Nederlandsch Boschbouw-Tijdschrift

Orgaan van de

Nederlandsche Boschbouwvereeniging

Oprichter Dr. J. R. Beversluis

8e Jaargang | No. 4 | April 1935

Oorspronkelijke Bijdragen

KUBEEREN VAN RONDE HOUTWERKEN

door

Prof. Dr. BEEKMAN.

Een gesprek met vakgenooten, staande bij een kavel douglasstaken, die zich gedeeltelijk kenmerkten door sterk „afvallen", leidde tot de conclusie, dat het plaatselijk gebruikelijke meten van midden-diameter en lengte onjuiste uitkomsten moet geven wat den inhoud betreft, als men de eenvoudige formule toepast:

$$i = g_{1/2}\ l$$

waarin $g_{1/2}$ de notatie is voor het doorsneevlak op halve lengte.

In dit gesprek wordt aanleiding gevonden, hier het een en ander over stereometrisch kubeeren van ronde houtwerken in herinnering te roepen.

Men gaat bij zulk kubeeren van enkele illusies uit en vervalt dan verder terwille van de eenvoudigheid nog in een fout.

Drie der illusies die hier bedoeld worden zijn:

1e. het houtwerk is een omwentelingslichaam;

2e. het houtwerk als omwentelingslichaam beschouwd, heeft over de geheele lengte eenzelfde regelmatige, eenvoudige beschrijvende lijn;

3e. de beschrijvende lijnen welke aan deze lichamen voorkomen, zijn weer te geven door de eenvoudige formule:

$$y^2 = p\ x^m$$

Naar het veranderen van m in deze formule krijgt men een lichaam van anderen aard, en daarmede verandert ook de inhoudsformule. Hier nu maakt men gemakshalve de fout, waarop gedoeld werd, n.l. het gebruik van eenzelfde formule voor lichamen van verschillenden aard.

Het uitgaan van de drie genoemde illusies heeft geen al te erge gevolgen.

Dat stamdoorsneden loodrecht op de boomas wel min of meer van den voor omwentelingslichamen vereischten cirkelvorm kunnen afwijken, kan voldoende gecompenseerd worden, door het in meer dan één richting meten van de doorsnede.

Ook het niet rekening houden met in het verloop van den stam wel optredende wijziging in de beschrijvende lijn levert praktisch geen al te ernstige bezwaren op. Vooral bij naaldhout van niet te hoogen leeftijd, behoeft men zich hierover niet ongerust te maken.

Tenslotte heeft het aannemen van de bovengekenschetste, eenvoudige beschrijvende lijnen voldoend bruikbare resultaten gegeven.

Deze illusies zijn dus niet bronnen van al te storende fouten, althans niet voor de dagelijksche praktijk.

Anders is het echter met de fouten die onze gemakzucht tengevolge heeft, als wij een gemeenschappelijke en daarbij eenvoudige formule op de verschillende, mogelijke stamvormen toepassen.

De inhoudsformule voor omwentelingslichamen van de aangegeven beschrijvende lijn, ten opzichte van het grondvlak g_o luidt:

$$i = \frac{1}{m+1}\, g_o\, l$$

De z.g. vormexponent m kan in onze stamvormen de waarden 1, 2 en 3 hebben,[1]) waarbij we dus als inhoudsformulen krijgen:

$i = \frac{1}{2}\, g_o\, l$ (Apollonische paraboloïde) kortweg paraboloïde).

$i = \frac{1}{3}\, g_o\, l$ (kegel).

$i = \frac{1}{4}\, g_o\, l$ (Neil'sche paraboloïde) kortweg neiloide).

Hier dus geen gelijke formule; bovendien is het vlak g_o geheel ongeschikt voor meting.

Doorsneevlakken van de behandelde omwentelingslichamen staan tot elkaar, als de *m-de* machten van hun afstanden tot den top.

Een vlak hooger in den boom gelegen dan het vlak g_o kan men aanduiden als g_v met een ligging vl van den top, waarin v dan een getal kleiner dan één moet zijn. (Zie fig. 1).

Dan is:

$$g_v : g_o = (vl)^m : l^m = v^m : 1$$

$$g_o = \frac{1}{v^m}\, g_v$$

[1]) Ook kan $m = o$ (cylinder) voorkomen voor een stamgedeelte, natuurlijk echter niet voor een geheele boomspil.

De inhoudsformule met gebruik van zulk een vlak wordt dan :

$$i = \frac{1}{(m + 1)\ v^m}\ g_v\ l$$

De dagelijksche praktijk wenscht een eenvoudige formule, bijv. :

$$i = g_x\ l$$

Hierin is de factor $\frac{1}{(m + 1)\ v^m}$, dus gelijk 1.

Men kan nu de vergelijking

$$\frac{1}{(m + 1)\ v^m} = 1$$

voor v oplossen bij de waarden $m = 1$, $m = 2$ en $m = 3$.

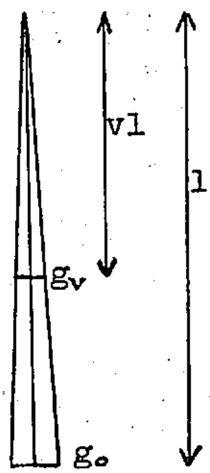

Fig. 1.

Voor $m = 1$ krijgt men

$$\frac{1}{2v} = 1$$

$$v = \frac{1}{2}$$

en :

$$i_{par.} = g_{1/2}\ l$$

Een hoogst eenvoudige formule, zoowel wat betreft het bepalen van het meetvlak, als wat aangaat de berekening. Begrijpelijk, dat de praktijk hiervan met voorliefde gebruik maakt. Zij is echter slechts juist bij $m = 1$, dat is voor de paraboloïde.

Wenscht men dit vlak $g_{1/2}$ ook voor andere boomvormen (met $m = 2$ en $m = 3$) te gebruiken, dan moet men de waarde $\frac{1}{(m + 1)\ v^m}$ bepalen met $v = \frac{1}{2}$ en m achtereenvolgens 2 en 3 en krijgt dan:

$$\frac{1}{(2 + 1)\ (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}$$

en:

$$\frac{1}{(3 + 1)\ (\frac{1}{2})^3} = 2$$

De inhoudsformulen worden dan:

$$i_{keg.} = {}^4/_3\ g_{1/2}\ l$$

$$i_{neil.} = 2\ g_{1/2}\ l$$

Gebruikt men gemakshalve voor deze lichamen toch de formule $i = g_{1/2}\, l$, dan maakt men de volgende fouten:

$\triangle_{keg.} = -\ {}^1/_3\ g_{1/2}\ l$ dat is 25 % te klein,
en $\triangle_{neil.} = -\ g_{1/2}\ l$ dat is 50 % te klein.

Zeer aanmerkelijke fouten!

Het zijn nu juist de z.g. sterker afvallende houtwerken waarbij deze fouten gemaakt worden. Wat toch moet men onder „sterk afvallen" verstaan?

Het in totaal verminderen van den diameter beneden aan den boom, tot o aan den top, kan bij alle stamvormen over dezelfde totale lengte plaats hebben. Of dit snel of langzaam geschiedt, d.w.z. of de diameter per lengte-eenheid gemiddeld veel of weinig afneemt is, onafhankelijk van den stamvorm, maar wordt bepaald door den factor p in de formule: $y^2 = p\ x^m$. Is p groot, dan krijgt men gedrongen stammen kort ten opzichte van hun dikte, anders slanke stammen, dun ten opzichte van hun lengte. In beide typen kunnen toch de 3 bekende stamvormen, gekarakteriseerd door $m = 1$, $m = 2$ en $m = 3$ voorkomen. Het valt echter op, indien dit afvallen per lengte-eenheid reeds even sterk is, beneden in den stam als hooger op, of zelfs sterker plaats heeft in het beneden gedeelte van den stam.

Bij de paraboloïde geschiedt het afvallen in het benedengedeelte van den stam langzaam en eerst naar den top sneller; bij den kegel geschiedt het gelijkmatig over de geheele lengte; bij de neiloide snel in den benedenstam, langzamer in den bovenstam.

Dit is te „zien" in nevenstaande figuur 2, maar kan ook mathematisch aangetoond worden met het differentiaalquotiënt (te omschrijven als de mate van verandering van y met de verandering in x) van de functie die de beschrijvende lijnen aangeeft: $y^2 = p\,x^m$.
hiervoor is:

$$\frac{dy}{dx} = p\ \frac{m}{2}\ x^{\frac{m}{2} - 1}$$

Voor de waarden $m = 1$, $m = 2$ en $m = 3$ wordt dit:
paraboloïde $m = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\, p\, x^{-1/2} = \frac{1}{2}\, p \frac{1}{\sqrt{x}}$$

hoe grooter x hierin is hoe kleiner de verandering van y wordt, bij verandering van x; aan den boom geduid, hoe lager aan den stam, hoe geringer de diameter-verandering per strekkende eenheid, hoe geringer het „afvallen";
kegel $m = 2$

$$\frac{dy}{dx} = p\, x^0 = p$$

de waarde van x heeft geen invloed, de verandering in y

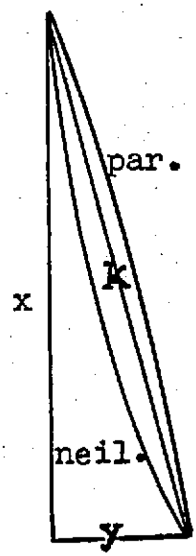

Fig. 2.

met die in x is onafhankelijk van de waarde van x; aan den boom dus, de verandering in den diameter per strekkende eenheid is overal gelijk;
neiloide $m = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3p}{2}\, x^{1/2} = \frac{3p}{2} \sqrt{x}$$

hoe grooter x hierin is, hoe grooter de verandering van y wordt bij verandering van x; aan den boom dus, hoe lager aan den stam, hoe grooter de diameterverandering per strekkende eenheid, hoe sterker het „afvallen".

In de drie differentiaalqoutiënten komt de factor p voor, zij worden alle drie mèt p grooter of kleiner, wat de juistheid aantoont van het boven beweerde, dat het over de geheele lengte gemiddeld sneller of langzamer afvallen, van deze p afhankelijk is en niet van boomvorm (m) [1])

Met gebruik van de formule $i = g_{1/2}\, l$ ook voor de z.g. sterk afvallende boomen, stelt men zich dus bloot aan fouten van 25 à 50 %.

Indien het hout verkocht wordt op basis van een prijs per massa-eenheid, stelt men zich dus aan een aanmerkelijk nadeel bloot. Wordt het hout verhandeld per stuk of per kavel, dan vervalt men in een administratieve dwaling, indien men uitrekent, hoeveel het hout per inhouds-eenheid opbracht; men berekent dien prijs dan aanmerkelijk te hoog.

Een remedie hiertegen kan gevonden worden door de uitkomst van de formule $i = g_{1/2}\, l$ te verhoogen met $33^1/_3$ % of 100 %.

Een andere uitweg is ook het verplaatsen van het meetvlak. Waar dit vlak moet liggen, om met lengte vermenigvuldigd den inhoud juist te geven vindt men, zooals wij reeds zagen, door voor $m = 2$ en $m = 3$, v op te lossen uit:

$$\frac{1}{(m + 1)\, v^m} = 1$$

voor $m = 2$ wordt dit:

$$\frac{1}{3\, v^2} = 1 \qquad v = \sqrt{1/3} = 0.577$$

en voor $m = 3$:

$$\frac{1}{4\, v^3} = 1 \qquad v = \sqrt[3]{1/4} = 0.63$$

---

[1]) Van welke orde de factor p is, kan blijken uit de volgende berekening.

Nemen wij een boom: H = 20.3 m. D_{130} = 22 cm, dit is ongeveer de middenboom uit een normaal fijnsparbosch 1e. bon. Schwappach, van 55 jaar.

$$\text{Uit: } y^2 = p\, x^m \text{ volgt: } p = \frac{y^2}{x^m}$$

hierin is $y = \frac{1}{2}$ D = 11 cm en x = 2030 — 130 = 1900 cm.

De boom kan zijn:

paraboloidisch ($m = 1$) $p = \frac{11^2}{1900} = 0.0637$

kegelvormig ($m = 2$) $p = \frac{11^2}{1900} = 0.0000335$

neiloidisch ($m = 3$) $p = \frac{1\ ^2}{1900^3} = 0.0000000176$

Zoo kennen wij nu de juiste ligging van het vlak, dat aan onzen eisch voldoet voor kegel- en neiloide-vormige boomen.

Voor het in praktijk brengen van deze kennis blijft echter een moeilijkheid, n.l. het herkennen van den juisten boomvorm.

Als men zou mogen aannemen, dat het sterk afvallen voor zich wel onmiskenbaar op te merken is, zonder dat het echter mogelijk is hierbij de kegel- en neiloide-vormen uit elkaar te kennen, dan zou in overweging genomen kunnen worden, zulke houtwerken te meten met een vlak $g_{0.6}$, dus 0.6 l van den top.

Voor dit vlak zou de juiste inhoudsformule zijn:

voor kegel: $m = 2$

$$i = \frac{1}{(m+1)\,v^m} g_{0.6}\, l =$$
$$= \frac{1}{3 \times 0.6^2} g_{0.6}\, l =$$
$$= \frac{1}{1.08} g_{0.6}\, l =$$
$$= 0\,93\ g_{0.6}\, l$$

voor neiloide: $m = 3$:

$$i = \frac{1}{(m+1)\,v^m} g_{0.6}\ l =$$
$$= \frac{1}{4 \times 0.6^3} g_{0.6}\ l =$$
$$= \frac{1}{0.864} g_{0.6}\, l =$$
$$= 1.16\ g_{0.6}\ l$$

Ten opzichte van deze juiste formulen geeft de benaderingsformule $i = g_{0.6}\ l$ fouten van:

$$\triangle_{keg.} = +\ 0.07\ g_{0.6}\ l = 7\tfrac{1}{2}\ \%\quad \text{te groot.}$$
$$\triangle_{neil.} = -\ 0.16\ g_{0.6}\ \ l = 13.8\ \%\quad \text{te klein.}$$

Dit zijn reeds aanzienlijk geringer fouten, dan voor deze stamvormen voortvloeien uit de formule $i = g_{1/2}\ l$.

Zouden de beide stamvormen in gelijke mate in de verschillende diameterklassen voorkomen, (een voldoende statistische grondslag is voor deze onderstelling echter niet aanwezig) dan heffen de fouten, als zijnde gedeeltelijk positief en gedeeltelijk negatief elkaar ten deele op en resulteert een eindfout van 4.3 % te klein.

$\lessgtr \triangle = 2\ g_{0.6}\, l - 2.09\ g_{0.6}\, l = -\ 0.09\ g_{0.6}\, l = 4.3\ \%$. te klein.

Het mag dus zeker aanbevolen worden naast de normale kubeering volgens $i = g_{1/2}\, l$ bij meer paraboloidisch gevormde staken en dolken, alleen voor de als „afvallend" uit te sorteeren houtwerken een kubeering aan te nemen $i = g_{0.6}\, l$

De gedachte kan zelfs opkomen om alle stamvormen maar te kubeeren volgens $i = g_{0.6}\, l$. Zouden ze alle in gelijke mate in dezelfde diameterklassen voorkomen, dan wordt de eindfout 2.7 % te groot.

De fout toch voor de paraboloide is te becijferen uit:

$$i_{par} = \frac{1}{(m+1)\, v^m}\, g_v\, l = \frac{1}{2 \times 0.6}\, g_{0.6}\, l = 0.83\, g_{0.6}\, l$$

en de totale eindfout:

$$\lessgtr \Delta_e = 3\, g_{0.6}\, l - (0.83 + 0.93 + 1.16)\, g_{0.6}\, l =$$
$$= 3\, g_{0.6}\, l - 2.92\, g_{0.6}\, l = +\, 0.08\, g_{0.6}\, l = 2.74\ \%$$

te groot.

Deze theoretische, gunstige uitkomst brengt in verleiding, de methode aan te bevelen. Is de paraboloidische vorm echter in meerderheid aanwezig — en dit hoopt en verwacht de boschbouwer toch; de afwijkende vormen zouden trouwens niet zoo opvallen, indien zij regelmatig voorkwamen — dan wordt de uitkomst belangrijk ongunstiger. Op iedere paraboloidische boom wordt toch een fout gemaakt van + 20.5 %:

$$\Delta_{par.} = g_{0.6}\, l - 0.83\, g_{0.6}\, l = +\, 0.17\, g_{0.6}\, l = 20.5\ \%$$

te groot.

Slechts een soliede statistische basis kan een raad in dezen zin rechtvaardigen.

Er is tenslotte een in theorie juiste oplossing aan te geven, d.w.z. een gezamenlijke formule voor de drie stamvormen, die juiste uitkomsten geeft voor alle. Maar daarbij geeft men eenvoud prijs, want er zijn twee meetvlakken mede gemoeid.

Bedoeld wordt de formule van G a u s z - S i m o n y:

$$i = \frac{l}{2}\,(g_{0.21} + g_{0.79})$$

of eenvoudiger:

$$i = \frac{l}{2}\,(g_{0.2} + g_{0.8})$$

waarmede dan fouten gemaakt worden:

$\Delta_{par.} = o$
$\Delta_{keg.} = +\ 2\ \%$
$\Delta_{neil.} = +\ 4\ \%$

De becijferingen van deze fouten worden nu maar achterwege gelaten.

Moge de zaak tot hiertoe betrekkelijk eenvoudig voorkomen, zoo heel eenvoudig is zij tenslotte toch niet.

Het bovenstaande handelt n.l. slechts over volle omwentelingslichamen, terwijl staken en dolken bijna steeds getopt zijn, dus alleen te vergelijken met afgeknotte omwentelingslichamen. Hieraan kunnen dan de drie besproken vormen voorkomen.

De algemeene inhoudsformule voor zulke lichamen van de onderstelde vormen is :

$$i = \frac{l}{m+1} \times \frac{G\sqrt[m]{G} - g\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}} = \frac{l}{m+1} \times$$

$$(G + \sqrt[m]{G^{m-1}\,g} + \ldots\ldots + \sqrt[m]{G\,g^{m-1}} + g)$$

waarin G = benedenvlak en g = bovenvlak.

Een vlak g_x dat met l vermenigvuldigd den inhoud van het lichaam zou geven moet een oppervlakte hebben, die als volgt is af te leiden :

$$g_x\, l = \frac{l}{m+1}(G + \sqrt[m]{G^{m-1}\,g} + \ldots\ldots + \sqrt[m]{G\,g^{m-1}} + g)$$

$$g_x = \frac{G + \sqrt[m]{G^{m-1}\,g} + \ldots\ldots + \sqrt[m]{G\,g^{m-1}} + g}{m+1}$$

Wat is de ligging van dit vlak in het afgeknotte lichaam ? Men kan deze aldus afleiden. De gevraagde ligging is op de gebruikelijke wijze als $v\,l$ aan te geven, waarin dus v gezocht wordt. (Zie fig. 3).

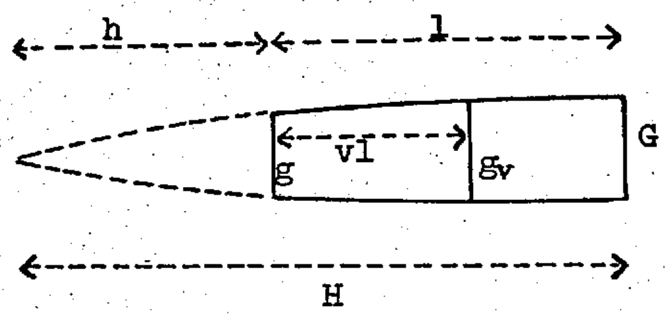

Fig. 3.

$$\sqrt[m]{G} : \sqrt[m]{g} = H : h$$

$$(\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}) : l = \sqrt[m]{g} : h \qquad (1)$$

$$\sqrt[m]{g_x} : \sqrt[m]{g} = (h + v\,l) : h$$

$$(\sqrt[m]{g_x} - \sqrt[m]{g}) : v\,l = \sqrt[m]{g} : h \qquad (2)$$

Uit *(1)* en *(2)* volgt :

$$(\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}) : l = (\sqrt[m]{g_x} - \sqrt[m]{g}) : v\,l$$

$$v = \frac{\sqrt[m]{g_x} - \sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}}$$

Substitueert men hierin voor g_x de tevoren gevonden waarde, dan krijgt men :

$$v = \frac{\sqrt[m]{\dfrac{G + \sqrt[m]{G^{m-1} g} + \ldots\ldots + \sqrt[m]{G g^{m-1}} + g}{m+1}} - \sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{G} - \sqrt[m]{g}}$$

Uit deze tamelijk ingewikkelde formule kan men alleen voor $m = 1$ een eenvoudige cijferwaarde tot uitkomst krijgen, n.l. : $v = \frac{1}{2}$.

Voor de afgeknotte paraboloide ligt het gezochte vlak dus op de halve lengte.

Voor de andere vormen met $m = 2$ en $m = 3$ ligt het elders en de aanduiding is slechts te vinden door de waarden voor G en g in de berekening te betrekken. Dit is voor de dagelijksche praktijk natuurlijk uitgesloten. Bovendien maakt deze omstandigheid het onmogelijk, aan die lichamen een gefixeerde ligging voor het vlak aan te geven, deze moet wisselen met de waarden van G en g.

In ieder geval veroorzaakt het werken met de formule $i = g_{1/2}\, l$ ook hier fouten, wanneer men haar toepast op kegel- en neiloide-vormige houtwerken.

Deze fouten zijn tot uitdrukking te brengen, waartoe de volgende weg moet worden ingeslagen.

Het middenvlak is uit te drukken in G en g als (de afleiding doet er nu niet toe ; is overigens eenvoudig) :

$$g_{1/2} = (\tfrac{1}{2} \sqrt[m]{G} + \tfrac{1}{2} \sqrt[m]{g})^m$$

dus : $$i = g_{1/2}\, l = l\, (\tfrac{1}{2} \sqrt[m]{G} + \tfrac{1}{2} \sqrt[m]{g})^m$$

en de hiermede gemaakte fout is :

$$\Delta = l\, (\tfrac{1}{2} \sqrt[m]{G} + \tfrac{1}{2} \sqrt[m]{g})^m - \frac{l}{m+1} (G + \sqrt[m]{G^{m-1} g} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \sqrt[m]{G g^{m-1}} + g)$$

De algebraische ontwikkeling van deze uitdrukking geeft tot uitkomsten voor kegel $(m = 2)$ en neiloide $(m = 3)$:

$$\Delta_{keg.} = -\frac{l}{12} (\sqrt{G} - \sqrt{g})^2$$

$$\Delta_{neil.} = -\frac{l}{8} (\sqrt[3]{G^2} - \sqrt[3]{g^2}) (\sqrt[3]{G} - \sqrt[3]{g})$$

De fouten zijn negatief, d.w.z. het gebruik van het middenvlak $g_{1/2}$ geeft te kleine uitkomsten, evenals dit bij de volle omwentelingslichamen het geval was.

Tot een uitdrukking in cijfers zijn de fouten weder niet terug te brengen, wij hebben er dus geen oordeel over. Dit hoeft ons echter nog niet te ontmoedigen, wij kunnen er voor ons doel wel iets van te weten komen.

De fouten zijn zooals aan de formule te zien is kleiner, naarmate $G - g$ dichter tot o nadert, dus naarmate beneden- en bovenvlak minder van elkaar verschillen.

Deze omstandigheid kan ons verder helpen.

De fouten worden n.l. maximaal bij $g = o$, d.w.z. bij volle, niet afgeknotte lichamen. Voor deze lichamen kon de raad gegeven worden (althans voor kegel en neiloide), het meetvlak te verplaatsen naar o.6 *l*, waarmede dan dooreengenomen waarschijnlijk nog iets te klein gemeten wordt.

Hoe langer top men van den boom afslaat, hoe kleiner het verschil tusschen G en *g* wordt, hoe dichter het meetvlak bij ½ *l* zal kunnen liggen.

De juiste ligging zal men te zoeken hebben tusschen *0.5 l* en *0.6 l* vanaf het bovenvlak.

Bij weinig getopte boomen met een topdiameter van een paar cm kan men bij *0.6 l* blijven, het vlak is dan zeer weinig te groot, maar de formule $i = g_{0.6}\ l$ geeft hiertegenover in 't algemeen iets te kleine uitkomst.

Een preciesere aanduiding van de ligging van het meest aan te bevelen vlak is helaas niet te geven.

Deze beschouwingen worden afgesloten met de opmerking, dat, evenals voor alle volle omwentelingslichamen van de besproken vormen, ook voor de afgeknotte van die vormen, de inhoudsformule van G a u s z - S i m o n y in theorie geheel juist is:

$$i = \frac{l}{2}(G_{0.21} + g_{0.79})$$

of als nog voldoend nauwkeurige benadering:

$$i = \frac{l}{2}(g_{1/5} + g_{4/5})$$

De dagelijksche praktijk zal echter om het gemis aan eenvoud wellicht bezwaar tegen het gebruik hebben.