

NN31545.0401

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA 401, d. d. 20 juni 1967

Een formule voor de gemiddelde perceels-
afstand in een aantal bedrijfsmodellen

W. van Doorne

BIBLIOTHEEK DE HAFF

Droevendaalsesteeg 3a

Postbus 241

6700 AE Wageningen

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemid-
delen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een
eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende
discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen
de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onder-
zoek nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut
in aanmerking.

1781123



Inhoud

	blz.
1 Inleiding en probleemstelling	1
2 De te gebruiken grootheden en symbolen	2
3 Het eenvoudigste bedrijfsmodel	3
4 Een bedrijfsmodel bestaande uit twee stroken, afgesloten door dwarsverbindingen	5
5 Het sommeren van de afstanden in de matrix T	8
6 Enkele toepassingen van de formule voor de gemiddelde perceelsafstand	12
7 Veralgemening van de afgeleide formule	14

Figuren 1 t/m 4.

1. Inleiding en probleemstelling

Voor het interne bedrijfstransport is de gemiddelde perceelsafstand van belang. Het transport kan gedeeltelijk over een weg plaatsvinden, voor een deel over land, maar ook over water. Een bedrijfsmodel waarin de eerste twee soorten transport voorkomen is aangeduid in figuur 1. Een aantal hieruit afgeleide gevallen is in de figuren 1A, 1B, ..., 1F vermeld. Ze worden verkregen door in figuur 1 aan één of beide uiteinden percelen weg te laten, door dwarsverbindingen te laten vervallen of zelfs een gehele strook te schrappen in figuur 1.

Het is de bedoeling in het volgende op systematische wijze te komen tot één formule voor de gemiddelde perceelsafstand, die geldig is voor alle bedrijfsmodellen, aangegeven in de figuren 1, 1A, 1B, ..., 1F.

In het te beschouwen bedrijfsmodel (figuur 1) zijn de percelen rechthoekig (eventueel vierkant) en onderling gelijk van vorm en grootte. Ze liggen in twee stroken recht tegenover elkaar. Hierop kunnen uitzonderingen ontstaan doordat de stroken, op de aangegeven wijze tussen twee wegen gelegen, in principe ongelijke aantallen percelen omvatten. Bovendien kunnen er dwarsverbindingen tussen de stroken aanwezig zijn, waarover het transport over land plaatsvindt. Het aantal percelen tussen twee opeenvolgende dwarsverbindingen behoeft in het bedrijfsmodel niet constant te zijn. Verder zijn de in- en uitgangspunten halverwege elk perceel aan de weg gelegen. De verhouding van lengte en diepte van de percelen is in het volgende niet van belang, zodat geen onderscheid behoeft te worden gemaakt in stroken- en blokverkaveling.

Met behulp van de te ontwikkelen formule zal het o.a. mogelijk zijn, na te gaan wat de invloed is van het aantal en de plaats van de dwarsverbindingen op de gemiddelde perceelsafstand. Ook zal kunnen worden aangegeven hoe de gemiddelde perceelsafstand wordt beïnvloed door het gedeelte van het transport dat uitsluitend over land plaatsvindt.

De formule zal in drie stappen worden afgeleid: er wordt begonnen met model 1F, hierop voortbouwend wordt een formule voor model 1C afgeleid en tenslotte volgt model 1, dat alle voorgaande omvat.

Er wordt van uitgegaan dat alle percelen, over langere tijd beschouwd even vaak bezocht zullen worden. Als afstand tussen twee percelen zal worden beschouwd de afstand tussen de betreffende uit- en in-

gangspunten, gemeten langs de weg(en) of (en) dwarsverbinding; hierbij wordt de kortst mogelijke afstand aangehouden, waarbij het er niet toe doet dat deze soms op meer dan één manier kan worden gerealiseerd.

Uitgaande van het bovenstaande wordt de gemiddelde perceelsafstand berekend als het quotiënt van twee grootheden, namelijk de som van de afstanden tussen elk mogelijk paar percelen en het aantal paren, dat in het bedrijfsmodel van figuur 1 te onderscheiden is. Bij het sommeren van de afstanden behoeft elk paar slechts één maal geteld te worden omdat elk tweetal even waarschijnlijk is, als men er van uitgaat dat in verband met de werkzaamheden alle percelen onderling gelijke kansen maken te worden bezocht. De beschouwde gemiddelde afstand is dus de gemiddelde afstand tussen twee percelen.

In het volgende wordt gebruik gemaakt van een aantal wiskundige begrippen, waaronder de matrices en deel-matrices. Vooral door toepassing van de laatste wordt de overzichtelijkheid van de afleiding van de gewenste formule bevorderd. Opmerkelijk is, dat de deel-matrices direct blijken samen te hangen met de ligging van de dwarsverbindingen. Hierdoor is een praktische interpretatie mogelijk, wat doorgaans bij deel-matrices niet het geval is.

2. De te gebruiken grootheden en symbolen

De betekenis van de te gebruiken symbolen wordt hieronder vermeld. Een en ander wordt in het voorbeeld uit figuur 2 nader toegelicht. De te gebruiken grootheden zijn:

p_i	= het aantal percelen gelegen in één strook tussen twee opeenvolgende dwarsverbindingen of aan een uiteinde van een strook
i	= het nummer van de zojuist aangeduide groep percelen
k	= het aantal groepen percelen
d	= de perceelslengte, gemeten langs de weg
A	= tweemaal de perceelsdiepte, gemeten loodrecht op de weg
n_1, n_2	= het aantal percelen in strook 1, respectievelijk strook 2
n	= $n_1 + n_2$ is het totaal aantal percelen
L	= $n \cdot d$ is de som van alle perceelslengten
G	= de gemiddelde afstand tussen twee percelen

Door aan één of meer van de grootheden p_i speciale waarden toe te kennen ontstaan de bedrijfsmodellen volgens de figuren 2A, 2B,, 2F. De speciale p_i -waarden zijn bij deze figuren vermeld. Soms kan een model door meer dan één substitutie ontstaan uit het algemenere model (zie figuur 2D). Steeds moeten rechts (links) van de meest rechtse (linkse) dwarsverbinding de hoogst-genummerde (laagst-genummerde) p_i 's voorkomen; een of meer van deze waarden van p_i kunnen gelijk aan nul zijn. Door toepassing van de in figuur 2 aangegeven wijze van nummering van de grootheden p_i wordt de uiteindelijke formule voor de gemiddelde afstand G zo eenvoudig mogelijk. Bij de afleiding zal echter van deze nummering worden afgeweken terwille van de overzichtelijkheid.

Het resultaat zal zijn dat G wordt uitgedrukt in p_i, d, A, n_1, n_2 en n .

3. Het eenvoudigste bedrijfsmodel

Er wordt begonnen met model 1F. Het gaat in de eerste plaats om de onderlinge afstanden tussen de percelen, die volgens figuur 3 zijn genummerd van 1 tot en met n .

De afstanden tussen elk paar percelen is in onderstaand schema (matrix) aangeduid,

perceel		1	2	3	.	.	.	n-1	n
perceel	1	-	1	2	.	.	.	n-2	n-1
	2	1	-	1	.	.	.	n-3	n-2
	3	2	1	-	.	.	.	n-4	n-3
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	n-1	n-2	n-3	n-4	.	.	.	-	1
	n	n-1	n-2	n-3	.	.	.	1	-

(3.1)

Hieruit wordt bijvoorbeeld afgelezen dat de afstand van perceel 2 naar het een na laatste perceel $n-1$ gelijk is aan $(n-3)d$. De hoofd-diagonaal is uiteraard leeg. De diagonalen evenwijdig aan de hoofd-diagonaal bestaan uit onderling gelijke getallen. De matrix is symme-

1. The first part of the paper discusses the importance of the
 2. of the system. It is shown that the system is not stable
 3. if the parameters are not properly chosen. The second part
 4. of the paper discusses the stability of the system. It is shown
 5. that the system is stable if the parameters are properly chosen.
 6. The third part of the paper discusses the control of the system.
 7. It is shown that the system can be controlled by a feedback
 8. control system. The fourth part of the paper discusses the
 9. design of the control system. It is shown that the control system
 10. can be designed by using the root locus method. The fifth part
 11. of the paper discusses the simulation of the system. It is shown
 12. that the system can be simulated by using the MATLAB software.
 13. The sixth part of the paper discusses the conclusion. It is shown
 14. that the system is stable and can be controlled by a feedback
 15. control system.

2. Stability Analysis

The system is represented by the transfer function

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + 1}$$
 where K is the gain. The characteristic equation is given by

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$
 The roots of the characteristic equation are given by

$$s = -1 \pm j$$
 The system is stable if the real part of the roots is negative.
 In this case, the real part is -1 , which is negative. Therefore,
 the system is stable.

K	σ	ω_d	ζ	ω_n
0.1	-1.0000	0.9950	0.9999	1.0000
0.5	-1.0000	0.9802	0.9980	1.0000
1.0	-1.0000	0.9497	0.9901	1.0000
1.5	-1.0000	0.8967	0.9799	1.0000
2.0	-1.0000	0.8214	0.9613	1.0000
2.5	-1.0000	0.7296	0.9343	1.0000
3.0	-1.0000	0.6180	0.8913	1.0000
3.5	-1.0000	0.4915	0.8343	1.0000
4.0	-1.0000	0.3511	0.7598	1.0000
4.5	-1.0000	0.2000	0.6614	1.0000
5.0	-1.0000	0.0000	0.5000	1.0000

The table shows the values of the damping ratio ζ and the natural frequency ω_n for different values of the gain K . The damping ratio ζ is calculated as $\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n}$, where σ is the real part of the roots and ω_n is the natural frequency. The natural frequency ω_n is calculated as $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$, where ω_d is the damped frequency. The table shows that the damping ratio ζ decreases as the gain K increases, while the natural frequency ω_n remains constant at 1.0000.

trisch ten opzichte van de hoofddiagonaal.

De matrix bevat een aantal getallen $N = n(n-1)$ omdat er n rijen zijn met elk $n-1$ getallen. Het totaal van de getallen in de matrix bedraagt, diagonaalsgewijs geteld

$$S = 2 \cdot [(n-1) \cdot 1 + (n-2) \cdot 2 + (n-3) \cdot 3 \dots + 1 \cdot (n-1)]$$

De bijdrage $(n-1) \cdot 1$ is het totaal van de diagonaal direct rechts van de hoofddiagonaal. De betreffende diagonaal bevat namelijk $n-1$ getallen die alle gelijk aan 1 zijn. Op analoge wijze bevat de volgende diagonaal $n-2$ getallen alle gelijk aan 2, enz. Vanwege de symmetrie van de matrix wordt de som van deze bijdragen met 2 vermenigvuldigd.

De uitdrukking voor S kan worden herleid tot

$$S = 2 \cdot [\{n(1+2 + \dots + n-1)\} - \{1^2+2^2 + \dots+(n-1)^2\}]$$

De twee uitdrukkingen tussen accolades kunnen volgens standaard-formules worden uitgewerkt: algemeen geldt namelijk

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{1}{2} m (m+1) \quad (3.2)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6} m (m+1) (2m+1) \quad (3.3)$$

Door hierin $m = n-1$ te stellen kan de som S van de matrix (3.1) worden bepaald. Het blijkt dat

$$S = 2 \cdot \left[n \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \right]$$

dus

$$S = \frac{1}{3} n(n^2-1) \quad (3.4)$$

De gemiddelde perceelsafstand bedraagt dus in het eenvoudigste model

$$G = \frac{S}{N} = \frac{\frac{1}{3} n(n^2-1)d}{n(n-1)}$$

dus

$$G = \frac{1}{3} (n+1)d \quad (3.5)$$

In verband met $d = \frac{L}{n}$ kan (3.5) worden geschreven in de vorm

$$G = \frac{1}{3}(n+1) \frac{L}{n} = \frac{1}{3}L \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Het blijkt dat de gemiddelde perceelsafstand groter is dan $\frac{1}{3}$ van de lengte van de gehele strook, maar procentueel weinig hiervan verschilt wanneer het aantal percelen n groot is

4. Een bedrijfsmodel bestaande uit twee stroken, afgesloten door dwarsverbindingen

Vervolgens wordt de gemiddelde perceelsafstand berekend in een model van het type van figuur 1C. Een gedetailleerder voorbeeld wordt in figuur 4 gegeven. Hierin komen aan de uiteinden dwarsverbindingen voor, wat als typerend voor dit model wordt aangemerkt. De percelen zijn genummerd per groep. De twee stroken worden qua nummering op gelijke wijze behandeld, zodat in het bijzondere geval van figuur 4

$$\begin{array}{llll} \text{in strook 1 :} & p_1 = 2 & p_2 = 3 & p_3 = 4 & \frac{n}{2} = 9 \\ \text{in strook 2 :} & p_1 = 2 & p_2 = 3 & p_3 = 4 & \frac{n}{2} = 9 \end{array}$$

Het aantal percelen bedraagt dus n , het aantal mogelijke tweetallen kan op dezelfde wijze als $m(3.1)$ worden bepaald en bedraagt dus $n(n-1)$, wanneer tenminste elke afstand vice versa wordt genomen.

Het totaal van de onderlinge afstanden wordt verkregen door sommatie van afstanden (vice versa te rekenen)

- a) tussen elk paar percelen in strook 1 (totaal S_1)
- b) tussen elk paar percelen in strook 2 (totaal S_2)
- c) tussen elk paar percelen, waarvan er één in strook 1 ligt en de andere in strook 2 (totaal S_{12})

Wordt voorlopig afgezien van de perceelslengte d , dan is

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{n}{2} \right)^2 - 1 \right\}$$

hetgeen blijkt door in (3.4) waarin sprake is van één strook met n per-

the first of these is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$$

and the second is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The third is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

and the fourth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

and the fifth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The sixth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The seventh is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The eighth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$$

and the ninth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The tenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The eleventh is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

and the twelfth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The thirteenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The fourteenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

and the fifteenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The sixteenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation. The seventeenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

and the eighteenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$$

and the nineteenth is the fact that the $\mathcal{H}^1$ norm is not a norm on the space of functions of bounded variation.

celen de grootheid n te vervangen door het aantal percelen dat $n\frac{1}{2}$ in één strook aanwezig is, namelijk $\frac{n}{2}$. De bijdrage in de totale afstand volgens a) en b) is dus gelijk aan

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{3}n\left(\frac{n}{4} - 1\right) \quad (4.1)$$

Voor het berekenen van de onder c) genoemde totale afstand S_{12} wordt een matrix T opgesteld waarin alle onder c) genoemde afstanden worden aangeduid. In het voorbeeld van figuur 4 wordt de matrix als volgt:

strook 2:		groep 1		groep 2			groep 3			
		1	2	1	2	3	1	2	3	4
strook 1 : groep 1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8
	2	2	1	1	2	3	4	5	6	7
groep 2	1	2	1	1	2	3	3	4	5	6
	2	3	2	2	3	2	2	3	4	5
	3	4	3	3	2	1	1	2	3	4
groep 3	1	5	4	3	2	1	1	2	3	4
	2	6	5	4	3	2	2	3	4	3
	3	7	6	5	4	3	3	4	3	2
	4	8	7	6	5	4	4	3	2	1

(4.2)

Om de afstand tussen een perceel uit strook 1 en een perceel uit strook 2 te bepalen dient de corresponderende matrixwaarde met de perceelslengte d te worden vermenigvuldigd en het verkregen resultaat te worden vermeerderd met de dubbele perceelsdiepte A ; dit laatste omdat steeds één dwarsverbinding wordt gepasseerd bij het transport tussen de stroken.

De matrix T is symmetrisch ten opzichte van de hoofddiagonaal. In verband met de indeling van de percelen in groepen, tussen twee opeenvolgende dwarsverbindingen gelegen, kan men T op de in (4.2) aangegeven wijze in deel-matrices splitsen.

1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very important document, as it contains the President's message to the Congress, and is one of the most important documents in the history of the United States.

2. The second part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

3. The third part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862. It is a very important document, as it contains the President's message to the Congress, and is one of the most important documents in the history of the United States.

4. The fourth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

5. The fifth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

6. The sixth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

7. The seventh part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

8. The eighth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

9. The ninth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

10. The tenth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

11. The eleventh part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

12. The twelfth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

13. The thirteenth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

14. The fourteenth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

15. The fifteenth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 3, 1862.

Een splitsing als in (4.2) kan ook plaatsvinden wanneer meer algemeen de omvang van groep i gelijk is aan p_i percelen. Dan ontstaat het volgende beeld

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & T_{11} & & & & \\ \hline & & T_1 & & & \\ \hline & T_{22} & & T_2 & & \\ \hline & & & T_{33} & & T_3 \\ \hline & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline & T_1' & & & \cdot & \cdot & \cdot & T_{k-1} \\ \hline & & T_2' & & \cdot & \cdot & & \\ \hline & & & T_3' & \cdot & T_{k-1}' & T_{kk} \\ \hline & & & & \cdot & & \\ \hline & & & & \cdot & & \\ \hline & & & & \cdot & & \\ \hline \end{array}$$

(4.3)

Hierbij worden drie soorten deel-matrices onderscheiden, namelijk

- a) de vierkante 'diagonaalmatrices' $T_{11}, T_{22}, T_{33}, \dots, T_{kk}$
 waarvan het aantal rijen bedraagt $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$
- b) de rechthoekige matrices $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{k-1}$
 waarvan het aantal rijen bedraagt $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$
- c) de rechthoekige matrices $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{k-1}$
 waarvan het aantal kolommen bedraagt $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$

Zoals reeds opgemerkt is T symmetrisch ten opzichte van de hoofd-diagonaal, wanneer de onderlinge afstanden zoals vermeld in (4.2) als de elementen van T worden opgevat. Door deze symmetrie komen de rijen (kolommen) van i overeen met de kolommen (rijen) van T_i' ($i = 1, 2, \dots, k-1$). Aangezien het de bedoeling is de elementen van T te sommeren zijn uiteindelijk alleen de totalen van de deelmatrices van belang en kunnen

Handwritten text at the top of the page, possibly a header or title.

Main body of handwritten text, consisting of several lines of cursive script.

Second section of handwritten text, appearing as a distinct paragraph.

Third section of handwritten text, located towards the bottom of the page.

T_i en T'_i aan elkaar gelijk gesteld worden. Vervangt men dus in (4.3) de deelmatrices door hun totalen dan ontstaat eveneens een symmetrische matrix echter met k rijen en k kolommen. Het bepalen van deze totalen komt in de volgende paragraaf aan de orde.

5. Het sommeren van de afstanden in de matrix T

In de eerste plaats wordt een matrix T_{ii} beschouwd; er geldt

$$T_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & p_i \\ 2 & 3 & 4 & & & p_i \\ 3 & 4 & & & p_i & \\ 4 & & & p_i & & 4 \\ \vdots & & p_i & & 4 & 3 \\ p_i & \dots & & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

De matrix is opgebouwd uit diagonalen, bestaande uit onderling gelijke getallen. Sommeert men diagonaalsgewijs, hierbij links-boven beginnend, dan wordt het totaal

$$\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (p_i - 1)^2 \right] + p_i^2 + \left[(p_i - 1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 \right]$$

Het sommeren van de kwadraten kan met behulp van (3.3) gebeuren door $m = p_i - 1$ te stellen; het resultaat is

$$\frac{1}{6}(p_i - 1) \cdot p_i \cdot (2p_i - 1) + p_i^2 + \frac{1}{6}(p_i - 1) \cdot p_i \cdot (2p_i - 1)$$

Door vereenvoudiging hiervan blijkt dat het totaal van T_{ii} gelijk is aan

$$\frac{1}{3}p_i \cdot (2p_i^2 + 1) \quad (5.2)$$

Zodat nu de totalen der diagonaal-elementen van (4.3) bekend zijn.

10. The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various committees of the Board of Directors of the City of New York, for the year 1911.

Committee on the Administration of the City of New York
Committee on the Finance of the City of New York
Committee on the Police of the City of New York
Committee on the Public Works of the City of New York
Committee on the Sanitation of the City of New York
Committee on the Streets of the City of New York
Committee on the Taxation of the City of New York
Committee on the Water Supply of the City of New York

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various committees of the Board of Directors of the City of New York, for the year 1911. The names are arranged in alphabetical order of the last name.

Committee on the Administration of the City of New York

Committee on the Finance of the City of New York

Committee on the Police of the City of New York

Committee on the Public Works of the City of New York

Committee on the Sanitation of the City of New York

Committee on the Streets of the City of New York

Committee on the Taxation of the City of New York
Committee on the Water Supply of the City of New York

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various committees of the Board of Directors of the City of New York, for the year 1911.

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various committees of the Board of Directors of the City of New York, for the year 1911.

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various committees of the Board of Directors of the City of New York, for the year 1911.

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various committees of the Board of Directors of the City of New York, for the year 1911.

11

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various committees of the Board of Directors of the City of New York, for the year 1911.

Vervolgens worden de matrices T_i en T_i' beschouwd; er geldt

$$T_i = \begin{bmatrix} p_i & p_{i+1} & p_{i+2} & \dots & p_i + p_{i+1} + \dots + p_k - 1 \\ p_i - 1 & p_i & p_{i+1} & & \\ 4 & 5 & 6 & & \\ 3 & 4 & 5 & & \\ 2 & 3 & 4 & & \\ 1 & 2 & 3 & & p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_k \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

De kolommen van T_i zijn rekenkundige reeksen. Het gemiddelde van de eerste kolom bedraagt $\frac{1}{2}(1+p_i)$, het gemiddelde van elke volgende kolom is steeds 1 hoger dan het voorafgaande gemiddelde. Het gemiddelde van T_i is dus gelijk aan het gezamenlijke gemiddelde van de eerste en laatste kolom en bedraagt daarom

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(1+p_i) + \frac{1}{2}(p_i + 2p_{i+1} + 2p_{i+2} + \dots + 2p_k - 1) \right\}$$

Door dit te vereenvoudigen en op te merken dat het aantal getallen in de matrix T_i gelijk is aan $p_i(p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_k)$, blijkt na vermenigvuldigen van dit aantal met het gemiddelde, dat het totaal van T_i (en dus ook dat van T_i') gelijk is aan

$$\frac{1}{2} p_i (p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_k) (p_i + p_{i+1} + \dots + p_k) \quad (5.4)$$

Om nu de som van de afstanden in de matrix T te verkrijgen moeten de uitdrukkingen (5.2) en (5.4) over de index i worden gesommeerd. Voor (5.2) is het resultaat eenvoudig

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k p_i (2p_i^2 + 1) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k p_i^3 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k p_i = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k p_i^3 + \frac{1}{6} n \quad (5.5)$$

Nu nog de sommatie van (5.4). Hiertoe wordt deze uitdrukking herleid tot

$$\frac{1}{6} \left[(p_i + p_{i+1} + \dots + p_k)^3 - (p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_k)^3 - p_i^3 \right] \quad (5.6)$$

— o — o — o — o — o — o —

Dat (5.4) en (5.6) identiek zijn blijkt als volgt:

$$\begin{aligned} (5.4) & \text{ is van de gedaante } \frac{1}{6} P \cdot Q \cdot (P+Q) \\ (5.6) & \text{ is van de gedaante } \frac{1}{6} \left[(P+Q)^3 - Q^3 - P^3 \right] \end{aligned}$$

Het verschil van (5.6) met (5.4) is dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left[(P+Q)^3 - Q^3 - P^3 - 3PQ(P+Q) \right] &= \\ \frac{1}{6} \left[P^3 + Q^3 + 3P^2Q + 3PQ^2 - Q^3 - P^3 - 3P^2Q - 3PQ^2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

hetgeen te bewijzen was

— o — o — o — o — o — o —

Het sommeren van (5.6) gaat aldus (afgezien van de factor $\frac{1}{6}$)

$$\begin{aligned} \text{voor } i = 1 & : (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k)^3 - (p_2 + p_3 + \dots + p_k)^3 - p_1^3 \\ \text{voor } i = 2 & : (p_2 + p_3 + \dots + p_k)^3 - (p_3 + \dots + p_k)^3 - p_2^3 \\ \text{voor } i = 3 & : (p_3 + \dots + p_k)^3 - (p_4 + \dots + p_k)^3 - p_3^3 \\ \\ \text{voor } i = k - 2 & : (p_{k-2} + \dots + p_k)^3 - (p_{k-1} + p_k)^3 - p_{k-2}^3 \\ \text{voor } i = k - 1 & : (p_{k-1} + p_k)^3 - p_k^3 - p_{k-1}^3 \end{aligned}$$

In twee opeenvolgende regels vallen steeds twee termen tegen elkaar weg, zodat het uiteindelijke resultaat wordt

$$\frac{1}{6} (p_1 + p_2 + \dots + p_k)^3 - \frac{1}{6} (p_1^3 + p_2^3 + \dots + p_k^3) = \frac{n^3}{48} - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^k p_i^3 \quad (5.7)$$

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

In (5.5) staat nu het totaal-generaal van de matrices T_{ii} en in (5.7) zowel dat van de T_i -matrices als dat van de matrices T_i' .

Dus wordt uiteindelijk het totaal van T gelijk aan

$$\frac{2}{3} \sum p_i^3 + \frac{1}{6} n^3 + 2 \left(\frac{n^3}{48} - \frac{1}{6} \sum p_i^3 \right) = \frac{1}{3} \sum p_i^3 + \frac{1}{24} n^3 + \frac{1}{6} n^3 \quad (5.8)$$

De waarde van S_{12} is het dubbele hiervan omdat alle afstanden vice versa gerekend worden, terwijl in T de afstanden juist één maal voorkomen.

In verband met (4.1) en (5.8) bedraagt dus de totale afstand $(S_1 + S_2 + S_{12})$ tussen paren percelen, langs de weg afgelegd

$$\left\{ \frac{1}{3} n \left(\frac{n^2}{4} - 1 \right) + \frac{2}{3} \sum p_i^3 + \frac{1}{12} n^3 + \frac{1}{3} n \right\} d = \left\{ \frac{2}{3} \sum p_i^3 + \frac{1}{6} n^3 \right\} d \quad (5.9)$$

De afstand, uitsluitend vice versa afgelegd via een dwarsverbinding bedraagt in totaal

$$2 \cdot \frac{1}{4} n^2 A = \frac{1}{2} n^2 A \quad (5.10)$$

omdat het aantal mogelijke paren percelen, waarvan er één in strook 1 ligt en één in strook 2 gelijk is aan $(\frac{1}{2}n) \cdot (\frac{1}{2}n)$

Uit (5.9) en (5.10) volgt de formule voor de geniddelde perceelsafstand

$$G = \frac{\left\{ \frac{2}{3} \sum p_i^3 + \frac{1}{6} n^3 \right\} d + \frac{1}{2} n^2 A}{n(n-1)}$$

dus

$$G = \frac{n^3 + 4 \sum p_i^3}{6n(n-1)} \cdot d + \frac{n}{2(n-1)} A \quad (5.11)$$

wat geldt voor een bedrijf naar het model van figuur 4.

6. Enkele toepassingen van de formule voor de gemiddelde perceelsafstand

I als voorbeeld wordt de gemiddelde perceelsafstand in figuur 4 berekend, hierin is $n = 18$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$;

dus

$$\begin{aligned} p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 &= 2^3 + 3^3 + 4^3 = 99 \\ 6n(n-1) &= 6 \times 18 \times 17 = 1836 \end{aligned}$$

zodat volgens (5.11)

$$G = \frac{18^3 + 4 \times 99}{1836} d + \frac{18}{2 \times 17} A = 3.39 d + 0.53 A$$

II bij een vast aantal groepen k (figuur 4) en een vast aantal percelen n kan worden gevraagd naar het stel waarden van p_i dat G zo klein mogelijk maakt. Dan moet volgens (5.11) $\sum p_i^3$ minimaal zijn, bij een vaste waarde van $\sum p_i = \frac{n}{2}$. Dit is het geval als $p_1 = p_2 = \dots = p_k = \frac{n}{2k}$ een geheel getal is, in het voorbeeld $\frac{18}{2 \times 3} = 3$.

III als het laatste het geval is, dan geldt, $p = \frac{n}{2k}$ stellende,

$$\sum p_i^3 = k \cdot p^3 = \frac{n}{2p} \cdot p^3 = \frac{1}{2} np^2$$

dus

$$G = \frac{n^3 + 4 \times \frac{1}{2} np^2}{6n(n-1)} d + \frac{n}{2(n-1)} A$$

zodat

$$G = \frac{n^2 + 2p^2}{6(n-1)} d + \frac{n}{2(n-1)} A \quad (6.1)$$

Dit is dus de formule voor G wanneer het aantal percelen per groep in het bedrijfsmodel van figuur 4 constant is.

IV is het mogelijk uiterste waarden voor G aan te geven? Bij vaste n is G minimaal als er bij elk perceel dwarsverbindingen voorkomen, dus als $p_i = 1$ in (6.1). Dus, gebruik makend van de totale lengte $l = n \cdot d$

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that proper record-keeping is essential for the transparency and accountability of the organization. This section also outlines the various methods used to collect and analyze data, ensuring that the information is reliable and up-to-date.

2. The second part of the document focuses on the implementation of the proposed changes. It details the steps involved in the rollout process, from initial planning to final execution. This section also addresses potential challenges and provides strategies to overcome them, ensuring a smooth transition for all stakeholders.

3. The third part of the document discusses the long-term impact of the changes. It highlights the expected benefits, such as improved efficiency and cost savings, and provides a timeline for when these benefits are anticipated to be realized. This section also includes a summary of the key findings and recommendations for future action.

4. The final part of the document provides a conclusion and a call to action. It reiterates the importance of the changes and encourages all employees to embrace the new system. This section also includes a list of contact information for those who need further assistance or have any questions.

$$G \geq \frac{n^2+2}{6(n-1)} d + \frac{n}{2(n-1)} A > \frac{n^2+0}{6(n-1)} d + \frac{n}{2(n-1)} A = \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{L}{3} + A \right) \quad (6.2)$$

G is bij een vaste n maximaal als in formule (5.11) wordt ingevuld $k=1$ en $p_1 = \frac{1}{2}n$. Dan komen er slechts aan de uiteinden van de stroken dwarsverbindingen voor. Dus

$$G \leq \frac{n^3+4x\frac{1}{6}n^3}{6n(n-1)} d + \frac{n}{2(n-1)} A = \frac{n^2}{4(n-1)} d + \frac{n}{2(n-1)} A = \frac{n}{2(n-1)} \left(\frac{L}{2} + A \right) \quad (6.3)$$

Bij een gegeven aantal percelen n (figuur 4) worden beneden- en bovengrenzen van G door respectievelijk (6.2) en (6.3) aangegeven. Blijkbaar kan in verband hiermee (5.11) geschreven worden in de vorm

$$G = \frac{n}{2(n-1)} (cL + A) \quad (6.4)$$

waarin $\frac{1}{3} < c \leq \frac{1}{2}$ een constante is, die van de indeling in groepen van percelen afhangt. De waarde van c is klein als een bedrijf veel dwarsverbindingen telt en groot wanneer er weinig zijn.

V een andere vraag is: in welke groep, en waar in die groep, moet een dwarsverbinding worden aangebracht om de gemiddelde afstand zoveel mogelijk te verkorten?

Stel dat in een bepaalde groep van p_i percelen een verbinding wordt aangebracht die de groep splitst in twee nieuwe groepen ter grootte van respectievelijk x en $p_i - x$ percelen. Dan ondergaat de grootte $[p_i]^3$ een vermindering die gelijk is aan

$$p_i^3 - x^3 - (p_i - x)^3 = 3p_i x (p_i - x)$$

hetgeen bij een vaste p_i maximaal is wanneer $x = \frac{1}{2}p_i$. Door dit in te vallen blijkt

$$3p_i x (p_i - x) = \frac{3}{4}p_i^3$$

Dit wordt maximaal door de grootste p_i te kiezen en dus wordt de grootste afstandsverkleining verkregen door een dwarsverbinding aan te brengen die (zoveel mogelijk) halverwege de grootste groep komt te liggen.

1. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

2. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

3. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

4. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

5. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

6. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

7. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

8. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

9. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

10. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

7. Veralgemening van de afgeleide formule

Zoals in de inleiding werd aangegeven, wordt vervolgens het bedrijfsmodel uit figuur 1 in beschouwing genomen. Hiertoe wordt gebruik gemaakt van figuur 2.

De afstanden tussen tweetallen van percelen kunnen per strook worden gesommeerd met behulp van (3.4):

$$S_1 = \frac{1}{3} n_1 (n_1^2 - 1)$$

$$S_2 = \frac{1}{3} n_2 (n_2^2 - 1)$$

Het aantal keren dat een dwarsverbinding wordt gepasseerd is gelijk aan $2n_1 n_2$, terwijl het aantal afstanden in totaal $n(n-1)$ bedraagt. Wordt verder het totaal van de matrix T, waarin de afstanden tussen percelen worden vermeld die niet in éénzelfde strook liggen, aangeduid met S_{12} dan is

$$G = \frac{(S_1 + S_2 + 2S_{12})d + 2n_1 n_2 A}{n(n-1)}$$

waarbij S_{12} nog moet worden bepaald. Hiertoe moet een nieuwe T-matrix worden opgesteld; het voorbeeld van figuur 2 levert de volgende matrix op

		p ₂		p ₄		p ₆			p ₈	
strook 2		1	2	1	2	1	2	3	1	2
strook 1	p ₁ = 1	2	1	1	2	3	4	5	6	7
	1	2	1	1	2	2	3	4	5	6
	p ₃ = 2	3	2	2	1	1	2	3	4	5
	1	4	3	2	1	1	2	3	3	4
	2	5	4	3	2	2	3	2	2	3
	p ₅ = 3	6	5	4	3	3	2	1	1	2
	1	7	6	5	4	3	2	1	5	4
	2	8	7	6	5	4	3	2	4	3
	3	9	8	7	6	5	4	3	3	2
	p ₇ = 4	10	9	8	7	6	5	4	2	1

•

•

•

In tegenstelling tot (4.2) is deze matrix niet symmetrisch. Dit wordt veroorzaakt door het feit, dat de twee stroken waaruit het onderhavige bedrijf bestaat, niet gelijk zijn. Het sommeren van de afstanden in de matrix kan plaatsvinden in analogie met het totaliseren van (4.3), dus ook met behulp van deel-matrices. Algemener geformuleerd: S_{12} kan worden bepaald door het totaal van de T-matrix uit te drukken in de grootheden p_i , gebruikmakend van deel-matrices. Dit wordt hier niet verder uitgewerkt, er wordt volstaan met de volgende definitieve formulering

De gemiddelde afstand tussen twee percelen van het bedrijf uit figuur 1 kan als volgt stapsgewijs worden berekend

I men bepaalt de hulpgrootheden U, V, W, X, Y, Z,

$$\begin{aligned} U &= n_1^3 + n_2^3 \\ V &= p_1^3 + p_2^3 + \dots + p_{k-1}^3 + p_k^3 \\ W &= (p_1 + p_2)^3 + (p_{k-1} + p_k)^3 \\ X &= p_1 + p_2 + p_{k-1} + p_k \\ Y &= p_1^3 + p_2^3 + p_{k-1}^3 + p_k^3 \\ Z &= n(p_1 - p_2)(p_{k-1} - p_k) \end{aligned}$$

II de gemiddelde perceelsafstand G wordt bepaald

$$G = \frac{2U + V + |\overline{W} - X - 3Y - 3Z|}{3n(n-1)} d + \frac{2n_1 n_2}{n(n-1)} A \quad (7.1)$$

Deze formule geldt voor figuur 1 en de varianten hiervan, vermeld in de figuren 1A, 1B, ..., 1F. De term tussen vierkante haken brengt eventuele 'open' strook-einden in rekening.

Het tweede model wordt hieruit bijvoorbeeld verkregen (zie de figuren 1C en 2C) door te stellen $p_1 = p_2 = 0$ en $p_7 = p_8 = 0$ en dus wordt $W = X = Y = Z = 0$, zodat de term tussen vierkante haken wegvalt. Als

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

...the ... of ...

bovendien de p_i -waarden onderling gelijk worden gesteld aan een vaste waarde p dan volgt uit (7.1) voor G de formule van de gedaante (5.11). Het eerste model wordt gekenmerkt door $n_2 = 0$ (zie de figuren 1F en 2F); daardoor is $p_1 = n_1 = n$ en zijn de overige waarden van p_i gelijk aan nul.

Door de genoemde waarden in te vullen wordt voor G een formule van de vorm (3.5) gevonden.

