FORMULES VOOR DE INHOUDSBEREKENING VAN LIGGEND HOUT

door

A. STOFFELS.

De inhoudbepaling van liggend hout geschiedt in de praktijk meestal door het bepalen van de lengte van de stam of het stamstuk en de berekening van de doorsnede op het midden van deze lengte. Het product van lengte en doorsnede op het midden geeft ons de inhoud. Men spreekt hier veelal van de formule van Huber.

Er zijn ook werkwijzen, die het meten van twee doorsneden nodig maken. De formule van Smalian bepaalt de inhoud van stamstukken als het product van de som der beide einddoorsneden en de halve lengte. De methode van Gausz-Simony gaat uit van de meting van twee doorsneden op $^1/_5$ en $^4/_5$ van de lengte. Het product van de som van deze doorsneden en de halve lengte verschaft ons de inhoud van het liggende stamstuk.

Om de doelmatigheid van deze en andere formules te toetsen moeten we een studie maken van de wisseling van de doorsneden van stammen. Het is duidelijk, dat er enig verband moet bestaan tussen de doorsnede en de afstand van deze doorsnede b.v. van het midden van de stam. Noemen we de doorsnede g en de afstand van deze doorsnede van het midden x, dan is

$$g = f(x) \qquad (-{}^1/_2 a < x > + {}^1/_2 a)$$

waarbij we de lengte van de stam a noemen.

Bij het aannemen van deze notaties kunnen we de verschillende in de praktijk bekende formules als volgt weergeven:

Huber:	$g_o \times a$
Smalian:	$(g_{-{}^1/_2 a} + g_{+{}^1/_2 a}) \times {}^1/_2 a$
Gausz-Simony:	$(g_{-0.3 a} + g_{+0.3 a}) \times {}^1/_2 a$
Newton-Riecke:	$(g_{-{}^1/_2 a} + 4g_o + g_{+{}^1/_2 a}) \times \frac{a}{6}$

Wanneer we uitgaan van de aangeduide betrekking tussen doorsnede en plaats van deze doorsnede, dan zouden we in de inhoud v van de stam of het stamstuk vinden als:

$$v = \int_{-{}^1/_2 a}^{+{}^1/_2 a} f(x)\, dx$$

Indien de functie f(x) van elke stam bekend was, dan zou deze inhoudsbepaling slechts neerkomen op een integratie. Zo eenvoudig is het echter niet, omdat we de functie in de meeste gevallen niet kennen.

Denken we ons f(x) ontwikkeld volgens een reeks van Mac-Laurin en stellen we haar voor als

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots \quad (-{}^1\!/_2 a < x < + {}^1\!/_2 a),$$

waarin c_0, c_1, c_2, ... constante waarden zijn.

De integratie geeft ons:

$$v = \int_{-1/2a}^{+1/2a} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots) \, dx$$

$$= c_0 \int dx + c_1 \int x dx + c_2 \int x^2 \, dx + \ldots\ldots$$

$$= c_0 \Big[x\Big]_{-1/2a}^{+1/2a} + c_1 \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{-1/2a}^{+1/2a} + c_2 \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{-1/2a}^{+1/2a} + \ldots\ldots$$

$$= c_0 . a + c_1 . 0 + c_2 . \frac{1}{12} a^3 + c_3 . 0 + \ldots\ldots$$

$$v = c_0 . a + \frac{1}{12} c_2 . a^3 + \frac{1}{80} c_4 . a^5 + \ldots\ldots$$

Bezien we allereerst de formule van H u b e r, dan geeft de berekening ons als resultaat:

$$c_0 . a \quad ,$$

aangezien $g_0 = f(o) = c_0$ is.

De formule van H u b e r is dus slechts juist, indien we de betrekking tussen doorsnede en afstand van het midden kunnen voorstellen door:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots\ldots$$

of met andere woorden, dat

$$c_2 = c_4 = c_6 = \ldots = c_{2n+2} = \ldots = 0$$

is, waarbij n een geheel getal voorstelt $\geqq 0$.

We kunnen thans het geval beschouwen, dat we twee doorsneden meten g_{-p} en g_{+p} ($p \leqq {}^1\!/_2 a$) op gelijke afstanden van het midden van de stam gelegen. Nu is:

$$\begin{array}{l} g_{-p} = f(-p) = c_0 - c_1 p + c_2 p^2 - c_3 p^3 + c_4 p^4 - \ldots\ldots \\ \underline{g_{+p} = f(+p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + c_4 p^4 + \ldots\ldots} \\ g_{-p} + g_{+p} = 2c_0 \qquad + 2c_2 p^2 \qquad + 2c_4 p^4 + \ldots\ldots \end{array}$$

De inhoud berekenen we nu volgens:

$${}^1\!/_2 a (g_{-p} + g_{+p}) = c_0 a + c_2 a p^2 + c_4 a p^4 + \ldots\ldots$$

Deze komt overeen met de juiste inhoud, indien de functie f(x) wederom als volgt kan worden opgebouwd:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots\ldots$$

of dat

$$c_2 = c_4 = c_6 = \ldots = c_{2n+2} = \ldots = O\ .$$

Er is echter een waarde, waarvoor $ap^2 = \frac{1}{12}a^3$ is en deze trekt onze bijzondere aandacht. We kunnen dan p als volgt bepalen:

$$p^2 = \frac{1}{12}a^2$$

$$p = \pm\frac{a}{2\sqrt{3}} = \pm\ 0{,}289\,a$$

Dit brengt ons tot de formule van Gausz-Simony, waarbij dus de doorsneden op de afstanden $p = \pm\ 0.3\ a$ worden gekozen.

Het is dan mogelijk, dat $f(x)$ als volgt is samengesteld:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots\ldots$$

of met andere schrijfwijze

$$c_4 = c_6 = \ldots = c_{2n+4} = O\ .$$

We kunnen ook nog de gevallen onder ogen zien, waarbij drie doorsneden worden gemeten en wel één op het midden en twee andere op gelijke afstanden van dit midden. Aan de middendoorsnede en de andere doorsneden kunnen dan nog gewichten worden toegekend.

Noemen we de doorsneden g_{-q}, g_o en g_{+q} en kennen we aan de middendoorsnede een gewicht k en aan de andere doorsneden een gewicht 1 toe, dan kunnen we ons een inhoudsberekening indenken volgens de becijfering

$$\frac{a}{2+k}(g_{-q} + kg_o + g_{+q})\ .$$

Kiezen we voor g_{-q}, g_o en g_{+q} de waarden, die ons de ontwikkeling van $f(x)$ verschaft, dan is deze inhoud

$$\frac{a}{2+k}\left\{(2+k)c_0 + 2c_2q^2 + 2c_4q^4 + \ldots\right\} =$$

$$c_0a + c_2\frac{2q^2.a}{2+k} + c_4\frac{2q^4.a}{2+k} + \ldots\ldots$$

Deze betrekking komt in het algemeen overeen met de juiste uitkomst, indien we de functie $f(x)$ wederom opgebouwd denken als:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \ldots\ldots$$

Wenst men de plaats van de doorsneden zo te kiezen, dat ook de constante c_2 niet gelijk aan 0 behoeft te zijn, dan moet:

$$\frac{2q^2.a}{2+k} = \frac{1}{12}\,a^3$$

$$k = \frac{24q^2 - 2a^2}{a^2}$$

Dit verschaft ons vele mogelijkheden. Wil men in ieder geval met boven- en benedendoorsnede werken (dus $q=\pm\frac{1}{2}a$), dan moet

$$k = 4$$

zijn en krijgt dan de formule van Newton-Riecke.

Zo kan men ook eisen, dat aan de middendoorsnede eveneens het gewicht 1 kan worden toegekend, dus:

$$1 = \frac{24q^2 - 2a^2}{a^2}$$

$$p^2 = \frac{1}{8}\,a^2 \qquad\qquad q = \pm\ 0.354\ a\ .$$

Maar ook is het mogelijk waarden van k en q te vinden, waarbij zowel c_2 als c_4 van 0 mogen afwijken.Dan moet aan de volgende betrekkingen worden voldaan:

$$\frac{2q^2.a}{2+k} = \frac{1}{12}\,a^3 \quad \text{en} \quad \frac{2q^4.a}{2+k} = \frac{1}{80}\,a^5$$

Uit deze vergelijkingen vindt men:

$$k = \frac{8}{5} \quad \text{en} \quad q = \pm\ a\sqrt{0.15} = \pm\ 0.387\ a$$

Rondt men q af, dan krijgt men de inhoudsformule:

$$\frac{a}{18}\,(5g_{-0.4a} + 8g_0 + 5g_{+0.4a})\ .$$

Wanneer we het voorgaande willen samenvatten, dan blijkt dat voor verschillende vormen van de functie f(x) de volgende formules juiste resultaten geven:

I $\quad f(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + c_7x^7 + \ldots + c_{2n+1}x^{2n+1} + \ldots\ldots$

1. $v = g_0 \times a$ (Huber)

2. $v = \frac{a}{2}(g_{-p} + g_{+p})$

   bijzonder geval:

   $$v = \frac{a}{2}\,(g_{-1/2a} + g_{+1/2a}) \qquad \text{(Smalian)}$$

3. $v = \frac{a}{2+k}\,(g_{-q} + kg_0 + g_{+q})$

II $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_5x^5 + c_7x^7 + \ldots + c_{2n+1}x^{2n+1} + \ldots\ldots$

$$4. \quad v = \frac{a}{2}(g_{-0.3a} + g_{+0.3a}) \qquad \text{(Gausz-Simony)}$$

$$5. \quad v = \frac{a}{2+k}\left(g_{-q} + \frac{24q^2-2a^2}{a^2} + g_{+q}\right)_o$$

bijzondere gevallen:

$$v = \frac{a}{6}(g_{-1/2a} + 4g_o + g_{+1/2a}) \qquad \text{(Newton-Riecke)}$$

$$v = \frac{a}{3}(g_{-0.35a} + g_o + g_{+0.35a})$$

III $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_7x^7 + \ldots$
$+ c_{2n+1}x^{2n+1} + \ldots\ldots$

$$6. \quad v = \frac{a}{18}(5g_{-0.4a} + 8g_o + 5g_{-0.4a})$$

LITERATUUR.

1. Beekman, H. A. J. M.. „Kubeeren van ronde houtwerken." Nederlandsch Boschbouw-Tijdschrift 1935, blz. 121—131.
2. Hampel, R.: „Untersuchungen über die Genauigkeit der Mittenflächenformel (Hubersche Formel)." Centralblatt für das gesamte Forstwesen 1931, blz. 87—108.
3. Michailoff, I.: „Izsledwanya warchu toschnostta na Huberowata formula pri kubiraneto na zeli dârwesni stâbla (Zusammenfassung: Untersuchungen über die Genauigkeit der Mittenflächenformel, Hubers Formel, bei der Inhaltsermittlung von Nadelholzschäften)." Jahrbuch der Universität Sofia; Land- und Forstw. Fakultät 1937, blz. 109—137.
4. Roussel, L.: „La dendrométrie." Bulletin de la société forestière de Franche-Comté et des Provinces de l'Est 1947, blz. 9—17.

LES FORMULES POUR LE CUBAGE DE BOIS ABATTU.

(résumé)

Pratiquement le volume d'un arbre abattu est calculé comme le produit de la longueur a et de la superficie g_0 d'une coupe perpendiculaire au milieu de l'arbre. Le plus souvent ce calcul est nommé après la formule d'Huber. On connait dans la pratique aussi d'autres formules par exemple celles de Smalian, Gausz-Simony et Newton-Riecke.

Nous pouvons indiquer la relation entre la superficie g et la distance x de cette superficie du milieu de l'arbre par

$$g = f(x)$$

Cette fonction connue, il n'est pas difficile de calculer le volume, mais le plus souvent on ne connait pas cette fonction. Alors nous supposerons la fonction développée par une série de Mac Laurin

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots\ldots$$

dans laquelle c_0, c_1, c_2, ... indiquent des constants.

A la fin de l'article les formules que donnent des résultats exacts pour un certain développement de f (x) sont récapitulées. Avec le symbole $g_{\pm p}$ nous indiquons la superficie de l'arbre à une distance $\pm p$ du milieu.
