DE DOELMATIGHEID VAN VERSCHILLENDE HOOGTEMETERS VOOR HET OPSTELLEN VAN EEN HOOGTEKROMME

door

Ir. A. STOFFELS.

De inhoud van een stam hangt onder meer af van den diameter (of cirkelvlakte) op borsthoogte en van de lengte. Doch tevens weten we, dat deze beide grootheden niet geheel van elkander onafhankelijk zijn. De praktijk heeft voldoende aangetoond, dat in een opstand tusschen diameter (of cirkelvlakte) op borsthoogte en de lengte geen strenge functioneele betrekking bestaat, maar dat we van een stochastischen samenhang moeten spreken. De kromme, die het hier genoemde verband zoo goed mogelijk weergeeft, noemt men de hoogtekromme. Zij is voor een juiste beoordeeling van de ontwikkeling van een opstand bij wetenschappelijke onderzoekingen onmisbaar. Ook bij de inhoudsbepaling van proefvlakten is het gebruik van een hoogtekromme zeer algemeen.

Langsaeter (8,9) wenscht, dat bij een hoogteanalyse deze betrekking tusschen diameter en hoogte nader zal worden bepaald door middel van een correlatiecoëfficiënt. Ook Berkhout (1) heeft zich reeds eerder met de berekening van deze grootheid bezig gehouden.

Men kan niet ontkennen, dat deze correlatiecoëfficiënt een belangrijk gegeven is, maar men mag niet vergeten, dat tusschen diameter en hoogte geen rechtlijnige correlatie optreedt, maar dat hier van een scheef stochastisch verband moet worden gesproken. De scheeve correlatie is uitvoerig onderzocht (7, 15, 16), zoodat de berekening van een correlatiecoëfficiënt eigenlijk geen moeilijkheden behoeft op te leveren, doch het wil mij voorkomen, dat de berekening zooveel tijd in beslag neemt, dat men er in de meeste gevallen van moet afzien. Een berekening volgens de methode van de rechtlijnige correlatie moet van de hand gewezen worden, aangezien men dan onjuiste (te lage) cijfers krijgt, die nimmer met elkander vergeleken kunnen worden.

Meestal geschiedt de vervaardiging van een hoogtekromme door bij verschillende diameters de aan proefboomen bepaalde hoogten grafisch voor te stellen en door deze reeks punten op het oog zoo goed mogelijk een lijn te leggen. Tischendorf (13, 14) en Näslund (10, 11) wijzen op de beteekenis van een wiskundige vereffening van de hoogtekromme; zij stellen derhalve een bepaalde functie met enkele constanten vooraf vast, welke constanten dan uit het meetmateriaal moeten worden verkregen.

Ook Gehrhardt (5) doet in wezen hetzelfde, wanneer hij aaneemt, dat tusschen het product van grondvlak (= cirkelvlakte op borsthoogte) en hoogte eenerzijds en de grondvlakte anderszijds een rechtlijnige betrekking zou bestaan. Het ligt evenwel niet in het voornemen deze verschillende methoden hier uitvoerig te bespreken. We willen ons bezig houden met de nauwkeurigheid van een dergelijke hoogtekromme in verband met de nauwkeurigheid van den hoogtemeter, waarmede we werken, onafhankelijk of een wiskundige bewerking al dan niet wordt toegepast.

Sommige schrijvers zooals Grundner-Schwappach (6) wenschen, dat men de hoogten van de proefboomen van elke diameterklasse allereerst middelt en deze gemiddelden dan grafisch vereffent. Bij deze laatste methode mag men niet vergeten zich rekenschap te geven van de aantallen proefboomen, waaruit deze gemiddelden zijn berekend. Wordt niet in elke diameterklasse een gelijk aantal hoogten gemeten, dan hebben de gemiddelden niet dezelfde nauwkeurigheid. In wezen komt het wel op deze gemiddelden aan, daar we onze hoogtekromme midden door de puntenreeks trachten te leggen.

De handelwijze met de hoogten is geheel verschillend met die van de diameters. Bij de hoogtekromme trachten we het geval te benaderen van een oneindig groote proefvlakte. Ook al zou de opstelling juist zijn, dan geeft onze proefvlakte met een eindig aantal stammen al naar haar grootte kleinere of grootere afwijkingen van de vloeiende hoogtekromme, die op het asymptotische geval is toegespitst.

Laten we ons een oneindig groote proefvlakte voorstellen, waarbij we een bepaalde diameterklasse zullen beschouwen. Alle boomen, die behooren tot deze diameterklasse, zullen niet dezelfde hoogte hebben. Noemen we de verschillende hoogten h_1, h_2, h_3, ... en stellen we het gemiddelde van dit oneindige aantal hoogtecijfers $\hat{h}$ We kunnen hier dus spreken van een asymptotisch gemiddelde en het is juist deze waarde, die we bij de hoogtekromme trachten te benaderen, ook al is dan het aantal stammen niet oneindig groot.

De afwijkingen van de verschillende boomhoogten met dit asymptotisch gemiddelde zullen we aanduiden met t_1, t_2, t_3, ..., waarbij dus:

$$t_1 = h_1 - \hat{h},\ t_2 = h_2 - \hat{h}\ ,\ .\ .\ .\ ,\ t_k = h_k - \hat{h}\ ,\ .\ .\ .$$

De middelbare afwijking ten opzichte van dit asymptotische gemiddelde f kunnen we nu vinden uit de betrekking:

$$f^2 = \lim_{p = \infty} \frac{t^1\ t_1 + t_2\ t_2 + \ldots + t_p\ t_p}{p} = \langle tt \rangle$$

Het is deze afwijking, die ons een indruk geeft van de schommeling van de boomhoogten in de gekozen diameterklasse rond hun gemiddelde. We zullen thans in de eerste plaats de factoren bespreken, die de grootte van deze middelbare afwijking bepalen.

a) Als eerste omstandigheid kunnen we den opbouw van den opstand noemen. In een ongelijkjarig bosch is deze afwijking over het algemeen grooter dan bij gelijkjarige opstanden. Ook de behandeling en met name de dunning kan natuurlijk invloed uitoefenen.

b) Als tweede omstandigheid kan de hoogteontwikkeling van den opstand genoemd worden. In een jong bosch, waar we slechts met geringe hoogten te doen hebben, zal deze afwijking in absolute maat in den regel kleiner zijn dan bij een ouderen opstand, waar veel grootere hoogten en ook grootere hoogteverschillen zullen voorkomen.

c) In een bepaalden opstand zal deze middelbare afwijking nog afhangen van de diameterklasse. De onderzoekingen van Langsaeter en Näslund toonen aan, dat deze middelbare afwijkingen van de allerkleinste diameterklassen vrij klein zijn om vervolgens op te loopen en dan spoedig vrijwel eén constante waarde aan te nemen.

d) Tenslotte hangt de grootte van de middelbare afwijking nog af van de grootte van de gekozen diameterklasse. Kiest men b.v. een klasseninterval van 5 cm, dan zal men grootere afwijkingen aantreffen dan bij 1 cm-klassen. In het bijzonder geldt dit, wanneer de hoogtekromme vrij steil verloopt; bij de sterke afvlakking zullen deze verschillen zeer gering worden.

Zooals we reeds zagen, komt de nauwkeurigheid van de hoogtekromme neer op de nauwkeurigheid, waarmede de gemiddelden van de diameterklassen worden bepaald. Stel dat we in een bepaalde diameterklasse van n proefboomen de hoogte meten en dat het resultaat ons de volgende hoogtecijfers geeft h_1, h_2, ... , h_n met als gemiddelde $\overline{h}$:

$$\overline{h} = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{n}$$

De middelbare fout van dit gemiddelde $f_{\overline{h}}$ wordt gevonden uit de betrekking:

$$f_{\overline{h}} = \frac{f}{\sqrt{n}}$$

waarin f wederom de hierboven besproken middelbare afwijking voorstelt. Deze fout voor de gemiddelde hoogte van een bepaalde diameterklasse wordt ten deele bepaald door den opbouw van den opstand en voorts door het aantal hoogtemetingen, dat wordt verricht.

Het gebruik van de hier genoemde formule voor de middelbare fout van de gemiddelde hoogte $\bar{h}$ onderstelt in de eerste plaats het bekend zijn van de middelbare afwijking f, de spreiding van de hoogtecijfers rond het asymptotisch gemiddelde. Deze middelbare afwijking kan inderdaad eenigszins wisselen, doch in het algemeen loopen de cijfers niet zoo sterk uiteen, als men op het eerste oogenblik zou verwachten. Uit de onderzoekingen van Langsaeter en Näslund blijkt, dat b.v. algemeene cijfers voor een den kaprijpen leeftijd naderenden grovedennen- en fijnsparopstand achtereenvolgens ligt in de buurt van 1,0 m en 1,4 m.

Bepaalt men de hoogten van de proefboomen na velling, dan blijft de hier besproken fout de eenige oorzaak van onjuistheden. Anders wordt het, wanneer men de hoogtecijfers bepaalt aan staande boomen door middel van een hoogtemeter; de fouten van deze hoogtemetingen moeten we thans eveneens in rekening brengen. Stellen we wederom in een bepaalde diameterklasse de met een hoogtemeter gemeten hoogten der proefboomen voor door $h'_1, h'_2, \ldots, h'_k, \ldots, h'_n$ en de juiste doch onbekende hoogten weder door $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots, h_n$ en vervolgens de afwijking van de gevonden hoogte h'_k met het asymptotische gemiddelde $\hat{h}$ door T_k dan is:

$$T_k = h'_k - \hat{h} = h'_k - h_k + h_k - \hat{h}$$

In deze betrekking is $h'_k - h_k$ de fout bij de hoogtemeting, welke fouten we eenvoudigheidshalve zullen aanduiden met $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots, s_n$. Voorts is het verschil $h_k - \hat{h} = t_k$, de afwijking van het asymptotische gemiddelde. Derhalve is thans:

$$T_k = s_k + t_k$$

of na kwadrateering van beide leden:

$$T_k T_k = s_k s_k + 2 s_k t_k + t_k t_k.$$

Beschouwen we niet één enkele waarneming maar een oneindig aantal waarnemingen en middelen we deze gegevens, dan is:

$$< TT > = < ss > + 2 < st > + < tt >,$$

waarbij de teekens $< \; >$, zooals gebruikelijk, duiden op een asymptotische middeling.

In de bovenstaande betrekking is $< st > = 0$, aangezien de positieve en negatieve waarden elkander zullen opheffen. Voorts is $< ss > = e^2$ het kwadraat van de middelbare fout van de hoogtemetingen en $< tt > = f^2$ het kwadraat van de middelbare afwijking. Derhalve is:

$$< TT > = e^2 + f^2.$$

De middelbare fout van de berekende gemiddelde hoogte $\bar{h}$ is thans als gevolg van de schommeling van de hoogten in een bepaalde diameterklasse en tevens als gevolg van fouten bij de hoogtemetingen als volgt aan te geven:

$$f_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{\langle TT \rangle}{n}} = \sqrt{\frac{e^2 + f^2}{n}}.$$

Deze formule onderstelt buiten de bekendheid van de waarde f ook die van de middelbare fout van de hoogtemetingen. Vaak zijn dergelijke cijfers moeilijk te geven, omdat persoonlijke invloeden hier een rol spelen. In het bijzonder wordt het geval ingewikkeld, wanneer de nauwkeurigheid van den hoogtemeter met het toenemen van de hoogte nog sterk afneemt, zooals onder meer met den hoogtemeter van Christen het geval is. Gelukkig staan ons echter hieromtrent een aantal algemeene cijfers ter beschikking (3, 12).

De hier afgeleide formule stelt ons echter nog tot iets anders in staat, namelijk tot een onderzoek omtrent de doelmatigheid van het werken met een bepaalden hoogtemeter. Het spreekt voor zich, dat men de beste gegevens krijgt voor het samenstellen van een hoogtekromme door het meten van een zoo groot mogelijk aantal proefboomen met een zeer nauwkeurigen hoogtemeter. Doch meestal zal men den tijd niet hebben om van een opstand vrijwel alle stammen met een dergelijk instrument te meten. Men komt dan voor het vraagstuk te staan of het doelmatiger is om een klein aantal boomen te meten met een zeer nauwkeurigen hoogtemeter of een grooter aantal met een minder nauwkeurig instrument.

Het voorgaande kan misschien allereerst met een eenvoudig voorbeeld worden toegelicht. Stel dat een hoogtemeting met een instrument A tweemaal zooveel tijd in beslag neemt als een meting met een instrument B. Hier staat echter tegenover, dat de middelbare fout met het instrument B ongeveer 0,6 m bedraagt tegen 0,3 m als fout van het instrument A. We zullen daarbij werken in een grovedennenopstand, waarin we de spreiding van de hoogten in een diameterklasse op 1 m stellen. In denzelfden tijd kunnen we nu 2a metingen met het minder nauwkeurige instrument B doen tegen a met het instrument A. De vraag is nu, wat het doeltreffendst is.

Met de hierboven aangegeven cijfers vinden we voor het kwadraat van de middelbare fout van de berekende gemiddelde hoogte $\bar{h}$ in een diameterklasse achtereenvolgens: voor instrument A $\frac{0.09 + 1.00}{a} = 1.09 \times \frac{1}{a}$, voor instrument B $\frac{0.36 + 1.00}{2a} = 0.72 \times \frac{1}{a}$.

Hieruit blijkt, dat in het ondersteld geval het werken met den hoogtemeter B doelmatiger is dan met het op zich zelf nauwkeurigere instrument A.

We zullen tenslotte het vraagstuk meer algemeen beschouwen en wenschen een hoogtemeter A met een instrument B te vergelijken. De middelbare fouten van waarnemingen met deze instrumenten zullen worden voorgesteld door e_a en e_b, terwijl we vervolgens stellen :

$$k_a = \frac{e_a}{f} \qquad k_a = \frac{e_b}{f}$$

en de aantallen stammen, die in een gelijken tijd gemeten kunnen worden achtereenvolgens n_a en n_b Willen nu de instrumenten even doeltreffend genoemd worden, dan moet :

$$\frac{e_a^2 + f^2}{n_a} = \frac{e_b^2 + f^2}{n_b}$$

$$\frac{(1 + k_a^2)\, f^2}{n_a} = \frac{(1 + k_b^2)\, f^2}{n_b}$$

of

$$\frac{1 + k_a^2}{1 + k_b^2} = \frac{n_a}{n_b}.$$

In de onderstaande tabel is de waarde van het eerste lid van deze gelijkheid becijferd. Lezen we in deze tabel b.v. de waarde 1.25 af, dan beteekent dit, dat indien men in gelijken tijd 5 metingen met instrument A tegen 4 metingen met instrument B kan verrichten, beide hoogtemeters even doelmatig zijn. Kunnen evenwel 6 metingen met het instrument A gedaan worden tegen 4 met den hoogtemeter B, dan is het eerste instrument doelmatiger.

Bij een opstand, waarin we de middelbare afwijking van de hoogten f gelijk aan 1 m stellèn, kunnen we ter verkrijging van een hoogtekromme werken met eèn hoogtemeter van Liljenström of met een hoogtemeter van Christen.

k_b/k_a	0.00	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.25	1.50	2.00
0.00	1.00	1.00	1.01	1.04	1.09	1.16	1.25	1.36	1.49	1.64	1.81	2.00	2.56	3.25	5.00
0.05	—	1.00	1.01	1.04	1.09	1.16	1.25	1.36	1.49	1.64	1.81	2.00	2.55	3.24	4.99
0.10	—	—	1.00	1.03	1.08	1.15	1.24	1.35	1.48	1.62	1.79	1.98	2.53	3.22	4.95
0.20	—	—	—	1.00	1.05	1.12	1.20	1.31	1.43	1.58	1.74	1.92	2.46	3.13	4.81
0.30	—	—	—	—	1.00	1.06	1.15	1.25	1.37	1.50	1.66	1.83	2.35	2.98	4.59
0.40	—	—	—	—	—	1.00	1.08	1.17	1.28	1.41	1.56	1.72	2.21	2.80	4.31
0.50	—	—	—	—	—	—	1.00	1.09	1.19	1.31	1.45	1.60	2.05	2.60	4.00
0.60	—	—	—	—	—	—	—	1.00	1.10	1.21	1.33	1.47	1.88	2.39	3.68
0.70	—	—	—	—	—	—	—	—	1.00	1.10	1.21	1.34	1.72	2.18	3.36
0.80	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.00	1.10	1.22	1.56	1.98	3.05
0.90	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.00	1.10	1.41	1.80	2.76
1.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.00	1.28	1.63	2.50
1.25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.00	1.27	1.95
1.50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.00	1.54
2.00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.00

Laat ons verder onderstellen ,dat de middelbare fouten met deze instrumenten achtereenvolgens 0.05 m en 0,70 m zijn. We vinden nu :

$$k_a = \frac{0.05}{1.00} = 0.05 \text{ en } k_b = \frac{0.70}{1.00} = 0.70.$$

In de tabel lezen we nu een waarde 1.49 af, hetgeen dus beteekent, dat indien men 3 waarnemingen met den hoogtemeter van Christen kan verrichten tegen 2 waarnemingen met het instrument van Liljenström, beide hoogtemeters even doelmatig zijn.

In dit artikel werd getracht langs theoretischen weg een mogelijkheid te vinden ter beoordeeling van de doelmatigheid van hoogtemeters bij het opstellen van een hoogtekromme van proefvlakten. De beste resultaten verkrijgt men ongetwijfeld door het meten van een zeer groot aantal proefboomen met een zeer nauwkeurigen hoogtemeter. Maar neemt men den tijd, welke met een meting gemoeid is, tevens in de berekening op, dan zal men vaak tot de gevolgtrekking moeten komen, dat het doeltreffender is een groot aantal boomen te meten met een eenvoudig instrument dan een klein aantal met een zeer nauwkeurig. Naar mijn meening mag men derhalve ook bij wetenschappelijk werk niet steeds op de eenvoudige instrumenten neerzien. Zooals we hier aantoonden, kunnen ze vaak doelmatiger zijn dan nauwkeurige instrumenten.

LITERATUUR

1. Berkhout, A. H.: „Het meten der boomen in verband met hun aanwas" Mededeelingen van de Landbouwhoogeschool Wageningen 1920, blz. 109—225.
2. Cramér, H.: „Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar" Stockholm 1926.
3. Flury, Ph.: „Untersuchungen über einige Baumhöhenmesser" Mitteilungen der Schweiz. Centralanstalt für das forstl. Versuchswesen 1905, blz. 237—267.
4. Geerling, L. C.: „Enkele opmerkingen over de beteekenis van houtmeetkundige gegevens" Ned. Boschbouw-tijdschr. 1930, blz. 317—328.
5. Gehrhardt, E.: „Die theoretische und praktische Bedeutung des arithmetischen Mittelstammes" Meiningen 1901.
6. Grundner-Schwappach: „Massentafeln zur Bestimmung des Holzgehaltes stehender Waldbäume und Waldbestände" Berlin, 4e druk 1913.

7. J ø r g e n s e n, N. R.: „Undersøgelser over Frequensflader og Korrelation" København 1916.
8. L a n g s a e t e r, A.: „Höhenanalyse von Versuchsflächen mittels stehender Probestämme" Actes du Congrès international des Stations de recherches forestières. Stockholm 1929, blz. 222—228.
9. L a n g s a e t e r, A.: „Høideanalyse av forsøksfelter ved hjelp av stående prøvetraer" Meddelelser fra det norske skogforsøksvesen 1928—1930, blz. 463—471.
10. N ä s l u n d, M.: „Antalet provträd och höjdkurvans noggranhet" Meddelanden från statens skogsförsöksanstalt 1929, blz. 93—170.
11. N ä s l u n d, M.: „Die Genauigkeit der Höhenkurve" Actes du Congrès international des Stations de Recherches forestières. Stockholm 1929, blz. 240—241.
12. S t o f f e l s, A.: „Über die Genauigkeit einfacher Höhenmesser mit indirekter Standlinienmessung" Zeitschr. für Weltforstwirtschaft 1938, blz. 491—499.
13. T i s c h e n d o r f, W.: „Lehrbuch der Holzmassenermittlung" Wien 1927.
14. T i s c h e n d o r f, W.: „Numerische Ausgleichung forstlicher Zuwachskurven inbesondere bei der Aufstellung von Ertragstafeln" Forstw. Centralblatt 1926, blz. 349—360 en 383—389.
15. U v e n, M. J. v a n: „Over het bewerken van scheeve correlatie" Verslag der Kon. Academie van Wetenschappen (Natuurkunde) 1925 blz. 787—802, 965—982 en 1926, blz. 129—139.
16. U v e n, M. J. v a n: „Scheeve correlatie tusschen twee veranderlijken" Proceedings der Kon. Academie van Wetenschappen 1929, blz. 408—413.