DE BEREKENING VAN HET TOTALE GRONDVLAK, HET GEMIDDELDE GRONDVLAK EN DE GEMIDDELDE DIAMETER VAN DE OPSTAND VAN PROEFVAKKEN

(WITH SUMMARY IN ENGLISH)

door

A. STOFFELS.

A. *Inleiding.*

Bij de bestudering van de houtopstand van een proefvak kan men, al naar het doel van het onderzoek, verschillende gegevens bepalen. In vroeger jaren stelde men zich tevreden met de kennis van het aantal stammen, het totale grondvlak (d.i. de som van de doorsneden van de stammen op borsthoogte), de gemiddelde hoogte en de totale houtmassa. Onder de gemiddelde hoogte verstond men daarbij veelal de hoogte van de boom met het gemiddelde grondvlak. Had men te doen met blijvende proefvakken, dan herhaalde men de bepalingen steeds na een aantal jaren en zodoende kreeg men een indruk van de ontwikkeling van de opstand.

Cajanus heeft er reeds in 1914 op gewezen, dat deze gegevens onvoldoende zijn en dat het noodzakelijk is gegevens over de statistische opbouw van de opstand te verzamelen. Lönnroth en Näslund zijn op deze weg voortgegaan en vooral laatstgenoemde heeft aangetoond welk groot belang de statistische methoden hebben voor het dunningsonderzoek. Zodoende heeft de wiskundige statistiek haar intrede in de houtmeetkunde gedaan, waarvan zij thans een onmisbaar onderdeel uitmaakt.

Ook is men gaan inzien, dat gegevens, waarvan men geen indruk over de betrouwbaarheid kan geven, weinig betekenis hebben. Daardoor heeft ook de leer der fouten een belangrijke plaats in de houtmeetkunde ingenomen. Tischendorf is hier voorgegaan en de toepassing van de foutenleer is daarna in het bijzonder door Näslund en Langsaeter uitgewerkt.

Heeft men bijvoorbeeld de houtmassa van een dennenopstand op een gegeven tijdstip berekend als 122,6 m³ en vindt men na een tijdvak van vijf jaren als houtmassa 135,8 m³, dan kan men daaruit besluiten, dat de aanwas 13,2 m³ bedraagt. Zonder enige indruk te hebben van de fouten bij de opmetingen zegt ons een dergelijk cijfer heel weinig. Immers, noemt men de middelbare fout bij de eerste opmeting σ_1 en die van de tweede σ_2, dan is de middelbare fout σ_v van de berekende aanwas gelijk aan:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

en juist deze middelbare fout kan ons een indruk verschaffen van de nauwkeurigheid van de berekende aanwas .

Nemen we eens aan, dat $\sigma_1 = 5{,}1\ m^3$ en $\sigma_2 = 6{,}2\ m^3$ is, dan is:

$$\sigma_v = \sqrt{5{,}1^2 + 6{,}2^2} = 8{,}0\ m^3 .$$

De aanwas kunnen we aanduiden als $13{,}2 \pm 8{,}0\ m^3$, waarbij we door middel van de middelbare fout een indruk geven van de nauwkeurigheid van het verkregen resultaat.

We zullen ons hier beperken tot de bepaling van het totale grondvlak, het gemiddelde grondvlak en de gemiddelde diameter van de houtopstand van proefvakken en in het bijzonder onze aandacht besteden aan de eenzijdige en toevallige fouten, die bij de metingen worden gemaakt.

B. Bepaling van het totale grondvlak door meting van diameters.

Onder het totale grondvlak van een opstand verstaat men de som van de doorsneden van alle stammen op borsthoogte. Bepaalt men van de stammen de diameters op borsthoogte, dan zal men al naar gelang van de eisen van de nauwkeurigheid de diameters in klassen met grotere of kleinere klassenwijdte indelen. Noemen we de klassenmiddelpunten achtereenvolgens:

$$d_1 ,\ d_2 ,\ \ldots\ldots ,\ d_k ,\ \ldots\ldots ,\ d_n$$

en de aantallen stammen, die in deze klassen voorkomen:

$$y_1 ,\ y_2 ,\ \ldots\ldots ,\ y_k ,\ \ldots\ldots ,\ y_n ,$$

dan is het totale grondvlak G van de opstand:

$$G = \frac{1}{4}\pi\,(y_1 d_1^2 + y_2 d_2^2 + \ldots\ldots + y_n d_n^2).$$

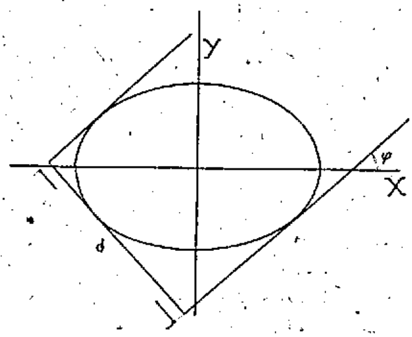
Bij de berekening van deze grootheid zal men verschillende fouten maken, die deels een eenzijdig en deels ook een toevallig karakter dragen. We kunnen hier de volgende fouten behandelen:

a) eenzijdige fout tengevolge van afwijkingen van de doorsneden der stammen van het cirkeloppervlak;
b) eenzijdige fout tengevolge van de afronding van de diameters bij de indeling in klassen;
c) toevallige fout bij de afronding van de diameters bij de indeling in diameterklassen.

De vorm van de stamdoorsneden kan zeer verschillend zijn, doch vaak treft men een doorsnede aan, die bij benadering door een ellips kan worden voorgesteld. Verschillende verklaringen van deze vorm zijn reeds gegeven. Enerzijds wordt de vorm toegeschreven aan de invloed van de wind, anderzijds aan de draaiing van de aarde om haar as. Het is niet de bedoeling hier deze beschouwingen na te gaan; we zullen slechts deze elliptische vorm als benadering van de afwijking van de zuivere cirkelvorm in onze beschouwingen opnemen.

In de onderstaande figuur 1 is een ellipsvormige doorsnede aangegeven met lange as 2a en korte as 2b en verder is een klem in een willekeurige stand getekend. Voor onze berekeningen is tevens een coördinatenstelsel aangebracht, waarvan de oorsprong samenvalt met het middelpunt van de ellips en de assen worden gevormd door de assen van de ellips.

Bij het klemmen van de stam vormen de benen van de klem evenwijdige raaklijnen aan de ellips en de diameter van de stam wordt ge-



Figuur 1

vonden als de afstand van deze raaklijnen. Noemen we de hoek, die de benen van de klem met de lange as van de ellips maken φ, dan kunnen we met behulp van de analytische meetkunde de beide raaklijnen in ons coördinatenstelsel weergeven door:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

waarin $m = \operatorname{tg} \varphi$ is.

Met de kennis van de analytische meetkunde kunnen we de afstand van deze twee evenwijdige raaklijnen gemakkelijk vinden als:

$$2\sqrt{\frac{a^2m^2 + b^2}{m^2 + 1}},$$

welke vorm dus afhankelijk is van de hoek, die de benen van de klem met de lange as van de ellips maken.

Becijferen we het grondvlak g op de gebruikelijke wijze als $g = \frac{1}{4}\pi d^2$ dan krijgen we voor het grondvlak van de stam:

$$g = \pi \frac{a^2m^2 + b^2}{m^2 + 1}.$$

We zullen steeds een andere uitkomst vinden, indien de hoek φ wisselt van 0° tot 90° (d.i. van 0 tot $\frac{\pi}{2}$ radialen). Het is daarom van belang de wiskundige verwachting te bepalen, d.w.z. het gemiddelde van alle waarden van g wanneer φ wisselt van 0 tot $\frac{\pi}{2}$ radialen. De kans op een bepaalde waarde φ met een speelruimte $d\varphi$ kunnen we voorstellen door $\frac{2}{\pi}\,d\varphi$, immers de kans op een waarde tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$ is gelijk aan de eenheid. Derhalve is de wiskundige verwachting $\hat{g}$ gelijk aan:

$$\hat{g} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \pi \frac{a^2m^2 + b^2}{m^2+1} \frac{2}{\pi}\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2tg^2\varphi + b^2}{tg^2\varphi + 1}\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(a^2+b^2) - (a^2-b^2)\cos 2\varphi\right\} d\varphi$$

$$= \Big[(a^2+b^2)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\frac{1}{2}(a^2-b^2)\sin 2\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\hat{g} = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2).$$

Aangezien het juiste oppervlak van een ellips gelijk is aan πab, hebben we bij de bepaling van de grondvlakken met een eenzijdige fout te doen gelijk aan:

$$\frac{\pi}{2}(a^2+b^2) - \pi ab = \frac{\pi}{2}(a-b)^2.$$

Het betreft hier dus een positieve fout, die afhankelijk is van het verschil van de beide assen van de ellips. Drukken we deze eenzijdige fout in procenten uit, dan vinden we terstond:

$$50\,\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Stellen we voorts de verhouding van de lange en de korte as voor door $R = \frac{a}{b}$, dan kan deze procentische fout worden herleid tot:

$$50\,\frac{(R-1)^2}{R}.$$

De uiterste fouten bij een meting worden gemaakt, wanneer de benen van de klem evenwijdig met de lange en de korte as worden gehouden (resp. $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Deze uiterste fouten zijn gelijk aan:

$$\pi b^2 - \pi ab = -\pi b(a-b)$$

en

$$\pi a^2 - \pi ab = +\pi a(a-b).$$

Ook de uiterste fouten kunnen we in procenten uitdrukken:

$$-100\,\frac{a-b}{a} = -100\,\frac{R-1}{R} \text{ en } 100\,\frac{a-b}{b} = 100\,(R-1).$$

Om een indruk te krijgen van de grootte van deze fouten zijn in de tabel I enige waarden verzameld voor verschillende verhoudingen van de assen van de ellips. De uiterste fouten hebben slechts betekenis bij de opmeting van een enkele boom. Bij de meting van een opstand met een groot aantal stammen is de gemiddelde eenzijdige fout voor onze beschouwingen doorslaggevend.

$R = \frac{a}{b}$	procentische fout (percentual error)		
	uiterste fouten (extreme errors) %		gemiddelde fout (mean error) %
1,00	— 0,00	+ 0,00	0,00
1,01	— 0,99	+ 1,00	+ 0,01
1,02	— 1,96	+ 2,00	+ 0,02
1,03	— 2,91	+ 3,00	+ 0,04
1,05	— 4,76	+ 5,00	+ 0,12
1,10	— 9,09	+ 10,00	+ 0,45
1,15	— 13,04	+ 15,00	+ 0,98
1,20	— 16,67	+ 20,00	+ 1,67
1,25	— 20,00	+ 25,00	+ 2,50
1,30	— 23,08	+ 30,00	+ 3,46
1,40	— 28,57	+ 40,00	+ 5,71
1,50	— 33,33	+ 50,00	+ 8,33
1,75	— 42,86	+ 75,00	+ 16,07
2,00	— 50,00	+ 100,00	+ 25,00

Tabel I. Uiterste en gemiddelde fouten in het grondvlak tengevolge van de afwijking van de stamdoorsneden van de cirkelvorm (Extreme and mean errors in the basal area caused by the deviation of the stem areas from the circular form).

We zien uit deze tabel, dat de eenzijdige fouten niet zeer groot zijn, wanneer de excentriciteit van de stamdoorsneden binnen een bepaalde grens blijft. We zouden feitelijk bij elke bepaling van het totale grondvlak van een opstand een correctie moeten toepassen. Hiervoor is echter de kennis van een gemiddelde waarde voor R nodig en deze waarde zouden we aan de hand van gegevens van een aantal stammen van de opstand kunnen bepalen.

Van een aantal p stammen bepaalt men de grootste en de kleinste diameter en daarna de verhouding van deze twee diameters :

$$R_1 = \frac{\delta_{1+}}{\delta_{1-}},\ R_2 = \frac{\delta_{2+}}{\delta_{2-}},\ \ldots\ldots,\ R_p = \frac{\delta_{p+}}{\delta_{p-}}.$$

Het gemiddelde $\bar{R}$ van deze verhoudingen kunnen we aannemen, als een gemiddelde voor de gehele opstand :

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_p}{p}$$

en zodoende kunnen we deze correctie benaderen.

We kunnen het voorgaande misschien met een eenvoudig voorbeeld verduidelijken. Van een tijdelijk aangelegd proefvak werden 352 beuken gemeten, die een totaal grondvlak hadden van 6,5308 m³. Van 20 willekeurige bomen werden de maximale en minimale diameters bepaald en daaruit de verhoudingsgetallen R. De resultaten waren de volgende :

diameter			diameter		
max.	min.	R	max.	min.	R
8,2	7,4	1,11	10,0	9,7	1,03
17,4	16,9	1,03	17,8	16,5	1,08
14,3	13,1	1,09	15,2	13,5	1,13
13,5	12,0	1,12	16,8	16,1	1,04
15,8	15,1	1,05	18,2	17,1	1,06
13,2	12,2	1,08	13,9	13,5	1,03
14,8	13,0	1,14	15,6	15,3	1,02
15,5	14,3	1,08	21,5	20,1	1,07
18,1	15,7	1,15	13,4	12,2	1,10
16,1	15,5	1,04	14,6	12,7	1,15

Het gemiddelde van deze verhoudingen is $\bar{R} = 1{,}080$, welke waarde we voor een benadering voor alle bomen van de opstand zouden kunnen aannemen. De fout in het totale grondvlak G bedraagt dan in procenten :

$$50\,\frac{(1{,}08 - 1)^2}{1{,}08} = 0{,}296\ \%.$$

Aangezien het totale grondvlak 6,5308 m² is, kunnen we de fout becijferen als 0,0193 m² en de berekening wordt dan als volgt :

berekend grondvlak	6,5308 m^2
correctie 0,296 %	0,0193 m^2
gecorrigeerd grondvlak ...	6,5115 m^2 *)

Om de fout tengevolge van de excentriciteit van de stamdoorsneden te verminderen gaat men er wel toe over twee diameters op borsthoogte aan elke stam te meten. Voor de meting van één enkele stam is dit vanzelfsprekend van belang, omdat dan zelfs zeer grote fouten kunnen optreden, doch we moeten nagaan of door het meten van twee diameters de eenzijdige fouten worden vermeden of verkleind.

Bij de meting van twee diameters kunnen we denken aan:

1) meting van de grootste en de kleinste diameter, waarna deze waarden rekenkundig worden gemiddeld;
2) meting van de grootste en de kleinste diameter, waarna de bijbehorende cirkelvlakten worden becijferd en gemiddeld;
3) meting van twee diameters over kruis en het middelen van de bijbehorende cirkelvlakten.

Noemen we bij een stamdoorsnede de maximale diameter d_+ en de minimale d_- en nemen we wederom de ellips als benadering van een excentrische doorsnede, dan berekenen we in het eerste geval als diameter:

$$d = \frac{d_+ + d_-}{2}.$$

Nu is bij een ellips de grootste doorsnede 2a en de kleinste 2b, waardoor we als gemiddelde van deze diameters vinden:

---

*) De gevonden waarde voor $\overline{R}$ is natuurlijk aan een fout onderhevig. De middelbare fout σ van een enkele waarneming van R vinden we als:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(R - \overline{R})^2}{p-1}} = \sqrt{\frac{0{,}0346}{19}} = 0{,}0427\,.$$

Noemen we het aantal stammen van de opstand N, dan kunnen we de middelbare fout van de verhouding $\overline{R}_{opst.}$ als volgt berekenen:

$$\sigma_{\overline{R}_{opst.}} = \sigma \sqrt{\frac{N-p}{Np}} = 0{,}0427 \sqrt{\frac{352-20}{352 \times 20}} = 0{,}00927\,.$$

De gemiddelde waarde van de verhouding $\overline{R}_{opst.}$, kunnen we nu als volgt weergeven:

$$\overline{R}_{opst.} = 1{,}0800 \pm 0{,}0093\,.$$

De fout in de procentische correctie is nu:

$$50\left(1 - \frac{1}{\overline{R}^2_{opst.}}\right) \sigma_{\overline{R}_{opst.}} = 50\left(1 - \frac{1}{1{,}08^2}\right) \times 0{,}00927 = 0{,}066$$

en de correctie in procenten met de middelbare fout bedraagt:

$$0{,}296 \pm 0{,}066\,.$$

De correctie in totaal in m^2 met middelbare fout is tenslotte gelijk aan:

$$\text{correctie} = 0{,}0193 \pm 0{,}0043 \ m^2.$$

$$d = a + b$$

en de cirkelvlakte g, die we hierbij becijferen is:

$$g = \frac{1}{4}\pi (a + b)^2.$$

Het juiste oppervlak van een ellips is πab, waardoor de grootte van de eenzijdige fout bedraagt:

$$\frac{1}{4}\pi (a + b)^2 - \pi ab = \frac{1}{4}\pi (a - b)^2.$$

of in procenten:

$$25\,\frac{(a - b)^2}{ab} = 25\,\frac{(R - 1)^2}{R}.$$

We zien hieruit, dat de eenzijdige fout door het meten van twee diameters, zoals onder 1) genoemd, tot de helft wordt teruggebracht.

In het tweede geval worden allereerst de cirkeloppervlakken g_+ en g_- becijferd, welke daarna worden gemiddeld. We vinden dan voor de stamdoorsnede:

$$g = \frac{g_+ + g_-}{2} = \frac{\pi a^2 + \pi b^2}{2} = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2).$$

De systematische fout is in dit geval gelijk aan:

$$\frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2) - \pi ab = \frac{1}{2}\pi (a - b)^2$$

of in procenten:

$$50\,\frac{(a-b)^2}{ab} = 50\,\frac{(R - 1)^2}{R}.$$

De eenzijdige fout is hier dus gelijk aan die, welke met de meting van een willekeurige diameter ontstaat, zodat deze werkwijze voor zover het betreft deze foutoorzaak geen verbetering geeft.

Bij de derde werkwijze gaan we uit van twee metingen van diameters, die loodrecht op elkaar staan, doch waarvan overigens de ligging willekeurig is. Zoals we in het begin weergaven, kunnen we de twee evenwijdige raaklijnen, die de benen van de klem vormen, voorstellen door:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

en die van de twee raaklijnen, welke met de eerste een rechte hoek vormen, kunnen we in het coördinaenstelsel aanduiden als:

$$y = -\frac{1}{m}x \pm \sqrt{a^2 + b^2m^2}.$$

De afstanden d_p en d_q van de paren raaklijnen zijn achtereenvolgens:

$$d_p = \sqrt{\frac{a^2m^2 + b^2}{m^2 + 1}} \quad \text{en} \quad d_q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2m^2}{m^2 + 1}}.$$

Bepalen we de cirkelvlakken g_p en g_q, die bij deze diameters behoren en vervolgens het gemiddelde g van beide, dan vinden we:

$$g = \frac{g_p + g_q}{2} = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{a^2m^2 + b^2}{m^2+1} + \frac{a^2 + b^2m^2}{m^2+1}\right) = \frac{1}{4}\pi\,(a^2 + b^2).$$

De systematische fout is thans weder:

$$\frac{1}{2}\pi\,(a^2 + b^2) - \pi ab = \frac{1}{2}\pi\,(a - b)^2,$$

of in procenten:

$$50\,\frac{(a-b)^2}{ab} = 50\,\frac{(R-1)^2}{R}.$$

We zien ook hier, dat de meting van twee diameters, althans voor wat deze fout betreft, geen verbetering brengt. Door de meting van de grootste en de kleine diameter en het rekenkundig middelen van deze waarden is het echter mogelijk de besproken eenzijdige fout tot de helft terug te brengen.

Vervolgens zullen we de eenzijdige fout bespreken, die ontstaat tengevolge van de afronding van de diameters bij de indeling in klassen. Noemen we de bij de klassenmiddelpunten:

$$d_1,\ d_2,\ \ldots\ldots,\ d_k,\ \ldots\ldots,\ d_n$$

behorende cirkeloppervlakken:

$$g_1,\ g_2,\ \ldots\ldots,\ g_k,\ \ldots\ldots,\ g_n,$$

dan rijst de vraag of het wel juist is bij de grondvlakberekening uit te gaan van de bij de klassenmiddelpunten behorende cirkelvlakten. Sheppard heeft er op gewezen, dat een correctie nodig is, die verband houdt met de klassenwijdte en het aantal waarnemingen.

Stellen we het berekende totale grondvlak weer voor door G, de klassenwijdte door c en het aantal stammen door N, dan is het gecorrigeerde juiste grondvlak $\hat{G}$ gelijk aan:

$$\hat{G} = G - \frac{\pi c^2}{48} N.$$

We maken hier steeds een positieve fout, die afhankelijk is van de klassenwijdte en het aantal stammen. De afhankelijkheid van de klassenwijdte is daarbij het grootst, omdat de fout evenredig is met het kwadraat van het klasseninterval.

We kunnen als voorbeeld nemen een fijnsparrenproefvak, waarbij de stamdiameters werden ingedeeld in klassen met een wijdte van 2 cm. De berekening van het totale grondvlak gaf het volgende resultaat: zie volg. pag.

De correctie bedraagt nu:

$$\frac{\pi \times 0{,}02^2}{48} \times 340 = 0{,}00990\ \mathrm{m}^2,$$

zodat de berekening van het totale grondvlak als volgt kan worden uitgevoerd:

berekend grondvlak ...	10,0720 m²
correctie	0,0099 m²
gecorrigeerd grondvlak	10,0621 m²

diameter-klasse	aantal stammen	grondvlak enkele boom	grondvlak klasse
6	10	0,00283	0,0283
8	29	0,00503	0,1459
10	21	0,00785	0,1649
12	22	0,01131	0,2488
14	19	0,01539	0,2924
16	32	0,0201	0,6432
18	37	0,0254	0,9398
20	47	0,0314	1,4758
22	43	0,0380	1,6340
24	30	0,0452	1,3560
26	21	0,0531	1,1151
28	17	0,0616	1,0472
30	6	0,0707	0,4242
32	1	0,0804	0,0804
34	3	0,0908	0,2724
36	2	0,1018	0,2036
	N = 340		G = 10,0720

De toevallige fouten, die tengevolge van de afronding in het totale grondvlak ontstaan, zijn reeds nauwkeurig bestudeerd. Tischendorf gebruikt voor de berekening van de middelbare fout σ_G van het totale grondvlak G de benadering.

$$\sigma_G = \frac{c}{3}\sqrt{\pi G}.$$

Persoonlijk geef ik de voorkeur er aan de juiste formule

$$\sigma_G = \frac{c}{6}\sqrt{3\pi G}.$$

te gebruiken en de waarde van de factor $\frac{c}{6}\sqrt{3\pi} = f_d$ uit een tabel af te lezen. Het is zeer eenvoudig hier van een logarithmische berekening gebruik te maken, waarbij

$$\log \sigma_G = \log f_d + \frac{1}{2}\log G$$

is en waarbij we voor de gebruikelijke klassenintervallen de waarde van $\log f_d$ tevens uit een tabel kunnen vinden. De onderstaande tabel II geeft enkele waarden aan.

Bij de berekening van het totale grondvlak van de fijnsparrenopstand kunnen we de middelbare fout als volgt becijferen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log G &= 0{,}50137\\ \log f_d &= 0{,}01001 - 2\\ \hline \log \sigma_G &= 0{,}51138 - 2\\ \sigma_G &= 0{,}032462\end{aligned}$$

Het totale grondvlak met de middelbare fout kunnen we dus als volgt weergeven :

$$G = 10{,}0621 \pm 0{,}0325 \text{ m}^2.$$

Omgekeerd is het mogelijk om bij een vooraf vastgestelde eis van nauwkeurigheid na te gaan welke afronding moet worden gebezigd. Nemen we als voorbeeld, dat we het totale grondvlak van een opstand

klassenwijdte (classinterval) cm	f_d	$\log f_d$
0,1	0,0005117	0,70898—4
0,5	0,0025583	0,40795—3
1,0	0,0051166	0,70898—3
2,0	0,010233	0,01001—2
2,5	0,012792	0,10693—2
3,0	0,015350	0,18610—2
4,0	0,020467	0,31104—2
5,0	0,025584	0,40795—2
6,0	0,030700	0,48713—2
8,0	0,040934	0,61207—2
10,0	0,051166	0,70898—2

Tabel II. Waarden van f_d en $\log f_d$ (Table for f_d and $\log f_d$).

op 10 m² schatten en dat we eisen, dat de middelbare fout niet meer dan 0,1 % zal bedragen, dan kunnen we uit de betrekking :

$$\log f_d = \log \sigma_G - \frac{1}{2} \log G$$

terstond vinden :

$$\log f_d = -2 - 0{,}5 = 0{,}50000 - 3.$$

Uit de tabel kunnen we afleiden, dat bij een klassenwijdte van 1 cm de middelbare fout groter is dan 0,1 %. Bij een interval van 0,5 cm is de middelbare fout iets kleiner dan 0,1 %. We zullen om aan de gestelde eis te voldoen met een klassenwijdte van 0,5 cm moeten meten.

(Wordt vervolgd).