INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING
NOTA No.204 d.d.9 juli 1963

Het iteratief oplossen van vergelijkingen[1]

W.van Doorne

[1] Uitwerking van een voordracht gehouden voor het Colloquium Electronisch Rekenen te Wageningen d.d. 19 maart 1963.

I N H O U D

I. INLEIDING

Bij het zoeken van de wortels van een vergelijking met één onbekende komt het vaak voor, dat voor deze wortels geen expliciete formule kan worden afgeleid. Hiermee wordt bedoeld, dat ze niet door middel van één of meer formules kunnen worden uitgedrukt in de constanten van de vergelijking, zoals dat bijvoorbeeld wel mogelijk is bij de wortels van een vierkantsvergelijking. Men kan dan, zoals in het onderstaande zal worden gedaan, overgaan tot het gebruik van benaderingsmethoden. Ze zullen in deze Nota worden toegepast in het geval, dat van een vergelijking in één onbekende, waarin uitsluitend reële constanten voorkomen, de enige reële wortel wordt gezocht.

De te bespreken groep van benaderingsmethoden zal zò zijn, dat steeds aan de hand van de laatst-verkregen benadering van de wortel een nieuwe en hopelijk betere benadering zal worden berekend; hiermee wordt doorgegaan totdat het verschil tussen twee opeenvolgende benaderingen kleiner is geworden dan een van te voren gekozen bedrag, de "tolerantie" genaamd. De laatst-gevonden waarde wordt met de wortel vereenzelvigd.

Dergelijke rekenmethoden komen vooral tot hun recht bij het gebruik van elektronische rekenmachines. Want bij dit soort berekeningen moet een bepaalde reeks bewerkingen meer keren worden uitgevoerd, namelijk even vaak als dat er een nieuwe benadering van de wortel moet worden berekend.

II. PROBLEEMSTELLING

Er wordt uitgegaan van een functie f, gedefiniëerd in een gegeven interval van x-waarden. Bij elke waarde van x binnen dit interval levert f één functiewaarde f(x). Men wil nu die waarde van x kennen, waarvoor geldt:

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

dus de (enige) wortel van vergelijking (2.1)

Aan genoemde functie zullen in het vervolg onderstaande beperkingen worden opgelegd:

1. f is zo vaak differentiëerbaar als noodzakelijk voor komende beweringen; de afgeleide functies zijn continu;
2. de eerste afgeleide heeft binnen het definitiegebied een eindige waarde;
3. vergelijking (2.1) heeft precies één wortel, aan te duiden met X

Deze beperkingen zijn niet van ernstige aard, omdat het in het algemeen mogelijk is, zich te beperken tot een interval van x-waarden, waarvoor aan deze eisen is voldaan.

Nu zou (2.1) bijvoorbeeld kunnen luiden:

$$e^x - 4 = 0$$

Deze vorm voldoet aan onze eisen en de oplossing luidt

$$X = {}^e\log 4$$

Wordt de bijzondere vorm van (2.1) ook maar enigszins veranderd, bijvoorbeeld in:

$$x + e^x - 4 = 0,$$

dan is de oplossing niet meer expliciet te verkrijgen.

Uit dit eenvoudige voorbeeld blijkt de noodzaak, te beschikken over andere methoden van oplossing dan die, waarbij de wortels expliciet kunnen worden berekend. Daarom zal in het volgende worden ingegaan op zogenaamde "iteratieve methoden" ter benadering van X.

III.OPLOSSINGSMETHODE (Algemeen)

Het oplossen van vergelijking (2.1) kan als volgt geschieden. Uitgaande van een eerste schatting x_o van de te verkrijgen wortel X vindt men volgens een nog te bepalen voorschrift een hopelijk betere schatting x_1. Uitsluitend met behulp van x_1 en genoemd voorschrift wordt x_2 gevonden, daaruit x_3, enz. Zo wordt elke schatting van X verkregen uit de direct voorafgaande. Stelt nu x_i de schatting genummerd met i voor en φ de functie die overeenkomt met het gevolgde voorschrift, dan kan het ontstane "iteratieproces" als volgt worden aangeduid:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) \qquad (3.1)$$

Hierbij komen verschillende keuzen van de "iteratiefunctie" φ overeen met verschillende rekenwijzen, en omgekeerd.

Wil een gekozen rekenmethode bruikbaar zijn voor de benadering van X, dan moet na een voldoend aantal keren toepassen van (3.1) de x_{i+1} onbeperkt dicht tot X gaan naderen; het iteratieproces (3.1) is dan "convergent", terwijl x_i "naar X convergeert". Het tegengestelde begrip is "divergeren".

De voorwaarde voor convergentie van (3.1) is dus:

$$\lim_{i \to \infty} \varphi(x_i) = X \qquad (3.2)$$

De iteratiefunctie zal in het vervolg binnen het voor x gedefinieerde gebied minstens eenmaal differentieerbaar verondersteld worden. Dit houdt onder andere in dat φ continu is.

Wanneer het proces (3.1) voldoet aan (3.2), dan zal golden

$$X = \lim_{i \to \infty} x_{i+1} = \lim_{i \to \infty} \varphi(x_i) = \varphi(\lim_{i \to \infty} x_i) = \varphi(X)$$

De overgang van het derde naar het vierde lid is wegens de continuiteit van φ geoorloofd. Door gelijkstelling van eerste en laatste lid blijkt dat X voldoet aan

$$x = \varphi(x) \qquad (3.3)$$

dus X is een wortel van zowel (2.1) als (3.3.). Elke wortel van (3.3) behoeft echter geen wortel van (2.1) te zijn.

We zullen daarom aan φ de volgende eisen stellen:

1. φ is minstens éénmaal differentieerbaar en voor het overige zo vaak als nodig blijkt;de afgeleide functies zijn continu.
2. (3.3) heeft X als enige wortel;

IV. MEETKUNDIGE VOORSTELLING VAN DE OPLOSSINGSMETHODE

Uit (3.3) volgt, dat de waarde X kan worden aangegeven door het snijpunt van de lijnen

$$y = x \tag{4.1}$$

en

$$y = \varphi(x) \tag{4.2}$$

Dit snijpunt heeft namelijk de coördinaten (X,X). In figuur 1 wordt een grafische voorstelling van (3.1) gegeven.

Met behulp van deze figuur kan men twee voorwaarden vinden, die voldoende (maar niet altijd strikt nodig) zijn om (3.1) te doen convergeren. De bewijzen volgen in § 5.

Een eerste voorwaarde wordt in figuur 2 geïllustreerd. Wanneer de kromme $y = \varphi(x)$ binnen het gebied begrensd door de rechten $y = x$ en $y = -x + 2X$ ligt, treedt convergentie op.

Een andere voorwaarde wordt in figuur 3 aangegeven: deze komt overeen met de eis, dat de eerste afgeleide φ' in een omgeving van X in absolute waarde kleiner dan 1 is. Dit impliceert de eerste voorwaarde.

V. CONVERGENTIE- EN DIVERGENTIEVOORWAARDEN (Algemeen)

Nu wordt de volgende, in § 4 reeds ingeleide bewering bewezen.

Het iteratieproces (3.1) ter oplossing van (2.1) convergeert als de n-de schatting $x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ligt in een symmetrisch interval $[a,b]$ rondom X, waarbinnen voor elk punt geldt

$$|\varphi(x)-X| \leq r|x-X| \qquad (5.1)$$

of

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq r, \quad r \text{ een constante tussen 0 en 1} \qquad (5.2)$$

Divergentie treedt op wanneer

$$|\varphi(x)-X| \geq r|x-X| \qquad (5.3)$$

of

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \geq 1 \qquad (5.4)$$

<u>Bewijs</u>: ter voorbereiding bewijzen we eerst de stelling
ALS (5.2) RESPECTIEVELIJK (5.4) GELDT BINNEN HET INTERVAL $[a, b]$ DAN GELDT OOK (5.1) RESPECTIEVELIJK (5.3)

Het bewijs van het eerste deel ("uit (5.2) volgt (5.1)") wordt geleverd met behulp van de middelwaardestelling uit de differentiaalrekening (fig. 4).

Neem aan, dat onder de voorwaarde (5.2) bij zekere waarde van x zou gelden (omdat X aan (3.3) voldoet)

$$A = \left|\frac{\varphi(x)-X}{x-X}\right| = \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(X)}{x-X}\right| > r,$$

dan bestaat er volgens de middelwaardestelling een waarde z tussen x en X, waarvoor

$$\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]_{x=z} = A > r,$$

in tegenspraak met (5.2). Het gestelde is dus juist.

Stel nu, dat $x_n (n \geq 0)$ een benadering van X is, gelegen in een symmetrisch interval rondom X, waarbinnen (5.2) en dus (5.1) geldt. (De eis van symmetrie wordt gesteld, omdat we de absolute waarde van de afwijking van

x_n ten opzichte van X zullen beschouwen).Wanneer dan in (5.1) voor x de waarde x_n wordt ingevuld, volgt uit (3.1)

$$\left|\frac{x_{n+1}-X}{x_n-X}\right| \leq r \qquad (5.5)$$

Maar dan ligt behalve x_n ook x_{n+1}, enz. in genoemd interval.

Past men (5.5) een aantal keren toe, zeg k maal, dan volgt er

$$\frac{|x_{n+1}-X|}{|x_n-X|} \cdot \frac{|x_{n+2}-X|}{|x_{n+1}-X|} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{|x_{n+k}-X|}{|x_{n+k-1}-X|} = \left|\frac{x_{n+k}-X}{x_n-X}\right| \leq r^k,$$

waaruit volgt

$$\lim_{k\to\infty} |x_{n+k}-X| = \lim_{k\to\infty} |x_n-X| . r^k = |x_n-X| . \lim_{k\to\infty} r^k = 0$$

wegens $0 < r < 1$. Er treedt dus convergentie op.

Het bewijs van de divergentievoorwaarde verloopt analoog.

In dit verband nog de volgende opmerking, die aantoont, dat (3.1) een <u>benaderings</u>proces is. Er geldt namelijk:

$$\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]_{x=X} = \lim_{x\to X} \frac{\varphi(x)-X}{x-X} = \lim_{i\to\infty} \frac{\varphi(x_i)-\varphi(X)}{x_i-X},$$

waarbij voor x = X de eerste afgeleide van φ onbepaald $(= \frac{0}{0})$ zou worden, in strijd met de veronderstellingen omtrent φ (§ 3).

VI. TWEE ITERATIEVE OPLOSSINGSMETHODEN

Zoals in § 3 ter sprake kwam, komt elke keuze van de iteratiefunctie in (3.1) overeen met een bepaald rekenproces. Stelt men

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) = x_i + h_i \tag{6.1}$$

dan is de rekenmethode bekend, wanneer men weet, hoe h_i moet worden berekend. Twee methoden om h_i te verkrijgen volgen onder A en B.

A. Neem aan, dat onderstaande reeksontwikkeling van toepassing is (Taylor-reeks)

$$f(x_{i+1}) = f(x_i+h_i) = \left[f(x) + \frac{h_i}{1!} f'(x) + \frac{h_i^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots \right]_{x = x_i} \tag{6.2}$$

Eenvoudshalve wordt (6.2) geschreven als

$$f_{i+1} = f + hf' + \frac{h^2}{2} f'' + \ldots\ldots \tag{6.3}$$

Aannemend, dat x_{i+1} een goede benadering van X zal zijn, kan f_{i+1} gelijk aan nul gesteld worden. Veronderstelt men bovendien, dat h klein is en dat $|f''|$, $|f'''|$, enz. klein zijn ten opzichte van f en f', dan kan h worden geschat uit

$$0 = f + hf'$$

dus

$$h = -\frac{f}{f'} \tag{6.4}$$

Het aldus gevonden rekenvoorschrift luidt volgens (6.1)

$$x_{i+1} = \left[x - \frac{f}{f'}\right]_{x = x_i} \tag{6.5}$$

We zullen hiernaar refereren als "methode A". Hierbij geldt dus

$$\varphi(x) = x - \frac{f}{f'} \tag{6.6}$$

Het proces (6.5) kan op meetkundige wijze als volgt worden verkregen (fig. 5). In het punt $x = x_0$ wordt aan de kromme $y = f(x)$ een raaklijn getrokken. Deze snijdt de x-as in het punt $x = x_1$. De raaklijn in $(x_1, f(x_1))$ aan de kromme snijdt de x-as in $x_1 = x_2$, enz. Zo ontstaat de rij $x_0, x_1, x_2, \ldots$ die in de figuur tot X nadert. De raaklijn in $(x_i, f(x_i))$ heeft de vergelijking

$$y = f(x_i) + (x-x_i)f'(x_i)$$

waaruit blijkt, dat het snijpunt van de raaklijn met de x-as (x_{i+1}) volgens (6.5) gevonden wordt.

B. Een andere rekenwijze ontstaat, door in (6.3) de eerste drie termen van de reeks in rekening te brengen. Dan wordt h opgelost uit:

$$0 = f + hf' + \frac{h^2}{2} f'' \qquad (6.7)$$

Vindt men hierbij twee reële wortels h, dan moet één van hen gekozen worden. Zijn ze niet reëel, dan zijn ze niet bruikbaar om (de reële) X te vinden. Alvorens een modificatie van de rekenmethode aan te geven, waarmee deze moeilijkheden vermeden kunnen worden, laten we de meetkundige interpretatie volgen (fig. 6).

Door het punt (x_0, $f(x_0)$) wordt een parabool met "verticale" as van symmetrie gelegd, die in dat punt de eerste en tweede afgeleide gemeen heeft met de kromme $y = f(x)$: in genoemd punt hebben de krommen dezelfde raaklijn en kromming. De parabool snijdt de x-as onder andere in $x = x_1$. Door (x_1, $f(x_1)$) wordt een nieuwe parabool gelegd, men vindt x_2, enz. Aldus ontstaat in figuur 6 de rij x_0, x_1, x_2, ... die naar X convergeert. Een parabool door (x_i, $f(x_i)$) met "verticale" symmetrie--as heeft de vergelijking

$$y = f(x_i) + (x-x_i)\, f'(x_i) + \tfrac{1}{2}(x-x_i)^2 \cdot f''(x_i)$$

De snijpunten van de parabool met de x-as worden gevonden door hierin $y = 0$ te stellen en x (dus x_{i+1}) op te lossen. Wegens (6.1) ontstaat dan de vergelijking (6.7).

Om nu in (6.7) aan de keuze voor h te ontkomen schrijven we inplaats daarvan

$$h = -\frac{f}{f'+\frac{1}{2}hf''}$$

en geven h in de noemer een waarde volgens (6.4), waarna h opnieuw berekend wordt, en wel volgens

$$h = -\frac{f}{f'-\frac{1}{2}\frac{f}{f'}f''}$$

waaruit volgt (als $f'\neq 0$)

$$x_{i+1} = \left[x + \frac{2ff'}{ff''-2f'f'} \right]_{x=x_i} \qquad (6,8)$$

aan te duiden als "methode B"

De iteratiefunctie is

$$\varphi(x) = x + \frac{2ff'}{ff''-2f'f'} \qquad (6.9)$$

Een andere wat ingewikkelder iteratiefunctie kan worden verkregen door aan de gegeven kromme een parabool met horizontale as aan te passen.

In het volgende zal blijken, dat de iteratiefuncties van beide methoden in het algemeen voldoen aan de eisen van § 3.

VII. OVER EVENTUELE CONVERGENTIE VAN DE TWEE METHODEN

We definiëren vooraf de grootheden P en Q als volgt

$$P = \frac{f}{f'} \tag{7.1}$$

$$Q = \frac{ff''}{f'f'} \tag{7.2}$$

A. Indien (5.1) en (6.6) gelden, volgt daaruit

$$1-r \leq \frac{P}{x-X} \leq 1+r$$

Uit (5.2) en (6.6) volgt met $\frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{f'f'-ff''}{f'f'} = Q$

$$-r \leq Q \leq +r$$

METHODE A CONVERGEERT ALS binnen een symmetrisch interval rondom X geldt

$$1-r \leq \frac{P}{x-X} \leq 1+r \tag{7.3}$$

of

$$-r \leq Q \leq +r \tag{7.4}$$

r is een constante $0 < r < 1$

B. Om voor methode B tot convergentie-criteria te komen, wordt opgemerkt dat uit (5.1) en (6.9) volgt

$$-1-r < \frac{2P}{(Q-2)(x-X)} < -1+r$$

Verder geldt

$$\frac{d}{dx} = \varphi' = ff\frac{3f''f''+2f'f'''}{(ff''-2f'f')^2} = \frac{3Q^2 + 2\frac{f.f.f'''}{f'f'f'}}{(Q-2)^2}$$

waarbij in de laatste gelijkheid wordt verondersteld, dat $f' \neq 0$ is.

Beschikt men over een goede schatting van X, dan zal de laatste term in de teller van de laatste breuk in absolute waarde klein zijn. Verwaarlozen we deze term, dan wordt een convergentie criterium verkregen door de volgende ongelijkheid naar Q op te lossen:

$$-r < \frac{3Q^2}{(Q-2)^2} < +r$$

Tot dezelfde ongelijkheid komt men, wanneer genoemde laatste term ten opzichte van Q^2 wordt verwaarloosd. Het laatste betekent (in verband met (7.2)) dat:

$$\frac{fff'''}{f'f'f'} \Big/ \frac{fff''f''}{f'f'f'f'} = \frac{f'f'''}{f''f''}$$

klein moet zijn.

Lost men de ongelijkheid voor enkele waarden van r naar Q op, dan komt er

$r = 1$	$-2{,}73 \leq Q \leq$	$+0{,}73$
$0{,}98$	$-2{,}67$	$+0{,}68$
$0{,}50$	$-1{,}38$	$+0{,}58$
0	0	0

Bij dalende waarde van r wordt het Q-interval kleiner en elk interval is bevat in het vorige.

Uit dit alles volgt nu

METHODE B CONVERGEERT ALS binnen een symmetrisch interval rondom X geldt

$$-1-r \leq \frac{2P}{(Q-2)(x-X)} \leq -1+r \tag{7.5}$$

of

$$-2{,}7 \leq Q \leq 0{,}7 \tag{7.6}$$

indien de grootheden $\frac{fff'''}{f'f'f'}$ en/of $\frac{f'f'''}{f''f''}$ in absolute waarde klein zijn.

Beschikt men over een goede (begin)schatting, dan zal in de eerste grootheid $|f| < |f'|$ zijn. In veel gevallen is ook $|f'''| < |f'|$

VIII. HET GEDRAG VAN DE ITERATIEFUNCTIES IN DE OMGEVING VAN DE OPLOSSING

We zullen nu de waarde van enkele karakteristieke grootheden van de iteratiefuncties vermelden, namelijk de nulde, eerste en tweede afgeleide in het punt (X,X). Er geldt:

$$\varphi_A(X) = X \qquad \varphi_B(X) = X \tag{8.1}$$

$$\varphi_A'(X) = 0 \qquad \varphi_B'(X) = 0 \tag{8.2}$$

$$\varphi_A''(X) = \frac{f''(X)}{f'(X)} \qquad \varphi_B''(X) = 0 \tag{8.3}$$

Omdat in het algemeen $\varphi_A''(X) \neq 0$ is, zal het verloop van de φ_A- en φ_B-curve in de omgaving van (X,X) enigszins verschillen; mogelijkheden worden in figuur 7 aangegeven. In het algemeen vindt methode A zijn oplossing X in een extremum en methode B zijn oplossing in een buigpunt.

Ondanks (8.2) blijkt, dat het quotient van $\varphi_A'(X)$ en $\varphi_B'(X)$ gelijk aan nul is, want er geldt

$$\frac{\varphi_B'}{\varphi_A'} = \frac{3fff''f'' + 2fff'f'''}{(ff'' - 2f'f')^2} \Big/ \frac{f\,f''}{f'f'}$$

hetgeen in het algemeen tot de waarde nul nadert als x tot X nadert.

Hiervan kan men gebruik maken om iets op te merken ter vergelijking van de convergentiesnelheden van A en B, want

$$\lim_{x \to X} \frac{\varphi_B(x)-X}{\varphi_A(x)-X} = \lim \frac{\varphi_B(x)-X}{x-X} \Big/ \lim \frac{\varphi_A(x)-X}{x-X} = \frac{\varphi_B'(X)}{\varphi_A'(X)} = 0$$

Men kan dus, door voor x een goede schatting van X te nemen, het quotient

$$\left| \frac{\varphi_B(x)-X}{\varphi_A(x)-X} \right|$$

klein maken, en een waarde kleiner dan 1 geven (dat is mogelijk wegens de aan te nemen continuiteit van alle optredende functies).

Dus: indien de methoden A en B convergeren bestaat er een interval van x-waarden rondom X waarbinnen methode B sneller convergeert dan methode A, uitgaande van één zelfde beginschatting in dat interval.

IX. EEN VERALGEMENING VAN DE METHODEN

Voor het vinden van een k-voudige wortel X van (2.1) kan op analoge wijze als in § 6 een rekenmethode worden afgeleid.

A. Een veralgemening van methode A ontstaat als volgt. In het punt X geldt voor de nulde tot en met de (k-1)- de afgeleide

$$f(X) = f'(X) = f''(X) = \ldots\ldots f^{k-1}(X) = 0$$

We houden nu in (6.3) slechts rekening met de (k-1)-de en k-de afgeleide en lossen h op uit

$$0 = \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\, f^{k-1} + \frac{h^k}{k!}\, f^k = \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \left(f^{k-1} + \frac{h}{k} f^k\right)$$

als $h \neq 0$, volgt hieruit

$$h = -k \cdot \frac{f^{k-1}}{f^k} \qquad (9.1)$$

De iteratiefunctie wordt dan

$$\varphi(x) = x - k \cdot \frac{f^{k-1}(x)}{f^k(x)} \qquad (9.2)$$

welke als veralgemening van (6.6) kan worden opgevat.

B. Een soortgelijke werkwijze kan voor methode B worden toegepast.

We brengen nu in (6.3) uitsluitend de (k-1)-de, k-de en (k+1)-de afgeleide in rekening en volgen hiermee de werkwijze van § 6B.

De iteratiefunctie wordt dan(in korte notatie)

$$\varphi(x) = x + k(k+1)\, \frac{f^{k-1} f^k}{k f^{k-1} f^{k+1} - (k+1) f^k f^k} \qquad (9.3)$$

X. SLOTOPMERKINGEN

In deze Nota werd gewezen op het belang van iteratieve methoden voor het oplossen van vergelijkingen met één reële onbekende. Zijn er meer verschillende reële oplossingen, zeg m stuks, die benaderd moeten worden, dan zou men uitgaande van beginschattingen voor de oplossingen $X_i (i = 1, 2, \ldots m)$ binnen een interval rondom X_i methode A of B kunnen toepassen.

Voor het vinden van een rekenmethode is geen algemene regel te geven. De methoden die wij beschouwden werden met behulp van de reeksontwikkeling van Taylor gevonden. Een systeem waarbij geen gebruik wordt gemaakt van differentiaalrekening("methode C")willen we hier nog noemen.

Luidt de gegeven vergelijking $f(x) = 0$, dan worden de functies f_1 en f_2 zò gekozen, dat

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \tag{10.1}$$

voor elke x binnen het definitiegebied. De punten $(X_i, f(X_i))$ worden dan gevonden als de snijpunten van de curven voor f_1 en f_2. Echter wordt door de keuze van de beginschatting x_o en de functies f_1 en f_2 beinvloed of convergentie zal optreden en hoe snel deze zal zijn. Dit proces is als het ware een veralgemening van het systeem aangeduid door (4.1) en (4.2)(zie fig. 8).

Verder zij opgemerkt, dat de methoden A en B soms ook van dienst kunnen zijn bij het zoeken naar de complexe wortels van complexe vergelijkingen.

Tenslotte wordt verwezen naar de appendix, waarin de methoden A, B en C op een vergelijking zijn toegepast, en naar Nota 205, waarin een bespreking wordt gegeven van een toepassing van de rekenwijzen A en B op een formule voor de pF-curve.

XI. APPENDIX

De vergelijking

$$e^{4x} + e^{x} = a \qquad \text{a is een positieve constante}$$

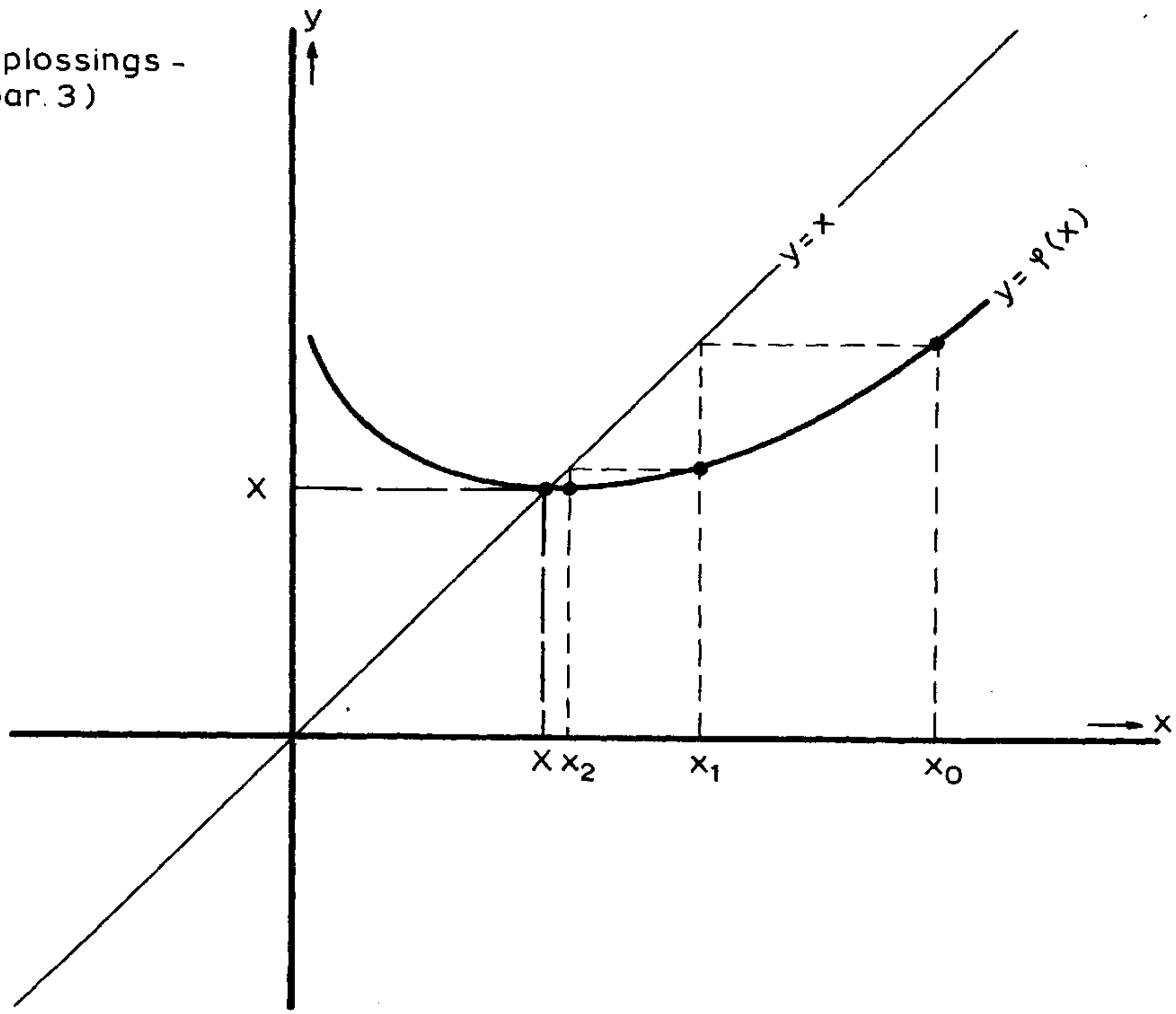
werd opgelost volgens de methoden A, B en C. Hierbij werden twee waarden voor a en twee waarden voor de beginschatting x_o gekozen. Een overzicht van de convergentiesnelheid gemeten zowel in seconden als in het aantal benodigde iteratiestappen volgt in onderstaande tabellen. De tolerantie, genoemd in de inleiding, bedroeg 10^{-4}.

	Aantal seconden			Aantal iteratiestappen		Gemiddelde tijd per iteratiestap
	x_o \ a	3	10	x_o \ a	3	10	
A	− 2	45,0	divergentie	− 2	80	divergentie	
	+ 2	7,0	6,5	+ 2	11	10	0,58 sec.
B	− 2	4,5	5,0	− 2	4	5	
	+ 2	5,5	5,5	+ 2	6	6	0,98 sec.
C	− 2	5,0	4,5	− 2	6	5	
	+ 2	6,0	4,5	+ 2	7	5	0,87 sec.

Methode B gaf bij dit voorbeeld ondanks de hoge gemiddelde tijd per iteratiestap duidelijk betere resultaten dan methode A. De rekenwijzen B en C waren ongeveer gelijkwaardig.

fig. 1

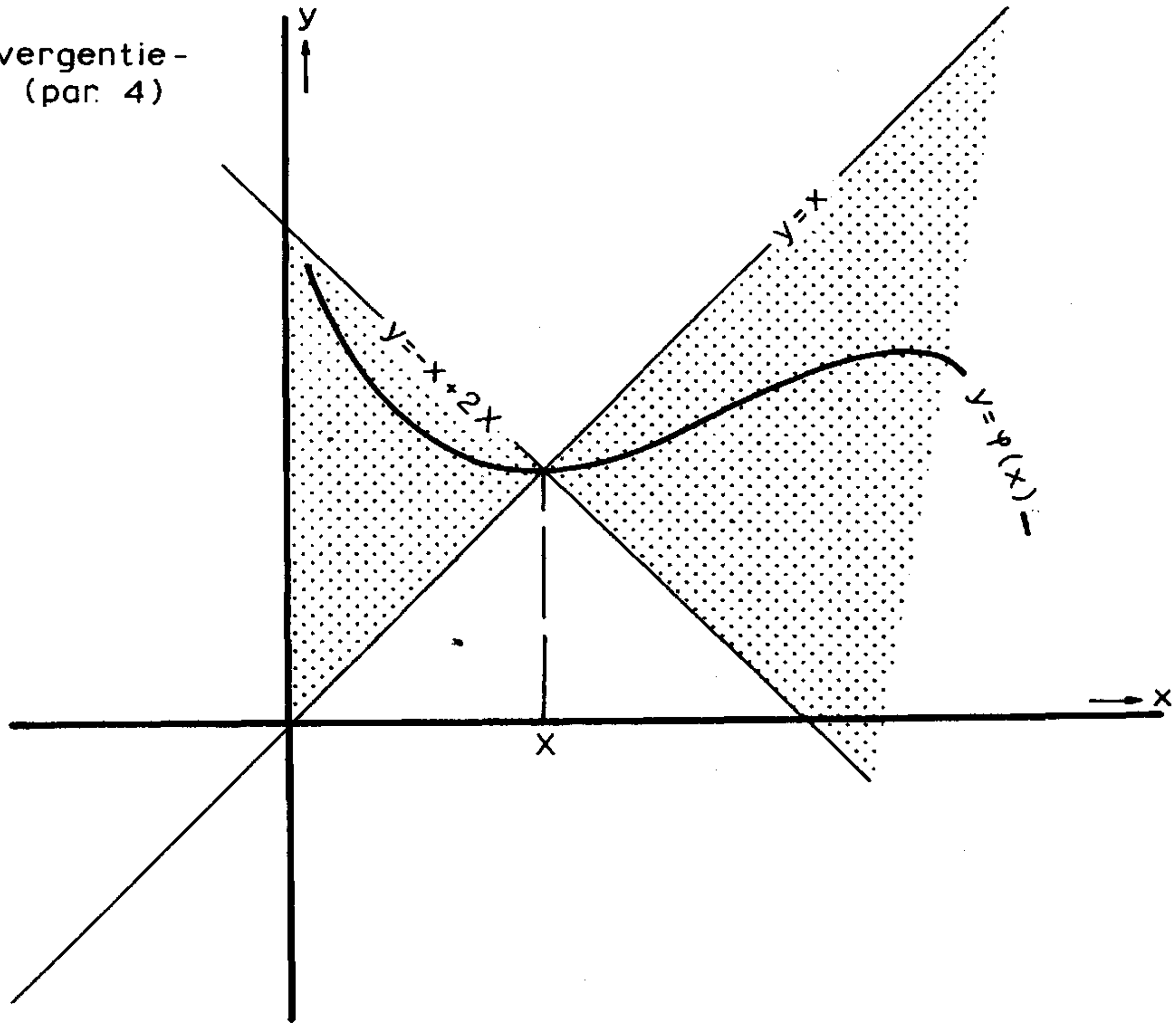
Algemene oplossings-methode (par. 3)



63c.119.1/5

fig. 2

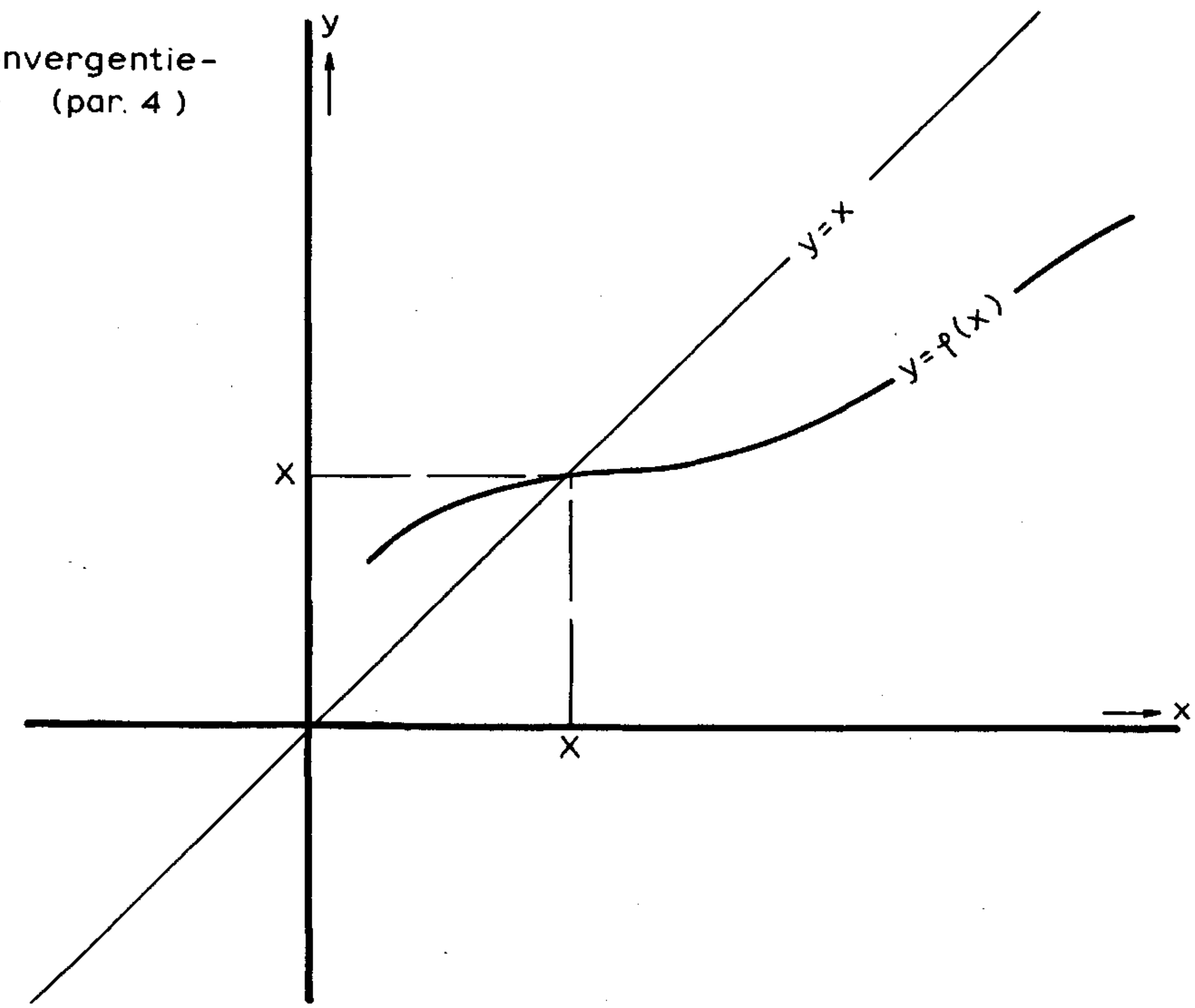
Eerste convergentie-
voorwaarde (par. 4)



63c.119.2/5

fig. 3

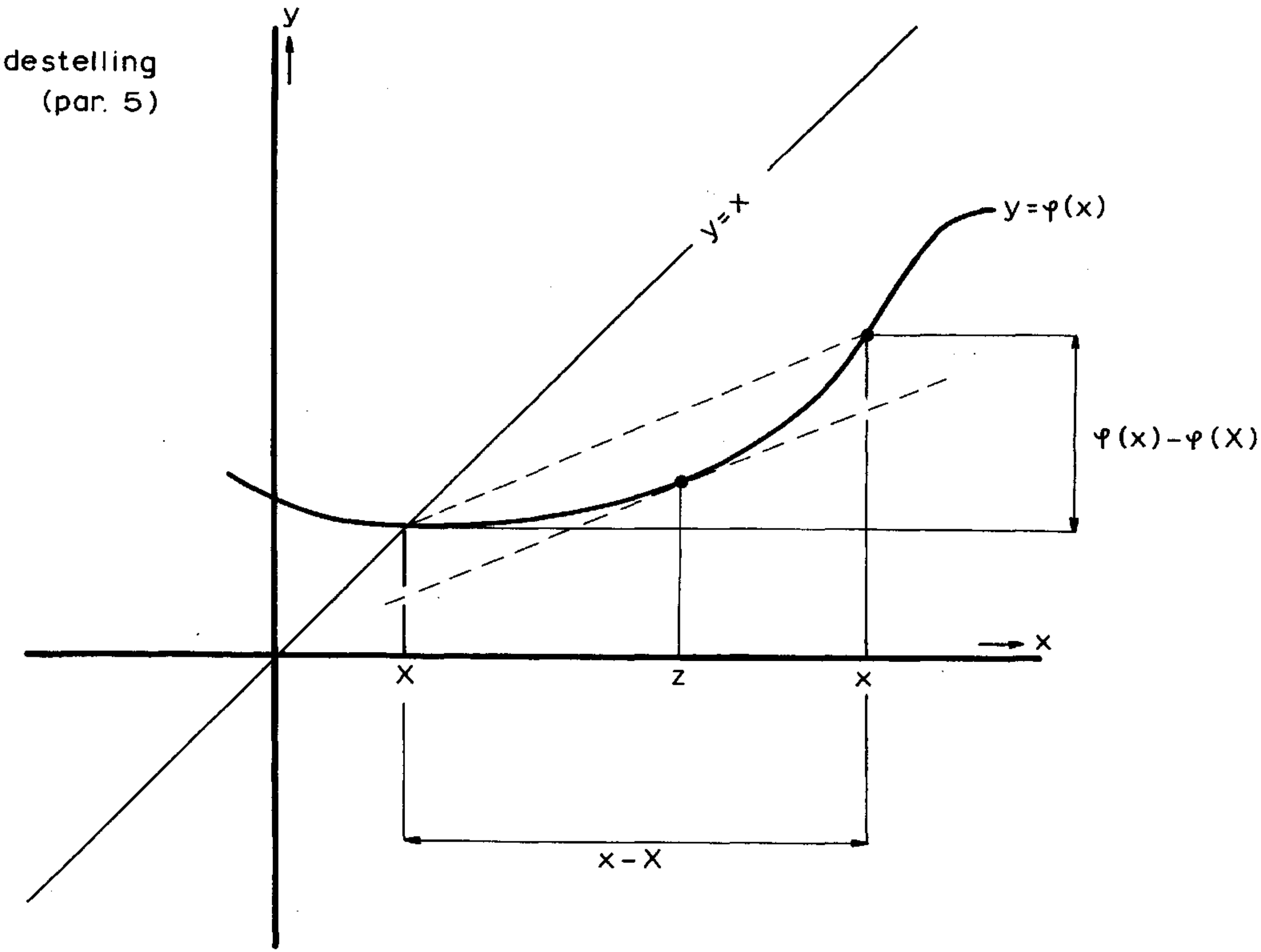
Tweede convergentie-
voorwaarde (par. 4)



63c.119.3./5

fig. 4

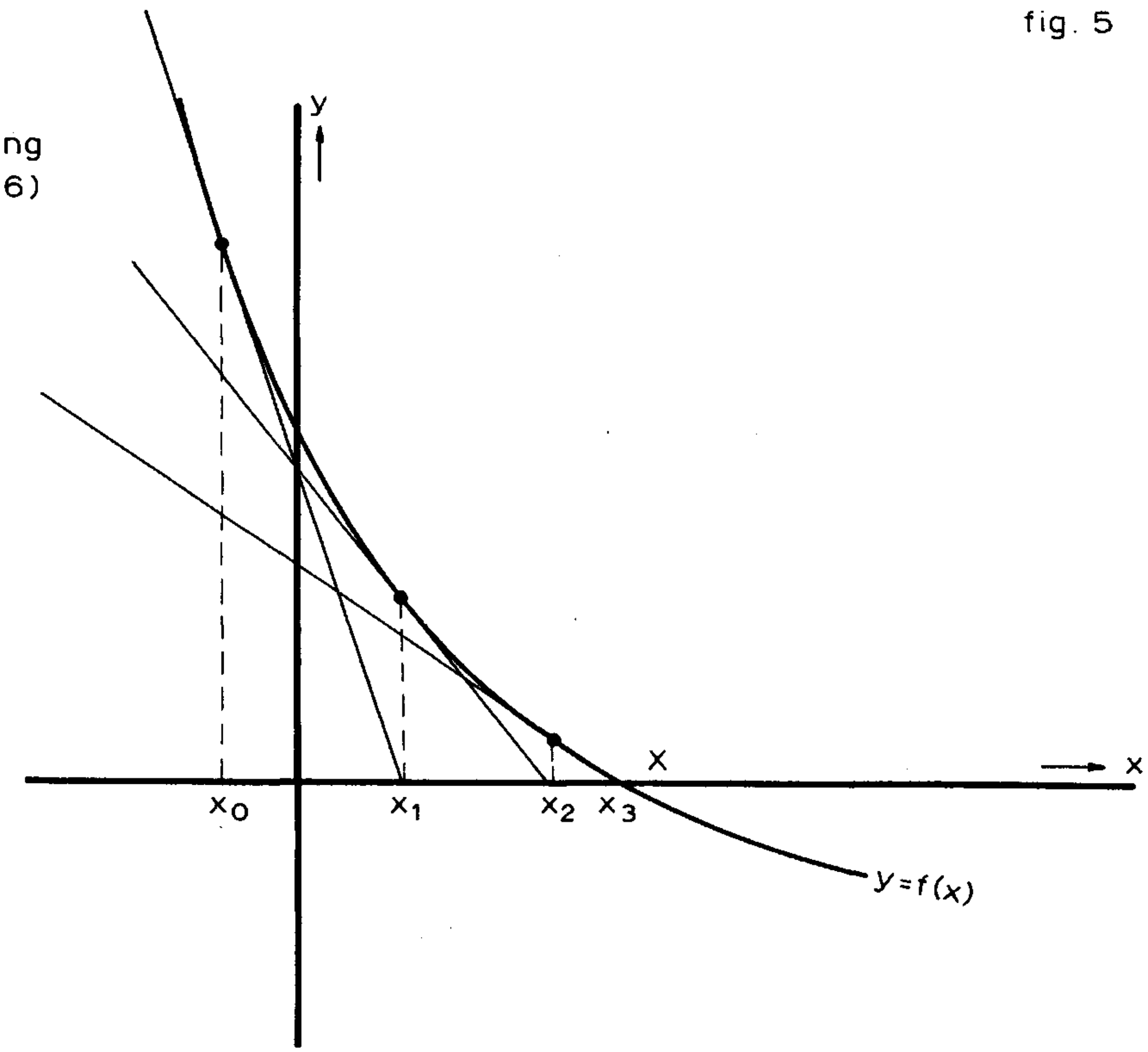
Middelwaardestelling
(par. 5)



63c.119.4./5

fig. 5

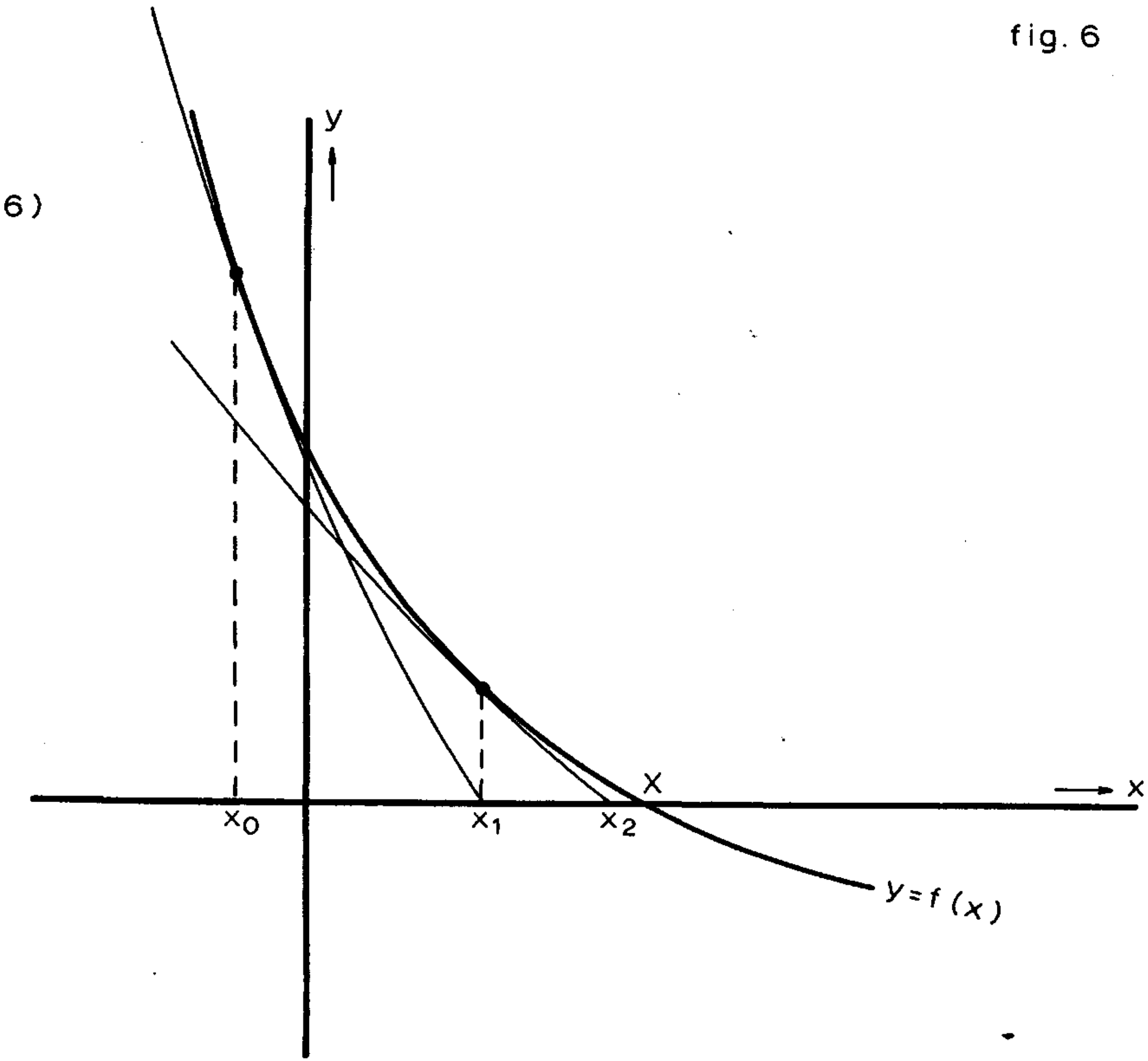
Methode A: benadering door raaklijnen (par. 6)



63c.119.5/5

fig. 6

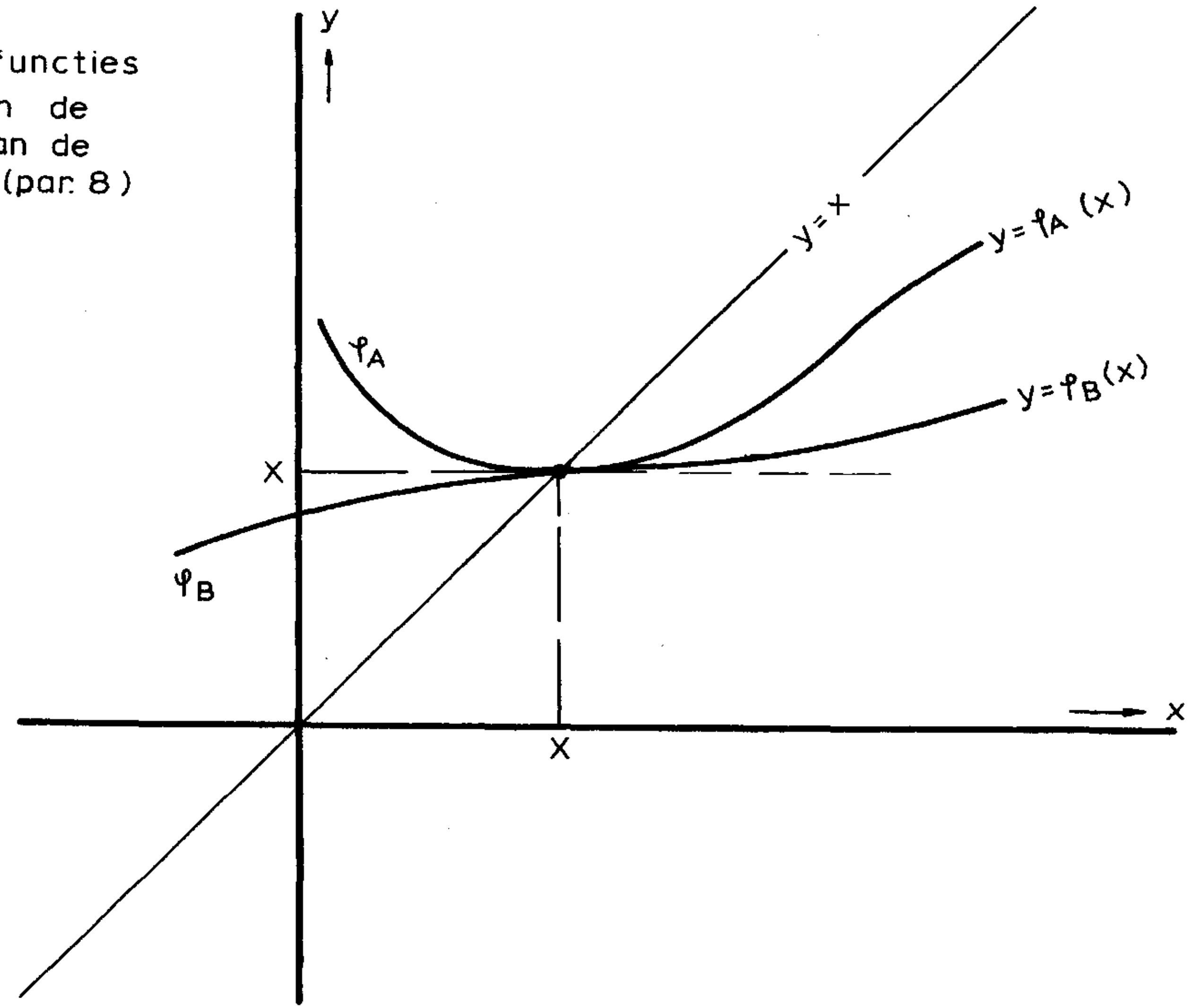
Benadering door raakparabolen (par. 6)



63c.119.6/5

fig. 7

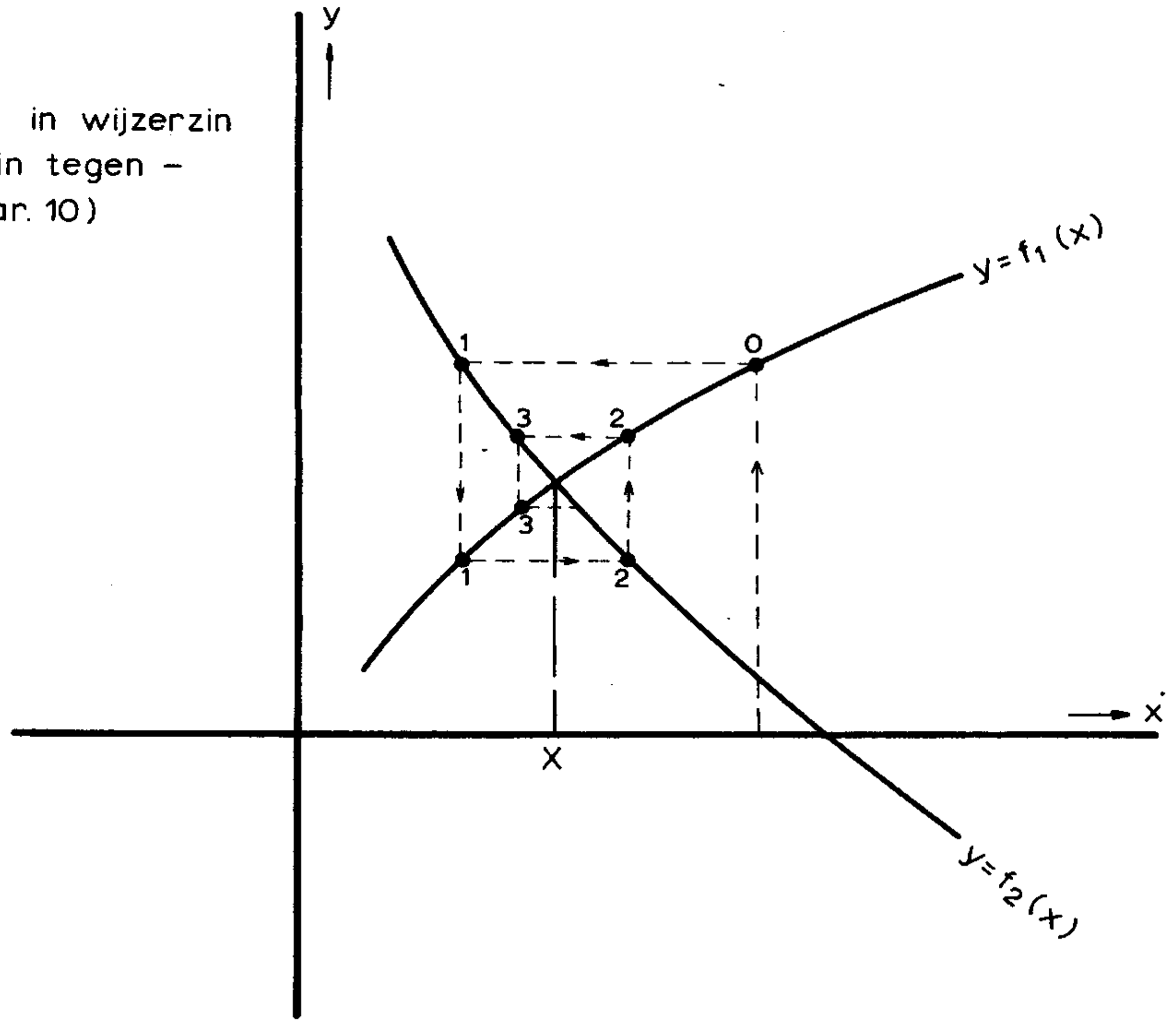
De iteratiefuncties φ_A en φ_B in de omgeving van de oplossing X (par. 8)



63c.119.7/5

fig. 8

Methode C:
Convergentie in wijzerzin
divergentie in tegen -
wijzerzin (par. 10)



63c.119.8/5