003.63
636.085.1

MEDEDELINGEN VAN DE LANDBOUWHOGESCHOOL TE WAGENINGEN/NEDERLAND, DEEL 51 – VERH. 6 (p.143–150), 1951

OVER EEN DRIETAL VIER-GROOTHEDEN-DIAGRAMMEN (TETRAEDERDIAGRAM, VIERVLAKSDIAGRAM EN VIERKANTSDIAGRAM), MEDE IN VERBAND MET DE ONDERLINGE VERHOUDING DER MINERALE BASEN IN VOEDERGEWASSEN EN ANDER MATERIAAL

(WITH A SUMMARY)

door

E. BROUWER

Laboratorium voor Physiologie der Dieren van de Landbouwhogeschool

(Ontvangen 24.8.'51)

I. INLEIDING

Enige tijd geleden deden wij mededeling van een werkwijze, die geschikt is om de onderlinge verhouding van vier grootheden, i.c. die van het K-, het Na-, het Ca- en het Mg-gehalte van gras of hooi, in een diagram vast te leggen [1]). Denkt men zich de vier gehaltecijfers (milliaequivalenten per kg droge stof) in procenten van hun som uitgedrukt, dan kan voor dit viertal procenten – wij zullen ze in het vervolg *procentgetallen* noemen – een punt worden aangewezen in een regelmatig viervlak of *tetraëder*, zodanig, dat de loodlijnen op de vier zijvlakken gelijk zijn aan of evenredig zijn met deze procentgetallen. Dit is mogelijk, omdat de som der loodlijnen voor alle punten in het tetraëder dezelfde waarde bezit. Ten slotte werd aangegeven hoe van deze ruimtelijke figuur een horizontale en een verticale projectie kunnen worden getekend, zodat men zich met behulp van dit „*tetraëderdiagram*" een ruimtelijke voorstelling van het geheel kan vormen.

Het tetraëderdiagram sluit blijkens het voorgaande nauw aan bij het bekende vlakke driehoeksdiagram, dat men gebruikt, wanneer er telkens maar drie grootheden zijn, waarvan de onderlinge verhouding in beeld moet worden gebracht. Men zou kunnen zeggen, dat een tetraëderdiagram voor de ruimte is, wat een driehoeksdiagram is voor het platte vlak. In wezen gaat het bij deze diagrammen om het volgende. Zoals men bij een driehoeksdiagram gebruik maakt van de eigenschap, dat de som der loodlijnen, neergelaten op de zijden van een gelijkzijdige driehoek, voor alle punten in deze driehoek gelijk is, zo

[1]) E. BROUWER, Maandbl. v. d. Landbouwvoorlichtingsdienst **8** (1951) 208; Mededelingen v. d. Landbouwhogeschool **51** (1951) 91; E. BROUWER, A. J. v. D. VLIERT, Mededelingen v. d. Landbouwhogeschool **51** (1951) 73.

maakt men bij het tetraëderdiagram gebruik van de (reeds genoemde) eigenschap, dat de som der vier loodlijnen op de zijvlakken van een regelmatig viervlak voor alle punten in dit viervlak dezelfde waarde bezit.

Men kan gemakkelijk aantonen, dat een vlakke driehoek de zoëven vermelde essentiële eigenschap alleen dan maar bezit, wanneer hij gelijkzijdig is. Daarom kunnen gelijkbenige of rechthoekige of scheefhoekige driehoeken niet voor het genoemde doel gebruikt worden [1]).

Naar analogie hiervan leefde ik aanvankelijk in de veronderstelling, dat ook een viervlak de genoemde eigenschap alleen dan maar bezit, wanneer het regelmatig is, d.w.z. wanneer al de zes ribben even lang zijn. Bij nadere beschouwing echter kwam ik tot de slotsom, dat bepaalde vormen van onregelmatige viervlakken de eigenschap eveneens bezitten. Het lag dan ook voor de hand te onderzoeken of er onder deze onregelmatige viervlakken één of meer voorkomen, die zich even goed of nog beter voor het vervaardigen van een vier-grootheden-diagram lenen dan het tetraëder.

II. EEN VIERVLAKSDIAGRAM

Nader onderzoek leerde nu, dat onder bepaalde omstandigheden met voordeel gebruik kan worden gemaakt van een onregelmatig viervlak, waarvan twee overstaande ribben een lengte r hebben en de vier andere ribben, die de uiteinden der eerstbedoelde verbinden, de lengte $\frac{1}{2}\, r \sqrt{5} = 1.118\, r$. Het verschil met een tetraëder (waarvan alle ribben gelijk zijn) is slechts gering; maar wij zullen tonen, dat dit verschil voor ons doel toch belangrijk is. Aangezien de zijvlakken van dit onregelmatige viervlak congruent zijn, behoort het tot de categorie der gelijkzijdige viervlakken.

Om ons nu tot de vier minerale basen in het gras te bepalen, noemen wij (fig. 1) de vier hoekpunten: *K*, *Na*, *Ca* en *Mg* [2]). Geven wij aan de ribben *KNa* en *CaMg* de lengte r, dan krijgen *KCa*, *KMg*, *NaCa* en *NaMg* de lengte $\frac{1}{2}\, r \sqrt{5}$. *KNa* en *CaMg* kruisen elkaar dan loodrecht. Vertegenwoordigt een punt *P* (niet getekend) in het inwendige van het viervlak een bepaald monster, dan moet de lengte van r zodanig worden gekozen, dat de loodlijn uit *P* op het vlak tegenover het hoekpunt *K*, d.w.z. de loodlijn op het vlak *NaCaMg*, het procentgetal kalium voorstelt; de loodlijn uit *P* op het vlak tegenover het hoekpunt *Na* moet het procentgetal natrium voorstellen enz. De som dezer vier loodlijnen moet 100 zijn en dit is het geval, wanneer $r = \frac{200}{\sqrt{3}}$. Evenals in onze vroegere verhandelingen zullen wij ons echter losmaken van een bepaalde lengte in centimeters en wel door schaalverdelingen in de figuur aan te brengen. Aan elk monster, dat op de vier genoemde minerale bestanddelen is onderzocht, kan men nu een punt *P* in het viervlak toevoegen.

Van dit viervlak met punten *P* zullen wij door orthogonale projectie de hori-

[1]) Dit wil niet zeggen, dat ongelijkzijdige driehoeken geheel onbruikbaar zijn om de onderlinge verhouding van drie grootheden in beeld te brengen. Men kan dan echter niet met de drie loodlijnen werken. Ik verwijs hiervoor naar een vroegere verhandeling, waarin gebruik werd gemaakt van een *rechthoekige driehoek* (B. v. d. Burg, E. Brouwer, C. A. Koppejan, Versl. landbouwk. Onderz. **50** [1944] 1).

[2]) Om aan te geven, dat hier geen scheikundige elementen maar punten worden bedoeld, zijn de letters cursief gedrukt.

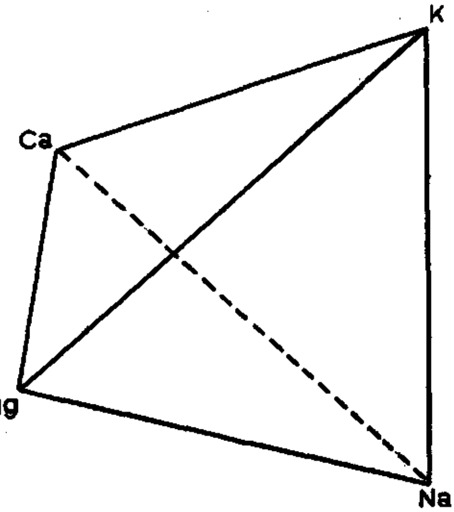

Fig. 1. *Viervlak.* De ribben *KNa* en *CaMg* worden geacht even lang te zijn en elkaar loodrecht te kruisen en wel zodanig, dat *KNa* loodrecht staat en *CaMg* horizontaal. Voorts is in de ruimtelijke figuur $KCa = KMg = NaCa = NaMg = \frac{1}{2}\sqrt{5} \times KNa = \frac{1}{2}\sqrt{5} \times CaMg$. De orthogonale horizontale en verticale projectie vindt men in fig. 2.

zontale en de verticale projectie tekenen op de projectievlakken V_1 en V_2. Daarvoor plaatsen wij het viervlak zodanig (fig. 1), dat de ribbe *KNa* loodrecht op V_1 komt en wel met het punt *Na* onder en het punt *K* boven. De ribbe *CaMg* komt dan evenwijdig aan V_1 te liggen. In de figuur 2 zijn de projecties op V_1 en op V_2 getekend. Om de figuur overzichtelijker te maken zijn V_1 en V_2 zó gekozen, dat het viervlak met zijn hoekpunt *Na* op V_1 rust en het hoekpunt *Ca* juist in V_2 ligt, terwijl *CaMg* loodrecht op V_2 staat. De as van projectie wordt voorgesteld door de rechte *m*. In de horizontale projectie vallen K_1 en Na_1 samen, terwijl de ribbe *CaMg* in haar volle lengte door Ca_1Mg_1 wordt afgebeeld. Op V_2 vallen de punten Ca_2 en Mg_2 samen, terwijl K_2Na_2 even lang is als de ribbe *KNa*. (De indices in Ca_1, Ca_2 enz. geven de projectievlakken aan.)

Doordat voor de ribben de bovengenoemde lengten zijn gekozen, zijn de beide projecties gelijkzijdige driehoeken, zodat zij ook als driehoeksdiagrammen kunnen worden beschouwd. Tekent men nu van een bepaald punt *P* de horizontale en verticale projectie P_1 en P_2, dan kan men uit deze punten in elk der driehoeken drie loodlijnen op de zijden neerlaten. In de horizontale projectie stellen twee er van de procentgetallen Ca en Mg voor, de derde de som van K en Na; in de verticale projectie stellen zij de procentgetallen voor van K, van Na en van de som Ca + Mg.

De beeldpunten, welke in de figuur 2 zijn getekend, hebben betrekking op dezelfde monsters gras en hooi als die in de vroegere verhandelingen. Mogelijk kost het iets meer inspanning zich een beeld van de ligging der punten in de ruimte te vormen dan bij het vroegere diagram, waarbij het viervlak (tetraëder) met één van zijn zijvlakken op V_1 stond. Het is echter een groot voordeel, dat in fig. 2 zes procentgetallen direct kunnen worden afgelezen. Ook omtrent hun onderlinge verhouding krijgt men dus een betere indruk.

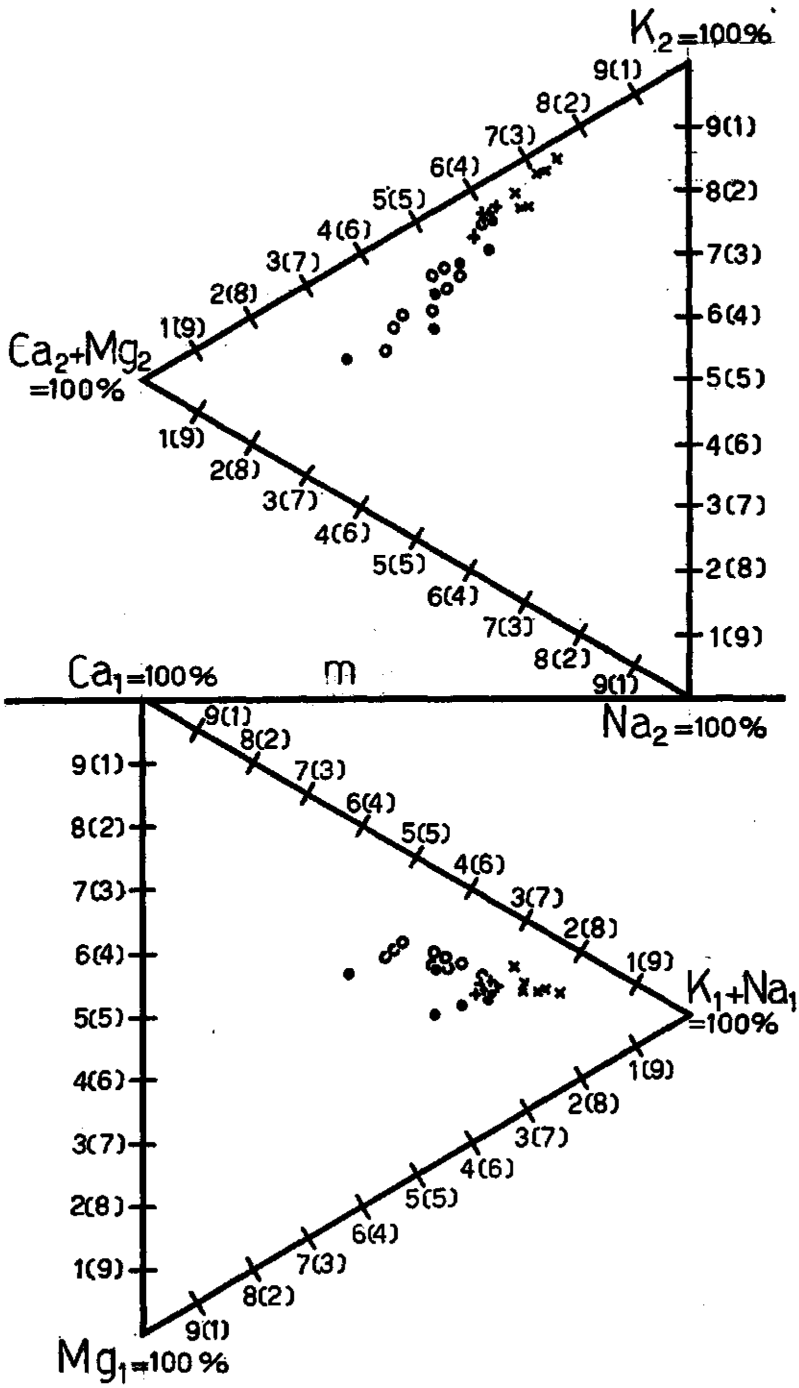

Fig. 2. *Viervlaksdiagram.* Horizontale en verticale projectie van het viervlak van fig. 1. Door de aldaar aangegeven lengten der ribben zijn de beide projecties gelijkzijdige driehoeken. In de horizontale projectie kan men de procentgetallen van Ca, van Mg en van K + Na aflezen, in de verticale projectie die van K, van Na en van Ca + Mg. De beeldpunten hebben betrekking op een aantal gras- en hooimonsters. Bij toenemen van het procentgetal voor K worden die voor Na, Ca en Mg teruggedrongen.

Dit laatste wordt op de volgende wijze nog vergemakkelijkt. Legt men een tussen rechter en linker hand gespannen draad over de twee projecties P_1 en P_2 van een bepaald punt, dan loopt deze draad uiteraard evenwijdig aan de rechte Ca_1Mg_1 en aan K_2Na_2. Het gedeelte van de draad, dat binnen de driehoek in V_1 ligt, wordt door P_1 in twee stukken verdeeld en overeenkomstigs geldt voor het gedeelte in de driehoek in V_2. Men zal nu gemakkelijk inzien, dat deze vier stukken evenredig zijn met de procentgetallen Ca, Mg, K en Na. De onderlinge verhouding der procentgetallen kan aldus met één oogopslag worden overzien.

Vervolgens kan men de draad evenwijdig aan zich zelf naar rechts en naar links verschuiven, zodat achtereenvolgens ook de projecties der andere punten daaronder komen te liggen. Ook op deze wijze kan men gemakkelijk overzien, hoe de procentgetallen onderling gecorrelateerd zijn. Zo ziet men ook op deze manier in fig. 2, dat bij toenemen van het kalium de procentgetallen voor Na, Ca en Mg alle drie kleiner worden.

Ten slotte zij nog opgemerkt, dat de mogelijkheden met het bovenstaande nog niet zijn uitgeput. Door de letters bij de hoekpunten te verwisselen kan men nog enige variatie in het diagram aanbrengen al naar de behoefte.

Uiteraard vraagt men zich af welke in het algemeen de kenmerken zijn van de viervlakken, die de eigenschap bezitten, dat de som der vier loodlijnen op de zijvlakken voor alle punten gelijk is, van welke eigenschap in het bovenstaande gebruik werd gemaakt. Het vraagstuk kan met behulp van de regels der analytische meetkunde worden opgelost. Prof. N. H. KUIPER maakte mij er opmerkzaam op, dat men langs stereometrische weg sneller tot zijn doel komt en wel door er van uit te gaan, dat een viervlak de genoemde eigenschap dan en alleen dan bezit, wanneer de vier hoogtelijnen gelijk zijn, hetgeen gemakkelijk is te bewijzen. Zijn deze hoogtelijnen inderdaad gelijk, dan brengt dit mede, dat de oppervlakten der zijvlakken eveneens gelijk zijn, zodat alleen de categorie der zoog. *gelijkzijdige viervlakken* de genoemde eigenschap bezit. Uiteraard behoort ook het tetraëder hiertoe; maar dit is een zeer bijzondere vorm van gelijkzijdig viervlak, omdat bij het tetraëder alle ribben gelijk zijn en de zijvlakken gelijkzijdige driehoeken; bij een gelijkzijdig viervlak is dit in het algemeen nièt het geval. Wèl zijn volgens bekende stellingen bij een gelijkzijdig viervlak elke twee overstaande ribben en elke twee overstaande tweevlakshoeken gelijk en alle zijvlakken en drievlakshoeken congruent [1]).

In het bovenstaande werd aan de figuur bovendien nog de eis gesteld, dat de exemplaren van één paar der overstaande ribben elkaar loodrecht kruisen. Dit is alleen dàn het geval, wanneer de lengte l van de vier overige ribben gelijk is (l willekeurig). De zijvlakken worden dan congruente gelijkbenige driehoeken. Zoals men ziet behoort het door ons gebruikte viervlak inderdaad tot deze categorie.

III. EEN VIERKANTSDIAGRAM

Terwijl in de vroegere verhandelingen de wens om een duidelijke ruimtelijke voorstelling te geven op de voorgrond stond, werd er bij het zoëven besproken viervlaksdiagram bovendien naar gestreefd de onderlinge verhoudingen van alle vier procentgetallen in het diagram beter tot hun recht te doen komen. Later is

---

[1]) P. MOLENBROEK, Leerboek der stereometrie (1941) 180.

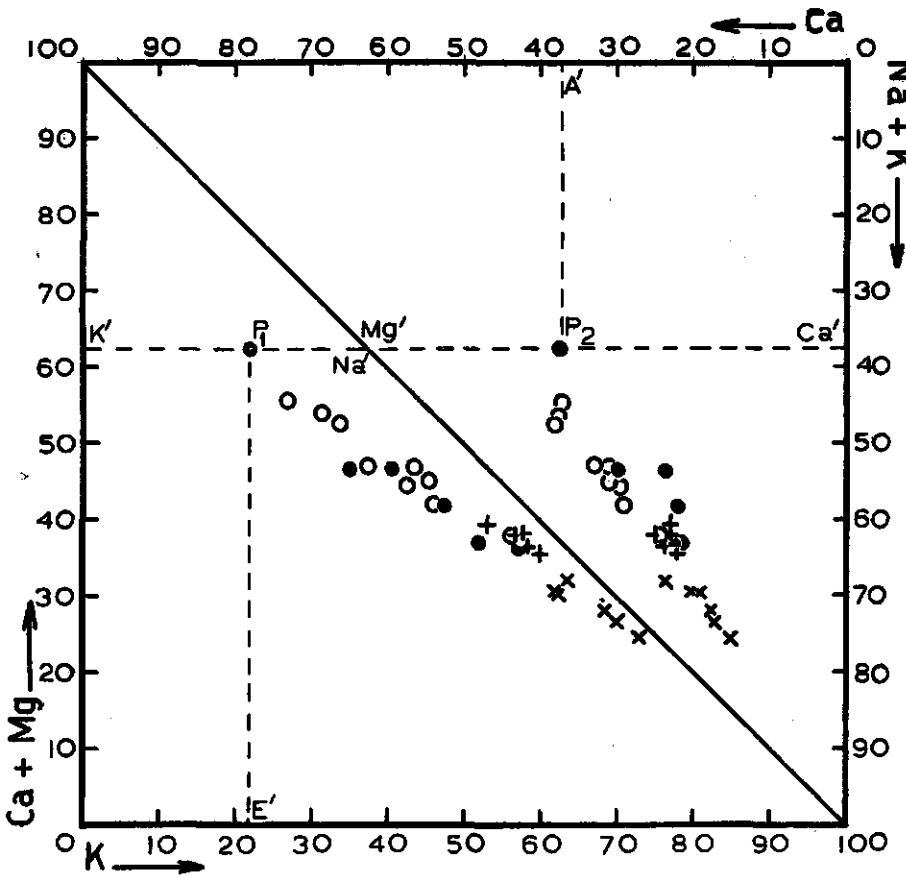

Fig. 3. *Vierkantsdiagram.* In deze figuur zijn voor elk van een aantal gras- en hooimonsters, dezelfde als die van fig. 2, twee punten P_1 en P_2 getekend. Voor één der punten is de ligging nader aangegeven en deze is zodanig, dat P_1K', P_1Na', P_2Mg' en P_2Ca' achtereenvolgens de procentgetallen voor K, Na, Mg en Ca aangeven. Bovendien stellen $P_1E' = Mg'Ca'$ en $P_2A' = K'Na'$ de procentgetallen der aardalkalimetalen (Ca + Mg) en die der alkalimetalen (K + Na) voor. Ook hier ziet men, dat de procentgetallen voor Na, Ca en Mg worden teruggedrongen bij toeneming van dat voor K.

op deze weg voortgegaan en dit heeft aanleiding gegeven tot fig. 3, die uit fig. 2 is ontstaan door het naar elkaar toe schuiven der gelijkzijdige driehoeken en enige verdere veranderingen.

Fig. 3 heeft de vorm van een kwadraat, dat door een diagonaal in twee rechthoekige driehoeken is verdeeld. Op de zijden van het kwadraat is weer een schaalverdeling aangebracht. In deze figuur zijn nu voor elk monster twee punten P_1 en P_2 getekend. Voor één der punten is de ligging nader aangegeven en deze is zodanig, dat

$$
\begin{aligned}
P_1K' &= \text{procentgetal kalium,}\\
P_1Na' &= \text{procentgetal natrium,}\\
P_2Mg' &= \text{procentgetal magnesium,}\\
P_2Ca' &= \text{procentgetal calcium,}
\end{aligned}
$$

$$P_1E' = Mg'Ca' = \text{procentgetal der aardalkaliën (Ca+Mg)},$$
$$P_2A' = K'Na' = \text{procentgetal der alkaliën (K+Na)}.$$

Zoals moet worden verlangd, is hierbij voldaan aan de onderstaande betrekkingen:

$$\begin{aligned} P_1K' &+ P_1Na' + P_2Mg' + P_2Ca' = 100, \\ P_1K' &+ P_1Na' + P_1E' = 100, \\ P_2Mg' &+ P_2Ca' + P_2A' = 100, \\ P_1E' &+ P_2A' = 100. \end{aligned}$$

De aflezing is in dit diagram nog gemakkelijker dan in fig. 2, omdat de stukken P_1K', P_1Na', P_2Mg' en P_2Ca', die van de rechte P_1P_2 worden afgesneden, thans de procentgetallen zelf voorstellen, terwijl zij daarmede in fig. 2 alleen maar evenredig waren. Bovendien is het tekenen van het diagram van fig. 3 veel gemakkelijker, vooral wanneer millimeterpapier wordt gebruikt.

Daar staat echter tegenover, dat men aan het vierkantsdiagram iets minder gemakkelijk een ruimtelijke voorstelling kan verbinden. Onmogelijk is het echter niet. Wanneer de linker zijlijn van het vierkant als as van projectie wordt genomen, dan kan de driehoek links onder namelijk als horizontale projectie en die rechts boven als verticale projectie van een onregelmatig viervlak worden beschouwd, waarvan de zijvlakken rechthoekige driehoeken zijn.

Opgemerkt zij nog, dat voor de punten in dit viervlak de sommen der vier loodlijnen op de zijvlakken niet meer gelijk zijn. In plaats daarvan is een andere eigenschap getreden. Bij nadere bestudering blijkt nl., dat het viervlak door een stelsel van evenwijdige vlakken die loodrecht staan op de as van projectie, wordt gesneden volgens een stelsel rechthoeken van zeer verschillende vorm, maar met gelijke omtrek. Voor elk dezer rechthoeken nu geldt, dat de som der vier loodlijnen, uit een willekeurig punt P in die rechthoek neergelaten op de rechthoekszijden, gelijk is aan 100, d.w.z. de halve omtrek. Het is deze eigenschap, waarvan bij het diagram van fig. 3 gebruik wordt gemaakt. Terloops zij nog vermeld, dat het viervlak van fig. 2 een analoge eigenschap bezit. Door een stelsel van vlakken loodrecht op de as van projectie wordt het nl. eveneens gesneden volgens een stelsel rechthoeken met gelijke omtrek, terwijl de som van de loodlijnen op de rechthoekszijden constant is. Bij het beschouwen van de stukken, die in fig. 2 van P_1P_2 werden afgesneden, hebben wij reeds van deze eigenschap gebruik gemaakt.

De punten in fig. 3 hebben weer betrekking op dezelfde monsters als die in fig. 2. De terugdringing van het natrium, calcium en magnesium bij toeneming van het procentgetal voor het kalium komt ook hier goed tot uiting.

Het zal duidelijk zijn, dat ook het vierkantsdiagram voor verdere variatie vatbaar is. Zo zou men op de as, waarop thans Ca + Mg is uitgezet, een andere grootheid kunnen uitzetten, b.v. Ca + K, enz. Al naar de omstandigheden dient men derhalve de meest geschikte vorm te kiezen.

IV. SAMENVATTING

Zijn van een aantal objecten telkens drie grootheden gemeten, dan is bekend, dat men een visueel beeld van de onderlinge verhouding dezer grootheden kan geven door ze bij elk object in procenten van hun som uit te drukken en de verkregen procentgetallen in een driehoeksdiagram uit te zetten.

In een vorige verhandeling werd medegedeeld, dat men bij vier grootheden niet uitkomt met een driehoeksdiagram. Voor het vervaardigen van een viergrootheden-diagram bereikt men zijn doel met een regelmatig viervlak of tetraëder, waarvan twee projecties worden getekend (*tetraëderdiagram*). In de bovenstaande verhandeling wordt aangetoond, dat het viervlak niet noodzakelijk regelmatig behoeft te zijn, maar dat een gelijkzijdig viervlak, waarvan de exemplaren van één paar der overstaande ribben elkaar loodrecht kruisen en waarvan de zijvlakken gelijkbenige driehoeken zijn, voordelen kan bieden (*viervlaksdiagram*). Ten slotte wordt nog een viergroothedendiagram gegeven in de vorm van een kwadraat, dat door een diagonaal in twee rechthoekige driehoeken is verdeeld (*vierkantsdiagram*).

V. SUMMARY

ON THREE GRAPHS (REGULAR TETRAHEDRAL GRAPH, EQUILATERAL TETRAHEDRAL GRAPH AND SQUARE GRAPH) THAT CAN BE USED FOR DEPICTING THE RATIOS OF FOUR MAGNITUDES SUCH AS THOSE OF THE BASE-FORMING ELEMENTS (Na, K, Ca AND Mg) IN FEEDING STUFFS A.S.O.

If of a number of objects three magnitudes are measured then it is possible to illustrate their ratios bij representing them for each object in percentages of their totals and by plotting these numerals out on a triangular graph.

In a previous article we have stated that in the case of four magnitudes being compared, a triangular diagrammatic representation becomes impossible. The aim can, however, be obtained bij applying a regular tetrahedral representation; two projections of the tetrahedron have to be drawn (*regular tetrahedral graph*).

In this article it is argued that the tetrahedron needs not necessarily be regular, but that an equilateral tetrahedron with congruent faces of isosceles triangles, provided one pair of the opposite edges cross each other rectangularly, can be advantageous (*equilateral tetrahedral graph*). Finally a graph depicting also four magnitudes, has been produced in the shape of a square, divided into two right triangles by a diagonal (*square graph*).