolen konden we in elk punt van de beschouwde ruimte de versnelling aangeven, die elk voorwerp, hoe zijn natuurkundige gesteldheid ook zij, daar krijgt. Men spreekt in dit geval van een „*versnellingsveld*". Zulk een versnellingsveld kan ook tot een plat vlak of zelfs tot een enkele lijn beperkt worden.

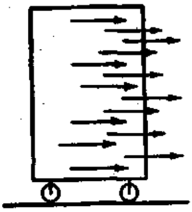

FIG. 15 a.

Bij den spoorwegcoupé was het versnellingsveld uniform (zie fig. 15a), elk punt kreeg dezelfde versnelling in richting en grootte. Bij den draaimolen is in elk punt de versnelling verschillend, 't zij in richting, 't zij in grootte (zie fig. 15b). Het versnellingsveld is hier niet uniform.

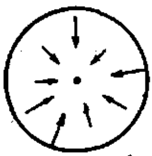

FIG. 15 b.

Evenals van een versnellingsveld spreekt men ook van een „*krachtveld*".

We hebben zoowel bij een uniform als bij een bijzonder niet-uniform versnellingsveld laten zien, dat dit versnellingsveld gelijkwaardig is met een zeker „gravitatieveld". Het zal wel duidelijk zijn, dat ditzelfde gezegd kan worden van elk willekeurig versnellingsveld, d. i. van elke versnellingsverdeeling, waarbij de versnelling uitsluitend afhangt van de *plaats* in het veld en *niet* van de bijzondere eigenschappen van het lichaam, dat aan de versnelling wordt onderworpen.

We kunnen ons resultaat als volgt formuleeren:

Elk versnellingsveld kan vervangen worden door een gravitatieveld: de *traagheidswerkingen*, die ten gevolge van de versnellingen optreden, worden dan geïnterpreteerd als *gravitatiewerkingen*. Omgekeerd kan ook elk gravitatieveld vervangen worden door een versnellingsveld.

Deze onderlinge gelijkwaardigheid van gravitatieveld en versnellingsveld is het, welke EINSTEIN geproclameerd heeft in zijn „gelijkwaardigheidsbeginsel" of „*aequivalentiebeginsel*" [1]).

Door een versnellingsveld te vertolken als gravitatieveld worden van alle met een zekere omgeving vast verbonden

[1]) A. EINSTEIN: Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Ann. der Physik, 4. Folge, Bd. 35 (1911), p. 898. Verg. ook. A. EINSTEIN: Ueber das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, Bd. 4 (1907), p. 411, 454.

punten de versnellingen weggenomen; de geheele bedoelde omgeving krijgt dan een eenparige rechtlijnige beweging en de verschijnselen, die van ouds op rekening van traagheid gesteld werden, worden dan geweten aan de werking van graviteerende krachten. Bovendien zal het opheffen der versnellingen, dus het veranderen der snelheden, krachtens het bijzondere relativiteitsbeginsel van invloed zijn op de lengte- en tijdmaten en zoodoende aan onze ruimte-tijd-wereld ongewone meetkundige en natuurkundige eigenschappen verleenen.

We zullen op enkele van deze eigenschappen de aandacht vestigen.

In de eerste plaats beschouwen we de baan van een lichtsein. Deze baan is in de klassieke mechanica en ook in de mechanica van het bijzondere relativiteitsbeginsel een rechte lijn, wanneer het lichtsein zich in een homogene

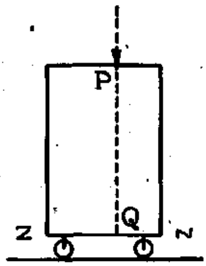

Fig. 16 a.

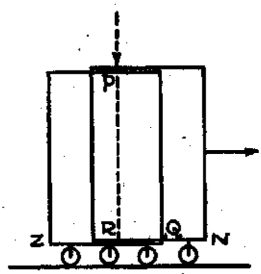

Fig. 16 b.

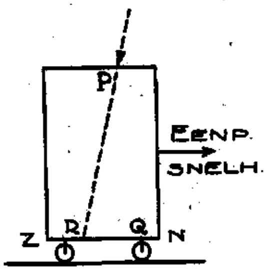

Fig. 16 c.

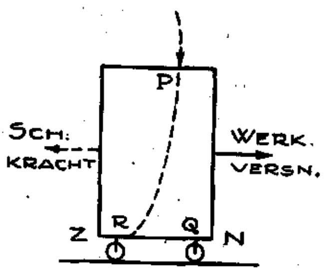

Fig. 16 d.

middenstof voortplant. Een kromlijnige lichtbaan wordt dienovereenkomstig geweten aan veranderlijkheid van den brekingsindex of, w.h.i., aan veranderlijkheid van de voortplantingssnelheid als gevolg van de natuurkundige eigenschappen der doorloopen middenstof.

Stellen we ons bijv. een lichtsein voor, dat zich in vertikale richting voortplant en van een *stilstaanden* spoorwegcoupé de zoldering in P en den vloer in Q treft. Zoowel voor een coupébewoner als voor een buitenstaander volgt het sein de *rechte lijn* PQ (zie fig. 16a).

Denken we ons nu den spoorwegcoupé in *eenparig-rechtlijnige* beweging (richting Zuid → Noord), dan zal in den tijd, dien het licht noodig heeft om den afstand tusschen zoldering en vloer af te leggen, de coupé zich verplaatst hebben, bijv. zóover, dat de plaats, die vroeger door 't punt Q werd ingenomen, nu ingenomen wordt door het punt R van den vloer. Voor den buitenstaander volgt het lichtsein nog steeds de vertikale baan door P (zie fig. 16b). Voor den coupébewoner is echter de lichtbaan niet meer vertikaal, maar ze is nog wèl *recht* (zie fig. 16c). Immers de horizontale verplaatsing is hier evenredig met den tijd, die op zijn beurt weer evenredig is met den vertikalen lichtweg.

Beschouwen we nu eens den spoorwegcoupé in *versnelde* beweging (Z. → N.). Dan zal de horizontale verplaatsing niet meer evenredig zijn met den tijd, dus ook niet meer met den in vertikale richting doorloopen lichtweg; de baan van het licht t. o. van den coupé zal dan *gekromd* zijn; de combinatie van de vertikale standvastige snelheid met de horizontale versnelling (Noord → Zuid) t. o. van den coupé levert (evenals bij den worp de horizontale standvastige snelheid met de vertikale benedenwaarts gerichte versnelling) een parabolische baan (zie fig. 16d). Een persoon, die zich binnen den versnelden spoorwegcoupé bevindt, neemt dus een kromlijnige lichtbaan waar; en als hij niets van zijn eigen versnelling (Zuid → Noord) afweet en dus geen verklaring kan geven met behulp van traagheid, zal hij die kromming toeschrijven aan de door hem bespeurde aantrekkingskracht in de richting Noord → Zuid. Daar hij de kromming van de lichtbaan aan den anderen kant in verband brengt met veranderlijkheid van de voortplantingssnelheid, zal hij zijn ervaring als volgt formuleeren:

De baan van een lichtsein, die zonder gravitatieveld recht is, wordt in een gravitatieveld gekromd en de voortplantingssnelheid wordt door de gravitatie gewijzigd.

Daar we, als aanhangers van het aequivalentiebeginsel, den coupébewoner geen ongelijk kunnen geven, kunnen we zijn verklaring niet minder juist achten dan onze oude opvatting van het verschijnsel, waarbij wij die kromming voor onwerkelijk hielden. We komen dus tot het besluit, dat een gravitatieveld de eigenschap heeft de baan van een lichtsein te krommen en de voortplantingssnelheid te wijzigen. Een lichtsein is dus vergelijkbaar met een stoffelijk voorwerp; wanneer dit aan de werking van een gravitatieveld wordt blootgesteld, wordt ook zijn eertijds eenparig-rechtlijnige beweging veranderd in een kromlijnige (worpbaan).

Uit deze stelling volgt, dat het bijzondere relativiteitsbeginsel, dat de onveranderlijkheid van de lichtsnelheid (in een homogene middenstof) vooropstelt, alleen geldt in een ruimte zonder gravitatieveld. Daar wij zulk een ruimte zonder gravitatie nergens aantreffen, is ons ook geen ruimte bekend, waarin het bijzondere relativiteitsbeginsel geldt. Daarmee is echter de beteekenis van dit beginsel geenszins verzwakt. Een gravitatielooze ruimte toch kan beschouwd worden als grensgeval van een steeds zwakker wordend gravitatieveld, en een *zwak* gravitatieveld zal *bij benadering* dezelfde eigenschappen hebben als een gravitatieloos veld. Welnu, zoo zal ook de theorie van het bijzondere relativiteitsbeginsel, d. i. de theorie van de gravitatielooze ruimte-tijd-wereld, een *bij benadering juiste* beschrijving geven van een zwak gravitatieveld. Maar ook — wat zeker niet minder belangrijk is — de theorie van de gravitatielooze ruimte kan als model dienen bij den opbouw van de algemeenere theorie; en inderdaad heeft EINSTEIN bij het ontwerpen van de theorie van het algemeene relativiteitsbeginsel de leer van het bijzondere relativiteitsbeginsel voor oogen gehad.

Zooals we hierboven reeds aankondigden, heeft de toepassing van het aequivalentiebeginsel ook verstrekkenden invloed op onze meetkundige begrippen. Om dezen invloed na te gaan zullen we ons nog eens verplaatsen in den toestand van den waarnemer op den draaimolen. We onderstellen, dat de opmetingen bij stilstand geleerd hebben, dat de vloer van den molen volkomen vlak is en door een zuiver cirkelvormigen rand begrensd wordt. We denken ons nu den molen in draaiende beweging met eenparige hoeksnelheid en op den molen een meedraaienden waarnemer. Deze waarnemer gaat den straal van den cirkelvormigen buitenrand meten; hij vindt daarvoor de waarde a. Vervolgens gaat hij den omtrek van den buitenrand meten. Elk punt van den rand heeft, ten gevolge van de draaiing, dezelfde snelheid, bijv. v. Deze snelheid bewerkt echter, dat een meetketting, die langs den rand gelegd wordt, een Lorentz-verkorting ondergaat, dus k maal zoo kort wordt $\left(k = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$; onze waarnemer krijgt dus als uitslag van zijn meting niet $2\pi a$, maar $2\pi a \times k$; hij vindt voor de verhouding van omtrek tot middellijn niet $\pi = 3,14...$, maar $k \times \pi$, dus een getal *grooter* dan π. Onze waarnemer komt zoodoende tot de ontdekking dat onze planimetrie niet deugt, althans niet voor hem. Hoe dit te verklaren? Twee verklaringsmethoden dringen zich op:

1° òf onze planimetrie is niet algemeen geldig,

2° òf onze planimetrie is wèl algemeen geldig, maar de waarnemer verwacht *ten onrechte* een uitslag der meting overeenkomstig de planimetrie, omdat de vlak gewaande vloer inderdaad *niet vlak* is.

We zullen eerst de laatste mogelijkheid bespreken.

De waarnemer heeft, nemen we aan, eerst geconstateerd, dat elk punt van den omtrek denzelfden afstand a heeft van het punt M, waar de as van den molen den vloer treft. Liggen de punten van den rand dan al niet op een cirkelomtrek, zoo liggen ze toch in elk geval op een bolppervlak met M als middelpunt en a tot straal. Dat de omtrek van den rand niet $2\pi a$, maar méer bedraagt, is gemakkelijk te verklaren door te onderstellen, dat de rand niet samenvalt met een grooten cirkel van den bol (den aequator), maar met een lijn, die zich om een grooten cirkel heenslingert (zie fig. 17).

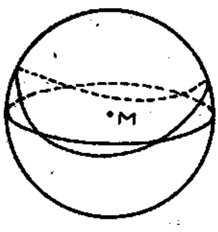

FIG. 17.

Verbindt men de punten van zulk een lijn met het middelpunt door rechte lijnen, dan onstaat een oppervlak van zadelvormige gedaante (zie fig. 18). De waarnemer zal dus zijn geloof in onze planimetrie kunnen behouden, maar dan tot het besluit moeten komen, dat de vloer, die in rust vlak was, door de draaiing gebogen wordt en een zadelvorm krijgt.

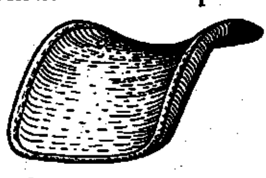
FIG. 18.

Nu de andere mogelijkheid.

De man op den molen kan onze planimetrie (en stereometrie) voor ongeldig verklaren. Hoe vreemd dit moge schijnen, daartoe heeft hij het volste recht. Onze meetkundige stellingen toch berusten in laatste instantie op een stel axioma's, die wel zeer aannemelijk zijn, wel groote praktische waarde hebben voor onze natuurbeschrijving, maar allerminst onaantastbaar zijn. Het verwerpen van onze meetkunde komt dus neer op de, op zichzelf volkomen gerechtvaardigde, verloochening van een of meer axioma's.

Eén axioma moet het in 't bijzonder ontgelden, nl. het axioma der evenwijdige lijnen (z.g. postulaat van EUCLIDES). Dit axioma beweert, dat door een punt P buiten een lijn l één en slechts één lijn gaat, die, hoewel met l in één vlak liggend, *l niet snijdt*. Deze éene lijn door P heet dan *evenwijdig* met l. Onze planimetrie, welke op dit axioma steunt, heet naar den Griekschen wiskundige EUCLIDES (ong. 300 v. Chr.), die haar 't eerst als een stelsel heeft opgebouwd, de *Euclidische* meetkunde. Een van de stellingen, die onmiddellijk uit dit axioma voortvloeien, is dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan een gestrekten hoek.

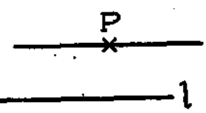

FIG. 19a.

Wanneer we het genoemde axioma der evenwijdige lijnen laten vallen, moeten we er natuurlijk een ander voor in de plaats stellen. We kunnen dan twee kanten uit:

I. We kunnen aannemen, dat door een punt P *verscheidene* lijnen gaan, die, hoewel met l in één vlak liggend, *l niet snijden*. Deze onderstelling is voor 't eerst volledig uitgewerkt door de Hongaarsche wiskundigen WOLFGANG en JOHANN BOLYAI en door den Russischen wiskundige LOBATSCHEWSKY, en wel ongeveer gelijktijdig (1829 en 1830). De „*niet-Euclidische*" meetkunde, die op dezen grondslag verrees, heet in den regel naar LOBATSCHEWSKY; ze wordt ook wel *hyperbolische* meetkunde genoemd.

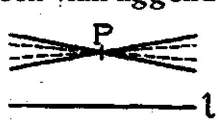

FIG. 19b.

II. We kunnen aannemen, dat door een punt P *geen enkele* lijn gaat, die, hoewel met l in één vlak liggend, *l niet snijdt*.

Deze opvatting voert tot de z.g. *elliptische* niet-Euclidische meetkunde, ook wel genoemd naar den Duitschen wiskundige RIEMANN, die in 1854 de aandacht op haar bestaansmogelijkheid vestigde.

Deze laatste niet-Euclidische meetkunde toont groote verwantschap met de meetkunde op den *bol.* Wanneer we in alle stellingen van de bolmeetkunde de groote cirkels of *geodetische lijnen* (d. z. lijnen van kortste verbinding tusschen twee punten) vertalen door rechte lijnen in 't platte vlak, krijgen we een meetkunde zooals die volgt uit het axioma van RIEMANN. Evenals bij een boldriehoek is bij een rechtlijnigen driehoek van RIEMANN de som der hoeken *grooter* dan een gestrekte hoek.

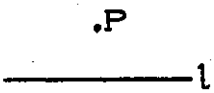

FIG. 19c.

De hyperbolische meetkunde is analoog met de meetkunde op een ander oppervlak, de z.g. *pseudosfeer* (zie fig. 20), dat in elk punt zadelvormig is. In de pseudosferische meetkunde zijn de geodetische lijnen aan dezelfde wetten onderworpen als de rechte lijnen in de meetkunde van LOBATSCHEWSKY. De som der hoeken van een driehoek is hier *kleiner* dan een gestrekte hoek.

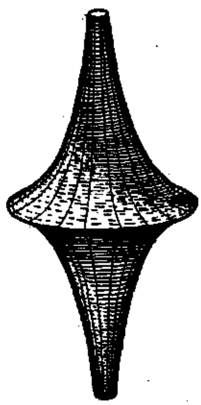
FIG. 20.

Onze gewone meetkunde heet, behalve „Euclidische", ook wel „*parabolische*" meetkunde.

Trekt men dus de waarheid van onze planimetrie in twijfel, dan kan men òf twijfelen aan het recht om zich überhaupt van *vlakke* meetkunde te bedienen, òf de planimetrie wijzigen, hetzij in den zin van RIEMANN, hetzij in dien van LOBATSCHEWSKY. Men kan de betrekkelijke geldigheid van onze Euclidische meetkunde ook door een denkbeeldige, maar geenszins logisch-onmogelijke proef toelichten.

Op een tafel worden om een punt O heen 5 aan elkaar grenzende gelijkzijdige driehoeken geconstrueerd, door onderling gelijke staafjes aan elkaar te laten sluiten ($OA =$ $= OB = OC = OD = OE = OF = AB = BC = CD =$ $= DE = EF$, zie fig. 21a). Als onze meetkunde waar is, zal blijken, dat de verbindingslijn der punten A en F *even lang* is als de staafjes, zoodat de driehoek OAF eveneens gelijkzijdig is. Tegelijk is dan daarmee geconstateerd, dat de som van de hoeken van een driehoek 180° bedraagt. Immers uit de symmetrie volgt, dat in een gelijkzijdigen driehoek alle hoeken even groot zijn, dus ieder $^1/_3$ van de hoekensom. Daar nu om O heen 6 gelijkzijdige driehoeken liggen, vormen de 6 hoeken om O samen 2 maal de hoekensom, zoodat de hoekensom gelijk is aan een gestrekten hoek.

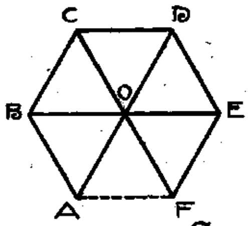

FIG. 21 a.

Laten we nu eens aannemen, dat de tafel verwarmd wordt, maar gemaakt is van materiaal, dat bijna niet door verwarming uitzet; dat daarentegen de staafjes een grooten uitzettingscoëfficient hebben en bovendien de temperatuur van de tafel spoedig overnemen.

We onderstellen dan eerst, dat de temperatuur in O het *laagst* is en om O heen regelmatig toeneemt.

De dwarsstaafjes AB, BC, CD, DE, EF, die gemiddeld op een warmer gebied liggen dan de straalstaafjes $OA, \ldots, OF$, zullen zoodoende langer worden dan deze laatste; de driehoeken worden in plaats van gelijkzijdig gelijkbeenig; hun basis wordt grooter dan de opstaande zijden en hun tophoek grooter dan hun basishoeken (zie fig. 21b). Daar de hoekensom 180° is, zijn de tophoeken om O grooter dan 60°, tengevolge waarvan $\angle AOF$ kleiner is dan 60°.

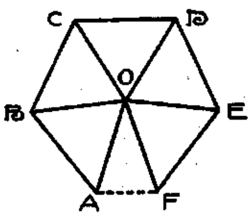

FIG. 21 b.

Zoo althans verklaren wij, die aan onze planimetrie vasthouden en de oorzaak der vormverandering kennen, het feit dat de afstand AF kleiner is dan de staaflengte en dat zoodoende de sluiting *onmogelijk* is.

Hoe zal echter iemand, die van de temperatuurverschillen en de daarmee samenhangende uitzettingen van de staven niets bemerkt, de sluitingsfout verklaren? Voor hem, die zich met zijn meetstaven overal onmiddellijk aan de temperatuur aanpast, zijn alle driehoeken nog steeds gelijkzijdig, dus alle hoeken om O nog altijd gelijk aan $^1/_3$ van de hoekensom. Daar hij echter constateert, dat 6 hoeken om O, d.i. 2 maal de hoekensom, meer dan twee gestrekte hoeken vormen, is zijn conclusie, dat de hoekensom *grooter* is dan een gestrekte hoek. Zijn „natuur" wordt het eenvoudigst beschreven in de niet-Euclidische meetkunde van RIEMANN, in de elliptische meetkunde. Wil hij echter de Euclidische meetkunde handhaven, dan kan hij zich redden door aan te nemen, dat de tafel niet vlak maar gebogen is, en wel bolvormig, zoodat de 5 gelijkzijdige driehoeken naar elkaar toekomen op de wijze als dat geschiedt bij 't vouwen van een regelmatige 5-zijdige pyramide.

Onderstellen we aan den anderen kant, dat de temperatuur in O het *hoogst* is en om O heen regelmatig afneemt, dan worden voor ons de dwarsstaafjes kleiner dan de straalstaafjes, de tophoeken om O kleiner dan 60° en dus $\angle AOF$ grooter dan 60° (zie fig. 21c).

Zoo verklaren *wij* dan het feit, dat AF grooter is dan de staaflengte en dat ook hier de sluiting mislukt.

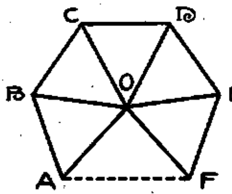

FIG. 21 C.

Hij echter, wiens meetstaven zich bij alle temperaturen onmiddellijk precies eender gedragen als de driehoekszijden, verklaart nog steeds alle driehoeken voor gelijkzijdig. Voor hem is het dubbele van de hoekensom kleiner dan twee gestrekte hoeken, dus de hoekensom kleiner dan een gestrekte hoek. Hij kan van de sluitingsfout slechts rekenschap geven door zich te plaatsen op het standpunt van LOBATSCHEWSKY; voor hem is de niet-Euclidische hyperbolische meetkunde de meest „natuurlijke".

Alleen dáardoor zou hij aan de parabolische (Euclidische) meetkunde kunnen vasthouden, dat hij de tafel, in plaats van vlak, gebogen aannam en wel zadelvormig.

Wanneer echter een welving van het vlak om andere redenen minder aannemelijk is, bijv. omdat bij de welving de richtingen om O ongelijkwaardig worden, is de eenig mogelijke uitweg de niet-Euclidische meetkunde.

Hiermee is door een natuurkundig voorbeeld opgehelderd in hoe hooge mate onze meetkundige grondbegrippen afhankelijk zijn van onze natuurkundige ervaring, zoodat we niet den minsten aanstoot behoeven te nemen aan het prijsgeven van onze z.g. „beproefde" meetkunde, wanneer we daarmee bereiken, dat ons natuurbeeld aan eenheid van conceptie wint.

VII. HET ALGEMEENE RELATIVITEITSBEGINSEL.

Thans is het oogenblik gekomen voor het algemeene relativiteitsbeginsel.

Terwijl het bijzondere relativiteitsbeginsel verlangt, dat de natuurverschijnselen onafhankelijk zijn van een eventueele eenparige snelheid t.o. van den aether, dat dus de vormen der natuurwetten onveranderd blijven, wanneer men aan de omgeving, t.o. waarvan ze gelden, een eenparig-rechtlijnige beweging meedeelt, zoo eischt het algemeene relativiteitsbeginsel, dat de natuurwetten hun vorm behouden, *welken* bewegingstoestand de omgeving, t.o. waarvan ze gelden, ook moge hebben. Terwijl vroeger bij het bijzondere relativiteitsbeginsel de wetten, die t.o. van een bepaalde omgeving („coördinaatstelsel") golden, hun geldigheid verloren, zoodra die omgeving een versnelling onderging, zoo zal nu het algemeene relativiteitsbeginsel de natuurwetten in een wiskundigen vorm brengen, die bestand is tegen elke versnelling van het coördinaatstelsel.

In het vorige hoofdstuk leerde ons reeds het aequivalentiebeginsel, dat het aanbrengen of wegnemen van een versnelling verklaard kon worden als een verandering van het gravitatieveld, dat men m. a. w. aan elk coördinaatstelsel een willekeurigen bewegingstoestand kan geven, mits men tevens het behoorlijke gravitatieveld invoert. Een theorie, die elken bewegingstoestand relatief maakt, die dus willekeurige wijzigingen in den bewegingstoestand aanbrengt, zal krachtens dat aequivalentiebeginsel ook het gravitatieveld op willekeurige wijze vervormen. Het algemeene relativiteitsbeginsel zal zoodoende op het wezen der gravitatie een zeer bijzonder licht werpen, en ons inzicht in deze geheimzinnige natuurkracht verdiepen.

A. MEETKUNDIGE VOORBEREIDING.

Om tot die gedaante van de natuurwetten te geraken, die onafhankelijk is van den bewegingstoestand van het coördinaatstelsel, zullen we onze aandacht weer wijden aan het wereld-vlak (lengte-tijd-vlak), waarop de geschiedenis van een éendimensionale ruimte (rechte lijn) grafisch wordt voorgesteld, en waarin de wereldlijnen de geschiedenis van rustende of zich bewegende punten afbeelden. Elke mechanica heeft haar eigen coördinatentransformatie, welke laatste zich grafisch afspiegelt in een vervorming van het coördinaten-netwerk der rustlijnen en gelijktijdigheidslijnen.

Tot dusver hebben we kennis gemaakt met het diagram der klassieke mechanica en met dat van het bijzondere relativiteitsbeginsel. In beide diagrammen werd de (rechtlijnige) eenparige beweging afgebeeld door de rechte wereldlijn. Teneinde onze uitkomst later algemeener te kunnen formuleeren, zullen we deze *rechte* wereldlijn bepaaldelijk beschouwen in haar hoedanigheid van kortste verbindingslijn tusschen twee harer punten, of *geodetische lijn*. Men kan dus zeggen: in 't platte lengte-tijd-vlak zijn de wereldlijnen der (rechtlijnige) eenparige beweging geodetische lijnen.

De vergelijkingen van deze wereldlijnen waren van den eersten graad, dus van den vorm $Ax + Bt + C = 0$, waarin A, B, C constant zijn, d.w.z. onafhankelijk van x en t. We hebben reeds gezien, dat de betrekking van dezelfde gedaante blijft (alleen met andere coëfficienten), wanneer we, in plaats van de rechthoekige coördinaten x, t behoorende bij het vierkanten-netwerk, ons bedienen van de scheefhoekige coördinaten x', t', hetzij behoorende bij het parallelogrammen-netwerk der klassieke mechanica, hetzij behoorende bij het ruiten-netwerk van het bijzondere relativiteitsbeginsel.

De plaats van een punt in het vlak kan echter op nog tallooze andere manieren door een getallenpaar worden aangegeven.

Men kan bijv. de ligging van het punt P beschrijven door aan te geven hoe groot zijn afstand is tot een vast punt M, en welken hoek de lijn MP met een gegeven richting ML maakt. Deze afstand $MP = x'$ en de hoek $LMP = t'$ heeten de „poolcoördinaten" van P; in 't bijzonder heet x' de „voerstraal" en t' het „argument" van P. Ook het hier vermelde stelsel van poolcoördinaten geeft het aanzijn aan een coördinaten-netwerk, en wel bestaande uit de lijnen waarvoor x' constant is — dat zijn de cirkels met M als mid-

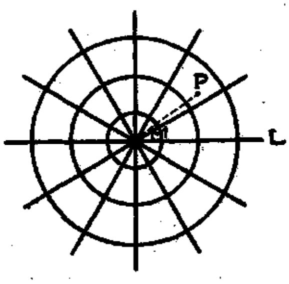

FIG. 22.

delpunt —, en de lijnen waarvoor t' constant is — dat zijn de rechte lijnen door M (zie fig. 22).

Kiest men voor het vaste punt M het punt O, welks rechthoekige coördinaten zijn $x = 0$, $t = 0$, en voor de beginrichting ML door M de oude t—as ($x = 0$), dan bestaan tusschen de coördinaten x, t eenerzijds en de coördinaten x', t' anderzijds de betrekkingen

$$t = x' \cos t' \quad , \quad x = x' \sin t', \qquad (9)$$

en de vergelijking $Ax + Bt + C = 0$ gaat dan over in $Ax' \sin t' + Bx' \cos t' + C = 0$; ze is derhalve in x' en t' *niet* van den eersten graad (in welk geval ze zou moeten zijn van den vorm $A'x' + B't' + C' = 0$).

Naast dit eene voorbeeld zou men nog ontelbaar veel coördinaatstelsels kunnen noemen; bij elk coördinaatstelsel behoort een coördinaten-netwerk bestaande uit twee lijnenstelsels. Van een lijn van 't eene lijnenstelsel hebben alle punten dezelfde waarde van x', terwijl alle punten van een lijn van 't andere stelsel de waarde van t' gemeen hebben. De waarden van x' en t', die bij een bepaald punt behooren, zullen bij elk coördinaatstelsel volgens een zekere wet sa-

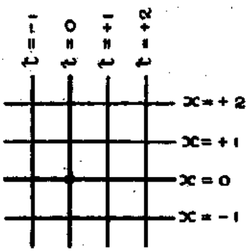

FIG. 23 a.

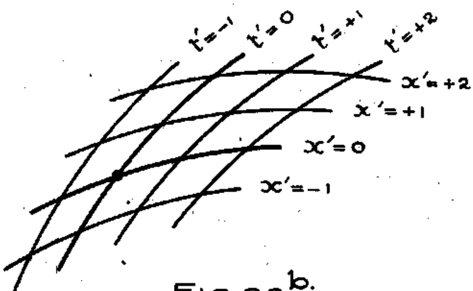

FIG. 23 b.

menhangen met de waarden, die de rechthoekige coördinaten x, t in dat punt hebben, en omgekeerd zal men x en t uit de transformatieformules moeten kunnen berekenen, zoodra x' en t' gegeven zijn (zie fig. 23 a en b.).

Ook uitdrukkingen, waarin *verschillen* van coördinaten optreden, zullen door de transformatiebetrekkingen omgezet worden in verwante uitdrukkingen, waarin de verschillen der nieuwe coördinaten voorkomen; in 't bijzonder denken we hierbij aan oneindig kleine verschillen, „differentialen", waarvan de wetten eenvoudiger zijn dan die der eindige verschillen.

We leerden reeds in Hoofdstuk IV een dergelijke differentiaaluitdrukking kennen, n.l. $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$; deze vertoonde de eigenaardigheid, dat ze haar vorm behield, als we door de transformatieformules van het bijzondere relativiteitsbeginsel de coördinaten x, t deden overgaan in x', t'. Deze bijzondere gedaante verdwijnt echter onmiddellijk, zoodra men een andere transformatie toegepast. Zoo geeft bijv. de transformatie der klassieke mechanica (Ia): $dx = dx' + v.dt'$, $dt = dt'$:

$$dt^2 - dx^2 = dt'^2 - (dx' + v.dt')^2 = (1 - v)^2.dt'^2 - 2\,v.dt'.dx' - dx'^2,$$

een uitdrukking, die geheel verschilt van de oorspronkelijke.

Naast den differentiaalvorm $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ willen we in 't bijzonder beschouwen de uitdrukking

$$d\sigma^2 = dt^2 + dx^2, \qquad (10)$$

die hiermee nauw verwant is en van groot belang wegens haar meetkundige beteekenis.

Deze uitdrukking is ontstaan uit den eindigen vorm

$$(t_1 - t)^2 + (x_1 - x)^2.$$

Zijn x en t de rechthoekige coördinaten van het vierkanten-netwerk, en behooren x, t bij een punt P en x_1, t_1 bij een punt P_1, dan stelt de genoemde uitdrukking blijkbaar voor: de tweede macht van den afstand PP_1 der beschouwde punten P en P_1.

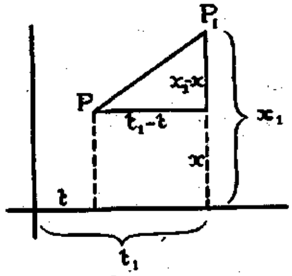

FIG. 24.

Neemt men nu P_1 oneindig dicht bij P, dan gaan de eindige coördinaatverschillen over in differentialen, zoodat de differentiaal

$$d\sigma = \sqrt{dt^2 + dx^2}$$

de beteekenis krijgt van den oneindig kleinen afstand tusschen P en P_1. Zulk een oneindig kleine afstand heet „lijnelement". Daar de lengte van elken boog, hoe ook gekromd, beschouwd kan worden als te zijn opgebouwd uit een oneindig aantal van dergelijke lijnelementen, is het niet te verwonderen, dat dit lijnelement (of „boogelement") tot de allerbelangrijkste wiskundige begrippen behoort.

Onderwerpt men de coördinaten x en t aan de bijzondere transformatie:

$$t = t', \; x = x' . \sqrt{-1},$$

dan gaat daarmee gepaard

$$dt = dt', \; dx = dx'.\sqrt{-1},$$

met het gevolg dat

$$d\sigma^2 = dt^2 + dx^2 = dt'^2 - dx'^2.$$

Deze transformatie toont aan, hoe innig de samenhang tusschen beide differentiaalvormen is. Men zou dus kunnen volstaan met de studie van één der beide vormen, ware 't niet, dat er, uit het oogpunt van de meetkundige voorstelling, een onoverbrugbare afgrond tusschen beide vormen gaapt; de brug toch, die dezen afgrond heet te overspannen, is slechts denkbeeldig, de verbindende transformatie is *imaginair*; van hoeveel waarde ook voor de analytische behandeling, voor de meetkundige beschrijving is ze ongeschikt.

We zullen dus die beide differentiaalvormen afzonderlijk houden, maar ons voor de analytische eigenschappen van $d\tau^2$ beroepen op die van $d\sigma^2$.

In de eerste plaats zullen we stilstaan bij de verschillende gedaante, die het kwadraat van 't lijnelement kan aannemen, wanneer we van de rechthoekige „rechtlijnige" coördinaten x, t overgaan op „scheefhoekige" en „kromlijnige" coördinaten x', t', d. w. z. op coördinaten, waarvan 't netwerk scheefhoekig of kromlijnig of beide is.

Als voorbeeld kiezen we eerst de scheefhoekige rechtlijnige coördinaten x', t' van de klassieke mechanica; we passen dus de transformatie (Ia) toe: $dx = dx' + v.dt'$, $dt = dt'$; er komt dan

$$dt^2 + dx^2 = dt'^2 + (dx' + v.dt')^2 = (1 + v^2).dt'^2 + 2\,v.dt'.dx' + dx'^2,$$

zoodat de uitdrukking (10) overgaat in de anders gebouwde uitdrukking

$$d\sigma'^2 = (1 + v^2).dt'^2 + 2\,v.dt'.dx' + dx'^2. \tag{10'}$$

Het verschil met $d\sigma^2$ bestaat in de eerste plaats in de aanwezigheid van een term met het product $dt'.dx'$ en in de tweede plaats in de onderlinge ongelijkheid der coëfficienten. Toch komt $d\sigma'^2$ daarin met $d\sigma^2$ overeen, dat alle coëfficienten constant zijn, d. w. z. onafhankelijk van de coördinaten x', t' van het punt, waar 't lijnelement gelegen is.

Als tweede voorbeeld nemen we de scheefhoekige rechtlijnige coördinaten x', t' van het bijzondere relativiteitsbeginsel; we voeren dus de transformatie (II'a) uit: $dx = k\,(dx' + v.dt')$, $dt = k\,(dt' + v.dx')$ en vinden dan

$$dt^2 + dx^2 = k^2\,(dt' + v.dx')^2 + k^2\,(dx' + v.dt')^2 = \\ = k^2\,(1 + v^2).\,dt'^2 + 4\,k^2\,v.dt'.dx' + k^2\,(1 + v^2).\,dx'^2.$$

Ook hier heeft de vorm (10) van $d\sigma^2$ met den vorm

$$d\sigma'^2 = k^2\,(1 + v^2).\,dt'^2 + 4\,k^2\,v.dt'.dx' + k^2\,(1 + v^2).\,dx'^2 \qquad (10'')$$

gemeen, dat de coëfficienten constant zijn, terwijl de afwijking bestaat in de waarde der coëfficienten.

Ons derde voorbeeld zij ontleend aan de (rechthoekige, kromlijnige) poolcoördinaten. Terwijl de analytische berekening van den differentiaalvorm $d\sigma'^2$ uit de transformatieformules (9): $t = x'\cos t'$, $x = x'\sin t'$ eenige wiskundige voorbereiding zou vereischen en dus ons betoog te veel op zijpaden zou brengen, kunnen we hier betrekkelijk eenvoudig den gezochten differentiaalvorm onmiddellijk afleiden.

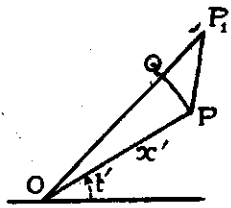

FIG. 25.

We beschouwen daartoe als boven twee punten P en P_1; deze verschillen in 't algemeen zoowel in de waarde van den voerstraal x' als in de waarde van het argument t'. De cirkel door P om O moge OP_1 snijden in Q (zie fig. 25); dan is $QP_1 = x'_1 - x'$; verder is $\angle POP_1 = t'_1 - t'$. De boog PQ van den cirkel is gelijk aan het product van den straal $OP = x'$ en den hoek $\angle POP_1$ wanneer deze gemeten wordt in *radialen* (1 radiaal $=$ $= \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',8..$). Nemen we dus (ook in 't vervolg steeds) aan, dat t' in radialen is uitgedrukt, dan geldt voor den boog PQ

$$PQ = x' \times (t'_1 - t').$$

Hoe dichter P_1 bij P wordt gekozen, des te kleiner worden de verschillen $x'_1 - x'$ en $t'_1 - t'$; bovendien nadert de boog PQ hoe langer hoe meer tot een *recht* lijntje, dat loodrecht staat op QP_1. Ten slotte, wanneer P_1 oneindig dicht bij P is gekomen, zullen de lijnen $PQ = x'.dt'$ en $QP_1 = dx'$ de rechthoekszijden zijn van een rechthoekigen driehoek, waarin dan het lijnelement $PP_1 = d\sigma'$ zal zijn de hypotenusa. Men heeft dan

$$PP_1^2 = PQ^2 + QP_1^2$$

of

$$d\sigma'^2 = x'^2.dt'^2 + dx'^2.$$

Deze uitdrukking komt met $d\sigma^2$ overeen in de afwezigheid van een term met $dt'.dx'$; ze verschilt echter van $d\sigma^2$ daarin, dat de coëfficient van dt'^2, n.l. x'^2, *niet constant* is, maar afhangt van x', d.i. van de waarde van een der coördinaten van het punt P, dus van de ligging van dat punt.

We kunnen nu gemakkelijk voorspellen, hoe de vorm $d\sigma'^2$ er uit moet zien, wanneer we $d\sigma^2$ aan de meest algemeene transformatie onderwerpen.

1°. Er zullen drie termen zijn, één met dt'^2, één met $dt'.dx'$ en één met dx'^2; noemen we de coëfficienten resp. E, $2F$, G, dan verwachten we

$$d\sigma'^2 = E.dt'^2 + 2F.dt'.dx' + G.dx'^2. \qquad \text{(10bis)}$$

2°. De coëfficienten E, F en G zullen in 't algemeen *niet constant* zijn, maar integendeel afhankelijk zijn van de coördinaten x', t' van het punt waar het lijnelement gelegen is; in de wiskunde zegt men: E, F en G zijn „functies" van x' en t', die in bijzondere gevallen constant, en dus ook wel eens *nul* kunnen zijn.

Deze laatste uitspraak aangaande de transformatie van den differentiaalvorm (10) ($d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$) geldt, mutatis mutandis, evenzeer voor den vorm (8'): $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$.

Een willekeurige coördinatentransformatie $x, t \rightarrow x', t'$ doet $d\tau = dt^2 - dx^2$ overgaan in een uitdrukking van de gedaante

$$d\tau'^2 = P.dt'^2 + 2Q.dt'.dx' + R.dx'^2, \qquad \text{(8bis)}$$

waarin P, Q en R „functies" zijn van x' en t' (afhangen van x' en t').

In verband met hetgeen we over het algemeene relativiteitsbeginsel hebben mee te deelen zullen we allereerst deze vraag stellen:

Kunnen P, Q en R *alle mogelijke* functies zijn van x' en t', d. w. z. op de meest willekeurige wijze van x' en t' afhangen?

Hiermee bedoelen we:

Zal er bij elke uitdrukking (8bis) voor $d\tau'^2$, hoe P, Q en R er ook uitzien, een coördinatentransformatie behooren, die $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ in die gegeven uitdrukking $d\tau'^2$ omzet?

Of, als we de transformatie in omgekeerden zin toepassen, en overgaan van x', t' op x, t:

Zal *elke uitdrukking* (8bis) door een zekere transformatie $x', t' \rightarrow x, t$ kunnen omgezet worden in de uitdrukking (8'): $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$?

Zoo niet, wèlke uitdrukkingen $d\tau'^2$ dan wèl?

Deze vraag zal zijn beantwoord, wanneer we bescheid weten op de hiermee bijna gelijkwaardige vraag:

Zal *elke* uitdrukking (10bis): $d\sigma'^2 = E.dt'^2 + 2F.dt'.dx' + G.dx'^2$, waarin E, F en G *willekeurige* functies zijn van x' en t', door een zekere transformatie $x', t' \rightarrow x, t$ kunnen overgaan in de gedaante: $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$, en zoo niet, welke differentiaalvormen $d\sigma'^2$ komen dan wèl voor deze gedaanteverwisseling in aanmerking?

We kunnen dit probleem nòg anders inkleeden:

Kan men altijd de veranderlijken x' en t' zoodanig als coördinaten *in het platte vlak* interpreteeren, dat de differentiaalvorm (10bis): $d\sigma'^2 = E.dt'^2 + 2F.dt'.dx' + G.dx'^2$ (E, F, G functies van x' en t') het kwadraat van het lijnelement in het punt x', t' voorstelt, hòe die functies E, F, G ook gebouwd zijn?

Bij de beantwoording zullen we nagaan of een zekere differentiaalvorm $d\sigma'^2$, als ze het lijnelement in het platte vlak voorstelt (d. w. z. àls ze herleidbaar is tot $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$) ook misschien op *gebogen* oppervlakken de beteekenis van „kwadraat van 't lijnelement" houdt. Dit zal het geval zijn, mits er *gebogen* oppervlakken bestaan, die zóó uit een plat vlak kunnen worden gevormd, dat overal het lijnelement ongerept wordt gelaten. Het is duidelijk, dat het gebogen oppervlak dan moet kunnen ontstaan door *verbuiging* van het platte vlak *zonder scheuren of plooien*. Bij zulk een verbuiging behouden alle lengten en hoeken in de op 't vlak geteekende figuren hun oorspronkelijke grootte; het eenige verschil is, dat de lijnen niet meer recht en de hoeken niet meer vlak zijn. Op zulk een uit een plat vlak door verbuiging verkregen oppervlak geldt precies dezelfde meetkunde als op een plat vlak, met dien verstande dat de rechte lijnen van het platte vlak in hun hoedanigheid van kortste verbindingslijnen overgaan in *geodetische lijnen* van het gebogen oppervlak. Wanneer we dus op een plat vlak een zeker coördinaatstelsel x', t' hebben aangenomen, het lijnelement daarin hebben uitgedrukt en voor het kwadraat een zekere uitdrukking $d\sigma'^2 = E.dt'^2 + 2F.dt'.dx' + G.dx'^2$ hebben gevonden, dan zullen bij de verbuiging, al wordt ook het coördinaten-netwerk verbogen, de coördinaten x', t' hun beteekenis behouden, d. w. z.: een punt P met coördinaten x', t' zal terecht komen in een punt P', dat dezelfde waarden voor x' en t' heeft; en het punt P_1, welks afstand tot P $d\sigma'$ bedraagt, zal overgaan in een punt P_1' welks afstand tot P' precies hetzelfde bedrag $d\sigma'$ heeft.

Men kan dus zeggen, dat de hier beschouwde uitdrukking $d\sigma'^2$ bij geschikte keuze der coördinaten het kwadraat van het lijnelement voorstelt op elk gebogen oppervlak, dat uit een plat vlak ontstaat door verbuiging zonder scheuren of plooien. De oppervlakken, die met het platte vlak de hierboven beschreven verwantschap vertoonen, worden in de wiskunde in een enkele klasse samengevat onder den naam van „*ontwikkelbare oppervlakken*". Op een ontwikkelbaar oppervlak gelden dezelfde meetkundige stellingen als in het platte vlak, mits men de rechte lijnen geodetische lijnen noemt, enz. Elk ontwikkelbaar oppervlak heeft dezelfde „geografie" als het platte vlak. Voorbeelden van ontwikkelbare oppervlakken zijn: de kegel, de cylinder en verder elk oppervlak dat men door 't ombuigen van een stuk papier kan verkrijgen.

De uitdrukking (10): $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$ kan door alle mogelijke coördinatentransformaties $x, t \rightarrow x', t'$ omgezet worden in allerlei uitdrukkingen van de gedaante (10bis): $d\sigma'^2 = E.dt'^2 + 2F.dt'.dx' + G.dx'^2$, waarin E, F, G op zeer verschillende wijzen van x' en t' kunnen afhangen; en alle zoo verkrijgbare differentiaalvormen $d\sigma'^2$ zijn gemeenschappelijk bezit van alle ontwikkelbare oppervlakken.

Aan den eenen kant hebben de ontwikkelbare oppervlakken de eigenschap, dat al hun differentiaalvormen (10bis) voor het kwadraat van 't lijnelement door coördinatentransformatie te herleiden zijn tot (10): $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$. Aan den anderen kant kan men de ontwikkelbare oppervlakken daaraan herkennen, dat hun geodetische lijnen door verbuiging alle tegelijk *recht* kunnen gemaakt worden (in welk geval het oppervlak in een plat vlak is overgegaan).

De ontwikkelbare oppervlakken vormen echter slechts een zeer bijzondere klasse. In 't algemeen zal men een gegeven oppervlak *niet* zonder scheuren of plooien tot een plat vlak kunnen verbuigen. Een bol bijv. is niet ontwikkelbaar, d.w.z. niet verbuigbaar tot een plat vlak. De meetkunde van den bol is een andere dan die van 't platte vlak (men denke aan het verschil tusschen boldriehoeksmeting en vlakke driehoeksmeting). De geografie op den bol verschilt van die in 't platte vlak (hetgeen o.a. verklaart waarom 't onmogelijk is een landkaart geheel zuiver op een plat vlak te teekenen). Een zadelvormig oppervlak (bijv. de pseudosfeer) is evenmin ontwikkelbaar.

Ook op een niet-ontwikkelbaar oppervlak wordt de ligging van een punt door twee kenmerkende getallen (coördinaten) x', t' aangewezen. Punten, die de waarde van x' gemeen hebben, liggen samen op een zekere lijn; ook die punten, die eenzelfde waarde van t' hebben, worden door een zekere lijn verbonden. De lijnen, waarlangs x' constant is, en de lijnen, waarlangs t' constant is, vormen samen het coördinaten-netwerk. Het kwadraat van het lijnelement zal ook hier voorgesteld worden door een differentiaalvorm van de gedaante (10 bis): $d\sigma'^2 = E.dt'^2 + 2F.dt'.dx' + G.dx'^2$. *Maar deze vorm* $d\sigma'^2$ *zal niet door coördinatentransformatie in de gedaante* $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$ *kunnen overgaan.*

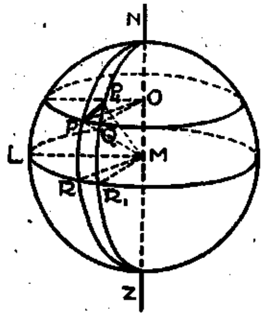

FIG. 26.

Beschouwen we als voorbeeld den bol en daarop twee punten P en P_1.

Bedienen we ons van geografische namen voor de coördinaten, dan kunnen we $\angle RMP = x'$ de „breedte" van P en $\angle LMR = t'$ de „lengte" van P noemen. Evenzoo is $\angle R_1MP_1 = x'_1$ de breedte van P_1 en $\angle LMR_1 = t'_1$ de lengte van P_1 (zie fig. 26).

Het lengteverschil van P en P_1 is $\angle RMR_1 = \angle POQ = t'_1 - t'$; het breedteverschil is $\angle R_1MP_1 - \angle RMP = \angle R_1MP_1 - \angle R_1MQ = \angle QMP_1 = x'_1 - x'$.

Denken we ons alle hoeken uitgedrukt in radialen en duiden we den straal van den bol aan met r, dan hebben we:

$$\smile QP_1 = r(x'_1 - x') \quad , \quad \smile PQ = OP \times (t'_1 - t') = r.\cos x'.(t'_1 - t').$$

Nemen we nu P_1 hoe langer hoe dichter bij P aan, dan worden eindelijk QP_1 en PQ rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek, welks hypotenusa PP_1 het gezochte lijnelement is. Men heeft dan

$$QP_1 = r.dx' \quad , \quad PQ = r.cosx'.dt'$$

en

$$PP_1^2 = PQ^2 + QP_1^2 = r^2.cos^2x'.dt'^2 + r^2.dx'^2$$

dus

$$d\sigma'^2 = r^2(cos^2x'.dt'^2 + dx'^2). \qquad (10^{IV}).$$

Ziehier een differentiaaluitdrukking voor het kwadraat van 't lijnelement, die door geen enkele coördinatentransformatie kan overgaan in $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$.

Ook de hier beschouwde uitdrukking (10^{IV}) voor het kwadraat van 't lijnelement kan door alle mogelijke coördinatentransformaties tallooze gedaanten aannemen, alle vallende onder het standaardtype (10bis), maar onder al de hier mogelijke uitdrukkingen $d\sigma'^2$ is er *geen enkel*, die ook behoort tot de ontwikkelbare oppervlakken.

De bol heeft dus een eigen klasse van vormen $d\sigma'^2$, die geen enkelen vorm gemeen heeft met de klasse der ontwikkelbare oppervlakken.

Ook uit den bol kunnen door verbuiging zonder scheuren of plooien tallooze oppervlakken ontstaan. Men kan bijv. den bol langs den halven meridiaan ZN opensnijden en het oppervlak zóo over zichzelf schuiven, dat het een spoelvormig model krijgt (zie fig. 27), waarbij dan de omwentelingsas langer is geworden dan de bolmiddellijn, terwijl de straal van den aequator kleiner is dan de straal van den bol.

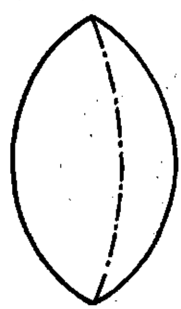

FIG. 27.

Alle oppervlakken, die door verbuiging uit den bol zijn voortgekomen, die, zooals men in de wiskunde zegt, op den bol „afwikkelbaar" zijn, hebben met den bol de klasse der vormen $d\sigma'^2$ gemeen.

Op den bol zijn de geodetische lijnen de groote cirkels; deze blijven bij afwikkeling geodetische lijnen.

Dat $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$ *niet* op den bol thuis behoort, vindt zijn pendant in de stelling, dat er geen enkel op den bol afwikkelbaar oppervlak bestaat, waarop de (uit de groote cirkels voortgekomen) geodetische lijnen alle recht zijn.

Men kan op deze wijze alle oppervlakken in klassen indeelen; men plaatst dan in eenzelfde klasse alle oppervlakken, die uit elkaar door verbuiging kunnen afgeleid worden (die op elkaar afwikkelbaar zijn). Elke klasse heeft dan haar eigen stel differentiaalvormen $d\sigma'^2$ voor het kwadraat van 't lijnelement.

De klasse der ontwikkelbare oppervlakken (waartoe het platte vlak behoort) is de eenige, die den vorm $d\sigma^2 = dt^2 + dx^2$ bezit.

Alle oppervlakken van dezelfde klasse hebben dezelfde meetkunde, dezelfde geografie; omgekeerd is de meetkunde op het oppervlak kenmerkend voor de klasse.

We hebben hierboven reeds besproken, dat de meetkunde op den bol ook geldt voor het platte vlak, wanneer men de hypothese van RIEMANN aanvaardt, dat elke lijn elke andere lijn snijdt. Door zich aldus te bedienen van de elliptische niet-Euclidische meetkunde kan men als 't ware het vlak met de eigenschappen van den bol toerusten. In 't bijzonder kan men, uitgaande van een elliptische niet-Euclidische definitie van *afstand*, de uitdrukking voor het lijnelement brengen in een der differentiaalvormen van de bolklasse. Evenzoo kan men met een hyperbolische niet-Euclidische definitie van afstand aan het lijnelement den vorm der pseudosfeerklasse meedeelen. Men kan dus een vorm $d\sigma'^2$ van de bolklasse beschouwen als kwadraat van 't lijnelement hetzij op den bol (beschreven in onze gewone Euclidische stereometrie), hetzij in het platte vlak (beschreven in de taal van de meetkunde van RIEMANN); en evenzoo een vorm $d\sigma'^2$ van de pseudosfeerklasse hetzij — Euclidisch — op de pseudosfeer interpreteeren, hetzij — volgens LOBATSCHEWSKY — in het platte vlak.

Evenals een oppervlak in 't algemeen onregelmatiger krommingshoedanigheden heeft dan de bol of de pseudosfeer, zal ook de niet-Euclidische meetkunde, zoo algemeen mogelijk opgevat, grilliger van structuur zijn dan die, welke in 't bijzonder naar RIEMANN en LOBATSCHEWSKY wordt genoemd.

De Euclidische interpretatie op een gebogen oppervlak heeft het voordeel, dat wij, die ons eigenlijk alleen behaaglijk voelen in den Euclidischen gedachtengang, ons niet met moeilijk verwerkbare begrippen behoeven te kwellen;

daarentegen het nadeel, dat we als drager der *twee*-dimensionale figuren een oppervlak noodig hebben, voor de voorstelling waarvan wij de ruimte van *drie* afmetingen opeischen. Moge dit nadeel niet zoo zwaar wegen bij een twee-dimensionale ruimte-tijd-wereld, omdat wij nu eenmaal toch zoo volkomen met de ruimte van drie afmetingen vertrouwd zijn, bedenkelijk wordt het, als we een driedimensionale ruimte-tijd-wereld (met twee ruimte-afmetingen en één tijd-afmeting) moeten krommen; de wiskunde leert, dat we bij zulk een kromming in 't algemeen op *zes* afmetingen beslag leggen; en onze eigenlijke ruimte-tijd-wereld, die drie ruimte- en één tijd-afmeting heeft, zou bij een willekeurige kromming zelfs *tien* afmetingen verlangen. Niettemin zullen we ons vooralsnog aan de Euclidische opvatting houden.

Na al deze voorbereidende beschouwingen, waarvan de differentiaalvorm $d\sigma'^2 = E.dt'^2 + 2F.dt'.dx' + G.dx'^2$ het middelpunt was, gaan we over tot ons eigenlijke onderwerp: den differentiaalvorm $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ en zijn gedaanteverwisselingen.

Ten einde ons met de minste moeite op de zooeven bereikte resultaten te kunnen beroepen, zullen we een paar namen invoeren. Den vorm $d\tau$, welks kwadraat hier beschouwd wordt, zullen we „*pseudolijnelement*" noemen. Gaan we langs een zekere lijn van 't punt P_0 naar 't punt P_1, dan zullen we telkens een ander pseudolijnelement aantreffen; tellen we al de zoo verkregen pseudolijnelementen samen, zooals we, om de *lengte* te krijgen, de eigenlijke lijnelementen samenvoegen, dan krijgen we een som, die we de *pseudolengte* zullen noemen. Elke lijn door P_0 en P_1 heeft haar eigen pseudolengte, zooals ook elke lijn door P_0 en P_1 haar bijzondere eigenlijke lengte heeft. En evenals de kortste lijn door P_0 en P_1, d.i. de lijn, waarvoor de som der lijnelementen een minimum is, *geodetische* lijn heet, zal die lijn door P_0 en P_1, waarvoor de pseudolengte hetzij maximum hetzij minimum is, door den naam *pseudogeodetische lijn* aangeduid worden.

We hebben nu, krachtens de analytische gelijkwaardigheid der vormen $d\sigma^2$ en $d\tau^2$, onmiddellijk het recht tot de volgende uitspraken:

I. In het platte vlak zijn de pseudogeodetische lijnen *recht.*

II. In het platte vlak kan het kwadraat van 't pseudolijnelement $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ door de meest willekeurige coördinatentransformaties $x, t \rightarrow x', t'$ overgaan in een klasse van differentiaalvormen $d\tau'^2 = P.dt'^2 + 2Q.dt'.dx' + R.dx'^2$, die kenmerkend is voor alle ontwikkelbare oppervlakken en voor de Euclidische opvatting van het platte vlak.

III. De pseudogeodetische lijnen der ontwikkelbare oppervlakken kunnen door verbuiging alle tegelijk recht gemaakt worden.

IV. Het kwadraat van 't pseudolijnelement $d\tau'^2 = P.dt'^2 + 2Q.dt'.dx' + R.dx'^2$ op een ontwikkelbaar oppervlak kan steeds door een passende coördinatentransformatie tot den standaardvorm $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ herleid worden.

V. De differentiaalvorm $d\tau'^2$ voor het kwadraat van 't pseudolijnelement op een niet-ontwikkelbaar oppervlak (of — als men wil — van een niet-Euclidisch beschreven plat vlak) kan door geen enkele coördinatentransformatie in den standaardvorm $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ omgezet worden.

VI. Een bepaalde klasse van in elkaar transformeerbare vormen $d\tau'^2$ is onafscheidelijk verbonden aan een bepaalde klasse van op elkaar afwikkelbare oppervlakken (of — in de andere vertolking — aan een bepaalde niet-Euclidische meetkunde van het platte vlak).

B. NATUURKUNDIG VERVOLG.

De uitdrukking $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ voor het kwadraat van het pseudolijnelement ontleent haar bijzondere waarde aan haar standvastigheid tegenover de coördinatentransformatie van het bijzondere relativiteitsbeginsel. Ze is als 't ware het gemeenschappelijk bezit van alle coördinaatstelsels van het bijzondere relativiteitsbeginsel. Alle coördinaatstelsels van dit beginsel hebben ook met elkaar gemeen, dat ze de rechte wereldlijn door een vergelijking van den *eersten* graad in x en t (of in x' en t') beschrijven, dus door een vergelijking, die uitdrukt (zie het einde van Hoofdstuk IV) dat de beweging (rechtlijnig) eenparig is.

Het verband tusschen den vorm van het pseudolijnelement en de rechtheid van de wereldlijn der eenparige beweging komt het duidelijkst uit, wanneer we de rechte wereldlijn beschouwen in haar hoedanigheid van pseudogeodetische lijn, d.i. van de lijn waarvan de pseudolengte minimum of maximum is.

Wat gebeurt er nu als we een zekere coördinatentransformatie $x, t \rightarrow x', t'$ toepassen, die *niet* tot het bijzondere relativiteitsbeginsel behoort?

De vergelijking van de pseudogeodetische lijn houdt dan in 't algemeen [1]) op van den eersten graad te zijn. In de nieuwe coördinaten x', t' stelt de pseudogeodetische lijn dus (in 't algemeen) niet meer een (rechtlijnig) eenparige beweging, maar integendeel een *versnelde* beweging voor. Bovendien verliest het kwadraat van het pseudolijn-element zijn eenvoudigste gedaante $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$.

Dezelfde bewegingen, die in 't stelsel x, t eenparig heetten, worden in het stelsel x', t' als versneld beschouwd en tevens heeft het kwadraat van het pseudolijnelement een vorm als $d\tau'^2 = P.dt'^2 + 2Q.dt'.dx' + R.dx'^2$, en wel een die behoort tot de klasse der ontwikkelbare oppervlakken (tot het Euclidische vlak).

De zoo ontstane versnellingen, die door transformatie van coördinaten zijn voortgebracht, onderscheiden zich natuurlijk voor waarnemers, die zich van de abscis x' en den tijd t' bedienen, in niets van elke andere versnelling, waarvan zij in *hun* natuurverklaring rekenschap moeten geven. Toch aarzelen wij, die de herkomst van die versnellingen kennen, geen oogenblik, die versnellingen subjectief te noemen. Volgens ons hebben de personen, die aan die versnellingen deelnemen, het volste recht zichzelf in rust te beschouwen. Zij hebben immers slechts hun coördinaten x', t' om te zetten in de (voor ons oorspronkelijke) coördinaten x, t, om zichzelf en de door hen bepaalde omgeving eensklaps van al hun versnellingen te bevrijden.

Nu leert, zooals we zagen, het aequivalentiebeginsel, dat die waarnemers de verschijnselen, die met hun versnellingsveld samenhangen, even goed mogen toeschrijven aan de aanwezigheid van een gravitatieveld. Van de coördinatentransformatie $x, t \rightarrow x', t'$ kan men dus ook beweren, dat

[1]) Alleen de z.g. „projectieve" transformaties doen de rechte lijnen weer in rechte lijnen overgaan, terwijl ze, wanneer ze *niet* tot de transformaties van het bijzondere relativiteitsbeginsel behooren, den vorm $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ wijzigen. Deze projectieve transformaties leveren dus *geen versnellingen;* ze uiten zich natuurkundig op andere wijze.

ze een gravitatieveld schept, maar (volgens ons, die de transformatie kennen) een *subjectief* gravitatieveld.

In dit licht beschouwd gaat dus het ontstaan van een subjectief gravitatieveld gepaard met den overgang van den vorm $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ in den vorm $d\tau'^2 = P.dt'^2 + 2Q.dt'.dx' + R.dx'^2$ van de klasse der ontwikkelbare oppervlakken (van het Euclidische vlak).

We hadden ons lengte-tijd-diagram met behoud van onze Euclidische meetkunde op een ontwikkelbaar oppervlak kunnen teekenen. De rechte wereldlijnen van het platte vlak zouden dan door verbuiging overgegaan zijn in de (in 't algemeen) kromme pseudogeodetische lijnen van het ontwikkelbaar oppervlak, welke desverlangd gezamenlijk weer recht gebogen zouden kunnen worden.

Kiest men een nieuw vlak, waarin de grootheden x', t'

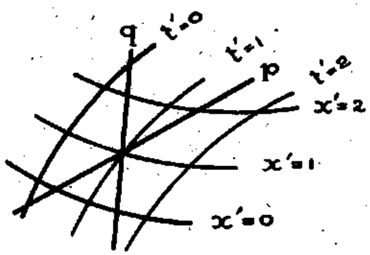

FIG. 28a.

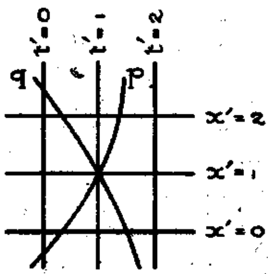

FIG. 28b.

als *rechthoekige rechtlijnige* coördinaten worden voorgesteld, dan zal de vergelijking in x', t' voor de pseudogeodetische lijnen in dit nieuwe vlak geen rechte lijn vertegenwoordigen maar een kromme (zie fig. 28a en 28b). Het is alsof het scheefhoekige kromlijnige netwerk der coördinaten x', t', met de rechte pseudogeodetische lijnen (p en q) erin geteekend, tot een vierkanten-netwerk verwrongen wordt, bij welke verwringing de vroeger rechte lijn krom wordt. Onder alle omstandigheden echter worden de figuren Euclidisch beschreven.

Een waarnemer, die zijn x' voor de ware lengte en zijn t' voor den waren tijd houdt, zal vanzelf geneigd zijn x' en t' als rechthoekige coördinaten in te voeren, maar dan kromme pseudogeodetische lijnen vinden; deze zullen echter door de transformatie x', $t' \rightarrow x$, t, d.w.z. door herstel van het vroegere netwerk weer automatisch recht worden.

Welke afbeelding we ook kiezen, we zullen steeds kunnen spreken van een „kromme" pseudogeodetische lijn, waarmee we dàn ook een rechte lijn in een kromlijnig coördinaten-netwerk kunnen bedoelen.

De „kromme" pseudogeodetische lijn van een zeker punt P beeldt nu de versnelde beweging af, die P krachtens dat subjectieve versnellingsveld krijgt, of wel: de aantrekkingskracht, die P in dat subjectieve gravitatieveld ondervindt. Terwijl de rechte lijn wereldlijn is van een punt, dat zich eenparig beweegt en dienovereenkomstig aan geen enkele kracht is onderworpen, is in ons geval de „kromme" pseudogeodetische lijn het beeld van de geschiedenis van een punt, dat zich beweegt onder den invloed van gravitatie, zij 't dan ook van een subjectieve gravitatie.

Het moet dan ook mogelijk zijn den aard van dat (subjectieve) gravitatieveld, d.w.z. het bedrag van de gravitatie in elk punt x' en op elk oogenblik t' af te leiden uit den bouw van de functies P, Q, R in den bij x', t' behoorenden differentiaalvorm (8bis). De daarvoor noodige wiskundige bewerkingen kunnen hier gevoeglijk achterwege blijven. Voor ons doel is 't voldoende de mogelijkheid van die afleiding te gevoelen. Alleen willen we ter oriënteering meedeelen, dat de functies P, Q, R verwant zijn met de potentiaal der gravitatiekrachten.

Als voorbeeld van een subjectief versnellingsveld kunnen we noemen het veld, waarin alle punten van de lijnvormige ruimte voortdurend dezelfde versnelling hebben (zie fig. 29). Een waarnemer toch, die aan deze versnelling deelneemt, constateert, dat elk punt van zijn ruimte t.o. van hemzelf de versnelling nul heeft; hij ontleent aan die waarneming het recht zichzelf tegelijk met alle andere punten in rust of eenparige beweging te verklaren en van 't uniforme gravitatieveld, dat met het oorspronkelijke versnellingsveld gelijkwaardig is, het bestaan te ontkennen.

Fig. 29.

Resumeerende kunnen we dus zeggen, dat op een *Euclidisch* wereldvlak (met zijn Euclidisch beschreven pseudolijnelement) de pseudogeodetische lijnen de geschiedenis afbeelden van punten, die òf in eenparige beweging zijn (aan geen enkele kracht zijn onderworpen), òf zich in een subjectief versnellingsveld (c.q. in een daarmee gelijkwaardig subjectief gravitatieveld) bevinden.

Nu is een versnellingsveld in 't algemeen *niet* subjectief; d.w.z. in 't algemeen is het een waarnemer onmogelijk zichzelf in een versnellingsveld zulk een bewegingstoestand toe te kennen, dat alle punten t.o. van hem hun versnelling verliezen.

Denken we ons bijv. in de lijnvormige ruimte alle punten A, B, C, ... zich bewegend met versnellingen, die gericht zijn van een zeker centraal punt O af en waarvan 't bedrag afhangt van den afstand OA, OB, OC, ... (bijv. omgekeerd evenredig met het vierkant van dien afstand), dan zal een waarnemer, die met een der punten, bijv. A, meebeweegt, t.o. van elk ander punt een versnelde beweging behouden (zie fig. 30).

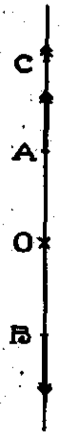

FIG. 30.

Er zijn dus ongetwijfeld *objectieve* versnellingsvelden, die niet door een zekere coördinatentransformatie x', $t' \rightarrow x$, t kunnen *weg*getransformeerd worden. En de gravitatievelden, die met die versnellingsvelden gelijkwaardig zijn, zullen eveneens aan alle pogingen om ze op te heffen weerstand bieden.

De pseudogeodetische lijnen van 't wereldvlak zullen dan ook door geen enkele transformatie alle recht gemaakt kunnen worden; het wereldvlak zal dus *niet*-ontwikkelbaar zijn, of, als men het per se als plat vlak wil behandelen, *niet*-Euclidisch beschreven worden. In 't bijzonder zal ook het pseudolijnelement niet-Euclidisch zijn.

Hier nu heeft EINSTEIN den stap gedaan, waarmee hij de grens van 't gebied van 't bijzondere relativiteitsbeginsel met zijn bevoorrechte (rechtlijnige) eenparige beweging overschreed om het rijk te betreden van het algemeene relativiteitsbeginsel, waar alle bewegingen gelijke rechten hebben [1]).

EINSTEIN heeft tot algemeen beginsel verheven:

De pseudogeodetische lijnen zijn wereldlijnen van punten, die

---

[1]) A. EINSTEIN. Zur algemeinen Relativitätstheorie. Sitz.-Ber. d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. Bd. 47 (1915), p. 778.
A. EINSTEIN. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Physik, 4e Folge, Bd. 49 (1916) p. 769.

uitsluitend onder den invloed van gravitatiekrachten verkeeren.

Het algemeene van dit beginsel bestaat daarin, dat EINSTEIN de geldigheid van deze stelling, reeds bewezen voor een *subjectief* gravitatieveld, ook geproclameerd heeft voor elk willekeurig *objectief* gravitatieveld.

Het is aanstonds duidelijk, dat we ons hier bevinden tegenover een natuurwet, wier uitdrukking gelijk is voor alle mogelijke bewegingstoestanden en in alle mogelijke gravitatievelden; een natuurwet, waarvoor alle bewegingen gelijkwaardig zijn. De (rechtlijnige) eenparige beweging heeft hier haar uitzonderingspositie moeten prijsgeven. Een waarnemer A, die in de oogen van een anderen waarnemer B een versnelde beweging heeft, heeft het recht zijn eigen beweging (rechtlijnig) eenparig (eventueel rust) te noemen; de versnellingen en traagheidswerkingen, die hij dan bij B en andere deelen van zijn omgeving waarneemt, stelt hij op rekening van een gravitatieveld. Wanneer nu B, zichzelf in rust of eenparige beweging beschouwend, in staat is de natuurverschijnselen Euclidisch te beschrijven met het bijzondere relativiteitsprincipe — zooals wij meenen te doen als we ons in rust denken t.o. van de vaste sterren of den aether — dan zal dit aan A *niet* gelukken. A zal zichzelf wel in rust of eenparige beweging kunnen beschouwen, maar zijn lengte-tijd-vlak zal niet-Euclidisch zijn. Toch zal ook hij met EINSTEIN kunnen zeggen, dat zijn wereldlijn een pseudogeodetische lijn is.

Evenals van een subjectief gravitatieveld zal ook van een objectief gravitatieveld de bouw zich afspiegelen in de gedaante der functies P, Q, R in den differentiaalvorm (8bis), en wel volgens dezelfde beginselen.

Zooals we reeds vroeger opmerkten, is de theorie van het bijzondere relativiteitsbeginsel in haar eenvoudigsten vorm (met $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$) te beschouwen als grensgeval van die van het algemeene, wanneer het gravitatieveld *nul* is. Daaruit maakte EINSTEIN de gevolgtrekking, dat de theorie van een *zwak* gravitatieveld, hoezeer qualitatief verschillend, toch in haar getalwaarden slechts weinig van die van het bijzondere relativiteitsbeginsel af zal wijken; dat men de formules van het algemeene relativiteitsbeginsel kan opvatten als *correcties* van die van het bijzondere relativiteitsbeginsel. Dit „correctiebeginsel" heeft EINSTEIN in staat gesteld de natuurkundige beteekenis der functies P, Q, R op te sporen.

Laten we thans enkele uitkomsten van de theorie meedeelen.

Het is gebleken, dat de formules voor een zwak gravitatieveld *bijna* met de bekende wet van NEWTON (aantrekking omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand) overeenkomen en wel des te nauwkeuriger naar mate het bedrag der gravitatie kleiner is en naar mate de snelheden der bewegende massa's kleiner zijn t.o. van de lichtsnelheid. Eerst wanneer de sterkte der gravitatie en de snelheden een zeker bedrag overschrijden, wordt de afwijking van de wet van NEWTON zoo groot, dat ze door waarneming aan 't licht kan komen.

De snelheden van de planeten in hun banen om de zon zijn alle nog te klein om een waarneembare afwijking te kunnen geven; alleen bij Mercurius, de binnenste planeet, die de grootste snelheid bereikt (ruim 55 K.M. per sec.), valt de afwijking in 't bereik der waarnemingen. Mercurius zou volgens de wet van NEWTON, wanneer de overige planeten geen storende aantrekkingen uitoefenden, onder den invloed van de zon alleen een zuivere ellips beschrijven; het punt van zijn baan, waar hij 't dichtst bij de zon komt, het z. g. „perihelium" zou van de zon uit steeds in dezelfde richting gezien worden. Volgens de theorie van het algemeene relativiteitsbeginsel echter zal de baan *niet precies* een ellips zijn; de periheliumrichting zal niet volkomen standvastig zijn, maar langzaam in 't baanvlak draaien; deze draaiing zal ongeveer 43″ per eeuw bedragen.

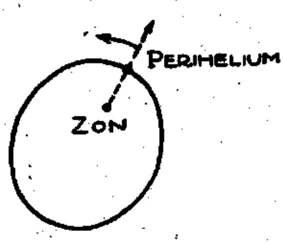

FIG. 31.

Nu was een „periheliumbeweging" van ongeveer 45″ per eeuw reeds lang bij de sterrekundigen bekend als een wonderlijke afwijking van de toch overigens zoo juiste wet van NEWTON. Voor de verklaring van deze afwijking nam men zijn toevlucht tot onzichtbare storende binnenplaneten, weerstandbiedende stofdeeltjes, en derg. Dat de theorie van het algemeene relativiteitsbeginsel van deze afwijking onmiddellijk rekenschap geeft, niet alleen qualitatief maar ook quantitatief[1]), strekt zeker tot verhooging van haar aanzien en tot versterking van haar gezag.

Een ander gevolg van de theorie is — we zijn er in Hoofdstuk VI reeds op voorbereid — dat een lichtstraal bij zijn gang door een gravitatieveld gekromd wordt en dat de lichtsnelheid dienovereenkomstig verandert.

In een ruimte *zonder* gravitatie geldt het bijzondere relativiteitsbeginsel; dáar is de lichtsnelheid standvastig en rechtlijnig.

Een zwak gravitatieveld zal een geringe wijziging van het bedrag der lichtsnelheid en een geringe kromming van de lichtbaan ten gevolge hebben.

Volgens de berekening moet de door die kromming optredende richtingsverandering voor een lichtstraal, die vlak langs de zon strijkt, 1″7 bedragen. Voor de empirische bevestiging van dit gevolg der theorie moet een totale zonsverduistering afgewacht worden.

VIII. ALGEMEENE BESCHOUWINGEN.

Keeren we nu terug tot het verband tusschen het gravitatieveld en de structuur van het lengte-tijd-vlak.

Elk gravitatieveld heeft zijn eigen meetkunde, hetzij Euclidisch vertolkt op een gebogen oppervlak, hetzij niet-Euclidisch in 't platte vlak. De aanwezigheid van middelpunten van gravitatie (massa's) bewerkt dus als 't ware een *kromming* van het lengte-tijd-wereldvlak. Elke verandering van het gravitatieveld verandert de krommingseigenschappen van het lengte-tijd-oppervlak. Wat wij aantrekkende *kracht* noemen openbaart zich als een *meetkundige dwang*; de wereldlijnen van twee elkaar aantrekkende, dus elkaar naderende punten moeten, krachtens den aard van het oppervlak dat ze draagt, zoo loopen, dat het abscisverschil dier punten bij toename van den tijd afneemt. De werking der gravitatie wordt zoodoende in het lengte-tijd-oppervlak van punt tot punt overgebracht en het begrip „werking op afstand" heeft uitgediend.

Tot dusver hebben we, ter tegemoetkoming aan ons voorstellingsvermogen, ons beperkt tot een twee-dimensio-

[1]) De onzekerheid in de waargenomen 45″ bedraagt ± 5″.

naal lengte-tijd-vlak, dus tot een lijnvormige ruimte. De ruimte, waarin we onze natuurkundige waarnemingen beschrijven, heeft echter drie afmetingen. In de formules treden dienovereenkomstig drie ruimtecoördinaten op: x, y, z, welke dus met den tijdcoördinaat t een stel van *vier* coördinaten vormen. Willen we nu de formules in de vier veranderlijken x, y, z, t door meetkundige figuren afbeelden, zooals we de formules in x en t in ons tweedimensionaal lengte-tijd-vlak (wereldvlak) grafisch hebben voorgesteld, dan zien we ons genoodzaakt tot een ruimte van vier afmetingen onze toevlucht te nemen, waardoor een werkelijk zinnelijke afbeelding onmogelijk wordt. Niettemin kunnen we onze meetkundige bewoordingen behouden, die dan, als men wil, meer het karakter van beeldspraak krijgen. We zullen dan o.a. kunnen blijven spreken van het pseudolijnelement, dat het eenvoudigst wordt voorgesteld door $d\tau =$ $= \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$, en van de pseudogeodetische wereld-„lijnen" in onze vierdimensionale wereld als vertegenwoordigsters van de geschiedenis van een alleen aan gravitatie onderworpen punt. De meetkunde, waarmee we die vierdimensionale ruimte-tijd-wereld moeten beschrijven, zal bij een objectief gravitatieveld niet-Euclidisch moeten zijn, dus niet kunnen beschouwd worden als een eenvoudige uitbreiding van onze gewone stereometrie op vier dimensies.

In 't algemeen zal dus ook op de *drie*dimensionale momentopnamen van onze ervaringsruimte (gelijktijdigheidsruimten, overeenkomende met de gelijktijdigheidslijnen in ons vroeger tweedimensionaal wereldfilm) een niet-Euclidische stereometrie moeten worden toegepast. Dat wil dus zeggen, dat we, wanneer we het algemeene relativiteitsbeginsel aanvaarden, afstand doen van onze meetkundige axioma's, waaraan we bijna geneigd waren een geldigheid a priori toe te kennen.

Nu zal de opportunist zich daarmee niet al te zeer het hoofd breken. Hij zal — terecht — opmerken, dat alle afwijkingen van den gravitatieloozen, Euclidischen ideaaltoestand, zooals die door het bijzondere relativiteitsbeginsel wordt vooropgesteld, eerst opvallend worden, wanneer de voorkomende snelheden vergelijkbaar worden met de lichtsnelheid of wanneer het gravitatieveld bijzonder sterk is; en hij zal — eveneens terecht — erop wijzen, dat zelfs de grootste mechanische snelheden, die ooit waargenomen zijn, nog zóó klein zijn t.o. van de lichtsnelheid en dat alle waarneembare gravitatie zóó zwak is (bijv. in vergelijking met electromagnetische werkingen), dat de wereld waaraan we onze ervaring ontleenen niet merkbaar van den Euclidischen toestand kan afwijken, en dat onze waarnemingen veel te ruw en te beperkt zijn om uit te maken, òf er door een punt buiten een lijn wel éen rechte lijn gaat, die de gegeven lijn, hoever ook verlengd, nooit snijdt!

Wie echter geen genoegen neemt met de zekerheid, dat onze meetkunde voor de praktijk nauwkeurig genoeg is en de consequenties van een niet-Euclidische ruimte en een niet-Euclidische ruimte-tijd-wereld volledig wil dóordenken, zal misschien aanvankelijk, bij zijn worsteling tegen eigen denktraagheid, enkele moeilijke oogenblikken doorleven. Evenals bij het verwerken van het zoo wonderlijke tijdbegrip, dat het bijzondere relativiteitsbeginsel hem opdrong, zal hij ook hier menige ingewortelde overtuiging moeten overwinnen, voordat zijn nieuwe inzichten met zijn vroegere denkbeelden in éen hooger begrijpen zullen zijn samengevat.

Onze ruimte en onze tijd zijn — KANT leerde het reeds — schema's, waarin we onze gewaarwordingen rangschikken, coördinaten-netwerken als het ware. De eene ruimtebeschrijving is niet juister dan de andere, de eene tijdschaal is niet zuiverder dan de andere; de eene kan er zich tegenover de andere hoogstens op beroemen, dat ze een uit wiskundig oogpunt eenvoudiger natuurbeschrijving mogelijk maakt. Er is geen „ware" meetkunde, geen „ware" tijdschaal. Er kan hoogstens een *doelmatige* meetkunde zijn: „Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être plus commode" heeft HENRI POINCARÉ gezegd in zijn beroemd werk *La Science et l'Hypothèse* (p. 66, 67). Evenzoo kan een tijdschaal hoogstens uitmunten door gemak in 't gebruik.

Terwijl we voor een uitvoeriger analyse van de begrippen ruimte en tijd verwijzen naar hetgeen de wijsbegeerte daaromtrent leert en ook naar andere verhandelingen over ons onderwerp [1]), zullen we hier slechts nog éen

[1]) In 't bijzonder noemen we hier:
A. EINSTEIN: Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Gemeinverständlich. Braunschweig, 1917, Vieweg & Sohn.
M. SCHLICK: Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik, Berlin,

natuurkundig-wijsgeerig argument noemen ten voordeele van een zoo elastisch mogelijke opvatting dier begrippen, althans voor zoover ze natuurkundige beteekenis hebben.

Ons waarnemen is altijd constateeren, dat op een zeker oogenblik de baan van een of ander materieel punt of van eenige electromagnetische verstoring (lichtsein bijv.) de baan van een tweede punt of verstoring treft.

Bijv., wanneer de maan een ster bedekt, nemen we feitelijk waar, dat de baan van een zeker punt van den maansrand de lichtstraal, die van de ster naar ons oog gaat, op een zeker tijdstip snijdt; wanneer we de golflengte van een spectraalstreep meten, constateeren we, dat de lichtverstoring van een bepaalde golflengte (kleur) zich voortplant volgens een lijn, die een der deelstrepen van de spectrometerschaal snijdt, d.w.z. op een zeker oogenblik met die deelstreep door hetzelfde punt der ruimte gaat. Het opnemen van den tijd berust ook op het vaststellen, dat de baan van den wijzer der klok op een bepaald tijdstip de lichtstraal snijdt, die van een zeker punt van de wijzerplaat naar ons oog gaat.

De meest ingewikkelde waarnemingen kunnen ten slotte alle herleid worden tot een of meer *samentreffingen* (coïncidenties) *in ruimte en tijd.* Willen we ons weer bedienen van de grafische hulpvoorstelling in ons wereldfilm (hetzij dit twee, drie of vier afmetingen heeft) met haar wereldlijnen, dan kunnen we in 't geval van de sterbedekking zeggen, dat de wereldlijn van het beschouwde punt van den maansrand de wereldlijn van een van de ster uitgaand lichtsein snijdt (niet kruist); bij de meting van de golflengte kunnen we beweren, dat de wereldlijn van de beschouwde lichtverstoring een punt gemeen heeft met de wereldlijn van een punt der genoemde deelstreep; en bij het tijdopnemen kunnen we verklaren, dat de wereldlijn van den wijzer en die van het lichtsein, dat wordt uitgezonden door een bepaald merk van de wijzerplaat, door eenzelfde punt gaan.

1917, Springer.

J. P. KUENEN: Relativiteitstheorie. De Gids, Afleveringen Maart en April 1917.

H. A. LORENTZ: De gravitatietheorie van EINSTEIN en de grondbegrippen der natuurkunde: Rede, gehouden op de Alg. Verg. v. h. 16e Ned. Nat. en Geneesk. Congres te 's-Gravenhage, op 12 April 1917.

Kortom, al onze ervaring betreft in laatste instantie *snijpunten van wereldlijnen*. Deze *snijpunten*, als 't ware de knoopen in 't netwerk der wereldlijnen, moeten door de „natuurwetenschap" verklaard worden, *niet de wereldlijnen zelf*. Elke vervorming van dat netwerk is derhalve geoorloofd, mits de knoopen behouden blijven (al verandert hun plaats in het wereldfilm); men mag het netwerk zoo verfrommelen als men wil, als men maar geen oude knoopen losmaakt of nieuwe knoopen legt.

Bedenkt men nu, dat de gedaante van het wereldlijnennetwerk geheel bepaald wordt door het coördinaatstelsel t, x, (y, z), dat men aan de formules der natuurwetten ten grondslag heeft gelegd, en dat de keuze van dat coördinaatstelsel anderzijds samenhangt met de meetkundige eigenschappen, die men aan onze ruimte toekent, en met de bijzondere hoedanigheden der gebruikte tijdschaal, dan komt men gemakkelijk tot het inzicht, dat de ervaring ons niets kan leeren omtrent een „ware" ruimte en een „waren" tijd met a priori daarvoor geldige wetten. Het eenige wat we aan onze ervaring kunnen ontleenen is een zekere practische voorkeur voor de een of andere meetkunde en voor een bepaalde tijdmaat; de natuurkundige eigenschappen der ons omgevende natuurobjecten (hetzij van stoffelijken, hetzij van electromagnetischen aard) dringen ons, in elk stadium van natuurkennen, een bepaalde meetkunde en een bepaalde tijdmaat op, die 't dichtst voor 't grijpen ligt. Bij elke nieuwe „ontdekking" kunnen de tot dusver heerschende meetkunde en tijdmaat in bruikbaarheid achteruitgaan en 't veld moeten ruimen voor een andere opvatting van ruimte en tijd, zij 't ook onder protest van diegenen, die de nieuwe ontdekking nog niet doorvoeld hebben en alleen de oudere, dus beperktere natuurkennis als objectieven grondslag van hun bespiegelingen aanvaarden.

Zulk een evolutie van ons ruimte- en tijd-begrip hebben we te danken aan het algemeene relativiteitsbeginsel van Einstein, een theorie, die geheel wortelt in den bodem van onze ervaring.

De theoretische onbepaaldheid der begrippen ruimte en tijd was reeds, sinds Kant, den wijsgeeren bekend. Hoe 't echter kwam, dat wij desniettegenstaande zulk een duidelijke voorstelling van de structuur der ruimte en van het verloop van den tijd *meenden* te hebben, bleef nog vrijwel in 't duister.

Heeft Einstein met zijn leer van het algemeene relativiteitsbeginsel misschien nog niet volledige klaarheid op dit punt gebracht, hij kan er zich in elk geval op beroemen, dit probleem in duidelijke trekken te hebben geformuleerd en zoodoende tot de oplossing ervan belangrijk te hebben bijgedragen.