

Stromingsformules voor de beschrijving van  
het afvoerproces

J. Wesseling

1. Inleiding

Fysisch-mathematische oplossingen van stromingsproblemen bieden grote voordelen. In de eerste plaats geven zij een relatief eenvoudige beschrijving van de onderlinge samenhang tussen de verschillende factoren. In de tweede plaats bieden zij de mogelijkheid om uit metingen de van invloed zijnde factoren te berekenen en daarmee een getalmaat vast te leggen. Doordat als kenmerkende factoren enkele hydrologische constanten worden gebruikt, zijn de oplossingen gemakkelijk overdraagbaar omdat ze gelden voor elke plaats mits is voldaan aan randvoorwaarden van dezelfde aard.

Oplossingen van stromingsproblemen berusten op een combinatie van de stromingswet (in dit geval de wet van Darcy) en het continuïteitsprincipe (de wet tot behoud van de massa). De hieruit verkregen differentiaalvergelijking is in zijn algemene vorm dermate ingewikkeld, dat voor de meeste problemen vereenvoudigingen moeten worden aangenomen. Deze vereenvoudigingen omvatten veelal:

- a) het verwaarlozen van één of meer stromingscomponenten;
- b) het constant stellen van bepaalde factoren (doorlatendheid, dikten van lagen, bergend vermogen);
- c) het schematiseren van het probleem in een zodanige vorm dat geen al te ingewikkelde randvoorwaarden worden verkregen.

Hier tegenover staat, dat men bij de oplossing doorgaans slechts zal volstaan met analytische oplossingen of benaderingen waarvan de nauwkeurigheid zeer groot is.

Op deze wijze zijn voor verschillende problemen oplossingen verkregen die, hoewel ze in hun beschrijving af kunnen wijken van de werkelijke situatie, een eindresultaat opleveren dat de werkelijkheid zeer dicht benadert. Afwijkingen tussen de oplossingen en de werkelijk gevonden waarden kunnen veelal verklaard worden uit verschillen tussen

de bij de afleiding aangenomen schematisering en de werkelijke situatie of uit een tekort aan nauwkeurigheid waarmee de hydrologische constanten bekend zijn. Het eerste geval zal zich het vaakst voordoen.

Er is vrij veel aandacht besteed aan het zoeken van oplossingen voor verschillende stromingsproblemen en de mogelijkheid hiervoor zijn zeker nog niet uitgeput getuige de vele artikelen die hierover nog steeds in de hydrologische literatuur verschijnen. De huidige toestand is dan ook zo, dat dit deel van het hydrologisch onderzoek veel verder is dan de eigenlijke toetsing van de oplossingen in het terrein. Dit moet worden geweten aan het feit dat de bekende oplossingen veelal betrekking hebben op specifieke deelproblemen van de waterstroming, terwijl in werkelijkheid vaak zeer ingewikkelde combinaties van deze deeloplossingen moeten worden onderzocht. Een typisch voorbeeld hiervan is het afvoerproces waarbij men te maken heeft met een complex van factoren die stuk voor stuk een grotere of kleinere invloed uitoefenen op de cyclus die het water doorloopt tussen het moment dat de regen valt en het tijdstip dat de afvoer zich in het lozingspunt manifesteert.

Beperken we ons verder tot dit afvoerproces, dan hebben we te maken met twee hoofdfactoren, namelijk afvoer en berging. Beide zullen zowel voor de grond als voor het open water (beek en sloten) moeten worden beschouwd, hoewel voor de ontwerptechniek alleen de uiteindelijke hoeveelheid water die door de hoofdleiding (beek) tot afvoer komt van belang is. Deze hoeveelheid zal echter worden bepaald door het samenspel van bovengenoemde factoren en de optredende neerslagoverschotten.

Indien men alle factoren die een rol kunnen spelen bij het afvoerproces in rekening wil brengen, mag verwacht worden dat men stuit op grote mathematische moeilijkheden. Voor een voorbeeld mogen wij verwijzen naar Nota nr. 160 (1962) van het Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding van de hand van Visser. Bij nog vrij eenvoudige aannamen voor terreinverval, grondwaterstroming, beekafvoer en berging, verkrijgt hij, ook als de afvoer uit de grond als constant wordt verondersteld reeds een zodanig ingewikkelde differentiaalvergelijking dat het vinden van een oplossing niet waarschijnlijk is. Aangezien vrij gemakkelijk gecompliceerdere eisen ten aanzien van bovengenoemde

factoren zijn te stellen, ligt een universele algemene oplossing van het probleem niet in de lijn der verwachting. Men zal zich dus beperkingen op moeten leggen ten aanzien van bepaalde factoren. Men zal zich dan ook in de eerste plaats af kunnen vragen welke resultaten bereikt kunnen worden op grond van het algemene inzicht in het probleem maar met de noodzakelijke verwaarlozing van overigens zinvolle veronderstellingen. Door de opgelegde beperking zal men een aantal oplossingen kunnen verkrijgen die minder gecompliceerd zijn en stuk voor stuk niet geheel juist. Als mogelijke zinvolle veronderstellingen kunnen hier onder andere genoemd worden:

- 1) afvoer uit de grond
  - a) quasi stationaire oplossing met afvoer als lineaire of kwadratische functie van de drukhoogte  $m$
  - b) niet-stationaire oplossing met afvoer als lineaire functie van  $m$
- 2) berging in de grond
  - a) constant
  - b) lineaire functie van de drukhoogte
  - c) functie volgend uit onverzadigde stroming
- 3) slootafvoer
  - a) geen invloed op andere factoren, dus  $q = \infty$
  - b) constant
  - c) lineaire functie van waterhoogte
  - d) als Manning-formule

Als alternatief zou men ook in plaats van de slootafvoer het slootpeil (= beekpeil) kunnen gebruiken met als veronderstelling dat deze hetzij constant hetzij een lineaire of cyclische functie van de tijd is.

Uit bovenstaand overzicht zouden reeds  $3 \times 3 \times 7 = 63$  mogelijke oplossingen volgen met verschillende graad van gecompliceerdheid, terwijl nog wel andere combinaties en veronderstellingen kunnen worden ingevoerd.

Van omstreeks 15 van bovengenoemde mogelijke combinaties zijn oplossingen bekend. Dit zijn meestal de gevallen met ofwel  $q = \infty$ , ofwel  $p = \text{constant}$  ofwel  $s$  lineair of combinaties van twee of drie

der eenvoudigste veronderstellingen.

Zoals uit het bovenstaande blijkt is de mogelijkheid voor het verkrijgen van oplossingen sterk onderhevig aan de beperkingen die worden opgelegd. Men kan echter hopen, dat door het bewerken van de beschikbare gegevens met oplossingen die stuk voor stuk een bepaalde combinatie van factoren in rekening brengen men een min of meer nauwkeurig inzicht zal kunnen verkrijgen in de invloed van deze factoren. Door achteraf de verschillende gevonden factoren weer in rekening te brengen zou dan een algemene oplossing kunnen ontstaan die als zodanig niet ineens te bereiken valt. Hierbij zal men er echter op bedacht moeten zijn, dat vaak meerdere gegevens ter beschikking moeten staan en men niet kan volstaan met bijvoorbeeld afvoermetingen in de beek zelf.

Teneinde te laten zien welke ontwikkeling de methode van het steeds in rekening brengen van andere combinaties van factoren heeft doorgemaakt en welke mogelijkheden de thans beschikbare oplossingen geven zullen in deze nota de verschillende, in de loop der tijd uitgewerkte, vereenvoudigde oplossingen worden gegeven.

## 2. Niet-stationaire oplossingen

### 2.1 Mogelijke oplossingen en beperkingen

Gezien het feit dat het afvoerproces in wezen een niet-stationair probleem is, ligt het voor de hand, bij de oplossingen de tijdsfactor direct in rekening te brengen. Niet-stationaire oplossingen zijn voor verschillende problemen uitgewerkt. Deze oplossingen hebben of betrekking op een enkele open leiding met een semi-oneindig watervoerend pakket of op een systeem van equidistante evenwijdige leidingen.

ERNST (1962) geeft voor het geval symmetrie wordt aangenomen ten opzichte van het midden tussen de open leidingen ( $x = 0$ ) en ten opzichte van de open leidingen ( $x = \pm L/2$ ) een algemene oplossing in de vorm van drie deeloplossingen die van het eindresultaat gesommeerd moeten worden, namelijk:

$$h'(x,t) = \frac{1}{p} \int_{t_0}^t R(\tau) d\tau \quad (1a)$$

$$h''(x,t) = B \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-\frac{4\pi^2 kDt}{p\lambda^2}} \quad (1b)$$

$$h'''(x,t) = F \left\{ e^{\frac{x}{g}} \sin\left(\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) + e^{-\frac{x}{g}} \sin\left(-\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) \right\} + \\ + G \left\{ e^{\frac{x}{g}} \cos\left(\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) + e^{-\frac{x}{g}} \cos\left(-\frac{x}{g} + \frac{2\pi t}{T}\right) \right\} \quad (1c)$$

met  $g = \pm \sqrt{\frac{kDT}{\pi p}}$ ,  $\lambda$  nader te bepalen constante,  $F$  en  $G$  nader te bepalen functies en  $T$  de periodeduur van het verschijnsel. Doordat voor het vinden van de oplossingen de randvoorwaarden zijn gesplitst in drie groepen (zie ERNST, p. 90 e.v.), blijven in de eerste deeloplossing twee randvoorwaarden willekeurig. Eenduidige oplossingen kunnen worden verkegen mits ofwel het peil van de open leidingen  $h_o(t)$ , ofwel de afvoer uit de open leidingen per lengte-eenheid van deze leidingen  $A(t)$  ofwel een zekere betrekking tussen  $h_o(t)$  en  $A(t)$  gegeven is. Door ERNST worden drie gevallen nader uitgewerkt, namelijk:

- a) een gegeven  $h_o(t)$
- b) een gegeven  $A(t)$
- c) de afvoer uit de open leidingen is rechtevenredig met de waterhoogte

Voor deze drie gevallen kan de waarde van  $\lambda_n$  worden berekend uit

geval a) 
$$\frac{4\pi kDw}{\lambda_n} = \cotg \frac{\pi L}{\lambda_n} \quad (2a)$$

voor  $w = 0$  ( $w$  is radiale weerstand) 
$$\lambda_n = \frac{2L}{2n-1}$$

geval b) 
$$\frac{4\pi kDw}{\lambda_n} - \frac{p\lambda_n}{\pi B_w} = \cotg \frac{\pi L}{\lambda_n} \quad (2b)$$

( $p$  = bergend vermogen,  $B_w$  = breedte open water)

geval c)

$$\cotg y = \frac{\alpha_1 y - \alpha_3 y^3}{\alpha_0 - \alpha_2 y^2} \quad (2c)$$

$$y = \frac{\pi L}{\lambda_n}, \quad \alpha_0 = \frac{w}{\Omega}, \quad \alpha_1 = \frac{4kDw}{L} \left(1 + \frac{w}{\Omega}\right), \quad \alpha_2 = \frac{4\pi kDwB}{pL^2} w, \quad \alpha_3 = \left(\frac{4kDw}{L}\right)^2 \frac{B}{pL}$$

waarbij  $\Omega$  volgt uit het verband tussen  $A(t)$  en  $h_0(t)$ , namelijk

$$A(t) = \frac{h_0(t)}{\Omega}$$

De wortels voor  $\lambda_n$  kunnen langs grafische weg worden bepaald, waarbij zowel gedempte als periodieke functies kunnen worden beschreven. Een zelfde soort oplossingen kon worden verkregen voor gelaagde grond (ERNST, p.105 e.v.).

Hoewel ERNST reeds enkele grafische methoden heeft uitgewerkt ter bepaling van de waarden van  $\lambda_n$  en bovendien methoden aangeeft om een snellere berekening mogelijk te maken, is met deze oplossingen nog niet voldoende gewerkt om een snellere rekenwijze te verkrijgen. Vooral geval c), waarbij een verband tussen afvoer en waterhoogte in de open leiding wordt gesteld, kan van groot nut zijn voor het inzicht in het afvoerproces, temeer omdat deze voorwaarden ook kunnen worden ingevoerd in quasi-stationaire oplossingen.

Bij de bovengenoemde afleidingen is het bergend vermogen constant verondersteld. Oplossingen waarbij dit niet het geval is, zijn niet bekend. Wel heeft ERNST getracht de invloed van de vertraagde levering uit de onverzadigde zone in rekening te brengen met behulp van de formule van Boulton (pp.125 e.v.). De verkregen oplossing is echter van zodanige omvang, dat zij voor praktische toepassing minder geschikt is. Voor het in rekening brengen van deze factor zal dan waarschijnlijk ook beter de werkwijze die door GARDNER (1962) is ontworpen, gevolgd kunnen worden. Deze auteur brengt de stroming in de onverzadigde zone in rekening door een algemene diffusievergelijking toe te passen. In wezen wordt hier weliswaar uitgegaan van een constant bergend vermogen, doch veranderingen hierin worden in rekening gebracht door veranderingen in de

diffusiecoëfficiënt die kan worden afgeleid uit de doorlaatfactor en het vochtgehalte van de grond op een wijze die algemeen wordt toegepast op stromingsproblemen in overzadigde media. Een logisch gevolg hiervan is dat een vertraagde levering een grotere fout levert in de berekende hoogte van het freatisch vlak dan op de berekende afvoerintensiteit. Dit verschijnsel werd ook reeds door KRAYENHOFF v.d.LEUR (1962) aangetoond. Men zal er hierbij echter op bedacht moeten zijn, dat de oplossing van GARDNER slechts geldt voor korte tijden waarin kleine veranderingen optreden omdat anders geen lineair verband tussen diffusiecoëfficiënt en waterstand mag worden aangenomen.

## 2.2 Vereenvoudigde oplossingen

Uitgaande van de gelineariseerde differentiaalvergelijking van horizontale (Dupuit)stroming in een pakket met constante D

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{kD}{p} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{R}{p} \quad (3)$$

wordt het stromingsprobleem identiek aan de één dimensionale warmtestroming, waarvoor oplossingen geldend voor verschillende randvoorwaarden bekend zijn. De meest bekende oplossing is wel die van Werner, ook gebruikt door MAASLAND en KRAYENHOFF v.d.LEUR (1958). Hierbij wordt uitgegaan van een vlakke waterstand op  $t = 0$  en voorts een constant slootpeil ( $h = 0$  voor  $x = 0$  en  $x = L$  bij  $t > 0$ ) en een constante neerslagintensiteit  $R = R$  beginnend op  $t = 0$ . Als oplossing wordt dan verkregen

voor de waterhoogte

$$h(x,t) = \frac{4}{\pi} \frac{R}{p} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - e^{-n^2 \alpha t}) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4a)$$

voor de afvoerintensiteit

$$A(t) = \frac{8}{\pi^2} R \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-n^2 \alpha t}) \quad (4b)$$

voor de berging in de grond

$$B(t) = R L j \left\{ \frac{\pi^2}{12} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{-n^2 \alpha t} \right\} \quad (4c)$$

$$\text{met } j = \frac{1}{\alpha} = \frac{pL^2}{\pi^2 kD}$$

Zoals reeds eerder vermeld, zullen aanzienlijke afwijkingen optreden door de aanname van een constante D zodra  $D_{\min}/D_{\max} < \frac{3}{4}$ .

Aan de beperking van horizontale stroming kan worden tegemoetgekomen door in plaats van D de "equivalent dikte" d volgend uit Hooghoudt's oplossing toe te passen zoals door MAASLAND (1959) voorgesteld en door KRAYENHOFF v.d.LEUR (1962) uit modelproeven als juist bevonden.

Aan de beperking van een constante neerslag kan worden tegemoetgekomen door superponeren van verschillende neerslagintensiteiten zoals voorgesteld door KRAYENHOFF v.d.LEUR (1958). Men kan echter ook een directe oplossing verkrijgen met als resultant (WESSELING, 1961) de volgende waarden voor de stijghoogte van het water midden tussen de ladingen  $h_m$ , de afvoerintensiteit  $A_m$  en de berging  $B_m$  op het eind van elk tijdvak m.

$$h_m = \frac{4}{\pi} \frac{j}{p} \left[ R_m \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - e^{-n^2 \alpha}) + R_{m-1} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (e^{-n^2 \alpha} - e^{-2n^2 \alpha}) + \dots \right] \quad (5a)$$

$$A_m = \frac{8}{\pi^2} \left[ R_m \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-n^2 \alpha}) + R_{m-1} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-n^2 \alpha} - e^{-2n^2 \alpha}) + \dots \right] \quad (5b)$$

$$B_m = \frac{8}{\pi^2} j \left[ R_m \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} (1 - e^{-n^2 \alpha}) + R_{m-1} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} (e^{-n^2 \alpha} - e^{-2n^2 \alpha}) + \dots \right] \quad (5c)$$

### 2.3 Overige beperkingen

Tot nu toe werd aangenomen dat de directe reactie op de afvoer werd veroorzaakt door de regen. Indien een bepaald neerslagpatroon op het oppervlak valt zal dit patroon na de nodige vervorming het grondwater bereiken. In wezen zouden we dus in plaats van de werkelijke neerslag de snelheid waarmee de regen het grondwater bereikt in de vergelijkingen

(4) en (5) in moeten voeren. Dit betekent dat, wanneer we de neerslag willen omrekenen op deze grootheid, we informatie moeten hebben over wat er in de laag tussen maaiveld en phreatisch niveau gebeurt. In de eerste plaats moeten we hierbij opmerken dat bij bovengenoemde afleidingen de horizontale stroming in de zogenaamde volcapillaire zone (de laag boven het grondwater waar weliswaar een geringe onderdruk heerst doch praktisch alle poriën met water gevuld zijn) is verwaarloosd. Afgezien van het feit dat de dikte van deze laag nog niet goed valt te meten, mag hier worden vermeld dat hierdoor alleen ernstige afwijkingen optreden bij kleine waarden van  $d$  (of  $D$ ). Aangezien toch moet worden aangenomen dat deze laag een constante dikte heeft, zal verwaarlozing hetgeen doorgaans geschiedt, zich uiten in een te kleine waarde voor  $d$ . Van meer belang is de vertraging waarmee het water zich voegt bij het grondwater. Afhankelijk van de grondwaterdiepte zal deze enkele uren tot enkele dagen kunnen bedragen.

Eveneens van betekenis is de fout die geïntroduceerd kan worden door de aanname van een constant bergend vermogen. Door het niet-stationaire karakter van de stroming in de onverzadigde zone (afwisselend uitdrogen en bevochtigen) zal dit vermogen niet constant zijn. Bovendien zal hierbij een hysteresiseffect op kunnen treden en zal daling van het freatisch niveau aanleiding kunnen geven tot het vrijkomen van hoeveelheden water die afhangen van de relatieve en absolute hoogte van dit niveau. Zoals reeds opgemerkt is geen niet-stationaire oplossing bekend waarbij het bergend vermogen afhangt van de grondwaterstand. Voor het in rekening brengen van dit effect zal men zijn toevlucht moeten nemen tot een vertraagde levering uit de onverzadigde zone. De hiervoor door ERNST gevonden oplossingen gaan er echter van uit, dat geen hysteresiseffect optreedt, aangezien dan superponeren van deeloplossingen niet geoorloofd is. Wel geeft ERNST nog een verfijning die van nut kan zijn in stroomgebieden die twee afzonderlijke delen omvatten, namelijk met stroken met een verschillend bergend vermogen. De oplossing wordt gegeven in vier deeloplossingen waarvan de eerste twee het stationaire deel (vergn. 226 en 227) de laatste twee (vergn. 232 en 233) het niet-stationaire deel van de stroming weergeven.

Als laatste punt dient hier het constante slootpeil te worden ge-

noemd dat wordt verondersteld bij de vereenvoudigde oplossing. Doorgaans zal het peil in de sloten niet constant blijven als afwatering optreedt. Door EDELMAN (1947) is voor een enkele open watergang een aantal oplossingen gegeven voor welomschreven voorwaarden van toestroming en/of waterpeil in de open leiding. Bij deze oplossingen lopen echter afvoer en slootpeil parallel, terwijl in de gevallen waar wij mee te maken hebben het slootpeil de afvoer tegenwerkt. Hier zal dus, wil men veranderingen in slootpeil in rekening brengen, de oplossing vermeld door ERNST moeten worden toegepast.

Als conclusie mogen we hier wel stellen, dat door het in rekening brengen van meer verfijning als een vertraagde nalevering uit de onverzadigde zone, wisselend slootpeil etc. de niet-stationaire oplossingen nogal een ongewikkelde vorm aan gaan nemen. Dit hoeft niet te betekenen dat ze niet bruikbaar zijn, doch er zal de nodige aandacht moeten worden besteed aan een goed rekenschema. Verder zullen er waarschijnlijk verschillende gevallen zijn waarin met een eenvoudiger benadering voldoende nauwkeurige resultaten zijn te bereiken. Deze vereenvoudigingen zullen kunnen voortkomen uit de niet-stationaire oplossingen zelf, met als voordeel een in principe juiste benadering van het stromingsprobleem of als pseudo-stationaire oplossingen moeten worden gevonden. De laatste kunnen aanzienlijk eenvoudiger oplossingen geven, doch zijn principiëel minder goed gefundeerd.

### 3. Quasi-stationaire oplossingen

#### 3.1 Principe en oplossingen met constant bergend vermogen

Dit soort oplossingen stelt, dat berekening mogelijk is door de veranderende stroming te beschrijven als een opeenvolging van stationaire toestanden. Vaak kunnen hierbij zeer eenvoudige oplossingen worden verkregen.

De methode gaat uit van de stationaire oplossing in de ons bekende formule van Hooghoudt

$$A = am + bm^2 \quad (6)$$

$$\text{met } a = \frac{8kd}{L^2}, \quad b = \frac{4k}{L^2}$$

Het continuïteitsprincipe wordt ingevoerd door te stellen dat

$$p \, dm = (s_i - A) \, dt \quad (7)$$

dat wil zeggen dat al het water dat in een korte tijd  $dt$  wordt toegevoegd ( $s_i \, dt$ ) verminderd met de in die tijd optredende afvoer ( $A \, dt$ ) een verhoging van de grondwaterstand  $dm$  teweeg brengt waarbij de hoeveelheid geborgen water gelijk is aan  $p \, dm$ .

Door nu vergelijking (6) en (7) te substitueren ontstaat een gewone differentiaalvergelijking in  $t$  en  $A$  of in  $t$  en  $m$  die langs elementaire weg is op te lossen.

Het principe van deze methode is reeds vrij oud en is door VISSER (1953) voor het eerst toegepast op het afvoervraagstuk, manelijk op drainageproblemen.

Het eenvoudigste geval doet zich voor bij een lineair verband tussen afvoer en opbolling ( $A = am$ ). Invullen in (7) en integreren onder de voorwaarde dat de neerslag is te verdelen in perioden van constante intensiteit geeft dan als oplossing voor de afvoerintensiteit  $A_m$  op het eind van de  $m$ -de periode

$$A_m = A_{m-1} e^{-\frac{a}{p}t} + (1 - e^{-\frac{a}{p}t}) s_{i(n)} \quad (8)$$

waarin  $A_{m-1}$  de afvoerintensiteit op het eind van de voorgaande periode,  $s_{i(n)}$  de neerslag in die periode en  $t$  de lengte van de betreffende periode voorstelt. Deze vergelijking die door HELLINGA (1953) op een omslachtiger wijze werd afgeleid wordt door DE ZEEUW en HELLINGA (1958) uitvoerig besproken.

Oplossingen waarbij de stroming in de ondergrond wordt verwaarloosd ( $A = bm^2$ ) worden gegeven door VISSER (1953), WESSELING (1959) en VAN EYDEN (1959). De algemene vormen verkregen door WESSELING zijn:

a) voor perioden met  $s_i > 0$

$$C = A \frac{B + A \tanh \frac{b^{1/2} t}{p} A}{B \tanh \frac{b^{1/2} t}{p} A + A} \quad (9a)$$

b) voor perioden met  $s_i = 0$

$$C = \frac{p B}{p + b^{1/2} t B} \quad (9b)$$

c) voor perioden met  $s_i < 0$

$$C = A \frac{B - A \tan\left(\frac{b^{1/2} t}{p}\right) A}{B \tan b^{1/2} t A + A} \quad (9c)$$

waarin

$$\begin{aligned} \sqrt{s_{i(n)}} &= A = |m_i b^{1/2}| \\ \sqrt{A_{n-1}} &= B = |m_{n-1} b^{1/2}| \\ \sqrt{A_n} &= C = |m_n b^{1/2}| \end{aligned}$$

Voor het geval de algemene stationaire vergelijking (6) wordt gebruikt, wordt de oplossing voor perioden met  $a^2 + 4b s_{i(n)} > 0$  vergelijking (9a) verkregen. Voor perioden met  $a^2 + 4b s_{i(n)} < 0$  vergelijking (9c), doch voor beide nu

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 4b s_{i(n)}} &= A = |2b m_{i(n)} + a| \\ \sqrt{a^2 + 4b s_{n-1}} &= B = |2b m_{n-1} + a| \\ \sqrt{a^2 + 4b s_n} &= C = |2b m_n + a| \end{aligned}$$

### 3.2 Oplossingen met variërend slootpeil

Bij bovenstaande afleidingen is stilzwijgend aangenomen dat het drainage-systeem niet verandert, met andere woorden dat het water in de leidingen een constant niveau heeft. Dit zal doorgaans niet het geval zijn. Indien water uit de grond toestroomt, zal zich een zeker evenwicht instellen tussen toestroming naar de sloot en afstroming uit de sloot.

Men kan nu verschillende veronderstellingen maken over wat er gebeurt in de sloot. In de eerste plaats kunnen we stellen dat indien het slootpeil stijgt, de afstroming uit de grond geringer wordt. We zullen dan als algemene afwateringsvergelijking krijgen

$$A = a(m - H) - b(m - H)^2 \quad (10)$$

waarbij H de hoogte van het peil in de leidingen en m die in de grond is. Hier is a niet direct terug te voeren tot die in vergelijking (6) omdat hierop een zekere correctie moet worden toegepast die echter aan de oplossing weinig toe of af doet. Opstellen van de continuïteitsvoorwaarden van grond en leiding levert nu respectievelijk

$$\left. \begin{array}{l} \text{grond} \quad p_1 \frac{dm}{dt} = \{s_i - a(m - H) - b(m - H)^2\} \\ \text{sloot} \quad p_2 \frac{dH}{dt} = a(m - H) + b(m - H)^2 - q \end{array} \right\} \quad (11)$$

waarin  $p_1$  de grondberging,  $p_2$  de slootberging voorstelt. Voorts stelt q de hoeveelheid water voor die per strekkende meter uit de sloot wordt afgevoerd.

Nu moeten oplossingen worden gezocht voor het simultane stelsel weergegeven door (11). Dit kan door (10) in een van deze twee te substitueren. De eenvoudigste veronderstelling is  $q = \text{constant}$  (bijv. door eenemaal). Hiervoor geeft VISSER een oplossing die neerkomt op de volgende vergelijking voor het maximale slootpeil

$$H_{\max} = C_1 \frac{p_1}{a} \left\{ -\frac{1}{c_1 a} \frac{p_1}{p_2} (s_i - q) \right\}^{-\frac{a}{p_1}} + \left[ \frac{p_1}{p_2 a} + \frac{1}{p_2} \ln \left\{ -\frac{1}{c_1 a} \frac{p_1}{p_2} (s_i - q) \right\} \right] - \frac{p_1}{a} s_i \quad (12)$$

$+ C_2$

Een analoge waarde voor de maximale grondwaterstand kan eveneens worden afgeleid met gebruikmaking van de relaties

$$H_o = \frac{p_1}{a} C_1 + \frac{p_1}{p_2 a} (s_i - q) - \frac{p_1}{a} s_i$$

$$C_1 = \frac{a}{p_1} H_o + s_i - \frac{1}{p_2} (s_i - q)$$

$$C_2 = m_o - \frac{p_2}{p_1 - p_2} \left\{ (m_o - H_o) + \frac{1}{a} \left( \frac{s_i - q}{p_1 + p} p_1 - s_i \right) \right\}$$

waarin  $m_o$  en  $H_o$  de waarden van  $m$  en  $H$  op  $t = 0$  aangeven. Iets eenvoudiger oplossingen kunnen worden verkregen door respectievelijk het eerste en tweede deel van vergelijking (9) te verwaarlozen.

Een andere veronderstelling is dat de afvoer uit de sloot rechtevenredig is met het peil, dus  $q = cH$ . Een oplossing is dan alleen mogelijk als de stroming in de bovengrond, dus de tweede term in vergelijking (9) wordt verwaarloosd. VISSER geeft voor dit geval voor de grondwaterstand

$$m = C_1 e^{-r_1 t \left( \frac{a + c + p_2 r_1}{a} \right)} + C_2 e^{r_2 t \left( \frac{a + c + p_2 r_2}{a} \right)} + \frac{a + c}{a} C_3 \quad (13)$$

$$\text{met } A_1 = \frac{a}{p_1} + \frac{a + c}{p_2}$$

$$A_2 = \frac{ac}{p_1 p_2}$$

$$A_3 = \frac{a s_i}{p_1 p_2}$$

$$D_1 = \frac{a + c + p_2 r_1}{a}$$

$$D_2 = \frac{a + c + p_2 r_2}{a}$$

$$D_3 = C_1 + C_2 = H_o - \frac{s_i}{c}$$

$$D_4 = m_o - s_i \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$r_{1,2} = - \frac{A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}$$

$$C_3 = A_3 / A_2$$

$$C_1 = \frac{D_4 - D_2 D_3}{D_1 - D_2}$$

$$C_2 = - \frac{D_4 - D_1 D_3}{D_1 - D_2}$$

### 3.3 Oplossingen met variabel bergend vermogen

Ook een variatie in het bergend vermogen kan in deze oplossingsmethode worden ingebouwd. VISSER past de veronderstelling toe, dat het bergend vermogen  $p$  lineair samenhangt met de waterstand. In plaats van  $p$  wordt dan in de continuïteitsvergelijking ingevoerd

$$p = dm + f \quad (14)$$

De oplossing wordt dan bij aanname van een verband tussen afvoer en grondwaterstand weergegeven door (6)

$$e^{-2b \frac{t}{d}} = B \left( \frac{C+z}{C+z_0} \right)^{\frac{C+c}{C}} + \left( \frac{C-z}{C-z_0} \right)^{\frac{C-c}{C}} \quad (15)$$

waarin

$$C^2 = a^2 + 4b s_i$$

$$z = a + 2bm$$

$$z_0 = a + 2bm_0$$

$$c = \frac{ad - 2bf}{d} \quad (a \text{ en } b \text{ uit 6, } d \text{ en } f \text{ uit 14})$$

Ook ERNST geeft een oplossing voor het geval het bergend vermogen als functie van de grondwaterdiepte kan worden weergegeven (ERNST, 1962 par.III.7, pp 139 e.v.), waarbij getracht is de variabele dikte van het doorstroomde pakket, de veranderende radiale weerstand door het variabele peil in de open sloten en verandering van het stromingsveld doordat sloten droog komen te staan in de zomer in rekening te brengen. Hierop zal hier niet nader worden ingegaan.

#### 3.4 Restricties en overzicht van gevonden oplossingen

Behalve dat van de quasi-stationaire oplossingen verwacht mag worden dat zij minder juiste oplossingen zullen geven, hebben deze oplossingen dezelfde restricties als die gegeven voor de niet-stationaire oplossingen. Het voordeel van dit soort oplossingen moet gezocht worden in het feit dat een met de grondwaterstand veranderend bergend vermogen kan worden ingebracht. Voorts geven zij iets eenvoudiger oplossingen, al kunnen de vormen bij het invoeren van meer verfijningen ook hier vrij ingewikkeld uitkomen.

Tot slot volgt hier nog een overzicht van alle niet-stationaire en pseudo-stationaire oplossingen om duidelijk de verschillende restricties die veelal samenhangen met de mogelijkheid van het vinden van een oplossing, te doen uitkomen.

| omschrijving factoren                                           | ondergrond<br>of<br>D constant      | bovengrond<br>of<br>D variabel | onder- +<br>boven-<br>grond |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| <u>niet-stationaire oplossingen</u>                             |                                     |                                |                             |
| 1. slootpeil constant, wisselende neerslag, $p = \text{const.}$ | 4,5                                 | -                              | -                           |
| 2. slootpeil als functie van de tijd "                          | 1,2                                 | -                              | -                           |
| 3. afvoer als functie van de tijd "                             | 1,2                                 | -                              | -                           |
| 4. lineair verband tussen slootpeil en afvoer "                 | 1,2                                 | -                              | -                           |
| 5. bergend vermogen variërend met afstand                       | Ernst {<br>226<br>227<br>232<br>233 | -                              | -                           |
| <u>pseudo-stationaire oplossingen</u>                           |                                     |                                |                             |
| 1. constant slootpeil, wisselende neerslag, $p = \text{const.}$ | 9                                   | 9                              | 9                           |
| 2. slootafvoer constant, $p = \text{const.}$                    | 12                                  | 12                             | 12                          |
| 3. slootafvoer en peil lineair, $p = \text{const.}$             | 13                                  | -                              | -                           |
| 4. constant slootpeil, $p = f(\text{waterdiepte})$              | 15                                  | -                              | -                           |
| 5. variërend slootpeil $p = f(\text{waterdiepte})$              | Ernst {<br>358<br>359               | -                              | -                           |

#### 4. Toepassing van de formules op afvoergebieden

In de voorgaande paragrafen hebben we gezien dat bij invoegen van meer factoren de oplossingen steeds ingewikkelder worden en zich minder lenen voor praktische berekeningen. Voorts moeten we voorop stellen dat de afleidingen naast andere restricties slechts gelden voor systemen van parallelle en equidistante leidingen. Voor de toepassing van deze oplossingen op stroomgebieden kan men redeneren dat elk gebied, afhankelijk van de intensiteit van de aanwezige drainage bepaalde "drainagefactoren" bezit die in de formules zijn weergegeven als  $a$  en  $b$  (verg. 1, 2, 3) of  $\alpha$ ,  $\frac{1}{j}$  (verg. 5 en 6). Deze aanname zal des te juister zijn naarmate het gebied is voorzien van een parallelsysteem wat in zijn eigenschappen (afstand, doorlatendheid van de grond, dikte van lagen) van plaats tot plaats weinig verschillen vertoont. Een bijkomende moeilijkheid is echter dat, afhankelijk van de neerslag- en afvoerintensiteit dus veelal van de diepte van het freatisch niveau meer of minder van deze sloten of drains aan de afvoer deelnamen. Behalve dus dat het de factor  $\frac{a}{p}$ ,  $\alpha$  of  $j$  wisselt met de tijd omdat het bergend vermogen met de tijd varieert zal ook een variatie van deze grootheden met de tijd optreden doordat de "effectieve drainafstand" verschilt naarmate meer of minder afvoerkanalen aan het proces deelnemen.

Een ernstiger bezwaar tegen de toepassing van de oplossingen zelf op de afvoer van stroomgebieden is, dat men een twee-dimensionale oplossing toepast op een drie-dimensionaal systeem. Dit komt er op neer dat stilzwijgend wordt aangenomen dat de verschijnselen die teweeg worden gebracht door het transport van water in de leidingen (hogere waterstanden, andere gradienten in de open leidingen) mogen worden verwaarloosd. Om deze reden werd door VISSER (1962) een andere werkwijze gevolgd die als kenmerkend verschil met de boven besproken oplossingen geeft, dat zij rekening houdt met het terreinverval en de stroming door de beek. Een volledige beschrijving is te vinden in de nota nr. 160 (1962) van het Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding. In het kort komt de werkwijze hierop neer dat wordt ingevoerd

1. een waarde voor hoogte van de beekbodem als functie van de lengte
2. een vergelijking voor de afvoer uit de grond
3. een continuïteitsvergelijking voor de grond
4. een transportformule voor de beek
5. een continuïteitsvergelijking voor de beek

Zoals bij de bespreking van de verschillende oplossingen al is opgemerkt, zal de nauwkeurigheid van de oplossing sterk afhangen van de omstandigheid in hoeverre de hydrologische schematisering overeenkomt met de werkelijke toestand. Wij willen hier nog slechts enkele opmerkingen maken over het gebruik en de nauwkeurigheid van de oplossingen zelf. Het gebruik van de verschillende oplossingen hangt er in sterke mate van af in hoeverre men er in slaagt een eenvoudig rekenschema vast te stellen. KRAYENHOFF v.d.LEUR (1958) deed dit door de in de vergelijkingen voorkomende oneindige sommen te tabelleren voor verschillende waarden voor  $\alpha t$ . Door gebruik te maken van deze van tevoren berekende waarden (waarvoor wordt verwezen naar de betreffende publikatie) kan het rekenwerk al vrij veel vereenvoudigd worden.

Uitgaande van de vergelijking (5) stelde WESSELING (1961) voor een berekening van de betreffende functies van tevoren uit te voeren. Als voorbeeld voor de afvoer (verg. 5b) geldt bijvoorbeeld

$$A_m = C_m R_m + C_{m-1} R_{m-1} + C_{m-2} R_{m-2} + \dots$$

waarin

$$C_m = \frac{8}{\pi^2} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-n^2 \alpha})$$

$$C_{m-1} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-2n^2 \alpha} - e^{-2n^2 \alpha})$$

$$C_{m-i} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-in^2 \alpha} - e^{-(i+1)n^2 \alpha})$$

welke sommen voor verschillende waarden van  $\alpha$  van tevoren kunnen worden berekend. Het blijkt echter dat, vooral voor kleine  $\alpha$ , zeer veel termen  $A$  van  $C$  moeten worden meegenomen. Met andere woorden, naarmate  $\alpha$  kleiner is (grotere drainafstand of groter bergend vermogen) wordt de afvoer langer beïnvloed door een op een bepaald tijdstip gevallen neerslag. Wetenschappelijk komt dit neer op het slechts langzaam convergeren van de reeks  $C_m, C_{m-1}, C_{m-2}$  etc. Deze moeilijkheid werd door DE ZEEUW opgelost (zie WESSELING, 1961) door een enigszins andere berekeningswijze, die hierop neerkomt dat de afvoer wordt gesplitst in twee delen, namelijk in een zogenaamd evenredig en een niet-evenredig deel. Hierbij wordt de eerste term van de oneindige sommen afgesplitst als evenredig deel. Doen we dit bijvoorbeeld voor de afvoer weergegeven door 6b dan krijgen we

$$A_m = A_m^* + A_m^{**} \quad (15)$$

of

$$A_m^* = R_m \frac{8}{\pi^2} (1 - e^{-n^2 \alpha}) + R_{m-1} \frac{8}{\pi^2} (e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}) + R_{m-2} \frac{8}{\pi^2} (e^{-2\alpha} - e^{-3\alpha}) + \dots$$

$$A_m^{**} = R_m \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-n^2 \alpha}) + R_{m-1} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-n^2 \alpha} - e^{-n^2 2\alpha}) + \dots$$

Indien de eerste vergelijking geldt voor  $A_m^*$ , dan kunnen we voor  $A_{m-1}^*$  schrijven

$$A_{m-1}^* = \frac{8}{\pi^2} \left\{ R_{m-1} (1 - e^{-\alpha}) + R_{m-2} (e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}) + R_{m-3} (e^{-2\alpha} - e^{-3\alpha}) + \dots \right\}$$

Schrijven we nu voor  $A_m^*$

$$A_m^* = R_m \frac{8}{\pi^2} (1 - e^{-\alpha}) + e^{-\alpha} \frac{8}{\pi^2} \left\{ R_{m-1} (1 - e^{-\alpha}) + R_{m-2} (e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}) + \dots \right\}$$

dan zien we dat het laatste deel van deze vergelijking gelijk is aan  $A_{m-1}^*$ , dus we hebben

$$A_m^* = A_{m-1}^* e^{-\alpha} + \frac{8}{\pi^2} (1 - e^{-\alpha}) R_m \quad (16)$$

Deze vergelijking geeft op de vermenigvuldigingsfactor  $\frac{8}{\pi^2}$  voor het laatste deel vergelijking 7 weer met  $s_i = R$  en  $t = 1$ , als  $\frac{a}{p} = \alpha$ . Nu is in de pseudo-stationaire afleiding  $\frac{a}{p} = \frac{8kd}{pL^2}$  en in de niet-stationaire af-

leiding  $\alpha = \frac{\pi^2 kd}{pL^2}$  of  $\frac{a}{p} = \frac{8kd}{pL^2} \cdot \frac{pL^2}{\pi^2 kd} \alpha = \frac{8}{\pi^2} \alpha$ . De waarde van  $\frac{a}{p}$  is dus

kleiner dan  $\alpha$ . Dit is niet verwonderlijk als men bedenkt dat voor de afleiding van de pseudo-stationaire oplossing wordt aangenomen dat de grondwaterstand overal evenveel stijgt. In werkelijkheid zal men echter rekening moeten houden met een geringere stijging boven de drains en een grotere stijging in het land zodat men rekening zal moeten houden met de vorm van het freatisch niveau. Vaak wordt deze reductie gegeven voor een elliptische grondwaterstand (drains op de ondoorlatende laag) of voor parabolische grondwaterstanden (drains boven de ondoorlatende laag), doch ook andere vormen van de grondwaterstand kunnen zich voordoen, zodat de pseudo-stationaire oplossing een goede benadering geeft van de eerste term van de niet-stationaire oplossing. Dit houdt in, dat de pseudo-stationaire oplossing een te lage top-afvoer zal geven en dientengevolge een te hoge afvoer enige tijd nadat de regen is opgehouden. Hierop werd reeds door KRAYENHOFF v.d.LEUR (1958) gewezen.

Terugkomend op het niet-evenredige deel van de afvoer, dan zien we dat we voor de verschillende termen kunnen schrijven

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-n^2 \alpha}) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-n^2 \alpha}) = \mu(\alpha) = \Delta\mu(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-n^2 \alpha} - e^{-2n^2 \alpha}) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-2n^2 \alpha}) - \frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - e^{-n^2 \alpha}) = \\ &= \mu(2\alpha) - \mu(\alpha) = \Delta\mu(2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} \frac{1}{n^2} (e^{-2n^2\alpha} - e^{-3n^2\alpha}) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} (1 - e^{-3n^2\alpha}) - \frac{8}{\pi^2} \sum_{3,5,7}^{\infty} (1 - e^{-2n^2\alpha}) = \\ &= \mu(3\alpha) - \mu(2\alpha) = \Delta\mu(3\alpha) \end{aligned}$$

Stellen we nu, afhankelijk van de betreffende waarden van  $\alpha$ , de algemene waarde  $\mu(\alpha)$ , dan krijgen we de meest rechtse uitdrukkingen. Het probleem van de langzame convergentie van de oneindige sommen is nu vermeden omdat de middelste sommen wel snel convergeren, zodat slechts enkele waarden van  $\Delta\mu(\alpha)$  behoeven te worden gebruikt en de totale afvoer gelijkgesteld kan worden aan

$$A_m = A_{m-1}^* e^{-\alpha} + \frac{8}{\pi^2} (1 - e^{-\alpha}) R_m + \Delta\mu(\alpha) R_{m-1} + \Delta\mu(2\alpha) R_{m-2} + \dots \quad (17)$$

#### Samenvatting en conclusies

- 1) Een fysisch-mathematische oplossing voor het afvoerproces biedt grote voordelen door de goede beschrijving van de onderlinge samenhang van de factoren en de goede overdraagbaarheid.
- 2) Vooropgesteld dient te worden dat het proces kan worden beschreven door een aantal factoren in rekening te brengen die eenvoudig meetbaar zijn. Overdraagbaarheid op andere gebieden of toestanden hangt dan nog af van de mogelijkheid voor de bepaling van deze constanten.
- 3) Voor de beschrijving van het afvoerproces kunnen niet-stationaire of pseudo-stationaire oplossingen gebruikt worden.
- 4) Door het in rekening brengen van meerdere factoren is vaak een niet-stationaire oplossing onmogelijk, de pseudo-stationaire aanpak levert iets meer mogelijkheden, doch een praktische toepassing zal spoedig worden beperkt door de ingewikkeldheid van de oplossingen.
- 5) Toepassing van bovengenoemde oplossingen zal dus ondanks sterke schematisering ook afhangen van de mogelijkheid een redelijk eenvoudig rekenstelsel te ontwerpen.
- 6) Ondanks de beperking van het aantal factoren dat in rekening gebracht kan worden, zou dit soort aanpak toch kunnen leiden tot een zekere om-

grenzing van het probleem en de bepaling van de invloed van de factoren die nog in rekening gebracht kunnen worden.

7) Het bezwaar dat de genoemde oplossingen geldig zijn voor een tweedimensionaal systeem blijft. Nagegaan zal dus moeten worden in hoeverre een beschrijving van de derde dimensie, met name de verschijnselen die optreden in en langs de beek, een meer verantwoorde benadering kan geven.

Literatuur

- EDELMAN, J.H., 1947. Over de berekening van grondwaterstromingen. Proefschrift Delft.
- EYDEN, W.A.A. van, 1959. De algemene vergelijking voor de niet-stationaire afvoer van een drainage- of stromengebied. Nota R.W.S., afd. Waterhuishouding.
- ERNST, L.F., 1962. Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij aanwezigheid van horizontale evenwijdige open leidingen. Proefschrift Utrecht en VLO 67.15
- GARDNER, W.R., 1962. Approximate solution of a non-steady-state drainage problem. Soil Sci.Soc.Amer.Proc. 26: 129-132.
- HELLINGA, F., 1953. Afvoer van polders en stroomgebieden. Nota Afd.Cultuur-techniek der L.H.S.
- KRAYENHOFF v.d.LEUR, D.A., 1958. A study of non-steady flow with special reference to a reservoir coefficient. De Ing. 70: B 87-94.
- MAASLAND, M., 1959. Water table fluctuations induced by intermittent recharge. J.of Geoph.Res. 64: 549-559.
- VISSER, W.C., 1953. De grondslagen van de drainageberekening. Landb.Tijdschrift 65: 66-82.
- 1959. De afstroming van grondwater bij geremde slootafvoer. Nota I.C.W. november 1959.
- 1959. Een formule voor de capaciteit van een poldergemaal. Nota I.C.W. december 1959.
- WESSELING, J., 1959. Vergelijkingen voor de niet-stationaire afvoer. Nota I.C.W. oktober 1959
- 1961. Enkele opmerkingen over de niet-stationaire afvoervergelijkingen. Nota I.C.W. mei 1962.
- ZEEUW, J.W.de en F.HELLINGA, 1958. Neerslag en afvoer. Landb. Tijdschr. 70: 405-422.
- KRAYENHOFF v.d.LEUR, D.A., 1962. Some effects of the unsaturated zone on non-steady free surface groundwater flow as studied in a scaled granular model. J.of Geoph.Res. 67: 4347-4362.