DE BEREKENING VAN DE MIDDELBARE AFRONDINGSFOUT IN DE TOTALE CIRKELVLAKTE VAN PROEFVAKKEN

door

Ir. A. STOFFELS.

Bij alle waarnemingen worden fouten gemaakt; geen menschenhand, geen menschenoog en geen instrument is in staat ons resultaten met volstrekte zekerheid te verschaffen. Bepaalt men den afstand van een hemellichaam tot de aarde, de snelheid van het geluid of de dikte van een celwand. steeds zal men met fouten te doen hebben en nimmer zullen volmaakt juiste uitkomsten worden verkregen.

Wanneer men in onze boschbouwpraktijk de hoogte van een staanden boom meet, zal men niet aan een fout kunnen ontkomen, omdat het meetinstrument niet volmaakt is, evenmin als de wijze, waarop wij het gebruiken. Meet men den diameter van een stam, dan zal men door een kleinen onjuisten stand van de beenen van den klem een onjuist resultaat krijgen. Ook kan de aflezing niet tot de grootste nauwkeurigheid worden opgevoerd, omdat ons oog dit niet toelaat.

Door de keuze van het meetinstrument en de wijze van werken zijn de fouten te verkleinen, maar om financieele redenen is dit niet steeds mogelijk. Bij deze verschillende werkwijzen zal echter terstond de vraag naar voren komen, hoe groot de nauwkeurigheid van het gevonden resultaat is. Inderdaad is dit van zeer groot belang, aangezien uitkomsten, waarvan men de nauwkeurigheid niet kent, feitelijk weinig beteekenis hebben.

Onder de ware of werkelijke fout van een waarneming verstaat men het verschil van de waarnemingsuitkomst met de ware waarde. Is de verkregen uitkomst kleiner dan de ware waarde, dan is de ware fout negatief; in het tegenovergestelde geval is zij positief. Onder de middelbare fout verstaat men, zooals bekend, het kwadratisch gemiddelde van een oneindig aantal ware fouten. Het is meestal onmogelijk om deze grootheid, evenmin als de ware fouten zelf, te becijferen, doch wel kan men voor haar een benaderde waarde vinden. Het is deze laatste grootheid, die men veelal als maatstaf voor de nauwkeurigheid van waarnemingen aanneemt en daarvoor is zij dan ook zeer geschikt.

In sommige gevallen kan er ook sprake zijn van uiterste fouten. Wanneer men b.v. de lengte van stammen meet met een afronding naar den dichtstbijzijnden decimeter, dan zijn de uiterste fouten $\pm$ 5 cm. Deze fouten geven dus de grenzen aan, waarbinnen de onnauwkeurigheid van de meting in ieder geval moet liggen ; de middelbare fout geeft daarentegen de onnauwkeurigheid weer, die gemiddeld in een dergelijke waarneming moet worden verwacht.

De belangrijkste factor bij de inhoudsbepaling van een proefvak is de totale cirkelvlakte der stammen op borsthoogte. Deze totale cirkelvlakte wordt meestal verkregen door de meting van de diameters der stammen met behulp van een klem. Sommige onderzoekers bepalen in plaats van deze diameters de omtrekken der boomen, doch deze werkwijze komt betrekkelijk weinig voor. De diameters kan men naar den dichtstbijzijnden millimeter, centimeter, enz. afronden en de vraag, die we in dit artikel willen bespreken is, hoe de nauwkeurigheid van de berekende totale cirkelvlakte van de gekozen afronding afhangt. We zullen ons derhalve niet bezighouden met andere fouten, die bij de bepalingen kunnen ontstaan, maar uitsluitend den invloed van de gekozen grootte der diameterklassen nagaan.

De totale cirkelvlakte G wordt gevonden uit de sommeering van de cirkelvlakten $g_1, g_2, \ldots, g_n$ van alle n op het proefvak voorkomende stammen :

$$G = g_1 + g_2 + \ldots + g_n.$$

De cirkelvlakte van elken stam wordt gevonden uit den gemeten diameter op borsthoogte :

$$g_1 = {}^1/_4\,\pi\, d_1^2,\; g_2 = {}^1/_4\,\pi\, d_2^2,\; \ldots\ldots,\; g_n = {}^1/_4\,\pi\, d_n^2.$$

Noemen we de middelbare fout van de totale cirkelvlakte σ_G, dan kan deze volgens de voortplantingswet der fouten als volgt uit de middelbare fouten der verschillende stamcirkelvlakten worden berekend :

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_{g_1}^2 + \sigma_{g_2}^2 + \ldots + \sigma_{g_n}^2}.$$

Wanneer we de middelbare fout bij de diametermeting σ noemen, dan is volgens een bekende voortplantingswet verder :

$$\sigma_{g_1} = {}^1/_2\,\pi\, d_1\,\sigma,\; \sigma_{g_2} = {}^1/_2\,\pi\, d_2\,\sigma,\; \ldots,\; \sigma_{g_n} = {}^1/_2\,\pi\, d_n\,\sigma,$$

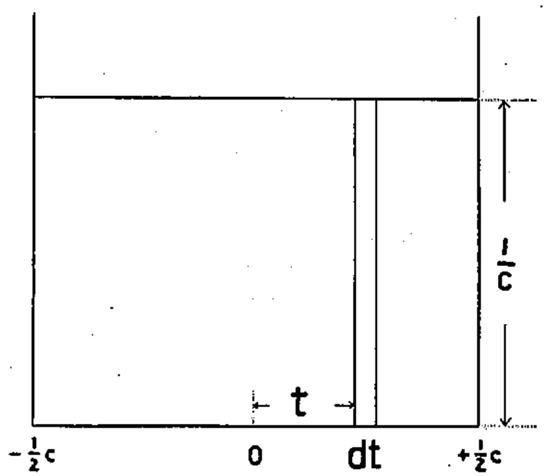
aangezien $\frac{1}{2}\,\pi\, d$ het eerste differentiaalquotient van de functie $\frac{1}{4}\,\pi\, d^2$ voorstelt. Door de vervanging van deze waarden in de bovenstaande betrekking, vinden we :

$$\sigma_G = \sigma\sqrt{{}^1/_4\,\pi^2 d_1^2 + {}^1/_4\,\pi^2 d_2^2 + \ldots + {}^1/_4\,\pi^2 d_n^2}$$

$$\sigma_G = \sigma\sqrt{\pi G}.$$

We hebben hier de middelbare fout van de totale cirkelvlakte in eenvoudigen vorm geplaatst, doch we dienen nu nog de middelbare fout σ der diametermetingen nader te onderzoeken.

Noemen we de grootte van het klasseninterval c, dan worden alle diameters tusschen d—½c en d+½c dus als d berekend. Stelt men nu nog de afwijking van een bepaalde werkelijke diametermeting met zijn klassenmiddelpunt t, dan kan deze laatste waarde wisselen van —½c tot +½c. De kans, dat t ligt tusschen —½c en +½c is derhalve gelijk aan 1 (volstrekte zekerheid). De kans, dat de afwijking valt tusschen t en t + dt (dt is een oneindig kleine aangroeiing van de waarde t) is dan $\frac{1}{c}$ dt. Elke waarde van t van —½c tot +½c heeft een gelijke kans van voorkomen. De oppervlakte van den in de figuur aangegeven rechthoek is 1, waardoor de hoogte gelijk aan $\frac{1}{c}$ moet zijn.



Het kwadraat van de middelbare fout σ kan nu als volgt worden berekend:

$$\sigma^2 = \int_{-{}^1/_2c}^{+{}^1/_2c} t^2 \times \frac{1}{c} dt = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-{}^1/_2c}^{+{}^1/_2c} = \frac{1}{12}\,c^2$$

en

$$\sigma = \frac{c}{2\cdot\sqrt{3}}$$

De middelbare fout σ wordt dus gevonden door het klasseninterval door $2\sqrt{3}$ te deelen. De fout in de totale cirkelvlakte wordt thans:

$$\sigma_G = \frac{c}{6} \sqrt{3\,\pi\,G}$$

Indien we tenslotte nog de factor $\frac{c}{6}\sqrt{3\pi} = f$ stellen, dan vinden we de middelbare fout van de totale cirkelvlakte eenvoudig uit de betrekking:

$$\sigma_G = f\sqrt{G},$$

waarbij de waarde van de factor f uit de onderstaande tabel kan worden afgelezen. Voor een bewerking met logarithmen zijn ook de logarithmen dezer waarden vermeld.

klassen-interval cm	f	log f
0.1	0.05117	0.70899 — 2
0.5	0.25584	0.40796 — 1
1.0	0.51167	0.70899 — 1
2.0	1.0233	0.01002
2.5	1.2792	0.10693
3.0	1.5350	0.18611
4.0	2.0467	0.31105
5.0	2.5584	0.40796
5.0	3.0700	0.48714
8.0	4.0934	0.61208
10.0	5.1167	0.70899

Het voorgaande kan misschien met een eenvoudig voorbeeld worden verduidelijkt. Van een proefvak wordt de totale cirkelvlakte op borsthoogte bepaald met behulp van een klem, waarbij men diameterklassen van 2 cm maakt. De totale cirkelvlakte is berekend op 167030 cm² of 16.703 m². De middelbare fout van dit resultaat vinden we nu eenvoudig langs logarithmischen weg:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log G &= 2.61140 \\ \log f &= 0.01002 \\ \hline \log \sigma_G &= 2.62142 \\ \sigma_G &= 418.24 \end{aligned}$$

Volgens deze eenvoudige becijfering, waarbij de waarde van log f uit de bovenstaande tabel werd verkregen, is dus de middelbare fout van de berekende totale cirkelvlakte gelijk aan 418.24 cm² of 0.041824 m². Het resultaat van de cirkelvlakteberekening kunnen we hierdoor aangeven als:

$$G = 16.703 \pm 0.042.$$

Hierdoor is het mogelijk een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid van het becijferde resultaat. We vinden hier de fout, die als waarschijnlijk moet worden beschouwd. Hierbij dient evenwel te worden vermeld, dat slechts rekening is gehouden met de fouten van de afronding en dat alle andere mogelijke onnauwkeurigheden buiten beschouwing zijn gebleven. Fouten door een onjuisten stand van de beenen van den klem, door een mogelijk onjuist aanleggen van dit instrument aan den stam of door de afwijkingen van de stamdoorsneden van den zuiveren cirkelvorm zijn hier vanzelfsprekend niet bij inbegrepen.

In dit artikel werd getracht een mogelijkheid te vinden voor de berekening van de middelbare fouten van de totale cirkelvlakten van proefvakken tengevolge van de afrondingen bij de klemming van de opstanden. Door het gebruik van de bovenstaande tabel kan deze fout langs logarithmischen weg vrij eenvoudig worden berekend; de becijfering neemt slechts enkele minuten in beslag.

LITERATUUR.

1. Geerling, L. C.: „Enkele opmerkingen over de beteekenis van houtmeetkundige gegevens." Ned. Boschbouw Tijdschr. 1930, blz. 317—328.
2. Tischendorf, W.: „Lehrbuch der Holzmassenermittlung." Wien 1927.
3. Uven, M. J. van: „Mathematical treatment of the results of agricultural and other experiments." Groningen-Batavia 1935.

DIE BERECHNUNG DES MITTLEREN ABRUNDUNGSFEHLERS DER GESAMTKREISFLÄCHE VON PROBEFLÄCHEN.

(Zusammenfassung).

In vorstehender Abhandlung wird eine Formel dargestellt zur Berechnung des mittleren Fehlers der Gesamtkreisfläche von Probeflächen. Wenn man diesen Fehler mit σ_G und die Gesamtkreisfläche mit G bezeichnet, so lautet diese Formel:

$$\sigma_G = f\sqrt{G}$$

in welcher die Konstante f von der Abrundung der Durchmesser abhängig ist. In der Tabelle kann man die Werte dieser Konstante finden. Die Berechnung läszt sich leicht mittels Logarithmen durchführen. Deswegen sind in der Tabelle auch die Logarithmen der Werte f angegeben worden.

Die Fehler beziehen sich selbstverständlich nur auf Abrundungen; alle weiteren Fehlermöglichkeiten wurden nicht Betracht genommen.