

N31545.0478

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA 478 d.d. 28 augustus 1968

Die Bestimmung von Gebietsverdunstung  
als Routinemethode

W.C. Visser

BIBLIOTHEEK  
STARINGGEBOUW

---

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen,  
dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een een-  
voudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discus-  
sie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclu-  
sies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is  
afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in  
aanmerking.

---



1707740

De Directie van de Waterwerken

van de Gemeente Rotterdam

Rotterdam, 1914

De Directie van de Waterwerken van de Gemeente Rotterdam heeft de eerebrieven van de Directie van de Waterwerken van de Gemeente Rotterdam van den 10den d. m. 1914 ontvangen en heeft de eerebrieven van de Directie van de Waterwerken van de Gemeente Rotterdam van den 10den d. m. 1914 beantwoord. De Directie van de Waterwerken van de Gemeente Rotterdam heeft de eerebrieven van de Directie van de Waterwerken van de Gemeente Rotterdam van den 10den d. m. 1914 beantwoord. De Directie van de Waterwerken van de Gemeente Rotterdam heeft de eerebrieven van de Directie van de Waterwerken van de Gemeente Rotterdam van den 10den d. m. 1914 beantwoord.

## Die Bestimmung von Gebietsverdunstung als Routinemethode

W. C. Visser

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding,  
Wageningen, Nederland

### Zweck der Verdunstungsbestimmung

Verdunstung ist ein grosser Posten in der Wasserbilanz. Sowohl in Trocken- gebieten wie in regenreichen Gegenden ist das Kennen der Gebietsverdunstung wichtig. Nicht nur die Verwendung von Bodenwasser zur Trinkwasserversorgung oder für künstliche Beregnung fordert Kenntnis der Verdunstung. Verdunstung vergrössert auch das Luftvolumen im Boden. Das grössere Luftvolumen kann Regen speichern und so den Abfluss verzögern. Für Dränung ist das wichtig, wie auch für die Bestimmung der Abflussbeiwerte, zur Einschränkung von Überschwem- mungen und zur Instandhaltung einer annehmbaren Sommerabflusspende der Flüsse.

Der Bestimmung der Verdunstungsintensität hat man viel Aufmerksamkeit gewidmet. Es gibt denn auch eine Anzahl Formeln zur Berechnung und Methoden zur Bestimmung der Verdunstung. Diese Methoden haben gemeinsam, dass an einigen wenigen Stellen in dem zu untersuchenden Gebiet viel Aufwand an Kosten und Arbeit gemacht wird. Man benutzt dabei Lysimeter oder führt Bestimmungen des vertikalen Dampftransportes durch. Aber es ist nicht zu vermeiden dass die erzielte Genauigkeit beim Umrechnen auf grössere Gebiete verloren geht. Die Anpassung an Eigenschaften des Bodenprofils, an Bodenfeuchteverhältnisse, an Eigenschaften der Pflanzendecke usw. ist die schwache Seite der genauen, aber auf wenigen Stellen beschränkten Bestimmungen.

Da die Verdunstung stark von örtlichen Verhältnissen abhängig ist, ist eine erste Bedingung, dass die Beobachtungen an vielen Stellen vorgenommen werden. Wenn man Verdunstungsbeobachtungen durchführen will, soll das mit einem dichte- ren Netz von Messstellen geschehen als wenn man Regenintensitäten bestimmt.

### Wahl der Messstelle in der Strömungsbahn

Es ist bei der Bestimmung der Verdunstung zweckmässig, das Messen des Wassertransportes an der geeignetsten Stelle vorzunehmen. Wie in einem von Wasser durchflossenen Rohr kann man an vielen Stellen messen und findet aus den örtlichen Gradienten, Durchschnitten und Widerständen immer dieselbe Wassermenge pro Zeiteinheit. Man braucht nicht überall zu messen; das mathe- matische Modell braucht nicht ein für den ganzen Strömungsweg gültiges voll-



ständiges Modell zu sein.

Im allgemeinen kann man vier Zonen unterscheiden, wo man seine Untersuchungen ansetzen kann. Diese Zonen sind: die Atmosphäre, die oberirdischen Pflanzenteile, die Wurzelzone und die Zone des kapillaren Anstiegs. Für ein vollständiges Modell ist zu bedenken, dass es Zufuhr, Abfuhr und Speicherung von Wasser gibt, während in den zwei Zonen, wo die Pflanze an dem Transport teilnimmt, das Wasser sowohl durch die Pflanze als daran entlang strömen kann.

Wie man in bezug auf das zu lösende Problem sich auf einen Teil der Zonen beschränken kann und an welchen Stellen in der Strombahn man messen soll, wird am besten an einer kurzen Übersicht der Strömungsgesetze in jeder Zone klargestellt.

### Grundlegende Formeln

Es sind in der Weltliteratur für alle vier Zonen Formeln allgemeiner Art entwickelt worden (siehe Figur 1).

#### 1. Turbulenter Dampftransport

In der Atmosphäre wird durch Windturbulenz Wasserdampf von der Pflanzendecke hochtransportiert. Der Prozess der turbulenten Beförderung wird von einer allgemeinen Formel dargestellt, die sich wie folgt gestaltet (RIJTEMA, 1965):

$$E = \frac{a}{\ln \left( \frac{H + H_0 - d}{H_0} \right)^2} U_H (e_s - e_a)$$

$E$  = Verdunstung in mm/Tag

$U_H$  = Windgeschwindigkeit in m/sec auf Höhe  $H$

$H$  = Messhöhe der Windgeschwindigkeit

$H_0$  = mittlere Gewächshöhe

$d$  = Nullpunktverschiebung der Windgeschwindigkeitskala nach der Gewächsgeometrie

$e_s$  = Dampfdruck auf Höhe  $H = d$

$e_a$  = Dampfdruck auf Höhe  $H$

$a$  = Konstante

Für praktische Benutzung werden weitere Verfeinerungen angebracht. So wird für nicht gesättigte Luft an der Verdunstungsgrenzfläche, wegen ungenügenden Wassernachschubes durch Boden und Pflanze, ein Korrektur durchgeführt

...

...

...

werden müssen oder wird im Gewächs Wellenbildung durch Wind in der Höhe der Nullpunktsfläche berücksichtigt werden müssen.

Die Randbedingungen in dieser Zone sind von den Wasserdampfdruckpotentialen  $e_a$  und  $e_s$  gegeben.

## 2. Wassertransport durch Blätter und Stomata

Der Wassertransport in der Gewächszone ist von Biologen tiefgehend studiert worden. Der Dampftransport in dieser Zone wird weniger von Diffusionsvorgängen als von Energieumsetzungen beim Übergang von der flüssigen in die Dampfphase beherrscht. Daher wird der Transport in dieser Zone als Energietransport ausgedrückt (RASCHKE, 1960). Die Formel stützt sich auf die Energiebilanz.

$$S + E + K = 0$$

S = Summe von Ein- und Rückstrahlung

E = Verdunstung, Transport latenter Energie

K = Konvektion, Transport spürbarer Wärme

Der wichtige Punkt bei dieser Energieumsetzung ist, dass das Gleichgewicht zwischen Einstrahlung und Energietransport in massgeblicher Weise durch Temperaturänderungen in den Blättern entsteht. Durch Temperaturanstieg erhöht sich der Dampfdruck an der Grenzfläche Blatt - Luft, so dass die Pflanze auch in gesättigter Luft Wasserdampf abgeben kann.

Die von RASCHKE für die Energieumsetzung gegebene Ableitung führt zu folgenden Formeln:

$$E = -mS_L - n(1 - m)E_L(1 - r)$$

$$\Theta = \frac{S_L - nE_L(1 - r)}{2(h + h_g) + n \frac{dE}{dT}}$$

E = Verdunstung in Kalorien

$S_L$  = Strahlungssumme bei Lufttemperatur

$E_L$  = Dampfdruck bei Lufttemperatur

r = relative Luftfeuchtigkeit

T = Temperatur

m, n, h,  $h_g$  = Strömungs- und Diffusionskonstanten

$\Theta$  = Temperaturdifferenz Blatt - Luft

Auch hier werden weitere Verfeinerungen benötigt sein. So wird der Dampfdruck an der Grenzfläche Blatt - Luft von der Wasserspannung in der flüssigen

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that proper record-keeping is essential for the integrity of the financial system and for the ability to detect and prevent fraud.

2. The second part of the document outlines the specific requirements for record-keeping, including the need to maintain original documents and to keep copies of all supporting documents. It also discusses the importance of ensuring that records are stored in a secure and accessible manner.

3. The third part of the document discusses the importance of regular audits and reviews of the records. It emphasizes that audits are necessary to ensure that the records are accurate and complete, and to identify any areas where improvements can be made.

4. The fourth part of the document discusses the importance of training and education for all personnel involved in the record-keeping process. It emphasizes that all personnel must be properly trained and educated to ensure that the records are maintained in accordance with the requirements.

5. The fifth part of the document discusses the importance of maintaining the confidentiality and security of the records. It emphasizes that all records must be protected from unauthorized access and disclosure, and that appropriate security measures must be implemented to ensure the integrity of the information.

6. The sixth part of the document discusses the importance of maintaining the accuracy and completeness of the records. It emphasizes that all transactions must be recorded accurately and completely, and that any errors or omissions must be identified and corrected as soon as possible.

7. The seventh part of the document discusses the importance of maintaining the accessibility and availability of the records. It emphasizes that all records must be stored in a manner that allows for easy access and retrieval, and that appropriate backup and recovery procedures must be implemented to ensure the availability of the information.

8. The eighth part of the document discusses the importance of maintaining the integrity and reliability of the records. It emphasizes that all records must be maintained in a manner that ensures their accuracy and reliability, and that appropriate measures must be taken to prevent tampering or alteration of the information.

Phase beeinflusst werden, wenn der Boden trocken ist. Das Gleichgewicht zwischen Dampfdruck und Flüssigkeitsspannung wird manchmal eingebaut werden müssen um die Randbedingungen korrekt darzustellen (VISSER, 1966).

Als Grenzbedingungen treten in dieser Zone die relative Luftfeuchtigkeit  $rE_L$  und das Potential an der Grenzfläche  $g$  zwischen Blatt und Luft auf, sei es ausgedrückt in Dampfdruckmass  $E_g$  oder als Spannung  $\psi_g$ .

### 3. Der Wasserentzug durch die Wurzel

Die Wurzel entzieht Wasser aus ihrer nächsten Umgebung. Diese Umgebung stellt man einfachheitshalber im Querschnitt als einen Kreis mit der Wurzel als Mittelpunkt vor. Die Kreise, die zu verschiedenen Wurzeln gehören, berühren einander. Das Bodenwasser innerhalb eines solchen Zylinders strömt radial zur Wurzel wie bei einem Brunnen. Die Wurzel als Brunnen unterscheidet sich von üblichen Brunnen aber dadurch, dass die Durchlässigkeit nicht konstant ist, sondern von der Wasserspannung  $\psi$  abhängt.

Als Formel wird benutzt (VISSER, 1964):

$$E = \frac{4 L k_s \psi_e^n}{(n-1)d^2 \left\{ \ln\left(\frac{d}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{d}\right)^2 - 1 \right\}} \left( \frac{1}{\psi^{n-1}} - \frac{1}{\psi_w^{n-1}} \right)$$

$\pi d^2 L$  = Entzugszylinder einer einzigen Wurzel

$\psi, \psi_e, \psi_w$  = Wasserspannung, allgemein, beim Lufteindringungspunkt und an der Wurzelgrenzfläche

$k_s$  = Durchlässigkeit bei Spannung  $\psi_e$

$r$  = Wurzelradius

$n$  = Exponent

Bei Verdunstung begegnet man aber alternativen Möglichkeiten. Obenstehende Formel ist nur unterhalb einen Grenzfeuchtegehalt gültig. Bei nasser Böden wird die Verdunstung nicht mehr von der Bodenwasserspannung, sondern von der Verdunstungskapazität der Atmosphäre bedingt. Es gilt dann:

$$E = gE_o$$

Die alternative Möglichkeit dass die Verdunstung entweder vom Klima oder von der Bodenfeuchtigkeit abhängt, wird mathematisch durch ein Produkt von zwei Termen dargestellt:

... (VI) ...  
... (VII) ...  
... (VIII) ...  
... (IX) ...  
... (X) ...

... (XI) ...  
... (XII) ...  
... (XIII) ...  
... (XIV) ...  
... (XV) ...  
... (XVI) ...  
... (XVII) ...  
... (XVIII) ...  
... (XIX) ...  
... (XX) ...

... (XXI) ...  
... (XXII) ...  
... (XXIII) ...  
... (XXIV) ...  
... (XXV) ...  
... (XXVI) ...  
... (XXVII) ...  
... (XXVIII) ...  
... (XXIX) ...  
... (XXX) ...

... (XXXI) ...  
... (XXXII) ...  
... (XXXIII) ...  
... (XXXIV) ...  
... (XXXV) ...  
... (XXXVI) ...  
... (XXXVII) ...  
... (XXXVIII) ...  
... (XXXIX) ...  
... (XL) ...

$$\left( A - \frac{E}{\frac{1}{\psi^{n-1}} - \frac{1}{\psi_{wp}^{n-1}}} \right) \left( g - \frac{E}{E_0} \right) = B$$

A repräsentiert die eben erwähnte Funktion für die Leitfähigkeit des Bodens um einen Brunnen in ungesättigtem Boden,  $\psi_{wp}$  bedeutet die Wasserspannung beim Welkepunkt,  $E_0$  die potentielle Verdunstung.

Die Grenzbedingungen werden hier von dem  $\psi$ -Wert für die Wurzelzone und dem E-Wert für die Verdunstungskapazität der Atmosphäre dargestellt.

#### 4. Der kapillare Wassernachschub

Wenn die Wurzeln der Wurzelzone Wasser entziehen oder die Bodenoberfläche durch Verdunstung Wasser verliert, steigt die Wasserspannung in den verschiedenen Bodenschichten und entstehen Potentialgefälle. Diese Gefälle lösen aufwärts gerichtete Strömungen in der ungesättigten Zone aus. Dieser Nachschub wird im Prinzip von folgenden Formeln dargestellt.

Extraktion durch die Pflanze oder Transpiration:

$$\frac{dT_p}{dz} = \frac{Ae^{-\beta(w-z)}}{\psi_z^2} \quad (a_1) \quad T_p = \int_{z=0}^{z=w} \frac{Ae^{-\beta(w-z)}}{\psi_z^2} dz \quad (a_2)$$

Kapillaire Strömung oder Evaporation:

$$\frac{dE_B}{dz} = \frac{d \left\{ k_z \left( \frac{d\psi}{dz} - 1 \right) \right\}}{dz} \quad (b_1) \quad E_B = k_z \left( \frac{d\psi}{dz} - 1 \right) \quad (b_2)$$

$$k_z = k_0 e^{-\alpha\psi} \quad (b_3)$$

Totale Verdunstung:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dT_p}{dz} + \frac{dE_B}{dz} \quad (c_1) \quad E = T_p + E_B \quad (c_2)$$

Änderung der Feuchtigkeitsverhältnisse:

$$\frac{-d\psi}{\psi} = \left( \frac{m}{v} + \frac{n}{P-v} \right) dv \quad (d)$$



Änderung der Grundwassertiefe:

$$B \Delta w^{\frac{n+1}{n}} = k_o e^{-\alpha \Delta w} \left( \frac{d\psi}{dz} - 1 \right)_{z = \Delta w} \quad (e)$$

Die Formel  $a_1$  besagt, dass in jeder Schicht die Extraktion proportional der Aktivität der Wurzel - dargestellt als e-Funktion der Schichttiefe  $w-z$  - und proportional dem Kehrwert der Bodenwasserspannung zu einer Potenz  $\frac{1}{n}$  ist. In  $a_2$  gibt der Integral von Formel  $a_2$  an, wieviel Wasser sich durch die Wurzeln bis zur Bodenoberfläche aufwärts bewegt und als Transpiration einen Teil der totalen Verdunstung darstellt.

In Formel  $b_2$  wird der kapillare Wasserstrom mathematisch dargestellt als Produkt der kapillaren Durchlässigkeit  $k_z$  der betreffenden Schicht und des Gradienten als Differenz zwischen dem Matrixpotential  $\frac{d\psi}{dz}$  und der Schwerkraft, dargestellt durch 1. Formel  $b_1$  besagt dass die Zunahme pro Strecke  $dz$  gleich der Änderung des Feuchtigkeitsvorrates zur Stelle ist. Formel  $b_3$  zeigt wie die kapillare Leitfähigkeit von der Wasserspannung und der Leitfähigkeit bei  $\psi = 0$  abhängt.

Formel  $c_1$  ist die Kontinuitätsgleichung,  $c_2$  gibt an wie die totale Verdunstung sich aus Evaporation und Transpiration aufbaut.

In Formel  $d$  findet man eine Darstellung der Desorptionskurve in der Form ihrer Abgeleiteten.

In Formel  $e$  ist schliesslich eine Funktion für die Änderung des Grundwasserspiegels gegeben, aufgebaut aus einer Vereinfachung der Gleichung für die Desorptionskurve und aus den Gleichungen  $b_2$  und  $b_3$  für die grundwasser-nahe Schicht.

Mit diesen sechs Gleichungen kann man, wenn das Feuchtigkeitsprofil am Anfang, der Niederschlag und die potentielle Verdunstung bekannt sind, für jeden Wert von  $z$  oder  $t$  die Wasserspannung, den Bodenwassergehalt und die Grundwassertiefe numerisch errechnen.

Diese numerische Lösungen haben aber Eigenschaften, welche sie weniger brauchbar machen. Spezielle Ausgleichrechnung ist bei numerischen Lösungen sehr umständlich.

Daher wurde Formel  $b_2$  in vereinfachter Form benutzt, wobei

$$\frac{dE_B}{dz} \rightarrow \left( \frac{dT_p + dE_B}{dz} \right) \text{ angenommen wird konstant zu sein. Dabei wird der}$$



Unterschied zwischen Transpiration und Evaporation nicht länger beibehalten. Es kann dann die folgende Formel abgeleitet werden:

$$\left(1 - e^{-\alpha z}\right) \left(1 + \frac{z_0 - 1/\alpha}{z_0 + z_s} \frac{v_c}{k_0}\right) + \frac{z}{z_0 + z_s} \frac{v_c}{k_0} = \left(1 - e^{-\alpha \psi}\right)$$

Hier stellt  $v_c$  die kapillare Transportgeschwindigkeit an der Bodenoberfläche dar und ist gleich  $E$  zu setzen. Von  $z_0$  ist der Parameter dargestellt, der unterscheidet zwischen Extraktion aus der gesättigten und ungesättigten Zone nach

$$v_z = \frac{z + z_0}{z_s + z_0} v_c$$

Für  $z = 0$  ergibt sich

$$v_{z=0} = \frac{z_0}{z_s + z_0} v_c$$

und für  $z = z_s$

$$E = \frac{z_s + z_0}{z_s + z_0} v_c = v_c$$

Durch Änderung von  $z_0$  kann die Verdunstung als ganz dem freien Grundwasser -  $z_0 = \infty$  - oder als ganz dem Profil -  $z_0 = 0$  - entnommen dargestellt werden.

Als Grenzbedingungen treten hier die Grundwassertiefe  $z = 0$  und die Spannung  $\psi$  in der Wurzelzone auf.

### Benutzung der Formeln

Es wird jetzt mehr und mehr üblich, die Formeln als Kette von Relationen zu einem Modell zusammenzustellen. Die Potentiale an der Grenze der auf einander folgenden Zonen werden eliminiert, so dass man einen direkten Zusammenhang bekommt zwischen den verfügbaren Beobachtungen und den Vorgängen, die man zu kennen wünscht. Als Vorgang steht hier die Verdunstung zentral. Als Beobachtungen kommen in Betracht klimatische Grössen wie Strahlung, Dampfdruck und Windgeschwindigkeit. Es können aber auch Bodeneigenschaften wie Wassergehalt, Wasserspannung oder Grundwassertiefe sein. Grenzwerte wie die Wasserspannung an Wurzel oder Blattoberfläche kann man in einem Gebiet an vielen Punkten kaum bestimmen, so dass das Modell manchmal mehrere Zonen in Betracht zu ziehen hat.

Die ... und ...  
...  
...

$$\frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots} + \frac{1}{\dots}$$

...  
...  
...

$$\frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$$

...  
...

$$\frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$$

...  
...

$$\frac{1}{\dots} = \frac{1}{\dots}$$

...  
...  
...

...  
...  
...

...  
...

...  
...  
...

...  
...  
...

...  
...  
...

...  
...  
...

Welche Kombination von Zonen in das Modell aufgenommen wird, hängt aber besonders vom Problem ab, das zu lösen ist. Öfters wird das Endziel sein, Massnahmen zu entwerfen, welche in die Wasserbilanz regulierend eingreifen. Oder man wünscht im voraus abzuschätzen, wie sich ein gewisser Eingriff auf die Verfügbarkeit von Wasser für Landwirtschaft, Industrie und Haushalt auswirkt. Auch will man manchmal wissen, wieviel Wasser nach Korrektionsmassnahmen ober- oder unterirdisch abfliessen wird. Die Verdunstung zu kennen ist nur selten der Zweck der Untersuchung.

Die praktische Zielsetzung wird in vielen Fällen dazu führen, dass man die Feststellung der Wasserverhältnisse im Boden als zentrale Aufgabe wählt. Dieser Ausgangspunkt hat den Vorteil, eine genügend genaue örtliche Detaillierung zuzulassen. Dazu kommt, dass die ganze Wasserbilanz leicht festgestellt werden kann, wobei man sich die Gewissheit zunutze machen kann, dass die Summe von Niederschlag, Verdunstung, Abfluss und Speicherung identisch gleich Null ist. Das macht eine Fehlerbeurteilung möglich.

Es wurde daher eine Untersuchungsmethodik ausgearbeitet, welche als wichtigste Beobachtungen den Niederschlag und die Grundwassertiefe benutzt und welche die Zusammenhänge in der Wurzel- und der kapillaren Zone verwendet. Die Zusammenhänge in Atmosphäre und Gewächszone werden in viel beschränkterem Ausmass in das Modell einbezogen. Es wird also die Grundwasserzone noch hinzugezogen und so ein mathematisches Modell angefertigt, das die Wasserbilanz in Grundwasserzone, Kapillarzone und Wurzelzone darstellt.

### Das mathematische Modell

Das mathematische Modell ist aus 5 Formeln aufgebaut, und zwar: die Wasserbilanzgleichung, und Gleichungen für den Abfluss A, das Spannungs- oder Feuchteprofil  $\psi$ , die Verdunstung  $E_w$  und die Desorptionskurve v.

#### Wasserbilanz

$$N = A + E_w + \mu \Delta w \quad (1)$$

#### Abflussgleichung

$$\left(1 - \frac{A}{a_1 (w-a_3) + a_2 (w-a_3)^2}\right) \left(1 - \frac{A}{a_4 (w-a_5)}\right) = a_6 \quad (2)$$

Die in der ersten Auflage des Buches "Die Grundlagen der Physik" enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenmechanik. Die in der zweiten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Relativitätstheorie. Die in der dritten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenfeldtheorie.

Die in der vierten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenmechanik. Die in der fünften Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Relativitätstheorie. Die in der sechsten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenfeldtheorie.

Die in der siebten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenmechanik. Die in der achten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Relativitätstheorie. Die in der neunten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenfeldtheorie.

Die Natur der Materie

Die in der zehnten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenmechanik. Die in der elften Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Relativitätstheorie. Die in der zwölften Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenfeldtheorie.

Die Natur der Materie

Die in der dreizehnten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenmechanik. Die in der vierzehnten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Relativitätstheorie. Die in der fünfzehnten Auflage enthaltenen Untersuchungen über die Natur der Materie sind im wesentlichen die Grundlagen der Quantenfeldtheorie.

Die Natur der Materie

$$E = mc^2$$

Feuchtigkeitsprofil

$$\left(1 - e^{-\alpha w}\right) \left(1 + \frac{z_0 - 1/\alpha}{z_0 + w} \frac{E_w}{k_0}\right) + \frac{w}{z_0 + w} \frac{E_w}{k_0} = (1 - e^{-\alpha \psi}) \quad (3)$$

Verdunstung

$$\left(g - \frac{E_w}{E_0}\right) \left(c_1 - \frac{E_w}{\left(\frac{1}{\psi}\right)^p - \left(\frac{1}{\psi_{wp}}\right)^p}\right) = c_2 \quad (4)$$

Desorptionskurve

$$\psi = \frac{G(P - v)}{v^m} \quad (5)$$

In diesen 5 Formeln gibt es 7 Variablen, und zwar:

- |                |                           |                |                         |
|----------------|---------------------------|----------------|-------------------------|
| N              | = Niederschlag            | A              | = Abfluss               |
| E <sub>0</sub> | = potentielle Verdunstung | ψ              | = Kapillarspannung      |
| w              | = Grundwassertiefe        | E <sub>w</sub> | = wirkliche Verdunstung |
| v              | = Bodenfeuchtegehalt      |                |                         |

Die Werte für N, E<sub>0</sub>, w und v können durch Beobachtung festgestellt werden. Für E<sub>0</sub> stehen auch Berechnungen zur Verfügung. Das Problem würde jedoch mit 4 beobachteten Werten überdefiniert sein, so dass man wählen kann, ob w oder v bestimmt werden soll. Ersteres wird der Fall sein, wenn sich im Gebiet meistens oberflächennahe Grundwasserspiegel vorfinden. Die zweite Wahl, die Bestimmung von v wird angebracht sein bei tiefen Lagen des Grundwasserspiegels.

Es gibt in den Gleichungen noch 18 Parameter, und zwar:

- |  |   |
|--|---|
| a <sub>1</sub> , a <sub>2</sub> , a <sub>4</sub> | = Bodendurchlässigkeitsbeiwerte                         |
| a <sub>3</sub> , a <sub>5</sub>                  | = Dränungsnulldruckhöhe                                 |
| a <sub>6</sub> , c <sub>2</sub>                  | = Krümmungsparameter                                    |
| g  | = Proportionalitätswert E <sub>w</sub> → E <sub>0</sub> |
| c <sub>1</sub>                                   | = Proportionalitätswert E <sub>w</sub> → ψ              |
| p, m, n  | = Exponente   |
| α  | = Beiwert der kapillaren Durchlässigkeit                |
| z <sub>0</sub>                                   | = Wasserentzugsbeiwert                                  |
| k <sub>0</sub>                                   | = für ψ = 0 extrapolierte kapillare Durchlässigkeit     |

Ergebnisse

(1) 
$$\left( \frac{A}{B} \right)^n = \frac{A^n}{B^n} = \frac{A^n}{B^n} \cdot \frac{B^n}{B^n} = \frac{A^n \cdot B^n}{B^{2n}}$$

Ergebnis:  $\frac{A^n \cdot B^n}{B^{2n}}$

(2) 
$$\frac{A^m \cdot B^n}{A^p \cdot B^q} = \frac{A^{m-p} \cdot B^{n-q}}{1}$$

Ergebnis:  $A^{m-p} \cdot B^{n-q}$

(3) 
$$\frac{A^m \cdot B^n}{A^p \cdot B^q} = \frac{A^{m-p} \cdot B^{n-q}}{1}$$

Ergebnis:  $A^{m-p} \cdot B^{n-q}$



Die Lösung ist die gleiche wie bei der Lösung der Aufgabe 9. Die Lösung ist die gleiche wie bei der Lösung der Aufgabe 9.

Die Lösung ist die gleiche wie bei der Lösung der Aufgabe 9. Die Lösung ist die gleiche wie bei der Lösung der Aufgabe 9.

Abbildung der Abbildung

Die Abbildung ist die gleiche wie bei der Lösung der Aufgabe 9.

(a) Die Abbildung ist die gleiche wie bei der Lösung der Aufgabe 9. Die Abbildung ist die gleiche wie bei der Lösung der Aufgabe 9.

### Ableitung der Gleichung für das Feuchtigkeitsprofil

Die Beobachtungen der kapillaren Durchlässigkeit  $k_c$  zeigen, dass  $\log k_c$  und  $\psi$  zwischen  $\psi = 0$  und 250 cm annähernd linear zusammenhängen, so dass man die Formel  $k_c = k_0 e^{-\alpha(\psi - \psi_a)}$  benutzen darf. Weiter kann die Geschwindigkeit des kapillaren Anstieges  $v_c$  dargestellt werden als:

$$v_c = \beta k_c \left( \frac{d\psi}{dz} - 1 \right)$$

Die Reduktionskonstante  $\beta$  ermöglicht es darzustellen, dass unten in die ungesättigte Schicht weniger Wasser einströmt als an der Oberfläche austritt. Die Differenz wird der ungesättigten Zone entzogen. Für die Darstellung von  $\beta$  genügt eine einfache Gleichung, und zwar:

$$\beta = \frac{z + z_0}{w + z_0}$$

In dieser Formel stellt  $z$  die Höhe über dem Grundwasserspiegel dar und  $z_0$  einen Entzugsbeiwert, der zwischen 0 und  $\infty$  variiert.

Die Differentiengleichung wird nun:

$$\frac{z + z_0}{w + z_0} v_c = k_0 e^{-\alpha\psi} \left( \frac{d\psi}{dz} - 1 \right)$$

Integration und Gleichsetzung von  $z$  und  $w$  lässt Formel 3 errechnen. Die Integration wäre ohne weiteres für kompliziertere Funktionen von  $\beta$  möglich, erübrigt sich aber, weil der Einfluss von  $\beta$  nicht gross ist. Öfters wird  $z_0 = \infty$  angenommen um die einfachere Gleichung

$$\left( 1 - e^{-\alpha w} \right) \left( 1 + \frac{v_c}{k_0} \right) = \left( 1 - e^{-\alpha\psi} \right) \quad (7)$$

benutzen zu können (RIJTEMA, 1965).

In Fig. 3 ist der Zusammenhang zwischen  $z$  und  $\psi$  dargestellt für Werte der Konstanten, welche in der Praxis gefunden werden. Für einen kapillaren Anstieg von 0.25 mm pro Tag ist der Einfluss von  $z_0$  durch gestrichelte Linien angegeben. Dieser Einfluss ist im allgemeinen klein.

### Ableitung der Verdunstungsformel

Die Verdunstungsgleichung hat ein biologisches Gesetz als Grundlage, das als das Blackman-Modell oder das Gesetz der begrenzenden Faktoren bekannt ist.



Die mathematische Darstellung dieser Grundlage ist (VISSER, 1964a):

$$\sum_{i=1}^n \frac{d \left( a_i - \frac{q}{x_{i1} - x_{i2}} \right)}{\left( a_i - \frac{q}{x_{i2} - x_{i1}} \right)} = 0$$

Die Gleichung besagt, dass die Summe der relativ ausgedrückten ersten Abgeleiteten gleich Null ist, oder dass die Summe der Differenzen minimiert wird. Weiter besagt die Formel, dass die biologischen Aktivitäten  $q = a(x_2 - x_1)$  einen linearen Transportprozess darstellen. Der Transportprozess darf eine Diffusion oder eine Massenströmung nach Darcy sein.

Der Strömungsprozess findet in der ungesättigten Zone statt, und der Einfluss der Ungesättigtheit prägt sich darin aus (VISSER, 1964b) dass man, der kapillaren Durchlässigkeit zufolge, nicht eine der Darcy-Formel ähnliche Gleichung findet, sondern:

$$E_w = A \left\{ \left( \frac{1}{\psi} \right)^p - \left( \frac{1}{\psi_{wp}} \right)^p \right\}$$

Der Durchlässigkeitsbeiwert A ist etwas verwickelt aufgebaut, aber die richtige Form ist ohne praktische Bedeutung, weil die Formel Grössen wie Wurzelfläche und Wurzelaktivität enthält, die nicht mit einer Routinetechnik bestimmbar sind.

Die alternative Transportgleichung besagt, dass die wirkliche Verdunstung, wenn nicht von der kapillaren Wasserspannung abhängig, ein fester Prozentsatz der potentiellen Verdunstung ist, oder:

$$E_w = g E_o$$

Wenn man diese beiden Transportprozesse in die Differentialgleichung einsetzt und integriert, erhält man Formel 4. In dieser Formel sieht man wieder das Prinzip der alternativen Möglichkeiten in einem Produkt gleichartiger Glieder dargestellt.

#### Die Gleichung für die Desorptionskurve

Für das Gehalt an das Wasser, das durch die kapillare Spannung im Boden gegen die Schwerkraft festgehalten werden kann, gibt es keinen physischen Ausdruck. Es ist eine Funktion einer nicht normalen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Porengrössen, welche von der Korngrössenverteilung, aber

Die ... (Vier ...)

$$\frac{\frac{P}{S_1 \cdot X^2 - M^2}}{\frac{P}{S_2 \cdot X^2 - M^2}} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{X^2 - M^2}{X^2 - M^2}$$

... (faded text) ...

... (faded text) ...

... (faded text) ...

auch von der Bodenstruktur beherrscht wird. Die allgemeine Gestalt ist eine S-Form die der empirischen Formel

$$(G' - pF) = m \log v - n \log (P-v) \quad (8)$$

entspricht.

Dabei ist  $P$  ein Rechenwert, der sich öfters wenig von dem Wert für das Porenvolumen unterscheidet. Es gibt aber notwendigerweise einen Wert  $\psi_a$  unterhalb welchem keine Abhängigkeit zwischen  $v$  und  $\psi$  existieren kann. Wenn Poren existieren würden, welche das kapillar gebundene Wasser bei sehr niedrigen  $\psi$ -Werten erst verlieren würden, dann würden das sehr grosse Poren sein und das würde sehr hohe Durchlässigkeiten bedeuten. Es muss daher eine Kombination von  $v$  und  $\psi$  geben, unterhalb welcher die Werte als Indikation des Wassergehaltes  $v$  keine Bedeutung mehr haben. Der Grenzwert  $\psi_a$  entspricht die Wasserspannung des gesättigten Kapillarsaumes oder der Lufteindringungspunkt. In der Formel ist ein Gebiet virtueller Feuchtigkeitsgehalte vertreten, das zwischen dem wirklichen Porenvolumen  $P_w$  und dem Rechenwert  $P$  gelegen ist, und das durch den  $\psi_a$ -Wert berücksichtigt wird.

Die empirische Formel der Desorptionskurve hat sich in vielen Anwendungen bewährt.

#### Theorie der Anwendung der Formeln

Die Formeln 1 bis 5 bilden ein geschlossenes System. Es ist möglich, mit diesen Formeln alle Teile der Wasserbilanz als Funktion der Grundwassertiefe  $w$  auszudrücken. Die Bearbeitung der Daten besteht aus dem Schätzen der 18 Parameter, dem Wählen eines Anfangswertes  $w$  und dem Einsetzen dieser Werte, zusammen mit Wertpaaren für  $N$  und  $E_o$  in die Formeln. Es wird  $\Delta w_i$  berechnet und zu  $w_i$  addiert, was  $w_{i+1}$  gibt.

Ein Nomogramm, wie in Fig. 4 dargestellt, kann die Bearbeitungsweise verdeutlichen. Es kann eventuell benutzt werden, wenn kein Rechenautomat zur Verfügung steht. Das Nomogramm ist ein Kreuznomogramm, in dem auf einer Seite der Achse eine metrische Verteilung in mm Wasser angegeben ist. Auf der anderen Seite der Achse sind die  $w$ -Werte aufgetragen, die mit den mm Wasser als Abfluss, Verdunstung oder Speicherung übereinstimmen. Für die Speicherung  $\mu \Delta w$  ist dabei  $\Delta w^*$  gleich 1 cm genommen, so dass man auf der Niederschlagsachse die Zahl der mm Niederschlag  $N^*$  abliest, die 1 cm Grundwassererhöhung zur Folge hat.

... ..

(a) ... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

Der wirkliche Grundwasseranstieg  $\Delta w$ , infolge des wirklichen Niederschlags  $N$ , kann dann berechnet werden, weil leicht einzusehen ist dass:

$$\Delta w = 1 + \frac{N - N^*}{\mu}$$

So ein Kreuznomogramm wird abgelesen mittels eines durchsichtigen Papiere, auf dem ein Kreuz gezeichnet worden ist. Drei Arme des Kreuzes werden durch die gleichen  $w$ -Werte - in Fig. 4 gleich 120 cm - auf die Abfluss-, Verdunstungs- und Speichrungsachse gelegt und der vierte Arm ist die Ableselinie der Niederschlagsachse.

Wiederholt man die Bestimmung von  $\Delta w$  für den gefundenen  $w_1$ -Wert, dann können, der Reihe nach, die  $w$ -Werte berechnet und die Abweichungen von den beobachteten  $w_1$ -Werten festgestellt werden. Eine Fehlerberechnung zeigt, wie gut die Übereinstimmung ist. Wiederholt man die Berechnung mit etwas abgeänderten Parameterwerten, dann kann man feststellen ob die Abänderung das richtige Vorzeichen hatte und die Fehler niedriger werden oder nicht. Schritt für Schritt kann so die Kombination der Parameter mit kleinster Streuung aufgefunden werden.

Es ist aber bekannt, dass diese Berechnung nicht schnell konvergiert. Ein Verfahren, das eine schnellere Konvergenz sichert, ist noch nicht bekannt. Die Durchführung eines richtigen Ausgleichsverfahrens ist eine so formidable Aufgabe, dass man einer Vereinfachung öfters den Vorzug geben wird. Das wirkliche Problem in der Verdunstungsbestimmung ist nicht die Feststellung der richtige physisch-mathematische Darstellung, sondern die der geeignetsten Vereinfachungen und Vernachlässigungen.

### Die Ausgleichsformel

Es können Vereinfachungen in der Formel für Abfluss, Speicherung und Verdunstung angebracht werden, welche auf schnellere und einfachere Weise Ergebnisse zeitigen, die aber weniger genau sind. Dabei gibt es zwei Prinzipien. Man kann die Daten in Gruppen aufspalten, wie in Gruppen für Sommer und Winter, für Monate oder für Grundwassertiefenintervalle. Für die Wintermonate wird  $E_w$  vorläufig gleich  $gE_0$  gesetzt mit einem geeigneten Wert von  $g$ . Es wird dann für die Wintermonate und die Grundwassertiefengruppen eine Angleichung berechnet nach:

$$N - gE_0 = A + \mu \Delta w$$

$A$  wird bestimmt und gegen  $\bar{w}$ , den Mittelwert der  $(w_j - w_{j+a})$ -Gruppen, aufgetragen und graphisch ausgeglichen.

... die ...

...

... die ...

... die ...

... die ...

...

... die ...

... die ...

Mit diesem Zusammenhang zwischen  $A$  und  $\bar{w}$  wird dann gearbeitet nach der Formel

$$N - A = E_w + \mu \Delta w$$

jetzt für das ganze Jahr, aber nicht nur für jedes Grundwassertiefenintervall, sondern auch für jeden einzelnen Monat. Die Zusammenhänge zwischen  $E_w$  und den Monaten und  $w$ -Gruppen werden wieder graphisch ausgeglichen. Diese Bearbeitung gelingt nur, wenn man ein umfangreiches Beobachtungsmaterial zur Verfügung hat.

In den Figuren 5 und 6 ist ein Beispiel des graphischen Verfahrens gegeben. Als Gruppen sind in Fig. 5 drei Intervalle für die Differenz  $(w-S)$  zwischen dem Grundwasserstand  $w$  und dem Wasserstand im Graben  $S$  gewählt worden. Der Zusammenhang zwischen  $N-E_w$  und  $\Delta w$  kann im kleinen  $\Delta w$ -Bereich als gradlinig betrachtet werden. Der Abfluss  $A$  und der Speicherkoeffizient  $\mu$  werden als Interzept auf der vertikalen Achse als Tangente abgelesen.

In Fig. 6 ist das Ergebnis für den Abfluss gegen die Druckhöhe  $(w-S)$  aufgetragen. So erhält man die Abflusskurve.

Ist weniger Material vorhanden, so muss man alle Teile der Wasserbilanzformel in  $w$  ausdrücken. Die nachfolgende, sehr vereinfachte Formel kann benutzt werden, wenn keine hohen Genauigkeitsanforderungen gestellt werden.

$$N = a_1 (w - a_3) + a_2 (w - a_3) + b_1 w + b_2 \Delta w + E_w \quad (9)$$

Wenn eine grössere Genauigkeit verlangt wird, nimmt man für  $E_w$  die Alternativen:

$$E_w = gE_o \quad \text{für } w\text{-Werte über } w = \frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{k_o}{gE_o} \right)$$

$$E_w = k_o / (e^{\alpha w} - 1) \quad \text{für } w\text{-Werte unter } w = \frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{k_o}{gE_o} \right)$$

Die untere Formel für  $E_w$  entstammt einer Vereinfachung der Gleichung 7, wie in dem folgenden Paragraph erläutert werden wird. Infolge der Einbeziehung einer Funktion für den Zusammenhang zwischen  $E_w$  und  $w$  erübrigt sich die Aufspaltung in Monate und braucht das Beobachtungsmaterial nur in zwei Gruppen aufgeteilt zu werden. Man bekommt in dieser Weise genauere Ergebnisse, je mehr Beobachtungen pro Gruppe zur Verfügung stehen. Es tritt aber als neue Schwierigkeit der Umstand auf, dass die Grenze zwischen den zwei Gruppen abhängig ist von dem unbekanntem Werte von  $\alpha$ ,  $k_o$  und  $g$ .

Die in der ersten Zeile angegebenen Werte sind die
  $\chi^2$ -Werte für die verschiedenen Klassen. Die
  $\chi^2$ -Werte sind in der zweiten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der dritten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der vierten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der fünften Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der sechsten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der siebten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der achten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der neunten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der zehnten Zeile angegeben.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$$

wobei  $n_i$  die beobachteten Häufigkeiten und  $E_i$  die
 erwarteten Häufigkeiten sind.

Die  $\chi^2$ -Werte sind in der ersten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der zweiten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der dritten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der vierten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der fünften Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der sechsten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der siebten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der achten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der neunten Zeile angegeben.
 Die  $\chi^2$ -Werte sind in der zehnten Zeile angegeben.

### Zulässigkeit der Vereinfachung

Wenn man die Ausgleichsformel 9 mit Formel 2 vergleicht, sieht man dass eine der beiden Abflussalternativen weggelassen ist. Ob das vertretbar ist, wird sich herausstellen, wenn man untersucht ob bei hohen oder tiefen Wasserständen die Angleichung dadurch beeinträchtigt wird.

Die Vernachlässigung bei dem Speicherungsvermögen - man vergleiche Formel 3 mit dem  $\Delta w$ -Glied in Formel 9 - ist komplizierter.

Es ist vorausgesetzt, dass in Formel 3,  $k_0$  gross ist gegenüber  $E_w$ , so dass die beiden Teile mit  $E_w/k_0$  vernachlässigt werden können und  $w = \psi$  übrig bleibt. Weiter ist vorausgesetzt, dass in Formel 5 die Variation von  $v^m$  klein ist gegenüber der Variation in  $P-v = \mu$ , so dass  $v^m$  als konstant betrachtet und in  $G'$  aufgenommen werden kann.

$$\text{Aus } \psi = \frac{G(P-v)^n}{v^m} \rightarrow w = b_3 \mu^{b_4} \rightarrow \mu = b_1 w^{b_2}$$

folgt, dass sich hier die Vernachlässigung stützt auf die Voraussetzung, dass das Feuchtigkeitsprofil wenig von dem Gleichgewichtsprofil abweicht und die Schwankungen des Bodenwassergehalts klein bleiben, Bedingungen die nur bei fortwährenden niederschlagsreichen Verhältnissen erfüllt sind.

Die zweite Alternative vor  $E_w$  in der Ausgleichsformel  $g$  stützt auf die Voraussetzung dass in Formel 3 der  $z_0$ -Wert sehr gross ist, so dass mit der einfacheren Formel 7 gearbeitet werden kann.

Diese Formel wird dann geschrieben:

$$E_w = k_0 \frac{1 - e^{-\alpha(\psi-w)}}{e^{\alpha w} - 1} \quad (10)$$

Wenn nun  $(\psi-w)$  in der  $e$ -Funktion gross ist, dann kann  $e^{-\alpha(\psi-w)}$  vernachlässigt werden. Den niedrigsten Wert von  $w$ , bei dem die wirkliche Verdunstung gleich der nur vom Klima bedingten Verdunstung  $gE_0$  ist, findet man durch Substitution von  $gE_0$  für  $E_w$  in die Formel 10.

Wenn bis zu dem Wert  $w = \frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{k_0}{gE_0} \right)$  die Verdunstung von  $E_0$  abhängt, hat unter dieser oberen  $w$ -Grenze die Grundwassertiefe keine Bedeutung. Wenn über diesem  $w$ -Werte  $(\psi-w)$  gross ist und somit  $e^{-\alpha(\psi-w)}$  vernachlässigt werden darf, ist für  $E_w$  die folgende Formel zulässig:

$$E_w = k_0 / (e^{\alpha w} - 1)$$

Diese Bedingungen werden im allgemeinen bei Verdunstungsüberschuss

Zusatz 1.7

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$  gegeben. Die Ableitung  $f'(x) = x + x^2$  ist für  $x > 0$  positiv, für  $x < 0$  negativ und verschwindet für  $x = 0$ . Die Funktion  $f$  hat also in  $x = 0$  ein lokales Minimum. Die Ableitung  $f'(x) = x + x^2$  ist für  $x > 0$  positiv, für  $x < 0$  negativ und verschwindet für  $x = 0$ . Die Funktion  $f$  hat also in  $x = 0$  ein lokales Minimum.

$$f'(x) = x + x^2 = x(1+x)$$

Die Ableitung  $f'(x) = x + x^2$  ist für  $x > 0$  positiv, für  $x < 0$  negativ und verschwindet für  $x = 0$ . Die Funktion  $f$  hat also in  $x = 0$  ein lokales Minimum. Die Ableitung  $f'(x) = x + x^2$  ist für  $x > 0$  positiv, für  $x < 0$  negativ und verschwindet für  $x = 0$ . Die Funktion  $f$  hat also in  $x = 0$  ein lokales Minimum.

$$f''(x) = 1 + 2x$$

Die zweite Ableitung  $f''(x) = 1 + 2x$  ist für  $x > -\frac{1}{2}$  positiv und für  $x < -\frac{1}{2}$  negativ. Die Funktion  $f$  hat also in  $x = 0$  ein lokales Minimum. Die zweite Ableitung  $f''(x) = 1 + 2x$  ist für  $x > -\frac{1}{2}$  positiv und für  $x < -\frac{1}{2}$  negativ. Die Funktion  $f$  hat also in  $x = 0$  ein lokales Minimum.

Die Funktion  $f$  hat also in  $x = 0$  ein lokales Minimum.

auftreten. Diese Vereinfachung steht daher gewissermassen in Gegensatz zu der Vereinfachung, die für das Speicherungsvermögen angewandt wurde.

### Ein Beispiel

Für ein Gebiet von 100.000 ha wurde die Verdunstung bestimmt im Rahmen der Feststellung der gewünschten Abflussbeiwerte für die kleinen Flüsse in dem Gebiet (BLOEMEN, 1967). Weil hier die nassen Bedingungen und hohen Abflüsse speziell von Bedeutung waren, brauchte der beschränkten Verdunstung im Falle trockener Böden keine grosse Aufmerksamkeit gewidmet zu werden. Man konnte die einfachste Ausgleichsformel benutzen, in diesem Falle

$$N = a_1 (w - a_3) + b_1 w^{b_2} \Delta w + E_w \quad (11)$$

Diese Formel wurde an Beobachtungen, eingeteilt in Monatsgruppen, durchgerechnet.

In Tabelle I sind für drei Abflussgebiete die Mittelwerte der monatlichen Verdunstung und die Variation in Verdunstung dargestellt. Diese Verdunstung ist abhängig von dem Bodenart und den Feuchtigkeitsverhältnissen an der Beobachtungsstelle. Die Gebiete A und C enthalten Areale mit schwerem Ton. Die niedrigen Verdunstungen werden von dem grösseren Abfluss, als Folge des kleineren Speicherungsvermögens, verursacht. Infolge des grösseren Abflusses bleibt für Verdunstung weniger übrig. Die Sommerabflüsse in dem Gebiet B mit gutem Speicherungsvermögen stellten sich als halb so gross heraus wie die Abflüsse in den Gebieten A und C. Es ist der Unterschied zwischen diesen Abflussmengen, der im Gebiet für die Verdunstung in den Sommermonaten gegenüber den Gebieten A und C extra zur Verfügung steht.

Die Variation in den Zahlen gibt einen Eindruck der Bodenheterogenität. In den Gebieten A und C mit Sanden und schwerem Tone schwanken die Werte mit einem mittleren Fehler von 10%. In Gebiet B mit nur leichten Böden ist die Streuung bloss 4%. Die Streuung wird nicht nur abhängig sein von Bodeneigenschaften, sondern auch von der Niederschlagsverteilung. In dieser Aufstellung ist diese Fehlerquelle von wenig Bedeutung, weil jede Zahl den Durchschnitt der Zahlen vieler Jahre darstellt.



Tabelle I

Mittlere monatliche Verdunstung in Millimetern (BLOEMEN, 1967)

Streuung S um den Mittelwert in Millimetern

Rohr Nr.	Jan.	Febr.	Mrt.	Apr.	Mei	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.	Totaal
<b>A. Groenlose Slinge</b>													
832	- 2	14	11	29	57	64	75	49	42	22	16	- 5	372
894	- 4	10	17	38	61	60	61	57	36	29	23	4	392
1179	3	18	21	41	61	67	78	74	54	22	21	8	468
1226	- 3	20	17	40	56	57	72	64	47	26	18	2	414
1271	- 8	22	39	55	72	86	79	64	26	13	10	10	469
1546	1	5	3	20	54	64	89	76	47	37	7	6	409
1624	6	10	8	31	62	71	84	75	44	25	10	7	433
1629	- 8	6	6	24	49	66	61	65	54	22	10	11	368
Mittel	- 2	13	15	36	59	67	75	65	44	24	14	5	415
S	5,1	6,6	11,4	11,2	6,8	8,8	10,0	9,4	9,3	6,9	5,8	5,1	39,6
<b>B. Baakse beek</b>													
1105	5	9	19	34	65	69	76	75	54	32	9	3	450
1172	4	18	25	44	69	69	83	80	54	34	18	3	493
1496	5	18	14	43	59	78	90	76	60	37	22	- 7	495
1519	- 3	12	26	40	68	87	86	72	48	22	8	10	476
1568	7	17	35	45	64	63	73	79	56	33	6	- 2	476
Mittel	2	15	24	41	65	73	82	72	54	32	13	1	474
S	5,1	4,5	7,9	4,5	3,9	9,4	7,1	5,9	4,4	5,3	7	6,4	18
<b>C. Aaltense Slinge</b>													
1991	- 1	15	18	49	64	87	74	67	42	25	1	-19	423
2622	- 6	14	6	42	66	66	84	65	28	2	- 2	-10	355
2040	3	11	9	34	50	62	69	64	36	18	4	- 5	355
3632	20	18	20	28	60	63	64	74	65	22	18	18	471
2661	- 4	15	18	43	62	64	84	63	49	22	15	11	402
2563	3	14	14	41	61	71	82	74	40	24	3	5	433
74	1	6	- 3	32	43	73	84	70	51	19	12	81	396
2678	12	18	8	28	41	50	67	63	38	23	10	23	381
Mittel	4	14	11	37	56	67	76	67	43	20	8	4	402
S	8,6	3,9	7,8	7,8	9,8	10,6	8,5	4,9	11,3	7,4	7,1	14,3	40

Date		Description		Amount		Balance	
1914	Jan 1						
1914	Jan 15						
1914	Jan 30						
1914	Feb 15						
1914	Feb 28						
1914	Mar 15						
1914	Mar 31						
1914	Apr 15						
1914	Apr 30						
1914	May 15						
1914	May 31						
1914	Jun 15						
1914	Jun 30						
1914	Jul 15						
1914	Jul 31						
1914	Aug 15						
1914	Aug 31						
1914	Sep 15						
1914	Sep 30						
1914	Oct 15						
1914	Oct 31						
1914	Nov 15						
1914	Nov 30						
1914	Dec 15						
1914	Dec 31						

### Zusammenfassung

Für die Bestimmung von Gebietsverdunstung stehen Formeln zur Verfügung, die eine zuverlässige physische und physiologische Grundlage besitzen. Das Modell stimmt gut zu den Beobachtungsdaten. Diese Formeln können für die Bearbeitung von Grundwassertiefenwerten sowohl wie von Bodenwassergehalten benutzt werden und erlauben die Analyse der Verdunstungsverhältnisse für nasse sowie für trockene Zustände.

Die vielen Parameter in den nicht linearen Formeln können nur mit aufwendigen Ausgleichstechniken bearbeitet werden. Wenn eine genaue Lösung nicht unbedingt erforderlich ist, können Vereinfachungen des Modells Anwendung finden. Das Problem wird damit vor allem eine Ausgleichsfrage. Einige vertretbare Vereinfachungen werden erwähnt und ein Beispiel zeigt, was für Ergebnisse und Streuungswerte man erwarten kann. Das Interessante an einer solchen Erforschung der Verdunstung mittels Grundwassertiefenbeobachtungen ist, dass viele Nebenergebnisse gewonnen werden. Auskünfte über Abflussverhältnisse, über Speichermöglichkeiten für Regen und über für Pflanzen verfügbares Wasser in Trockenzeiten ergeben sich bei der Wasserbilanzanalyse gleichfalls. Da die Untersuchungsmethodik die Beobachtungen im Felde so einfach wie möglich gestaltet und alle schwierige Arbeit nach dem Schreibtisch verlegt, entspricht diese Technik einer der wichtigsten Anforderungen, welche man an eine Routinemethode zu stellen hat. Diese Anforderungen sind: vielseitige Anwendungsmöglichkeiten, Verlegung der Schwierigkeiten nach der Stelle, wo sie am leichtesten zu lösen sind und Abstufung der Aufwendigkeit gemäss den Genauigkeitsbedürfnissen des Anwendungszieles.

### Literatur

- BLOEMEN, G. W. 1967. Berging, afvoer en verdamping in de Gelderse Achterhoek volgens de grondwaterstandsanalyse. Nota 424, Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
- RASCHKE, K. 1960. Heat transfer between the plant and the environment. Am. Rev. Plant Physiol. 11, pp. 11-126
- RIJTEMA, P. E. 1965. An analysis of actual evapotranspiration. Agric. Res. Rep. 659, pp. 1-107



- VISSER, W.C. 1964a. Theoretische Betrachtungen über Pflanzenerträge, Wachstumsfaktoren und Wasserverbrauch. Zeitschr. f. Acker- und Pflanzenbau 119 (4) 1964, S. 293
- \_\_\_\_\_ 1964b. Moisture requirements of crops and rate of moisture depletion of the soil. Technical Bulletin 32, Institute for Land and Water Management Research, Wageningen, Netherlands
- \_\_\_\_\_ 1966. Progress in the knowledge about the effect of soil moisture content on plant production. Technical Bulletin 45, Inst. for Land and Water Management Res. Wageningen, Netherlands.

1961-1962

W. W. ...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

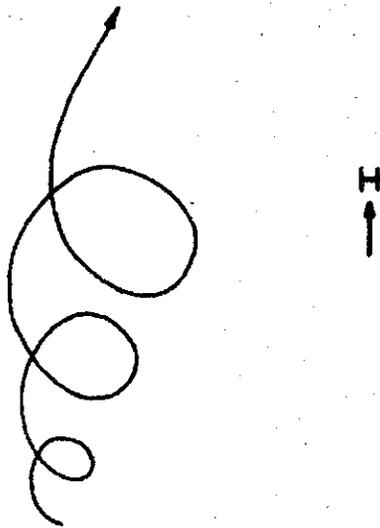
...

...

...

...

...



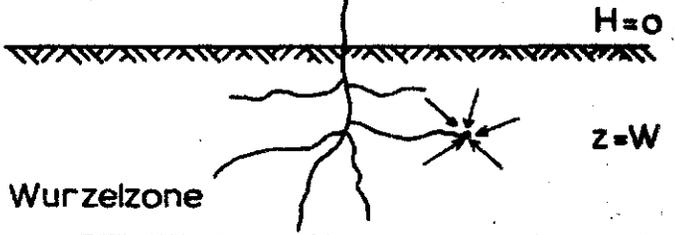
$$E = \frac{\alpha U z (e_s - e_a)}{\left(\ln \frac{H + H_0 - d}{H_0}\right)^2}$$

Atmosphäre



$$E = -m S_L - n(1-m) E_L (1-r)$$

Gewächszone



$$\Theta = \frac{S_L - n E_L (1-r)}{2(h + h_s) + n \frac{dE}{dT}}$$

Wurzelzone

$$E = \frac{4L k_s \psi_e^n}{(n-1)d^2 \left\{ \ln \left(\frac{d}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{d}\right)^2 - 1 \right\}} \left( \frac{1}{\psi^{n-1}} - \frac{1}{\psi_{WP}^{n-1}} \right)$$

Kapillarzone

$$(1 - e^{-\alpha W}) \left( 1 + \frac{z_0^{-1/\alpha} E}{z_0 + W k_0} \right) + \frac{W}{z_0 + W} \frac{E}{k_0} = (1 - e^{-\alpha \psi})$$

Freies Grundwasser

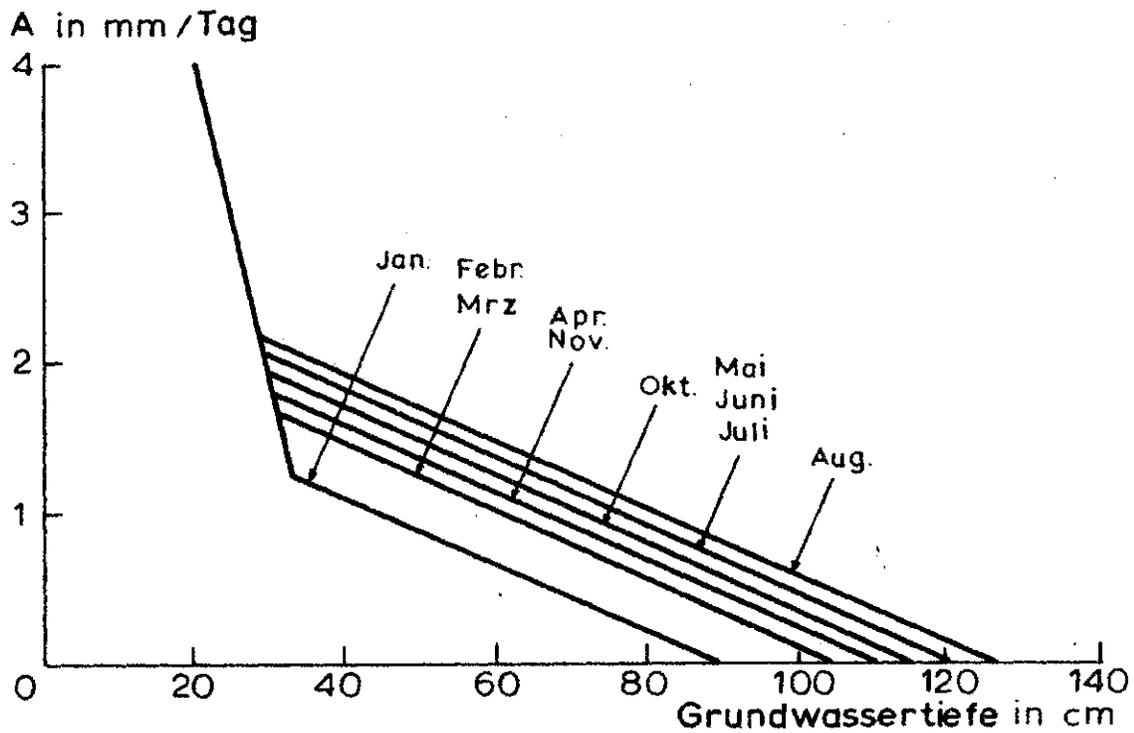


Fig. 1 Formeln zur Berechnung der Verdunstung sind entwickelt worden für die vier Zonen: die Atmosphäre, die Gewächszone, die Wurzelzone und die Kapillarzone. Aus diesen Formeln wäre ein mathematisches Modell zu bauen, das die wasserhaushalterischen Bedingungen weitgehend zusammenfasst.

1/2

1/2

1/2



$$\left\{ 1 - \frac{Q}{\frac{8k_1 D_1}{L_1^2} (W - a_1 H - b_1)} \right\} \left\{ 1 - \frac{Q}{\frac{8k_2 D_2}{L_2^2} (W - a_2 H - b_2)} \right\} = F$$

$$a_1 H + b_1 = S_1 \qquad a_2 H + b_2 = S_2$$

Fig. 2 Abfluss aus einem Gebiet auf einen 40 cm tiefen Graben  $S_1$  sowie auf einen Bach mit zwischen 90 und 125 cm Tiefe wechselnder Wassertiefe  $H$ , welche eine Wassertiefe  $S_2 = a_2 H + b_2$  in kleineren Vorflutern zu Folge hat

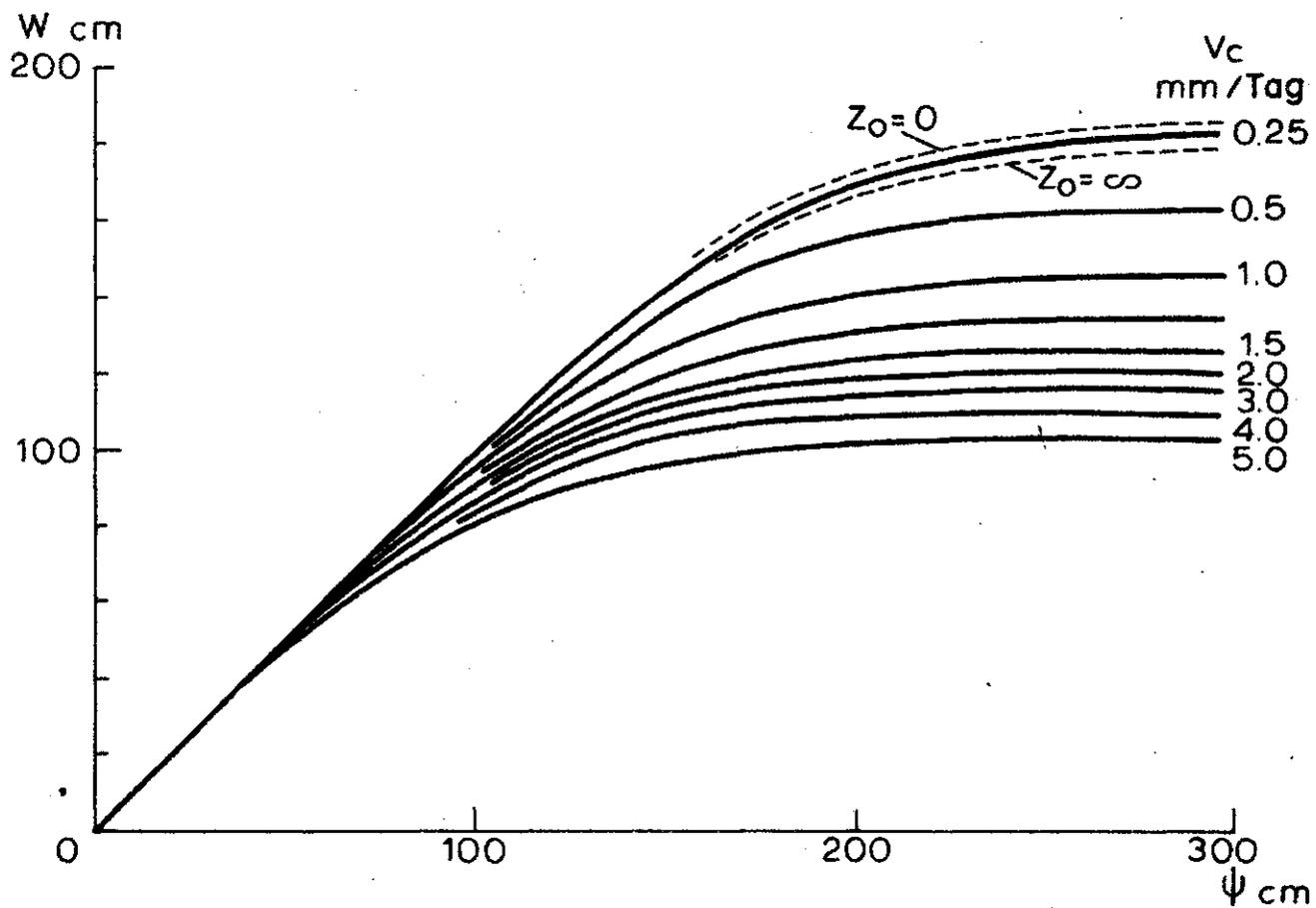


Fig. 3 Zusammenhang nach Formel 3 zwischen der Grundwassertiefe  $w$  und der Kapillarspannung  $\psi$  der ungesättigten Zone

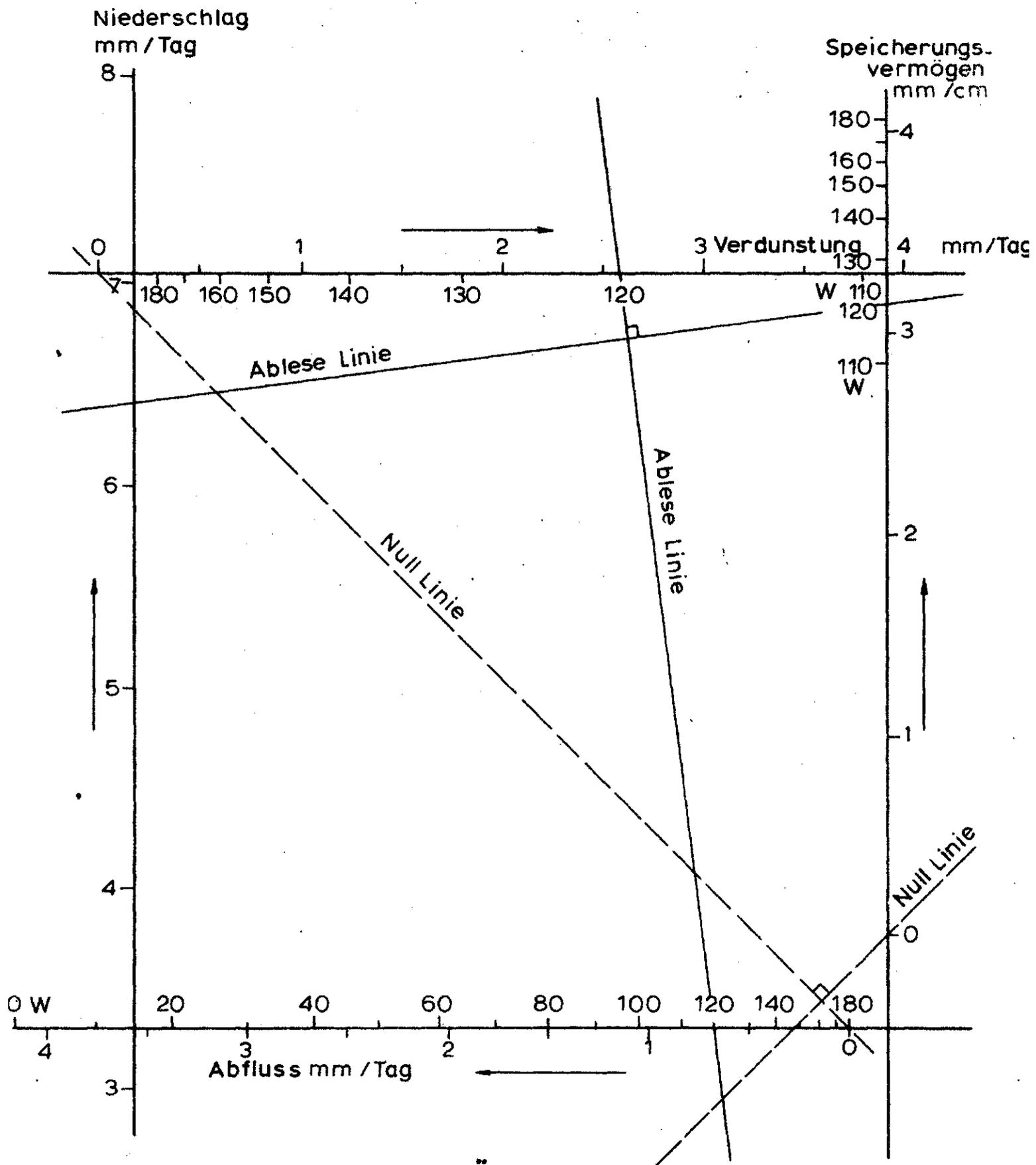


Fig. 4 Nomogramm zur Berechnung der Änderung des Grundwasserstandes unter dem Einfluss von Verdunstung, Speicherung und Niederschlag

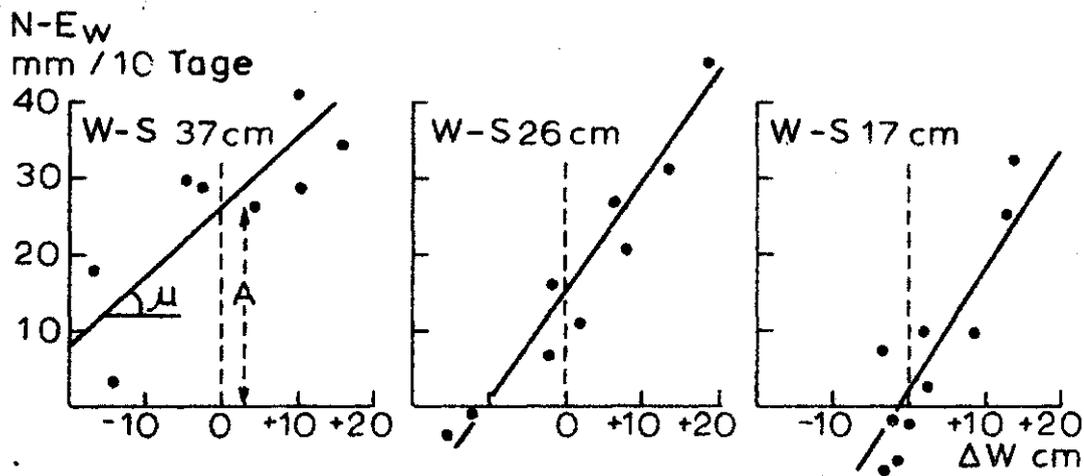


Fig. 5 Graphische Darstellung des Ausgleichsverfahrens nach der Formel  $N-E_w = A + \mu \Delta w$  für den Zusammenhang zwischen der Grundwassertiefenänderung  $\Delta w$  und dem Niederschlagsüberschuss  $R-E_w$  für drei Druckhöhenintervalle  $w-S$

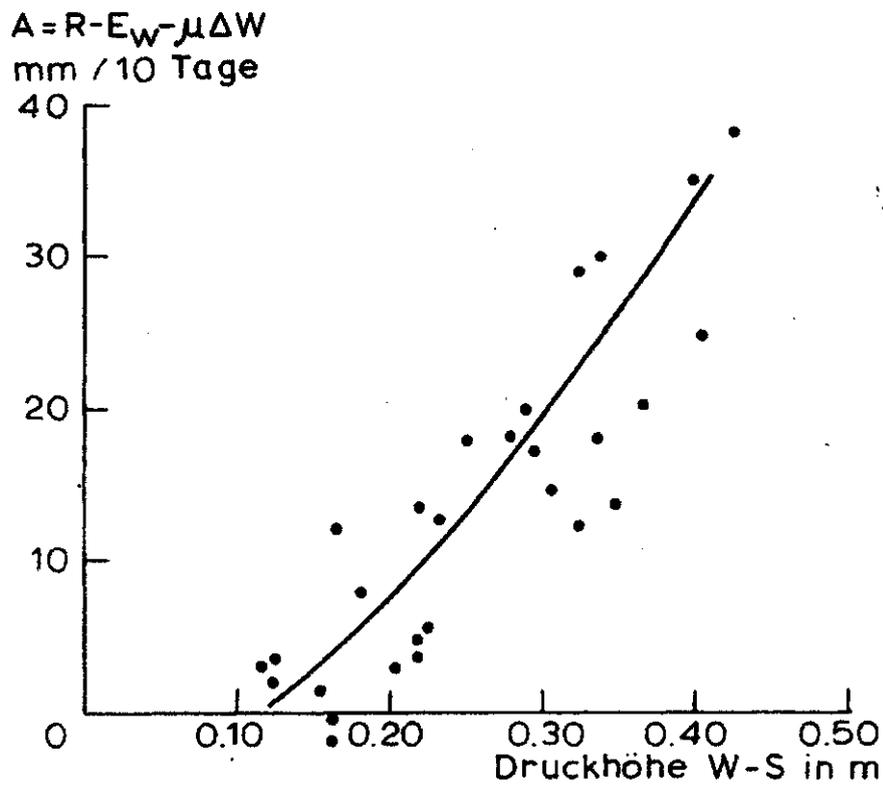


Fig. 6 Zusammenhang zwischen dem Abfluss  $A$ , bestimmt auf Grund der Ausgleichung nach der Formel  $N-E_w = A + \mu \Delta w$ , und der Differenz  $w-S$  zwischen dem Wasserstand  $w$  im Boden und  $S$  im Graben.