

Een oriënterend onderzoek naar de invloed van de
voorperiode op de betrekking tussen
neerslag en afvoer

Ph.Th.Stol

BIBLIOTHEEK DE HAAF

Droevendaalsesteeg 3a
Postbus 241
6700 AE Wageningen

De waterbalansvergelijking als mathematische formulering

De termen van de waterbalans van een gebied vormen tezamen een eenvoudige lineaire betrekking waarin alle bronnen van inkomend respectievelijk uittredend water vertegenwoordigd zijn. De sluitpost van een dergelijke betrekking is het verschil in totaal geborgen hoeveelheid water tussen begin en einde van de beschouwde periode zodat, zoals bekend, voor bijvoorbeeld dagwaarnemingen geschreven kan worden

$$N(\text{neerslag}) + I(\text{inlaat}) + K(\text{kwel}) - E(\text{verdamping}) - A(\text{afvoer}) = \Delta B(\text{bergingsverandering})$$

Mathematisch is deze betrekking een differentievergelijking welke dan ook als zodanig behandeld kan worden (lit. 1). Voor de i^{e} dag geldt namelijk

$$N_i + I_i + K_i - E_i - A_i = \Delta B_i \quad (1)$$

Door sommatie kan deze vergelijking opgelost worden waardoor men met $\sum_{i=1}^n = \Sigma$ verkrijgt:

$$\Sigma N_i + \Sigma I_i + \Sigma K_i - \Sigma E_i - \Sigma A_i = B_n + \text{constante} \quad (2)$$

De constante moet zo bepaald worden dat het rechterlid de waarde 0 aanneemt wanneer de totaal geborgen hoeveelheid op het eind van de n -de dag gelijk is aan die aan het begin van de 0-de dag (B_0). Hieruit volgt dat de constante gelijk is aan $(-B_0)$.

Vergelijking (2) geeft dus het verband tussen de sommatie-reeksen van de hydrologische- en meteorologische elementen uit de waterbalans. Deze somreeksen zijn niet onafhankelijk van elkaar. Zo zal de afvoer een functie zijn van alle voorafgaande termen uit (2), de verdamping kan afhankelijk zijn van de neerslag en mogelijk ook van de kwel en waterinlaat. Gaat de belangstelling

1786304



voornamelijk uit naar de wijze waarop de afvoer tot stand komt dan is de beste vorm om (2) te geven

$$\Sigma A = \Sigma N + \Sigma I + \Sigma K - \Sigma E - (B_n - B_o) \quad (3)$$

In het volgende zal een overzicht gegeven worden van uitkomsten van berekeningen, met als basis maandtotalen voor de afvoer en de neerslag. Wordt een maand als eenheid gedefinieerd dan kan het somteken in (3) wegvallen en ontstaat weer een differentievergelijking, nu voor maandtotalen:

$$A = (N - E) + I + K - \Delta B \quad (4)$$

Empirisch blijkt deze relatie zeer goed benaderd te kunnen worden door de eenvoudige betrekking (MASCHHAUPT, 1938)

$$A = bN + a \quad (5)$$

Hiermee wordt aangegeven dat de afvoer lineair afhankelijk van de neerslag gedacht kan worden.

De voorwaarde is dan dat er een positieve, respectievelijk een negatieve correlatie tussen neerslag en verdamping bestaat waarvan gebruikgemaakt wordt in (4) namelijk

$$A = \left(1 - \frac{E}{N}\right)N + (I + K - \Delta B) \quad (5a)$$

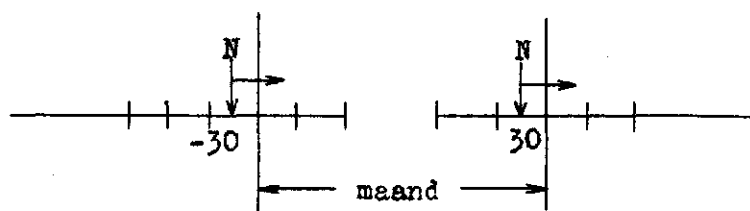
waarin de verhouding $\frac{E}{N}$ veelal constant blijkt te zijn. Vergelijking met (5) doet uitkomen welke termen in de parameters a en b zijn samengevat.

Zijn uit de bovenstaande betrekking de parameters b en a bepaald dan houdt (5) de mogelijkheid in bij te verwachten neerslaghoeveelheden de afvoer te voorspellen.

De eenvoudige formulering draagt het nadeel met zich dat met geen enkele complicatie rekening gehouden kan worden. MASCHHAUPT meent bijvoorbeeld dat de storing door de onregelmatigheid in regenval over een maand reeds groot genoeg is om minder betrouwbare uitkomsten uit (5) te verkrijgen. In het volgende zal speciaal aan de invloed van de zogenoemde voorperiode aandacht geschonken worden.

De invloed van de voorperiode

De neerslag die op de laatste dag van een maand valt zal mogelijk pas in de volgende maand tot afstroming komen. Evenzo zal in de beschouwde maand in de afvoersom de neerslag van de laatste dag van de voorafgegane maand begrepen zijn. In schema wordt dit:



Dit houdt in dat de neerslagreeks in feite in de tijd terugverschoven wordt. Gezien de symmetrie van dit verschijnsel aan beide grenzen van de periode van een maand worden de correcties eenvoudigheidshalve in één verschilterm (V) samengenomen volgens

$$N' = N + N_{-30} - N_{30} \stackrel{\text{def}}{=} N + V_1$$

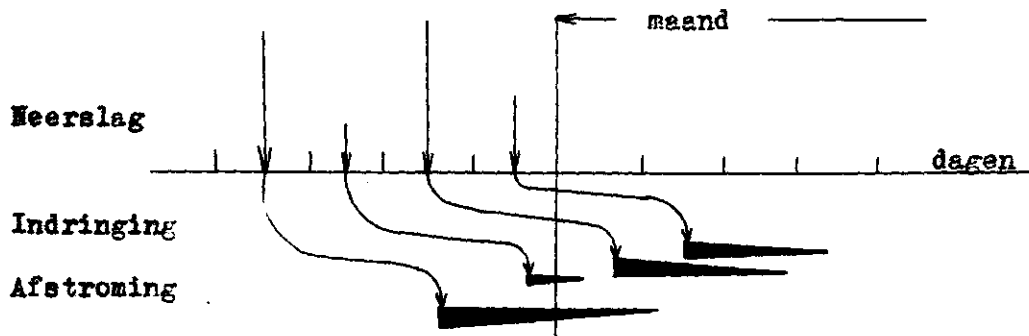
Op overeenkomstige wijze kan een verschuiving over twee dagen terug verkregen worden door te stellen

$$N'' = N + V_1 + V_2$$

Deze verschuiving wordt toegepast omdat men moet aannemen dat een vertraging in de afvoer zal plaatsvinden en dat in het laatste geval de neerslag twee dagen nodig zal hebben om zich bij het capillair water te voegen, de drukhoogte te vermeerderen en afvoer te bewerkstelligen.

Verder kan verondersteld worden dat een neerslaghoeveelheid na het bereiken van de capillaire zone een aantal dagen nodig heeft om tot afvoer te komen. Als benadering kan volgens de formules voor stroming van bodemvocht door de onverzadigde zone aan een exponentieel verlopend proces gedacht worden (RIJTEMA, 1959) zodat op de j -de dag een gedeelte $e^{-j\alpha}$ van het tot de capillaire zone doorgedrongen water tot afvoer komt.

Een meer volledige principe-schets wordt nu



Wordt (5) met deze veronderstellingen uitgebreid dan komt er

$$A = b(N + \sum_{i=1}^k V_i) + \sum_{j=k+1}^l e^{-j\alpha} \cdot V_j + a \quad (6)$$

Met deze betrekking wordt nu aangegeven dat als neerslag-som voor een bepaalde maand gebruikt wordt de som over een over k dagen terugverschoven tijdvak. Met andere woorden dat in rekening is gebracht dat de neerslag met k dagen vertraging de capillaire zone zal bereiken. Voorts wordt tot uitdrukking gebracht dat naarmate de regendag langer aan de begindag van de afvoermaand vooraf gaat, deze regen steeds minder water aan de afvoersom zal bijdragen.

Ook voor dit laatste geval is het symmetriebeginsel aangehouden en werden neerslaghoeveelheden op eenzelfde aantal dagen voor het begin en die op eenzelfde aantal dagen voor het eind van de beschouwde periode in één verschilterm opgenomen. De vereenvoudiging van het hydrologisch probleem die de e -functie als oplossing geeft, is echter mogelijk minder juist. Hieraan kan ten dele worden tegemoet gekomen, door de exponenten α , 2α , 3α niet op te bouwen met een constante waarde van α , maar met een experimenteel vast te stellen functie van de tijd. Om deze reden werd de onderlinge relatie tussen de coëfficiënten $e^{-\alpha}$, $e^{-2\alpha}$, ... $e^{-l\alpha}$ verbroken en een wat grotere vrijheid aan deze coëfficiënten gegeven door achtereenvolgens te nemen β_1 , β_2 , ... β_l . Hiermede wordt het aantal parameters in verhouding tot de beschikbare gegevens spoedig zeer groot namelijk van één onbekende α tot l on-

bekenden β 's, wanneer een lange voorperiode in de beschouwing betrokken wordt. In het te geven voorbeeld is daarom gekozen $l = 3$.

Eigenschappen van de opgestelde formule

Uit bovenstaande overwegingen resulteert nu de volgende algemene formule

$$A = b(N + \sum_{i=1}^k v_i) + \beta_{k+1} \cdot v_{k+1} + \beta_{k+2} \cdot v_{k+2} + \beta_{k+3} \cdot v_{k+3} + a \quad (7)$$

Treedt geen grote vertraging op tussen het moment van vallen van de neerslag en het moment waarop de capillaire zone wordt bereikt dan wordt gekozen $k = 0$. Wordt geen langdurige nalevering van de afvoer aanwezig gedacht, dan wordt gesteld

$$\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = \beta_{k+3} = 0$$

waarmee weer de eenvoudige gedaante (5) terugverkregen is.

De constante a in (5) zal veelal een negatieve waarde hebben zodat van de horizontale (Neerslag-)as een lijnstuk in positieve richting zal worden afgesneden. Dit lijnstuk komt in (5) tot uitdrukking als de term $\frac{a}{b}$ in

$$A = b(N + \frac{a}{b})$$

Algemeen gelden nu de volgende eigenschappen:

$b = 1$ } Alle neerslag komt tot afvoer, er vindt geen berging
 $a = 0$ } plaats evenmin treedt er verdamping op.

$b = 1$ } Alle neerslagsommen groter dan de hoeveelheid a_0 worden
 $\frac{a}{b} = a_0$ } afgevoerd. De term a_0 vertegenwoordigt de gemiddelde waarden van de niet opgenomen termen uit de waterbalans en zal dus veelal een maat voor de berging zijn.

$b < 1$ In dit geval zal, zoals uit een figuurtje reeds zonder meer blijkt, bij neerslaghoeveelheden boven de gemiddelde hoeveelheid de afvoer kleiner zijn dan gemiddeld. De verdamping zal nu in waarde toenemen zodat de betrekking verkregen wordt, die weergeeft dat in natte jaren een sterkere verdamping zal optreden.

Bespreking resultaten van een berekening voor de Schroeweg
(zie figuur 1 tot en met 8)

De figuren 1 tot en met 3 geven voorbeelden van de samenhang tussen de maandgegevens uit 8 jaren voor de Schroeweg.

Voor oktober (figuur 1) zijn weergegeven de resultaten met vergelijking 1, 3 en 4. In deze richting neemt de aanpassing toe. Opgemerkt wordt dat de gegevens steeds gecorrigeerd zijn op de invloed van de termen $\beta_1 V_1$. De gecorrigeerde gegevens groeperen zich nauw om een rechte zoals voor de maanden oktober, november en februari gedemonstreerd wordt.

De waarden van de factoren b die met elk van de 6 vergelijkingen werden berekend worden weergegeven in figuur 4. Er blijkt een duidelijk verloop met de tijd (maanden) op te treden.

Bij elk van de schattingen voor deze factor b behoort een betrouwbaarheidsinterval dat op 2 x de standaardafwijking is gesteld. Binnen dit betrouwbaarheidsinterval kan een hypothetische waarde niet significant onderscheiden worden van de berekende gemiddelde waarde. Zet men voor elke maand de grenzen van de betrouwbaarheidsintervallen voor alle 6 berekeningen uit, dan zal er een hoogste waarde voor de onderste grens en een laagste waarde voor de bovenste grens aangewezen kunnen worden. In figuur 5 zijn deze met een stippellijn over de maanden verbonden, terwijl de volgetrokken lijn de op een na binnenste waarden vertegenwoordigt. Voor een curve die zich binnen deze gestippelde grenzen bevindt, zoals met die uit figuur 6 overwegend het geval is, geldt nu dat deze uit elk van de 6 oplossingen kan zijn ontstaan.

Het nu verkregen resultaat duidt op het volgende. De (afvoer)factor b blijkt onafhankelijk van de toegepaste formule. De factor is steeds kleiner dan 1 wat er op wijst dat in natte jaren een grotere verdamping zal optreden. Volgens (5a) zijn E en N steeds positief gecorreleerd.

Het verschil in correlatie-coëfficiënt tussen de 6 vergelijkingen geeft echter nog een dieper inzicht in de samenhang. In figuur 7 staan in tabelvorm en in schema de correlatie-coëfficiënten voor elk van de 6 vergelijkingen per maand weergegeven. In het eerste schema staande drie hoogste correlatie-coëfficiënten

uit elke maand aangeduid. Het blijkt dat in geen van de maanden de eenvoudige formule (5), overeenkomend met vergelijking 1 namelijk $A = bN + a$, de beste aanpassing geeft.

In de eerste maanden van het jaar, wanneer hoge waterstanden duiden op een grote hoeveelheid aan geborgen water in het profiel zal er geen grote vertraging ontstaan in het doordringen van de neerslag in het profiel. Wel dient een correctie aangebracht te worden op de neerslaghoeveelheden die op dagen bij de grenzen van de beschouwde maand zijn gevallen en de volcapillaire zone hebben bereikt. De afvoer van deze hoeveelheden zal grotendeels de volgende maand tot stand komen. Voor het in rekening brengen van deze hoeveelheden werden 3 voorgaande dagen in de berekening opgenomen elk met een eigen coëfficiënt β . Dit aantal is overigens wel het uiterste waartoe met 8 gegevens kan worden gegaan.

In de tweede helft van het jaar blijken de vergelijkingen waarin met een verschuiving van de neerslagreeks over 2 tot 3 dagen rekening wordt gehouden de beste aanpassing te geven. Ook deze uitkomst is zeer plausibel. In de zomer en in het najaar kan door het lagere niveau van de grondwaterstand verwacht worden dat een regenbui zich eerst na een zekere tijd bij het grondwater zal voegen. De berekeningen geven aanwijzingen dat in juli en augustus deze tijd 3 à 4 dagen zal bedragen, later in het najaar 2 à 3 dagen.

In het laatste schema staat tenslotte aangegeven welke correlatie-coëfficiënten, statistisch, niet betrouwbaar van de hoogste uit een kolom afwijken. Per maand beschouwd wordt het totale beeld wat afgezwakt, de beschouwing tussen de maanden onderling zoals uit het tweede schema volgt verstevigt echter de conclusies.

De factoren b vertonen in de loop van de tijd een cyclische beweging (zie figuur 6). Dit geeft de mogelijkheid een vereffening over het gehele jaar in één berekening uit te voeren, wat een grote winst in het aantal vrijheidsgraden en dus in de nauwkeurigheid geeft. Gezien het beeld van de vorm van de curve werd

eerst een tijdschaal transformatie toegepast welke volgens een vereffening zou luiden

$$t' = t + \sin(t - 8^\circ)$$

waarmee de curve uit figuur 6 ongeveer de gedaante van een co-sinus verkrijgt. De maanden worden op een tijdschaal in graden genoteerd zodat nu januari, februari,, december overeen komen met $t' = 18^\circ, 60, 98, 130, 155, 174, 191, 209, 231, 258, 294, 334^\circ$. Vervolgens wordt de factor b afhankelijk van de tijd t' gesteld volgens

$$b = \left\{ B_1 \cos(t' - B_2) + B_3 \right\} \quad (8)$$

De volledige formule luidde

$$A = \left\{ B_1 \cos(t' - B_2) + B_3 \right\} N + \sum_{i=1}^{12} \beta_i V_i + a \quad (9)$$

Uit de vereffening van (9) op het totale materiaal gezamenlijk volgden waarden voor B_1 , B_2 en B_3 waarmee volgens (8) voor elke maand de bijbehorende b -waarde werd berekend. Hiermee werd het resultaat verkregen dat met de volgetrokken curve van figuur 8 wordt weergegeven. De multipele correlatie-coëfficiënt bedroeg 0.91. De (afvoer)factor b neemt in de wintermaanden nu wat hogere waarden aan en stijgt daarmee boven de waarde van 0.90. Deze waarden zijn aannemelijker dan die welke uit de onderling niet gebonden bewerkingen per maand worden verkregen. Het duidt er op dat in de winter, wanneer het profiel een grote hoeveelheid water geborgen heeft, praktisch de gehele neerslaghoeveelheid tot afvoer zal komen. Er blijkt verder uit dat de verdamping in de wintermaanden in natte jaren slechts weinig groter zal zijn dan in droge jaren, daar de waarde $b = 1$ nu zeer dicht benaderd wordt.

Hydrologische betekenis en samenvatting

De hydrologische betekenis van het bovenomschrevene kan nu als volgt worden samengevat.

De polder Schroeweg, groot 80 ha ingericht met een goed functionerend slotenstelsel, wordt bemalen met een installatie van voldoende grote capaciteit om de uitslag van het gemaal - binnen de nauwkeurigheid van dagwaarnemingen - gelijk te stellen aan de afvoer op de sloten.

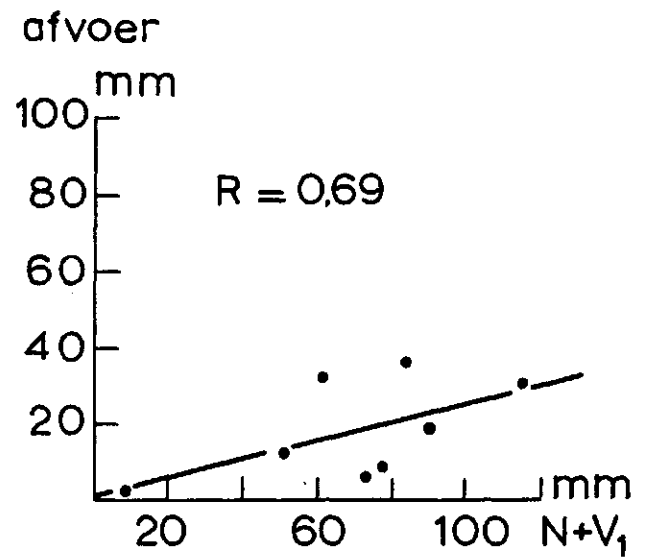
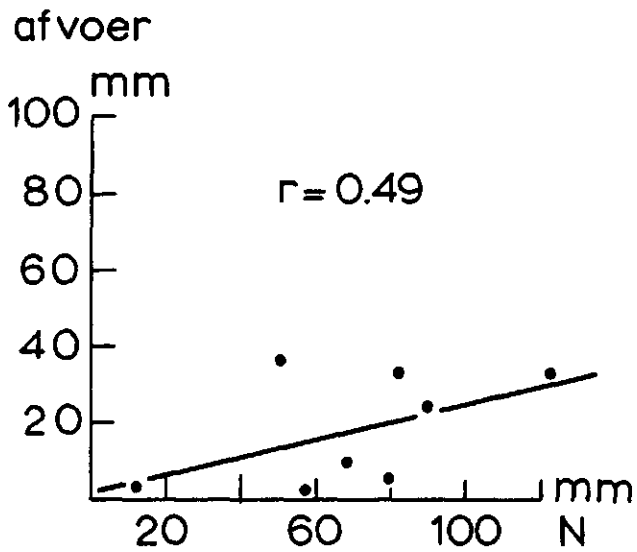
De afvoer kan lineair afhankelijk gesteld worden van de drukhoogte, een dergelijke eenvoudige betrekking blijkt eveneens het verband tussen afvoer en neerslag goed weer te geven. De gemiddelde drukhoogte in elke maand van het jaar geeft aanleiding tot een gemiddelde afvoer die uit de neerslag berekend kan worden onder toepassing van de zogenoemde afvoerfactoren b (figuur 6 en 8). De afwijkingen die het neerslagpatroon vertoont ten opzichte van de gemiddelde waarde wordt door de β -coëfficiënten verantwoord. In de berekeningen is dus een splitsing gemaakt tussen de afvoer door de grond tengevolge van de gemiddelde neerslag en de invloed van de voorperiode, welke een uiting is van de vertraging van de vochtstroom in de capillaire zone.

Met de gegeven mathematische beschouwing is getracht op eenvoudige wijze de invloeden van de onverzadigde zone in een gemakkelijk hanteerbaar rekenmodel te verantwoorden, waarmee het vlak van beschouwing dus als het ware van het maaiveld naar de grondwaterspiegel is verschoven.

Literatuur

1. LEVY, E., LESSMAN, F., 1959. Finite difference equations. London.
2. MASCHHAUPT, 1938. Lysimeter-onderzoekingen aan het Rijks-landbouwproefstation te Groningen en elders. V.L.O. No. 44(1)A.
3. RIJTEMA, P.E., 1959. Calculation of capillary conductivity from pressure plate outflow data with nonnegligible membrane impedance. Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding. Technical Bulletin 12.

OKTOBER



Het verband tussen afvoer en neerslag volgens drie vergelijkingen (resp. 1,3 en 4)

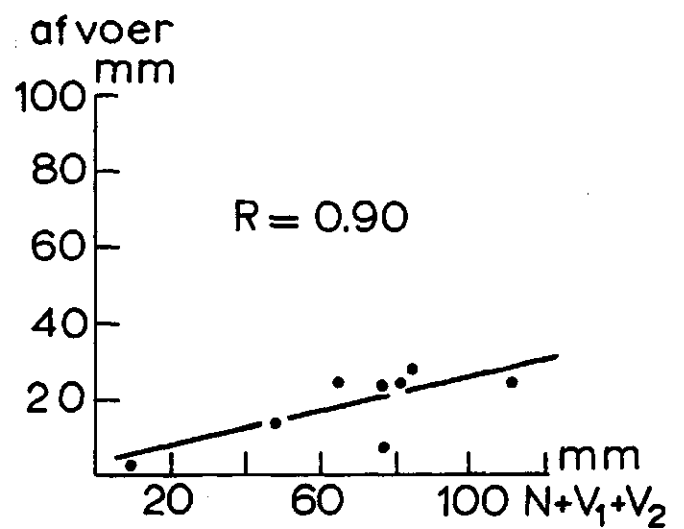
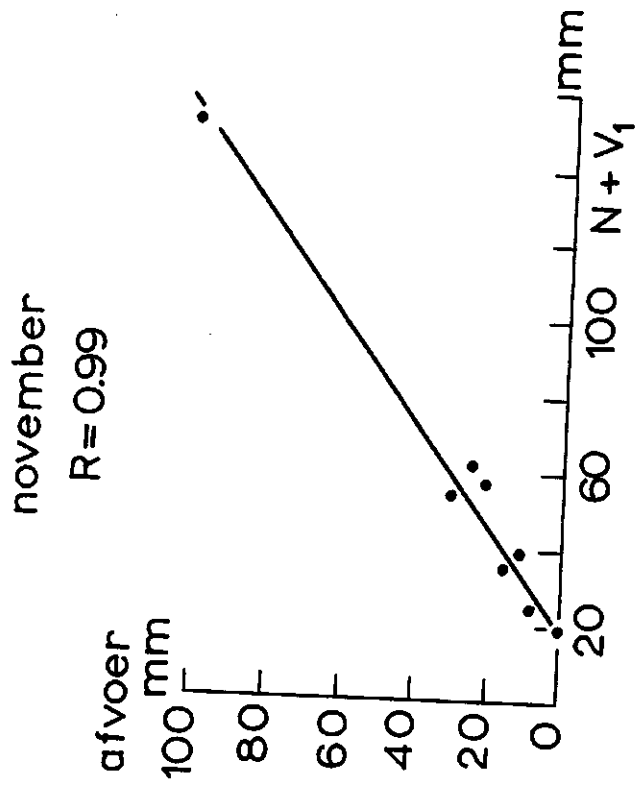
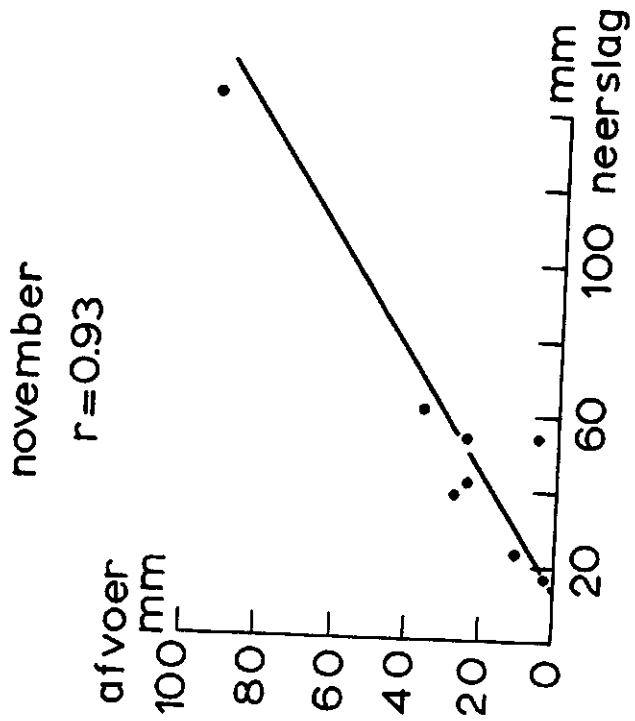
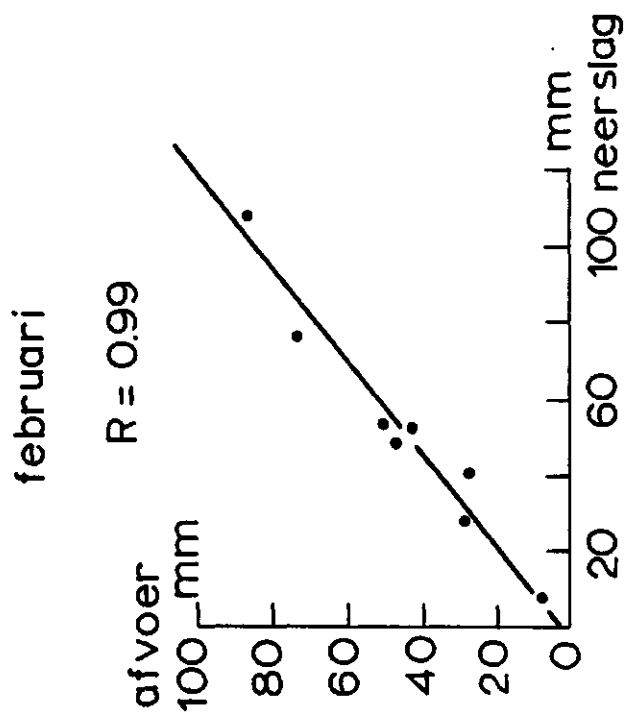
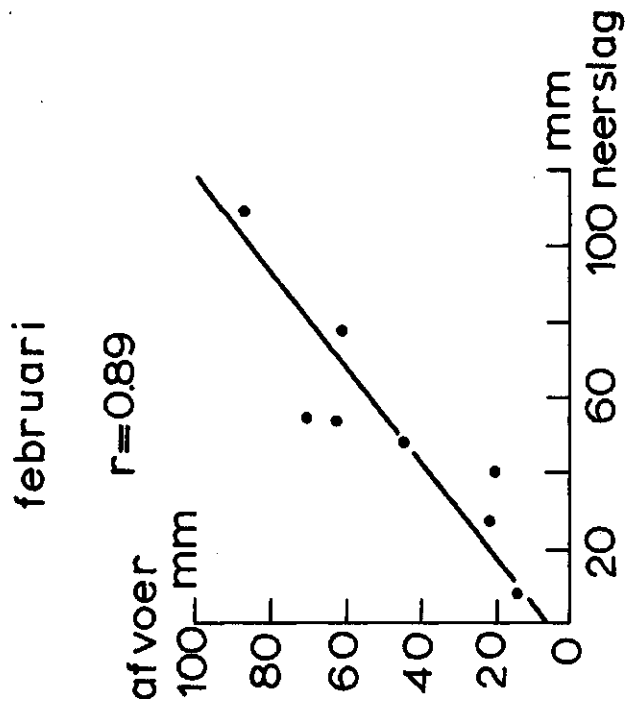


fig. 2



Het verband tussen afvoer en neerslag volgens twee vergelijkingen (resp. 1 en 3)

fig.3



Het verband tussen afvoer en neerslag volgens twee vergelijkingen (resp. 1 en 2)

fig. 4

Afvoerfactoren Schroeweg volgens 6 vergelijkingen

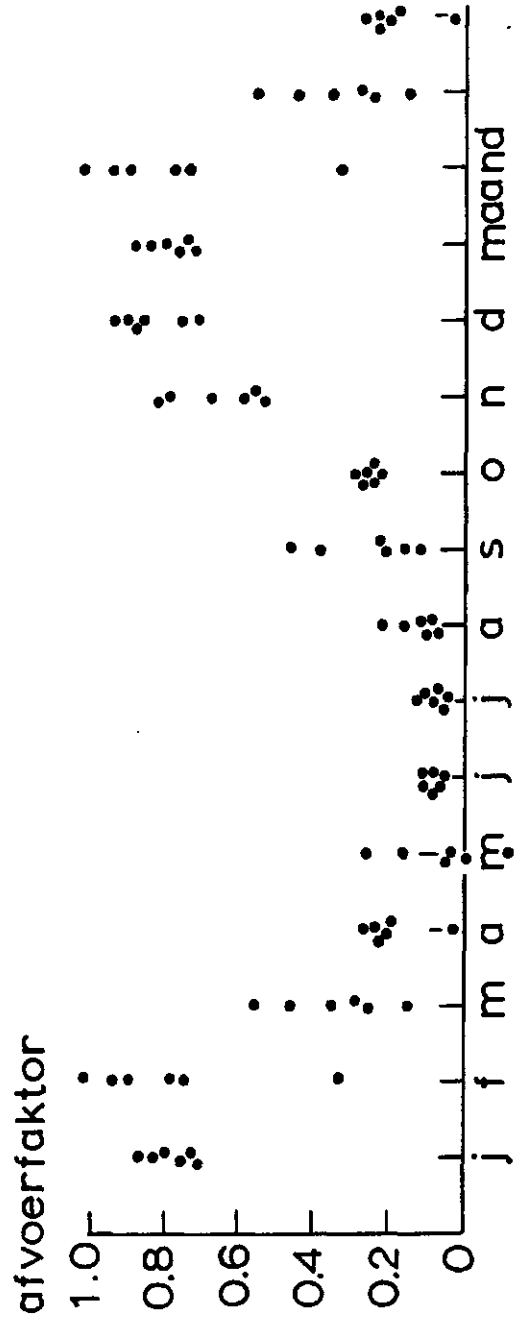


fig.5

Beide bovenste en onderste betrouwbaarheidsgrenzen
volgens 6 vergelijkingen

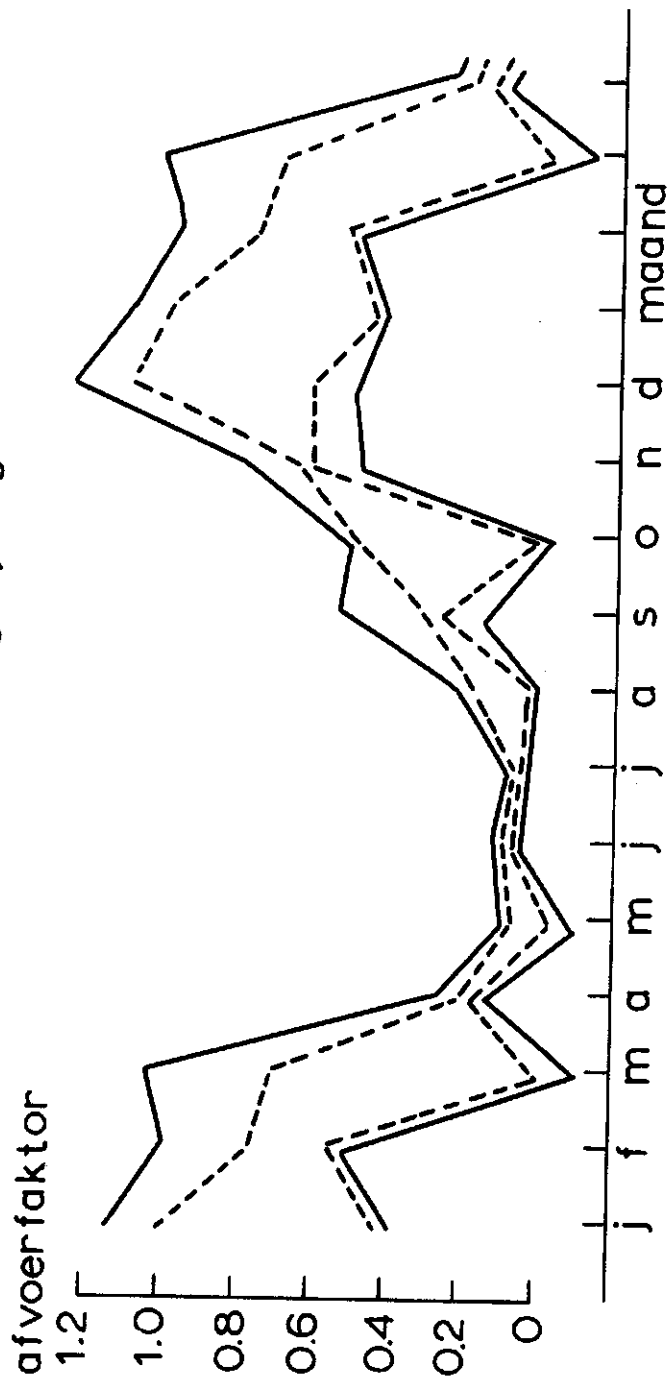


fig. 6

Gemiddelde afvoerfactor Schroeweg

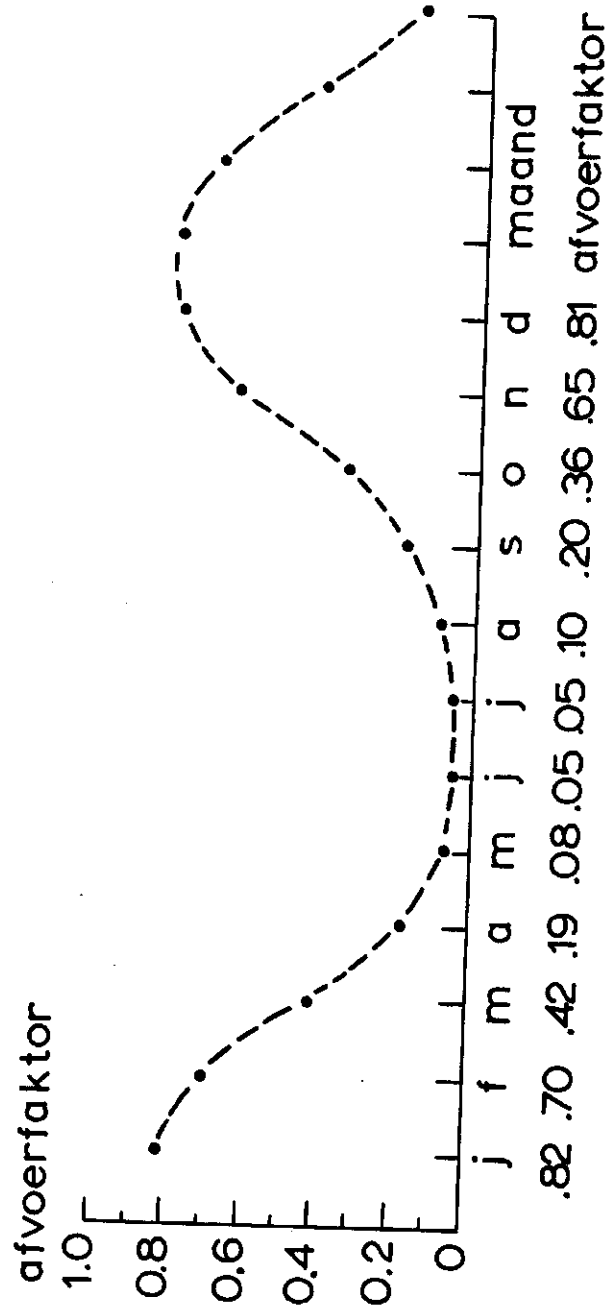
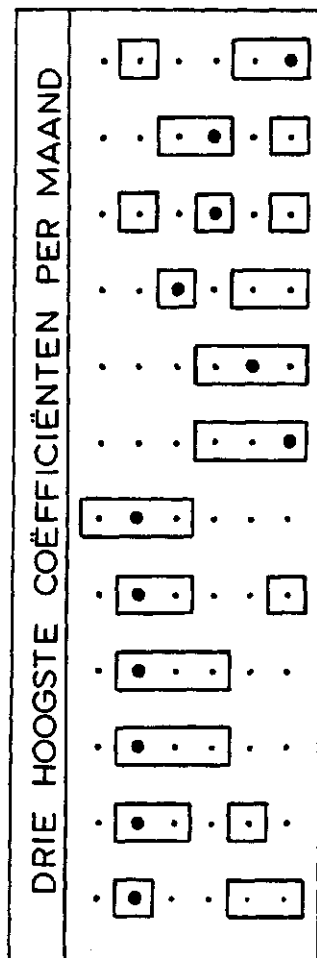
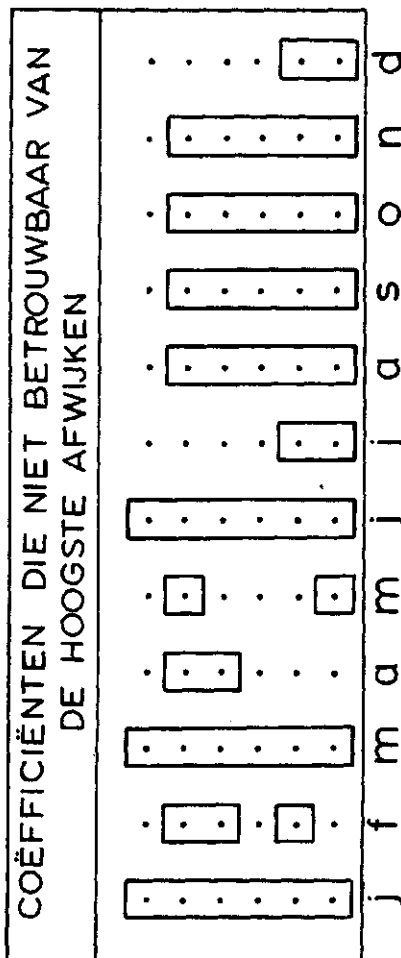


fig. 7

CORRELATIECOËFFICIËNTEN AFVOERBEREKENING SCHROEWEG												VERGELIJKING		Nr.
90	89	64	15	-41	98	77	53	82	49	93	76	N		1
93	99	88	98	99	99	77	73	94	89	98	89	N	+V ₁ , V ₂ , V ₃	2
93	95	83	97	80	97	84	75	98	69	99	88	N + V ₁	+V ₂ , V ₃ , V ₄	3
92	93	80	73	77	96	87	82	94	90	99	88	N + V ₁ + V ₂	+V ₃ , V ₄ , V ₅	4
94	97	78	71	71	96	99	93	96	89	96	94	N + V ₁ + ... + V ₃	+V ₄ , V ₅ , V ₆	5
94	94	79	70	96	96	99	92	94	89	99	98	N + V ₁ + ... + V ₄	+V ₅ , V ₆ , V ₇	6



zie boven

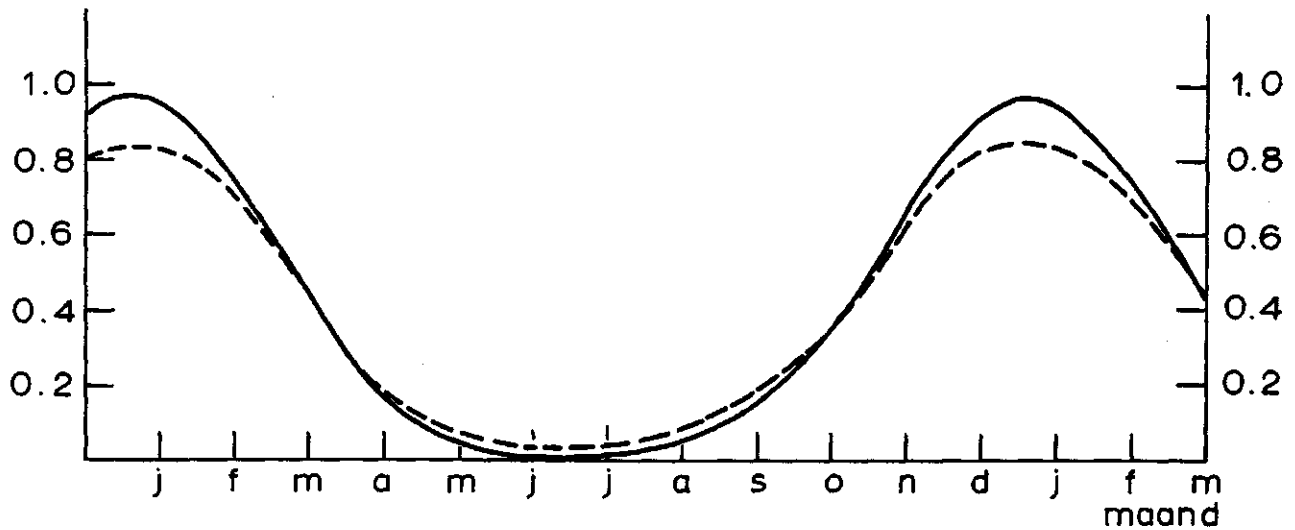


zie boven

fig. 8

AFVOERFAKTOREN SCHROEWEG

afvoerfaktor b



b:	.94	72	42	18	5	1	1	6	18	38	67	.91	(cyclisch —)
b:	.82	70	42	19	8	5	5	10	20	36	65	.81	(per maand - -)