

NN31545.1335

NA 1335

II

mei 1982

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

**BIBLIOTHEEK
STARINGEBEDOUW**

OPTIMALE ALLOCATIE VAN ZANDWINOBJECTEN

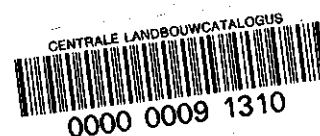
drs. J. Vreke

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking

31 DEC. 1982



JSN 175245.02

I N H O U D

	Blz.
1. INLEIDING	1
2. PROBLEEMSTELLING	2
3. DE RELATIE TUSSEN DE INHOUD VAN EEN WINPUT EN HET GRONDOPPERVLAK	5
4. DE KOSTEN VOOR EEN ZANDWINOBJECT	11
4.1. Algemeen	11
4.2. De kosten van aankoop van grond	12
4.3. De aanlegkosten	14
4.4. De kosten van winning en transport bij transport per as	15
4.5. De kosten van winning en transport bij transport per persleiding	16
4.6. De totale kosten	18
5. HET KOSTENMODEL ALS MINIMALISERINGSPROBLEEM	20
5.1. Model formulering	20
5.2. Invoering matrix notatie	24
6. DE FORMULERING VAN HET OPLOSSINGSALGORITHMEN	28
6.1. Enkele opmerkingen over lineaire programmering	28
6.2. Enkele opmerkingen over gemengd geheeltallige lineaire programmering	30
6.3. Formulering van een oplossingsalgorithme	36
6.4. Een selectieprocedure voor nul-één variabelen	37
6.5. De Revised Simplex methode	45

	Blz.
7. HET ALLOCATIEMODEL	50
7.1. Algemeen	50
7.2. De bepaling van een ondergrens voor de totale kosten	52
7.3. De bepaling van de startoplossing voor het duale probleem	56
7.4. Toepassing van het algoritme op het allocatie- probleem	59
8. SAMENVATTING	61
9. LITERATUUR	64

1. INLEIDING

In IJKELENSTAM (1980) is de opzet beschreven van een onderzoek dat beoogt een bijdrage te leveren aan de ondersteuning van het provinciale beleid met betrekking tot het verstrekken van ontgrondingsvergunningen. Het onderzoek is gericht op de invloed van het aantal, de ligging en de omvang van zandwinobjecten op de totale kosten. De opzet van dit onderzoek is de volgende:

Voor een studiegebied waarin een aantal potentiële zandwinobjecten worden onderscheiden en waarbij wordt uitgegaan van een gegeven vraag naar ophoogzand (zowel vraagpunt als gevraagde hoeveelheid gegeven) wordt uit de potentiële zandwinobjecten de uit het oogpunt van kostenminimalisering optimale keuze gemaakt. Dit kan ertoe leiden dat meer dan één zandwinobject in produktie wordt genomen.

Eén van de hulpmiddelen bij dit onderzoek is een kostenmodel dat, voor ieder zandwinobject, een beschrijving geeft van de aan de zandwinning verbonden kosten. De formulering van dit kostenmodel en de formulering van een oplossings algoritme waarmee de optimale keuze kan worden bepaald zijn onderwerp van de onderhavige nota. In een vervolgstudie zal getoetst worden of het geformuleerde algoritme voldoende snel naar de optimale oplossing convergeert. De berekening van de hierbij benodigde kosten parameters is beschreven in IJKELENSTAM (1980).

De indeling van de nota is als volgt. In hoofdstuk 2 wordt nader ingegaan op de probleemstelling van het onderzoek. In hoofdstuk 3 wordt de relatie tussen de inhoud van een winput en het benodigde grondoppervlak besproken. De totale kosten per zandwinobject worden behandeld in hoofdstuk 4 waarna in hoofdstuk 5 het uiteindelijke kos-

tenmodel (ook wel allocatiemodel genoemd) wordt geformuleerd. In hoofdstuk 6 worden enkele algemene onderwerpen uit de lineaire programmeringstheorie zeer summier behandeld en wordt het oplossings-algorithme geformuleerd. De toepassing van dit algorithme op het allocatiemodel wordt behandeld in hoofdstuk 7. Hoofdstuk 8 bevat een samenvatting.

2. PROBLEEMSTELLING

Het doel van het onderzoek is de formulering van een optimaliseringsmodel dat bij een gegeven vraag naar zand (hoeveelheden per vraagpunt) uit een aantal potentiële zandwinobjecten de uit het oogpunt van kostenminimalisering optimale keuze maakt. Dit betekent dat voor elk vraagpunt wordt bepaald vanuit welke zandwinobjecten zand wordt verkregen zodanig dat voor ieder vraagpunt aan de vraag is voldaan terwijl de totale kosten verbonden aan winning en transport van het zand minimaal zijn. Tevens is dan bepaald welke zandwinobjecten in produktie worden genomen.

Voor de plaatsbepaling van dit onderzoek binnen de zandwinproblematiek is het nuttig een beknopt overzicht van het probleemveld te geven. Van belang zijn:

1. de keuze (locatie) van mogelijke zandwinobjecten;
2. de afweging van alternatieven door de provinciale beleidsvoerder.

Ad 1. Bij de keuze van mogelijke zandwinobjecten moet rekening worden gehouden met onder andere:

- geologische factoren als de korreldiameter van het zand, de dikte van de laag winbaar zand en de alternatieve toepasbaarheid van de voor de zandwinning niet bruikbare bovenlaag;
- geografische factoren als de mogelijkheden voor transport (b.v. per schip of per trein), de ligging ten opzichte van de vraagpunten en dergelijke;
- de inrichting en de bestemming (b.v. recreatie) van het zandwinobject nadat het zand gewonnen is. Dit kan ertoe leiden dat vooraf de omvang van het object wordt vastgesteld, gekop-

peld aan voorwaarden met betrekking tot de inrichting en de afwerking nadat het zand gewonnen is (b.v. de Bergerheide). De omvang van het object is in dit geval onafhankelijk van de vraag naar zand uit het object.

Ad 2. Bij de afweging van de alternatieven krijgt men te maken met de gevolgen van de zandwinning voor de landbouw, voor landschap, natuur en milieu, voor recreatie etc. Dit leidt, afhankelijk van de doelstellingen van het provinciale beleid, tot een afweging van een aantal vaak moeilijk kwantificeerbare, onderling niet of moeilijk vergelijkbare grootheden.

Voordat een dergelijke afweging kan worden uitgevoerd is inzicht nodig in de kosten die aan de winning van zand verbonden zijn. De kosten verbonden aan de uit het oogpunt van kostenminimalisering optimale toewijzing kunnen hierbij een rol spelen:

- als referentieniveau;
- voor de bepaling van het effect dat afwijken van de optimale toewijzing op de kosten heeft.

Voor de bepaling van de kosten is een kostenmodel geformuleerd. Enkele complicerende factoren hierbij zijn:

- het tijdaspect. In de praktijk zijn het tijdstip van winning en het tijdstip van gebruik vaak niet op elkaar afgestemd. Dit kan worden opgelost door de vorming van zanddepots wat extra beslag op grond (extra kosten!) betekent. Een tweede aspect waarmee rekening gehouden moet worden is de beperkte winning- en transportcapaciteit per tijdseenheid. Uitbreiding van deze capaciteit (plaatsing van extra zuigers, inzetten van extra auto's etc.) is mogelijk maar werkt kostenverhogend;
- de keuze van de wijze van transport. Het transport van zand kan plaatsvinden per schip, per trein, per persleiding of per auto. Omdat de keuze uit deze mogelijkheden van een aantal factoren afhankelijk is (o.a. de omvang van de vraag per vraagpunt, combinatiemogelijkheden met transport naar andere vraagpunten) kan niet worden volstaan met een eenvoudige kostenmatrix;
- de relatie tussen de putproductie (d.i. de hoeveelheid zand die gewonnen wordt) en de benodigde grondaankopen (zie hfdst. 3).

Het kostenmodel is uitgangspunt voor het keuzemodel (of allocatiemodel). Het allocatieprobleem wordt geformuleerd als een gemengd geheeltallig lineair programmeringsprobleem waarbij de vaste kosten met behulp van dummievariabelen in het model ingevoerd worden. Complicerende factoren bij de modelbouw zijn onder andere:

- de niet lineaire relatie tussen de omvang en de inhoud van een zandwinput;
- de samenvallende trajecten. Bij transport per persleiding doet het verschijnsel zich voor dat een deel van het persleidingennet bij het transport naar meer dan één vraagpunt kan worden gebruikt. Dit heeft als consequentie dat de vaste kosten van de aanleg van het persleidingennet niet rechtstreeks aan de vraagpunten gekoppeld kunnen worden.

In het onderzoek ligt de nadruk op de formulering van een oplossingsalgoritme voor het allocatiemodel. Hierdoor is in de eerste plaats de structuur van het kostenmodel van belang en zijn vereenvoudigingen die de modelstructuur niet aantasten toegestaan. Immers, als door de vereenvoudiging de modelstructuur niet verandert blijft het oplossingsalgoritme van kracht. De buiten beschouwing gelaten factoren kunnen vervolgens zonder moeilijkheden te veroorzaken in het model worden ingevoerd. De vereenvoudiging betreft onder andere het invoeren van slechts twee alternatieven met betrekking tot de wijze van transport en het niet opnemen van de kosten van inrichting (nadat de winning is gestopt). Een vereenvoudiging die de structuur van het model wel aantast is het buiten beschouwing laten van het tijdaspect. Dit zal in een vervolgstudie aan de orde moeten komen.

Uitgangspunten bij het onderzoek zijn:

- de omvang van een zandwinobject wordt bepaald door de vraag, met dien verstande dat per object wordt uitgegaan van een minimaal te winnen hoeveelheid zand in het geval dat het object in produktie wordt genomen;
- de kwaliteit van het zand (korreldiameter) is van belang bij de berekening van winning- en transportkosten. Waar het de vraag naar ophoogzand betreft worden geen eisen met betrekking tot de kwaliteit gesteld;

- het transport van zand vindt plaats per as (vrachtauto) of met behulp van persleidingen;
 - de kostencategorieën die in de beschouwing worden betrokken zijn:
 - a. de aankoopkosten van de benodigde terreinen;
 - b. de aanlegkosten. Dit zijn de kosten die verbonden zijn aan het 'winklaar' maken van het zandwinobject. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de plaatsing van het bij de winning van het zand benodigde materieel;
 - c. de kosten van de winning en van het transport van zand.
- Uit deze opsomming blijkt dat depotvorming buiten beschouwing gelaten wordt;
- het studiegebied. Als studiegebied is een deel van de Betuwe gekozen. Er wordt uitgegaan van de voor de periode 1975-1986 geraamde vraag naar ophoogzand (dit geeft 47 vraagpunten) en van 19 mogelijke zandwinobjecten.

In IJKELENSTAM (1980) wordt het studiegebied beschreven en worden de kostenparameters berekend. De onderhavige nota is gericht op de modelformulering en op de ontwikkeling van een oplossingsalgorithme.

3. DE RELATIE TUSSEN DE INHOUD VAN EEN WINPUT EN HET GRONDOPPERVLAK

In hoofdstuk 2 is gesteld dat de omvang van een zandwinobject wordt bepaald door de vraag naar zand. Dit betekent dat in het allocatiemodel het benodigd grondoppervlak moet worden opgenomen als een functie van de putproduktie*. De relatie tussen het grondoppervlak en de putproduktie is afhankelijk van:

- de vorm van de winput;
- de ruimte die in beslag wordt genomen door opslag, machines en dergelijke;
- de dikte van de voor de zandwinning niet bruikbare bovenlaag;
- de dikte van de laag winbaar zand.

*De putproduktie is de hoeveelheid zand die uit een winput gewonnen is

In fig. 3.1 is de doorsnede van een winput getekend. Hier is de invloed van de genoemde factoren op het benodigd grondoppervlak zichtbaar.

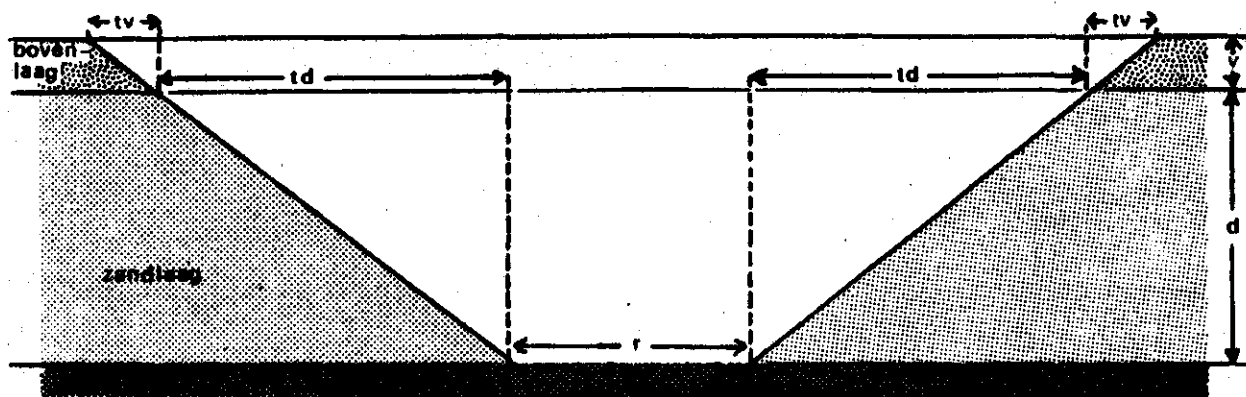


Fig. 3.1. Dwarsdoorsnede van een winput met een talud van 1:t

Met betrekking tot de vorm en de omvang van een zandwinput worden de volgende uitgangspunten gehanteerd:

- de winput heeft de vorm van een, al dan niet afgeknotte, piramide met een vierkant grondvlak en een talud, dat is de helling van de zijden ten opzichten van het grondvlak, van 1:t;
- de voor de zandwinning niet bruikbare bovenlaag heeft een, per object verschillende, constante dikte van v meter;
- de laag winbaar zand heeft een, per object verschillende, constante dikte van d meter;
- indien een object als winput in productie wordt genomen moet minimaal een, per object verschillende, hoeveelheid $rq(o)$ gewonnen worden. Aan de productie per put wordt verder geen beperking opgelegd;
- de ruimte die in beslag wordt genomen door opslag, machines en dergelijke wordt buiten beschouwing gelaten.

De inhoud van de winput kan worden berekend met de formule voor de inhoud van een (afgeknotte) piramide. Dit geldt zowel voor de inhoud van de gehele winput als voor de inhoud van het gedeelte van de winput dat zich in de zandlaag bevindt (de putproductie). De inhoud van

een afgeknotte piramide kan worden berekend met vergelijking (3.1):

$$I = \frac{1}{3} h \{ O + T + (O \times T)^{\frac{1}{2}} \} \quad (3.1)$$

waarbij: I = de inhoud van de afgeknotte piramide

h = de hoogte van de afgeknotte piramide

O = de oppervlakte van het basisvlak

T = de oppervlakte van het topvlak

Voor de berekening van de inhoud van een normale piramide kan gebruik gemaakt worden van vergelijking (3.1) met T = 0.

De winput heeft de vorm van een piramide als $h < d$ en de vorm van een afgeknotte piramide als $h = d$. Voor de produktie geeft dit:

$$q = \frac{1}{3} h (2t h)^2 \quad h < d \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{3} d (3r^2 + 6tdr + 4t^2 d^2) \quad h = d$$

terwijl voor het benodigd grondoppervlak geldt:

$$R = \{ 2tv + 2th \}^2 \quad h < d \quad (3.3)$$

$$= \{ 2tv + 2td + r \}^2 \quad h = d$$

waarbij q = de putproduktie

h = de diepte van het deel van de winput dat zich in de zand-
laag bevindt

t = het talud

r = de lengte van de zijden van de bodem van de winput

d = de dikte van de laag winbaar zand

v = de dikte van de voor de zandwinning niet bruikbare boven-
laag

R = het benodigd grondoppervlak

Gebruik makend van de vergelijkingen (3.2) en (3.3) kan worden afgeleid dat R als de in vergelijking (3.4) gegeven functie van q kan worden geschreven:

$$R(q) = \left\{ 2tv + (6tq)^{\frac{1}{3}} \right\}^2 \quad rq(0) \leq q \leq rq(1) = \frac{1}{3} d(2td)^2$$

$$= \left\{ \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv \right\}^2 \quad q \geq rq(1) \quad (3.4)$$

In VREKE (1982) wordt nader ingegaan op de afleiding van bovenstaande vergelijkingen. Hier wordt ook de afleiding gegeven van de lineaire benadering $RS(q)$ van $R(q)$. Dit is een benadering door middel van een lineaire spline functie. Een lineaire spline functie is een gebroken rechte, in fig. 3.2 is een voorbeeld van een lineaire spline functie getekend.

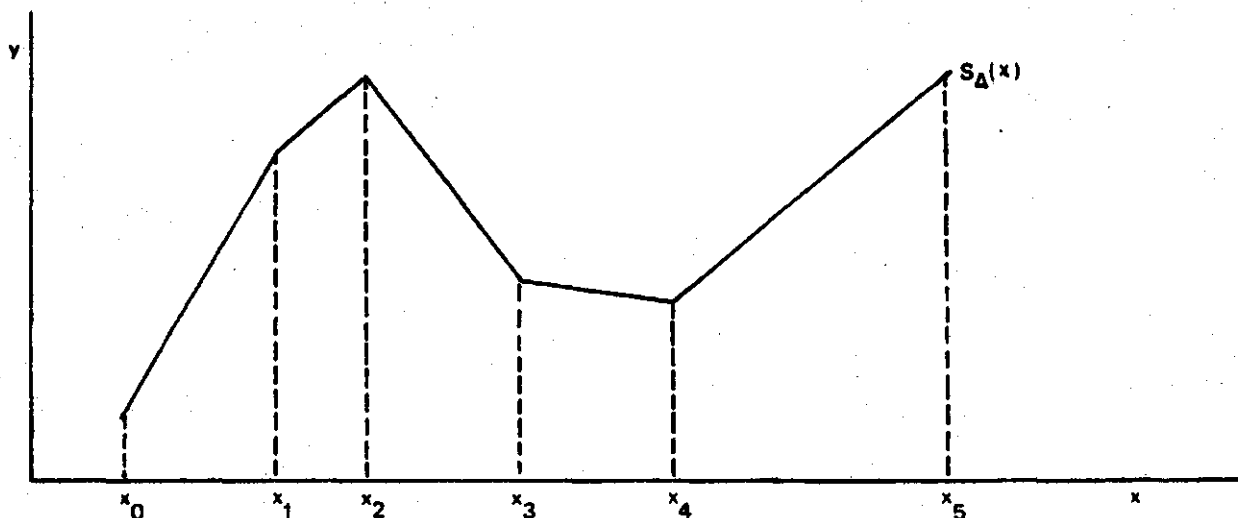


Fig. 3.2. Een lineaire spline functie

De lineaire benadering is noodzakelijk omdat het benodigd grondoppervlak één van de variabelen is in de doelstellingsfunctie van een gemengd geheeltallig lineair programmeringsprobleem. De voorwaarden voor de benadering zijn:

- de benaderde waarde moet groter dan of gelijk aan de werkelijke waarde zijn, dat wil zeggen $RS(q) \geq R(q)$;
- de benadering moet continu zijn;
- de benadering moet plaatsvinden door een zo klein mogelijk aantal lijnstukken;

- de som van de afwijkingen $\{RS(q) - R(q)\}$ moet minimaal zijn. Dat wil zeggen $\int \{RS(q) - R(q)\} dq$ minimaal;
- op het interval $[rq(0), rq(1)]$ moet de benadering plaatsvinden door middel van twee lijnstukken terwijl voor $q = rq(0)$ en $q = rq(1)$ moet gelden $RS(q) = R(q)$;
- op het interval $[rq(1), \infty)$ zijn twee nauwkeurigheidscriteria gedefinieerd:
 1. de afwijking $\{RS(q) - R(q)\}$ mag niet groter zijn dan Δ ;
 2. de relatieve afwijking $\frac{\{RS(q) - R(q)\}}{R(q)}$ mag niet groter zijn dan ρ waarbij Δ en ρ vrij gekozen mogen worden ($\Delta, \rho > 0$). Bij de benadering moet, naar keuze, één van beide criteria gehanteerd worden.

In VREKE (1981) is afgeleid dat de benadering $RS(q)$ als volgt geschreven kan worden*:

$$RS(q) = R(rq(0)) + R'(rq(0)) \cdot qx(0) + \sum_k \gamma(k) qx(k) \quad (3.5)$$

waarbij:

$$R(q) = \begin{cases} 2tv + (6tq)^{\frac{1}{3}} \end{cases}^2 & rq(0) \leq q \leq rq(1) \quad (3.4) \\ = \left\{ \left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} + td + 2tv \right\}^2 & q \geq rq(1)$$

$$R'(q) = 4t(6tq)^{-\frac{2}{3}} \left\{ 2tv + (6tq)^{\frac{1}{3}} \right\} & rq(0) \leq q \leq rq(1) \quad (3.6) \\ = \frac{1}{d} \left\{ 1 + \frac{td + 2tv}{\left(\frac{q}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right\} & q \geq rq(1)$$

*met de notatie $x = \max\{a, b\}$ wordt aangegeven dat x gelijk is aan het grootste van de twee elementen a en b

$$qx(0) = \max\{0, q - rq(0)\} \quad (3.7)$$

$$qx(k) = \max\{0, q - kq(k)\} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

$$\gamma(k) = R'(rq(k)) - R'(rq(k-1)) < 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

$$rq(1) = \frac{1}{3} d(2td)^2 \quad (3.10)$$

$$rq(k) = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left\{ \frac{kq(k)}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right\}^2 / \left\{ \frac{rq(k-1)}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right\} \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.11)$$

$$kq(1) = \frac{R(rq(1)) - R(rq(0)) + rq(0) \cdot R'(rq(0)) - rq(1) R'(rq(1))}{R'(rq(0)) - R'(rq(1))} \quad (3.12)$$

en $kq(k)$ afhankelijk is van het gehanteerde nauwkeurigheidscriterium. Als is gekozen voor $\{RS(q) - R(q)\} \leq \Delta$, dan geldt:

$$kq(k) = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left\{ \left(\frac{\Delta}{dR'(rq(k-1)) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{rq(k-1)}{d} - \frac{1}{3} t^2 d^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

en als is gekozen voor $\frac{\{RS(q) - R(q)\}}{R(q)} \leq \rho$, dan geldt:

$$kq(k) = \frac{1}{3} t^2 d^3 + d \left[\frac{R(rq(k-1)) \cdot (dR'(rq(k-1)) - 1) \rho^{\frac{1}{2}} + (1 + \rho)(td + 2tv)}{dR'(rq(k-1)) - 1 - \rho} \right]^2 \quad (3.14)$$

Hierbij hebben de variabelen de volgende betekenis:

- q = de putproduktie, dat is de hoeveelheid zand die uit de winput gewonnen wordt
- $R(q)$ = het voor de winput benodigde grondoppervlak als functie van q
- $RS(q)$ = de lineaire benadering van $R(q)$
- $rq(k)$ = de hoeveelheid q waarbij $RS(q)$ aan $R(q)$ raakt in het k^e raakpunt
- $kq(k)$ = de hoeveelheid waarbij het k^e knikpunt van $RS(q)$ optreedt
- $qx(k)$ = de hoeveelheid waarmee de putproduktie de hoeveelheid $kq(k)$ overschrijdt
- t = het talud van de winput

- v = de dikte van de voor de zandwinning niet bruikbare bovenlaag
- d = de dikte van de laag winbaar zand
- $\gamma(k)$ = de coëfficiënt van $qx(k)$
- Δ = de maximaal toegestane afwijking $\{RS(q) - R(q)\}$
- ρ = de maximaal toegestane relatieve afwijking $\{RS(q) - R(q)\}/R(q)$

4. DE KOSTEN VOOR EEN ZANDWINOBJECT

4.1. Algemeen

De kosten worden onderscheiden in vaste en variabele kosten. Het onderscheid tussen beide categorieën wordt aan de hand van het volgende voorbeeld duidelijk gemaakt.

Stel er moet een hoeveelheid zand worden getransporteerd van de winput naar een vraagpunt. Voordat met het eigenlijke transport wordt begonnen wordt er een persleiding aangelegd tussen de winput en het vraagpunt. De kosten die verbonden zijn aan het aanleggen van de pijpleiding (met toebehoren) zijn onafhankelijk van de hoeveelheid zand die getransporteerd moet worden. Dit zijn vaste kosten. Als de pijpleiding is aangelegd kan met het transport begonnen worden. Met het transport van winput naar vraagpunt is nu nog een vast bedrag (energiekosten) per kubieke meter zand gemoeid. Dit zijn variabele kosten. Samenvattend kan gesteld worden dat de vaste kosten onafhankelijk zijn van de getransporteerde hoeveelheid zand. De variabele kosten daarentegen zijn direct gekoppeld aan de getransporteerde hoeveelheid zand.

Het onderscheid tussen vaste en variabele kosten is van belang bij de formulering van het allocatiemodel. De vaste kosten worden namelijk in het model opgenomen gekoppeld aan dummiëvariabelen* en de variabele kosten als coëfficiënt van de betreffende grootte. In de volgende paragrafen wordt aangegeven hoe de voor het onderzoek van belang

*een dummiëvariabele is een variabele die de waarde één heeft als een bepaalde gebeurtenis optreedt en de waarde nul als dit niet het geval is

zijnde kosten in het model worden ingevoerd.

Aan de berekening van de waarde van de kostenparameters wordt geen aandacht besteed. Dit is uitvoerig beschreven in IJKELENSTAM (1980).

4.2. De kosten van aankoop van grond

De aankoopkosten worden bepaald door de oppervlakte van het (aan te kopen) terrein te vermenigvuldigen met de prijs van de grond. In hoofdstuk 3 is de relatie $R(q)$ tussen het voor de winput benodigde grondoppervlak en de putproduktie beschreven. Daarnaast is een lineaire benadering van deze relatie gegeven, te weten:

$$RS(q) = R(rq(0)) + R'(rq(0)) \cdot qx(0) + \gamma(1) qx(1) + \gamma(2) qx(2) + \dots \quad (3.5)$$

Vermenigvuldiging van $RS(q)$ met de grondprijs pg geeft de aankoopkosten CAK. De grondprijs kan per put verschillen.

$$CAK = pg \cdot RS(q) \quad (4.1)$$

In de vergelijkingen (4.2) tot en met (4.5) is weergegeven hoe de aankoopkosten (per winput) in het allocatiemodel zijn opgenomen*.

$$CAK = pg \cdot \{R(rq(0)) - rq(0) \cdot R'(rq(0))\} dl + pg \cdot R'(rq(0)) \cdot q + \sum_k pg \cdot \gamma(k) \cdot qx(k) \quad (4.2)$$

ST**

$$q - QA \cdot dl \leq 0 \quad (4.3)$$

$$q - qx(k) - kq(k) d4(k) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

$$qx(k) - Q(k) d4(k) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

$q, qx(k), dl, d4(k) \geq 0$; $dl, d4(k)$ nul-één variabelen

*bij de afleiding van (4.2) is gebruik gemaakt van de gelijkheid $qx(0) = \max\{0, q - rq(0)\}$ en van het gegeven dat $dl = 0$ als $q = 0$ en $dl = 1$ als $q > 0$. Dit geeft: $qx(0) = dl\{q - rq(0)\} = q - dl \cdot rq(0)$

**ST = 'subject to' dat wil zeggen onder de voorwaarde dat

Hierbij is: CAK = de aankoopkosten van de grond (per winput)
 pg = de grondprijs
 $R(q)$ = het werkelijk benodigd grondoppervlak als functie van de putproduktie
 q = de vraag naar zand voor het betreffende zandwin-object (de putproduktie is gelijk aan de vraag)
 $rq(0)$ = de minimaal te winnen hoeveelheid zand in het geval dat de winput in produktie wordt genomen
 $d1$ = de dummievariabele die aangeeft of de winput al dan niet in produktie wordt genomen
 $d4(k)$ = de dummievariabele die aangeeft of de putproduktie al dan niet groter is dan $kq(k)$
 $qx(k)$ = de hoeveelheid zand die meer wordt gevraagd dan $kq(k)$. Er geldt: $qx(k) = \max \{0, q - kq(k)\}$
 $kq(k)$ = de hoeveelheid zand waarbij het k^e knikpunt van $RS(q)$ optreedt
 $\gamma(k)$ = een constante. Er geldt:
 $\gamma(k) = R'(rq(k)) - R'(rq(k - 1)) < 0$
 QA = de totale vraag naar zand in het studiegebied
 $Q(k)$ = een constante. Er geldt: $Q(k) = QA - kq(k)$

Deze formulering is nodig omdat, volgens vergelijking (3.8), geldt:

$$qx(k) = \max\{0, q - kq(k)\} \quad (3.8)$$

Aan $(q - kq(k))$ moet dus een dummievariabele worden gekoppeld die de waarde één aanneemt als $q \geq kq(k)$ en de waarde nul als dit niet het geval is. Dit is de variabele $d4(k)$. Dit geeft*:

$$qx(k) = \{q - kq(k)\} \cdot d4(k) \quad (4.6)$$

Dat aan de gestelde voorwaarden is voldaan kan als volgt worden aangetoond:

*als vergelijking (4.6) in de doelstellingsfunctie wordt gesubstitueerd wordt de lineariteit van de doelstellingsfunctie aangetast doordat het produkt van twee variabelen, $q \cdot d4(k)$, niet lineair is. Dit maakt een constructie als de gehanteerde noodzakelijk

Omdat $q_x(k)$ met een negatieve coëfficiënt in de doelstellingsfunctie van een minimaliseringsprobleem voorkomt (minimalisering totale kosten) zal $q_x(k)$ gemaximaliseerd worden. Met betrekking tot $q_x(k)$ kan het probleem daarom, bij gegeven q , als volgt geformuleerd worden:

$$\max q_x(k) \quad (4.7)$$

ST

$$q_x(k) + kq(k) \cdot d_4(k) \leq q \quad (4.4)$$

$$q_x(k) - Q(k) \cdot d_4(k) \leq 0 \quad (4.5)$$

$$q_x(k) \geq 0$$

$d_4(k)$ is nul of één

Er is eenvoudig in te zien dat:

- als $q < kq(k)$ dat dan moet gelden $d_4(k) = 0$ en $q_x(k) = d_4(k) \cdot (q - kq(k)) = 0$. Immers als $d_4(k) = 1$ dan geldt $q_x(k) = q - kq(k) < 0$ en dit is niet toegestaan.
- als $q \geq kq(k)$ dat dan geldt $d_4(k) = 1$ en $q_x(k) = d_4(k) \cdot (q - kq(k)) = q - kq(k) > 0$. In dit geval is ook aan (4.5) voldaan omdat geldt $Q(k) \geq q - kq(k)$. Als $d_4(k) = 0$ dan geldt volgens vergelijking (4.5): $q_x(k) = 0 < q - kq(k)$ zodat deze oplossing niet optimaal is.

4.3. De aanlegkosten

De aanlegkosten per zandwinobject omvatten de vaste kosten die verbonden zijn aan het winklaar maken van het object. Deze kosten zijn onafhankelijk van de uiteindelijk gewonnen hoeveelheid zand en worden alleen dan gemaakt als de put in productie wordt genomen. De aanlegkosten worden met behulp van de vergelijkingen (4.3) en (4.9) in het allocatiemodel ingevoerd.

$$CAL = d_l \cdot CA \quad (4.9)$$

ST

$$q - QA \cdot d_l \leq 0 \quad (4.3)$$

$$q \geq 0$$

d_l is nul of één

hierbij is CAL - de aanlegkosten van het betreffende zandwinobject.

Deze zijn nul als het object niet in produktie wordt genomen ($d1 = 0$)

CA - de vaste aanlegkosten van het zandwinobject

d1 - een dummi variabele die aangeeft of het betreffende zandwinobject al dan niet in produktie wordt genomen

QA - de totale vraag naar zand in het gebied

q - de putproduktie

Opgemerkt moet worden dat bij het winklaar maken van het zandwinobject de voor de zandwinning niet bruikbare bovenlaag moet worden verwijderd. Deze bovenlaag is vaak bruikbaar als grondstof voor bijvoorbeeld de keramische industrie. Tegenover de kosten verbonden aan het verwijderen van de bovenlaag staan daarom vaak opbrengsten uit verkoop (of gebruik) van deze bovenlaag. Het verschil tussen de kosten en de opbrengsten verbonden aan het verwijderen van de bovenlaag is opgenomen in de grondprijs.

4.4. De kosten van winning en transport bij transport per as

De kosten van winning en transport zijn afhankelijk van de hoeveelheid, de af te leggen afstand, de kwaliteit van het zand en van de wijze van transport. Als het transport per as plaats vindt zijn de onderscheiden kostenfactoren:

- de vaste winningskosten (plaatsing materieel e.d.)
- de variabele winningskosten
- de variabele transportkosten

De vaste winningskosten bij het transport per as verschillen van de vaste kosten bij het transport per persleiding (zie IJKELENSTAM (1980)). Dit heeft tot gevolg dat voor het transport per as een aparte dummi variabele moet worden ingevoerd. De invoer van deze kosten in het allocatiemodel vindt plaats door middel van de vergelijkingen (4.10), (4.11) en (4.12).

$$CTW = CW \cdot d2 + \sum_{j=1}^m pw(j) \cdot qw(j) \quad (4.10)$$

ST

$$qw - QA \cdot d2 \leq 0 \quad (4.11)$$

$$qw = \sum_{j=1}^m qw(j) \quad (4.12)$$

$$qw, qw(j) \geq 0$$

$d2$ is nul of één

- hierbij is CTW - de kosten van winning en transport verbonden aan het transport per as vanuit het betreffende zandwinobject
- CW - de vaste winningskosten voor het betreffende zandwinobject
- $d2$ - een dummi variabele die aangeeft of er vanuit het betreffende zandwinobject transport per as plaats vindt
- qw - de hoeveelheid zand die per as vanuit het zandwinobject wordt getransporteerd (totaal)
- $qw(j)$ - de hoeveelheid zand die per as vanuit het zandwinobject naar bestemming j wordt getransporteerd ($j = 1, \dots, m$)
- $pw(j)$ - de prijs (per m^3) van het transport per as van het zandwinobject naar vraagpunt j ($j = 1, \dots, m$)

4.5. De kosten van winning en transport bij transport per persleiding

Een complicerende factor bij de bepaling van de vaste transportkosten is dat bij het transport per persleiding vanuit de winput naar meerdere vraagpunten voor een deel van dezelfde leidingen gebruik gemaakt kan worden (samenvallende trajecten). Het gevolg hiervan is dat de vaste kosten niet zonder meer aan de vraagpunten gekoppeld kunnen worden. Een tussenstap is vereist.

Bepaal voor elk zandwinobject het persleidingennet voor het geval dat het betreffende object alle vraagpunten van zand voorziet en er

geen transport per as plaats vindt. Dit persleidingennet bevat een aantal samenvallende en een aantal niet samenvallende trajecten*. Nummer de trajecten (per zandwinobject) van 1 tot en met S, ongeacht of het een samenvallend of een niet samenvallend traject betreft. Bepaal vervolgens voor ieder vraagpunt j welke trajecten gebruikt worden bij het transport vanuit de winput. Geef de coëfficiënt $\text{coef}(s, j)$ de waarde één als traject nr s gebruikt wordt bij het transport van de winput naar vraagpunt j en de waarde nul als dit niet het geval is.

De kosten verbonden aan de aanleg van het traject zijn evenals de winning- en transportkosten afhankelijk van de korreldiameter van het zand. In de vergelijkingen (4.13) tot en met (4.15) is aangegeven hoe de kosten in het allocatiemodel worden ingevoerd. De coëfficiënten in deze vergelijkingen zijn mede afhankelijk van de korreldiameter.

$$\text{CTB} = \sum_{s=1}^S \text{CT}(s) \cdot d3(s) + \sum_{j=1}^m p_b(j) \cdot q_b(j) \quad (4.13)$$

ST

$$\sum_{j=1}^m \text{coef}(s, j) \cdot q_b(j) - Q_B(s) \cdot d3(s) \leq 0 \quad s = 1, \dots, S \quad (4.14)$$

$$Q_B(s) = \sum_{j=1}^m \text{coef}(s, j) \cdot a(j) \quad (4.15)$$

$$q_b(j) \geq 0$$

$$d3(s) \text{ is nul of één}$$

Hierbij is: CTB - de kosten van winning en transport bij transport per persleiding

CT(s) - de vaste kosten verbonden aan traject nr s

d3(s) - de dummievariabele die aangeeft of traject nr s al dan niet aangelegd (gebruikt) wordt

*onder een traject wordt verstaan een deel van het persleidingennet dat geen aftakkingen bevat en dat loopt van de winput of van een aftakpunt naar een aftakpunt of naar een vraagpunt

- pb(j) - de variabele winning en transportkosten bij transport per persleiding van de winput naar vraagpunt j
- qb(j) - de hoeveelheid zand die per persleiding vanuit de winput naar vraagpunt j getransporteerd wordt
- a(j) - de vraag naar zand in vraagpunt j
- QB(s) - de maximale hoeveelheid zand die door het traject met nummer s getransporteerd wordt
- coef(s, j) - de coëfficiënt die aangeeft of bij transport per persleiding vanuit de winput naar vraagpunt j gebruik gemaakt wordt van traject nr s

Bij deze formulering is ervan uitgegaan dat voor het transport per persleiding vanuit de winput naar vraagpunt j altijd dezelfde trajecten gevolgd worden, onafhankelijk van de wijze waarop aan de andere vraagpunten wordt geleverd. Voorts is verondersteld dat bij het transport van zand vanuit verschillende zandwinobjecten verschillende persleidingen gebruikt worden. De mogelijkheid om bij transport per persleiding vanuit verschillende zandwinobjecten hetzelfde traject te gebruiken kan eventueel in het model worden ingevoerd.

4.6. De totale kosten

Voor een zandwinobject geldt dat de kosten van dit object afhankelijk zijn van de putproductie. Uitgaande van de in dit onderzoek onderscheiden kostencategorieën kunnen de totale kosten voor een zandwinobject worden weergegeven als in vergelijking (4.16):

$$TC = CAK + CAL + CTW + CTB \quad (4.16)$$

Substitutie van de vergelijkingen (4.2), (4.9), (4.10) en (4.13) in vergelijking (4.16) geeft voor de totale kosten per zandwinobject:

$$TC = pg\{R(rq(0)) - rq(0) R'(rq(0))\} d1 + pg R'(rq(0)) \cdot q + \sum_k pg \cdot \gamma(k) \cdot qx(k) + \\ + CA \cdot d1 + CW \cdot d2 + \sum_j pw(j) qw(j) + \sum_s CT(s) d3(s) + \sum_j pb(j) \cdot qb(j) \quad (4.17)$$

Hierbij geldt:

$$q = \sum_j qb(j) + \sum_j qw(j) \quad (4.18)$$

Definieer de volgende kostenparameters:

$$A = pg\{R(rq(0)) - rq(0) R'(rq(0))\} + CA \quad (4.19)$$

$$B = CW \quad (4.20)$$

$$E(s) = CT(s) \quad (4.21)$$

$$F(j) = pg \cdot R'(rq(0)) + pw(j) \quad (4.22)$$

$$G(j) = pg \cdot R'(rq(0)) + pb(j) \quad (4.23)$$

$$H(k) = pg \cdot \gamma(k) \quad (< 0) \quad (4.24)$$

Door substitutie van deze kostenparameters in vergelijking (4.17) en met aanvulling van de beperkingen kunnen de totale kosten op de volgende wijze in het allocatiemodel worden ingevoerd:

$$TC = A \cdot d1 + B \cdot d2 + \sum_s E(s) d3(s) + \sum_j F(j) \cdot qw(j) + \sum_j G(j) \cdot qb(j) + \sum_k H(k) \cdot qx(k) \quad (4.25)$$

ST

$$\sum_j \{qb(j) + qw(j)\} - QA \cdot d1 \leq 0 \quad (4.26)$$

$$\sum_j qw(j) - QA \cdot d2 \leq 0 \quad (4.27)$$

$$\sum_j \text{coef}(s, j) qb(j) - QB(s) d3(s) \leq 0 \quad s = 1, \dots, S \quad (4.14)$$

$$\sum_j \{qb(j) + qw(j)\} - qx(k) - kq(k) d4(k) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

$$qx(k) - Q(k) d4(k) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

$$qb(j), qw(j), qx(k) \geq 0$$

$$d1, d2, d3(s), d4(k) \in D \quad (D \text{ is de verzameling dummievariabelen}).$$

5. HET KOSTENMODEL ALS MINIMALISERINGSPROBLEEM

5.1. Model formulering

In hoofdstuk 4 zijn de onderscheiden kostencategorieën en de totale kosten voor één zandwinobject beschreven. De totale kosten voor het gehele gebied worden gevonden door sommering over de zandwinobjecten

$$TCG = \sum_i TC(i) \quad (5.1)$$

waarbij: TCG = de totale kosten voor het gehele gebied

TC(i) = de totale kosten voor zandwinobject nummer i als gedefinieerd in hoofdstuk 4

Als het probleem als minimaliseringsprobleem wordt geformuleerd moet aan de in hoofdstuk 4 gegeven voorwaarden een tweetal beperkingen worden toegevoegd:

- de voorwaarde dat voor ieder vraagpunt j ($j = 1, \dots, m$) aan de vraag wordt voldaan.

Dit geeft*

$$\sum_i \{qb(i, j) + qw(i, j)\} = a(j) \quad j = 1, \dots, m \quad (5.2)$$

- de eis dat als een zandwinobject i ($i = 1, \dots, n$) in productie wordt genomen, minimaal een hoeveelheid $rq(i, 0)$ moet worden gewonnen. Dit geeft:

$$\sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} - rq(i, 0) \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

Combinatie van deze voorwaarden met vergelijking (5.1) en met het in par. 4.6 beschreven model met betrekking tot de totale kosten van één zandwinobject geeft het volgende minimaliseringsprobleem (het allocatieprobleem):

*de variabele i geeft het nummer van de winput (het zandwinobject); de variabele j geeft het nummer van het vraagpunt

$$\begin{aligned} \min TCG = & \sum_i A(i) \cdot d1(i) + \sum_i B(i) \cdot d2(i) + \sum_i \sum_s E(i, s) \cdot d3(i, s) + \\ & + \sum_i \sum_j F(i, j) \cdot qw(i, j) + \sum_i \sum_j G(i, j) \cdot qb(i, j) + \sum_i \sum_k H(i, k) \cdot qx(i, k) \end{aligned} \quad (5.4)$$

ST

$$\sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} = a(j) \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.2)$$

$$\sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} - rq(i, 0) d1(i) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

$$\sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} - QA \cdot d1(i) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

$$\sum_j qw(i, j) - QA \cdot d2(i) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.6)$$

$$\sum_j \text{coef}(i, s, j) \cdot qb(i, j) - QB(i, s) d3(i, s) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad s = 1, \dots, S \quad (5.7)$$

$$\sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} - qx(i, k) - kq(i, k) \cdot d4(i, k) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (5.8)$$

$$qx(i, k) - Q(i, k) d4(i, k) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (5.9)$$

$$d1(i), d2(i), d3(i, s), d4(i, k), qw(i, j), qb(i, j), qx(i, k) \geq 0 \quad \forall i, j, k, s$$

$$d1(i), d2(i), d3(i, s), d4(i, k) \in D \quad \forall i, s, k$$

Waarbij: TCG	= de totale kosten
A(i)	= de kostenparameter die de vaste kosten geeft die samenhangen met het in productie nemen van zandwinobject i (i = 1, ..., n)
B(i)	= de kostenparameter die de vaste kosten geeft die samenhangen met het transport per auto vanuit zandwinobject i
E(i, s)	= de kostenparameter die de vaste kosten geeft die samenhangen met het persleidingtraject nummer s bij zandwinobject i

$F(i, j)$	= de kostenparameter die de variabele kosten geeft voor het zand dat vanuit winput i naar vraagpunt j per auto wordt getransporteerd
$G(i, j)$	= idem voor transport per persleiding
$H(i, k)$	= de kostenparameter die de reductie in de variabele kosten geeft als de putproduktie van zandwinobject i de hoeveelheid $kq(i, k)$ overschrijdt
$d1(i)$	= de dummi variabele die aangeeft of zandwinobject i al dan niet in produktie wordt genomen
$d2(i)$	= de dummi variabele die aangeeft of vanuit zandwinobject i al dan niet transport per auto plaats vindt
$d3(i, s)$	= de dummi variabele die aangeeft of bij het transport vanuit zandwinobject i gebruik gemaakt wordt van het (persleiding) traject nummer s
$d4(i, k)$	= de dummi variabele die aangeeft of de putproduktie van zandwinobject i de hoeveelheid $kq(i, k)$ overschrijdt
$qw(i, j)$	= de hoeveelheid zand die per auto van zandwinobject i naar vraagpunt j wordt getransporteerd
$qb(i, j)$	= de hoeveelheid zand die per persleiding van zandwinobject i naar vraagpunt j wordt getransporteerd
$qx(i, k)$	= de hoeveelheid waarmee de produktie van zandwinobject i de hoeveelheid $kq(i, k)$ overschrijdt
$a(j)$	= de vraag naar zand in vraagpunt j ($j = 1, \dots, m$)
$rq(i, 0)$	= de minimaal te winnen hoeveelheid zand als winput i in produktie wordt genomen
QA	= de totale hoeveelheid zand die gewonnen moet worden. Er geldt: $QA = \sum_j a(j)$
$QB(i, s)$	= $\sum_j \text{coef}(i, s, j) \cdot a(j)$
$Q(i, k)$	= $QA - kq(i, k)$

$kq(i, k)$ = hulpvariabele samenhangend met de vereiste
 nauwkeurigheid van de benadering van de aan
 te kopen grond
 $coef(i, s, j)$ = dummieconstante die aangeeft of er bij het
 transport per persleiding van zandwinobject
 i naar vraagpunt j gebruik gemaakt wordt
 van traject nummer s
 D = de verzameling dummi variablen

Dit is een gemengd geheeltallig lineair programmeringsprobleem met, voor
 het studiegebied ongeveer 1850 gewonen en 1750 dummi variablen*.
 Door de omvang van het probleem geeft het oplossen met behulp van
 één van de gebruikelijke oplossingsalgorithmes moeilijkheden. Het
 aantal iteraties dat nodig is om het optimum te bereiken is dan name-
 lijk te groot. Er moet worden gezocht naar een algorithme, toegespitst
 op de modelstructuur van het allocatiemodel, dat een kleiner aantal
 iteraties nodig heeft. In hoofdstuk 6 is een algorithme geformuleerd
 dat mogelijk aan deze voorwaarde voldoet. Of dit inderdaad het geval
 is moet nog nader onderzocht worden.

Bij de oplossing van het minimaliseringsprobleem wordt in de
 plaats van de gelijkheid (5.2) gebruik gemaakt van de in (5.10) gege-
 ven ongelijkheid.

$$\sum_i \{qb(i, j) + qw(i, j)\} \geq a(j) \quad (5.10)$$

Dit is toegestaan omdat de variabelen $qb(i, j)$ en $qw(i, j)$ met
 een positieve coëfficiënt in de doelstellingsfunctie van een minima-
 liseringsprobleem voorkomen (verg. (5.4)). Hierdoor zullen de varia-
 belen een zo klein mogelijke waarde hebben in de optimale situatie
 zodat toch aan (5.2) voldaan is. Wanneer de minimale oplossing gevon-
 den is moet worden gecontroleerd of aan (5.2) is voldaan. Als dit
 niet het geval is moet vergelijking (5.11) aan de beperkingen worden
 toegevoegd en moet opnieuw geminimaliseerd worden. (Uitgaande van
 het gevonden minimum).

*exclusief de slackvariabelen

$$\sum_i \{q_b(i, j) + q_w(i, j)\} \leq a(j) \quad (5.11)$$

De bepaling van de kostenparameters is beschreven in IJKELENSTAM (1980). Door de waarde van de kostenparameters te variëren kan de gevoeligheid van de optimale oplossing voor veranderingen in bepaalde kostencategorieën (b.v. energie) worden onderzocht.

Een uitbreiding van het kostenmodel door de invoering van extra kostencategorieën is mogelijk. Onder bepaalde voorwaarden is het mogelijk deze kosten in de kostenparameters op te nemen waardoor het kostenmodel niet verandert. Dit geldt voor onder andere:

- kosten die proportioneel zijn met de hoeveelheid zand die per as (q_w) of per persleiding (q_b) van zandwinobject naar vraagpunt wordt getransporteerd;
- kosten die proportioneel zijn met de omvang ($R(q)$) of de produktie (q) van een zandwinobject;
- vaste kosten die gekoppeld zijn aan het al dan niet in produktie nemen van een zandwinobject (d_1) of het al dan niet voorkomen van transport per as (d_2).

Voor andere kostencategorieën geldt dat het model moet worden aangepast door de invoer van nieuwe variabelen (b.v. mogelijkheid tot transport per schip of voor de benadering van een niet lineaire kostenrelatie) en/of extra beperkingen.

Wanneer hierdoor de modelstructuur niet essentieel verandert kan het in hoofdstuk 6 geformuleerde oplossingsalgoritme worden toegepast.

5.2. Invoering matrix notatie

Omdat bij de oplossing van het allocatieprobleem gebruik gemaakt wordt van de Revised Simplex methode (zie par. 6.5) moet de matrix notatie ingevoerd worden. Schrijf hiertoe het probleem als is weergegeven in (5.12).

$$\begin{aligned} \min TCG = & \sum_i \{A(i) \cdot d1(i) + B(i) \cdot d2(i) + \sum_s E(i, s) d3(i, s)\} + \\ & + \sum_i \left\{ \sum_j F(i, j) qw(i, j) + \sum_j G(i, j) qb(i, j) + \sum_k H(i, k) qx(i, k) \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

ST

$$\sum_i \{qw(i, j) + qb(i, j)\} \geq a(j) \quad j = 1, \dots, m$$

$$\sum_j \{qw(i, j) + qb(i, j)\} - rq(i, 0) d1(i) \geq 0$$

$$- \sum_j \{qw(i, j) + qb(i, j)\} + QA d1(i) \geq 0$$

$$- \sum_j qw(i, j) + QA d2(i) \geq 0$$

$$- \sum_j \text{coef}(i, s, j) qb(i, j) + QB(i, s) d3(i, s) \geq 0 \quad s = 1, \dots, S$$

$$\sum_j \{qw(i, j) + qb(i, j)\} - qx(i, k) + kq(i, k) d4(i, k) \geq 0 \quad k = 1, \dots, K$$

$$- qx(i, k) + Q(i, k) d4(i, k) \geq 0$$

$$d1(i), d2(i), d3(i, s), d4(i, k), qw(i, j), qb(i, j), qx(i, k) \geq 0 \quad \forall i, j, k, s$$

$$d1(i), d2(i), d3(i, s), d4(i, k) \in D \quad \forall i, j, k, s$$

Dit kan in matrix notatie worden geschreven zoals in (5.13) is weer-
gegeven:

$$\min TCG = c1 \cdot d + c2 \cdot q \quad (5.13)$$

ST

$$A1 \cdot d + A2 \cdot q \geq b$$

$$q \geq 0$$

$$d \in D$$

Hierbij is: d - de vector met dummievariabelen

$$d = \begin{pmatrix} d(1) \\ \vdots \\ d(n) \end{pmatrix}, \text{ met } d(i) = \begin{pmatrix} d1(i) \\ d2(i) \\ d3(i, 1) \\ \vdots \\ d3(i, S) \\ d4(i, 1) \\ \vdots \\ d4(i, K) \end{pmatrix}$$

c1 - de bij d behorende kostenvector

c1 = (c1(1), ..., c1(n)) met

$$c1(i) = (A(i) \ B(i) \ E(i, 1) \dots E(i, s) \ 0 \dots 0)$$

q - de vector met hoeveelheidsvariabelen

$$q = \begin{pmatrix} q(1) \\ \vdots \\ q(n) \end{pmatrix}, \text{ met } q(i) = \begin{pmatrix} qw(i, 1) \\ \vdots \\ qw(i, m) \\ qb(i, 1) \\ \vdots \\ qb(i, m) \\ qx(i, 1) \\ \vdots \\ qx(i, K) \end{pmatrix}$$

c2 - de bij q behorende kostenvector

$$c2 = (c2(1) \dots c2(n)) \text{ met } c2(i) = (F(i, 1) \dots F(i, m) \ G(i, 1) \dots \\ \dots G(i, m) \ H(i, 1) \dots H(i, K))$$

b - het rechter lid van de beperkingsvergelijking

$$A1 \cdot d + A2 \cdot q \geq b$$

$$b = \begin{pmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(m) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A1 en A2 de coëfficiëntmatrix van respectievelijk d en q in het linkerlid van de beperkingsvergelijking $A1 \cdot d + A2 \cdot q \geq b$, met

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ A1(1) & & \\ & \ddots & \\ 0 & & A1(n) \end{pmatrix}, \text{ waarbij } A1(i) = \begin{pmatrix} A1(i, 1) & A1(i, 2) & A1(i, 3, 1) & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & A1(i, 3, S) & A1(i, 4, 1) & \dots & A1(i, 4, K) \end{pmatrix}$$

opgebouwd uit de vectoren

$$A1(i, 1) = \begin{pmatrix} -rq(i, 0) \\ QA \end{pmatrix}; A1(i, 2) = (QA); A1(i, 3, s) = (QB(i, s))$$

en

$$A1(i, 4, k) = \begin{pmatrix} -kq(i, k) \\ Q(i, k) \end{pmatrix}$$

en

$$A2 = \begin{pmatrix} I_m & I_m & 0 & & I_m & I_m & 0 \\ A2(1) & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & A2(m) \end{pmatrix}, \text{ waarbij } A2(i) = \begin{pmatrix} A2(i, 1) \\ A2(i, 2) \\ A2(i, 3, 1) \\ \vdots \\ A2(i, 3, S) \\ A2(i, 4, 1) \\ \vdots \\ A2(i, 4, K) \end{pmatrix}$$

opgebouwd uit

$$A2(i, 1) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A2(i, 2) = (-1 \dots -1 \ 0 \dots 0 \ 0 \dots 0)$$

$$A2(i, 3, s) = (0 \dots 0 \text{ -coef}(i, s, 1) \dots \text{-coef}(i, s, m) \ 0 \dots 0)$$

$$A2(i, 4, k) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 $(2m + k)^e$ kolom

De in (5.13) gehanteerde schrijfwijze is uitgangspunt voor de rest van de nota.

6. DE FORMULERING VAN HET OPLOSSINGSALGORITHMME

6.1. Enkele opmerkingen over lineaire programmering

In dit hoofdstuk worden de methodische aspecten van de voorgestelde optimaliseringsprocedure behandeld. Voor een uitgebreide beschrijving van lineaire en geheeltallige programmering wordt verwezen naar bestaande tekstboeken. In dit hoofdstuk is volstaan met enkele algemene opmerkingen en met een beschrijving van de voorgestelde optimaliseringsprocedure (het algorithmme). De toepassing van deze procedure op het allocatieprobleem wordt beschreven in hoofdstuk 7.

De algemene vorm van een (lineair) minimaliseringsprobleem is

$$\begin{array}{ll} \min z = cx & (6.1) \\ x \end{array}$$

$$\text{ST. } Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

hierbij is c een $(1 \times n)$ -coëfficiëntenvector, b een $(m \times 1)$ -coëfficiëntenvector, A een $(m \times n)$ -coëfficiëntenmatrix en x de $(n \times 1)$ -vector van variabelen. Een probleem dat aan het probleem (6.1) gerelateerd is, is het probleem (6.2)

$$\begin{array}{ll} \max w = ub & (6.2) \\ u \end{array}$$

$$\text{ST. } uA \leq c$$

$$u \leq 0$$

waarbij u een $(m \times 1)$ -vector van variabelen is. Het probleem (6.2) wordt het duale probleem ten opzichte van (6.1) genoemd. (6.1) heet dan het primale probleem. Er geldt dat het duale probleem van een duaal probleem gelijk is aan het oorspronkelijke primale probleem. Dat wil zeggen het duale probleem van (6.2) is (6.1). Tussen het primale en het duale probleem bestaan een aantal relaties die gebruikt

kunnen worden bij de bepaling van de optimale oplossing:

1. voor alle toelaatbare oplossingsvectoren x en u van respectievelijk de problemen (6.1) en (6.2) geldt:

$$z = cx \geq uAx \geq ub = w \quad (6.3)$$

Dit wil zeggen dat de toelaatbare oplossingen (z) van het minimaliseringsprobleem altijd groter dan of gelijk aan alle toelaatbare oplossingen van het duale maximaliseringsprobleem zijn;

2. voor de optimale oplossingsvectoren x^* , u^* van respectievelijk de problemen (6.1) en (6.2) geldt:

$$z^* = cx^* = u^*b = w^* \quad (6.4)$$

Voorts geldt dat als één van beide problemen een eindig optimum heeft dat dan ook het andere probleem een eindig optimum heeft;

3. in het optimum geldt dat of de i^e primale (duale) variabele $x(i)$ ($u(i)$) gelijk is aan nul of dat de i^e slackvariabele* uit het duale (primale) probleem gelijk is aan nul. Dit laatste is het geval als voor de i^e beperking het '='-teken geldt. Invoering van slackvariabelen, respectievelijk de vectoren y en v , in (6.1) en (6.2) geeft:

$$\begin{array}{ll} \min_{x} z = cx & (6.1) \quad \max_{u} w = ub \end{array} \quad (6.2)$$

$$\begin{array}{ll} \text{St. } Ax - y = b & \text{ST } uA + v = c \\ x, y \geq 0 & u, v \geq 0 \end{array}$$

In het optimum (x^*, y^*) respectievelijk (u^*, v^*) geldt:

$$v^*x^* = u^*y^* = 0$$

Voor de oplossing van een lineair programmeringsprobleem kan de Simplex Methode of een hiervan afgeleide methode worden gebruikt

*Slackvariabelen zijn variabelen die ingevoerd worden om de ongelijkheden te transformeren in gelijkheden zonder dat de verzameling van toelaatbare oplossingsvectoren verandert

(zie o.a. HILLIER and LIEBERMAN, 1967). De Simplex methode is een iteratieve procedure die na iedere iteratie een betere (of even goede) oplossing voor het lineair programmeringsprobleem geeft zodat na een eindig aantal iteraties de optimale oplossing wordt bereikt. De Simplex methode maakt gebruik van het feit dat de toelaatbare oplossingsruimte convex is. Dit heeft tot gevolg dat het optimum optreedt in één hoek (of voor een hele zijde) van deze ruimte. Doordat de Simplex methode hoekpunten genereert en omdat de oplossingsruimte een eindig aantal hoekpunten heeft kan eenvoudig worden bewezen dat het optimum wordt bereikt na een eindig aantal iteraties.

6.2. Enkele opmerkingen over gemengd geheeltallige lineaire programmering

De mogelijkheid bestaat om aan een aantal variabelen van het primale en/of het duale probleem extra voorwaarden (b.v. geheeltalligheid) op te leggen. Echter het opleggen van extra voorwaarden heeft consequenties voor de relatie tussen het primale en het duale probleem. Stel dat aan de eerste n_1 elementen van x en aan de eerste m_1 elementen van u extra voorwaarden worden opgelegd. Dan kunnen de problemen (6.1) en (6.2) als volgt geschreven worden*:

$$\begin{array}{lll}
 \min_{x} z = cx & (6.6) \text{ en } & \max_{u} w = ub & (6.7) \\
 \text{ST . } Ax - y = b & & \text{ST . } uA + v = c \\
 x, y \geq 0 & & u, v \geq 0 \\
 x_1 \in X_1 & & u_1 \in U_1
 \end{array}$$

De extra voorwaarden voor $x_1 = (x_1, \dots, x_{n_1})$ en $u_1 = (u_1, \dots, u_{m_1})$ zijn vastgelegd in respectievelijk X_1 en U_1 . Door de toevoeging van de extra voorwaarden vervalt de eigenschap dat in het optimum moet gelden $cx^* = u^*b$. Nu geldt $cx^* \geq u^*b$. Alleen in het geval dat zowel $x_1 \in X_1$ als $u_1 \in U_1$ niet effectief is geldt het '='-teken. Het gevolg

*Opgemerkt moet worden dat deze problemen nu niet meer gerelateerd zijn als primaal en duaal probleem. In het vervolg van deze paragraaf wordt aangetoond dat, onder bepaalde voorwaarden, de primale en duale eigenschappen wel gelden

is dat er een afwijking ontstaat tussen z^* en w^* . In BALAS (1970) wordt een benadering beschreven waarmee, door minimalisering van dit verschil, de dualiteitseigenschappen hersteld worden.

Geprobeerd wordt het verschil $(z - w)$ tot nul te reduceren door de eerste n_1 beperkingen van het duale probleem en de eerste m_1 beperkingen van het primale probleem los te laten*. De afwijking die hierdoor ontstaat, gemeten als de gewogen som $u_1 \cdot y_1$ respectievelijk $v_1 \cdot x_1$ wordt als te minimaliseren grootte in de doelstellingsfunctie opgenomen. De problemen (6.6) en (6.7) worden vervangen door respectievelijk:

$$\max_{u_1} \min_x cx - u_1 \cdot y_1 \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & A^{11} x_1 + A^{12} x_2 - y_1 = b_1 \\ & A^{21} x_1 + A^{22} x_2 - y_2 = b_2 \\ & x_2, y_2 \geq 0 \\ & x_1 \in X_1, u_1 \in U_1 \end{aligned}$$

en

$$\min_{x_1} \max_u ub + v_1 \cdot x_1 \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & u_1 A^{11} + u_2 A^{21} + v_1 = c_1 \\ & u_1 A^{12} + u_2 A^{22} + v_2 = c_2 \\ & u_2, v_2 \geq 0 \\ & x_1 \in X_1, u_1 \in U_1 \end{aligned}$$

hierbij is: $A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$ met $A^{11} - (m_1 \times n_1)$ -matrix
 $A^{12} - (m_1 \times n_2)$ -matrix
 $A^{21} - (m_2 \times n_1)$ -matrix
 $A^{22} - (m_2 \times n_2)$ -matrix

*Loslaten van de beperkingen betekent dat de slackvariabelen $v_1 = (v_1, \dots, v_{n_1})$ en $y_1 = (y_1, \dots, y_{m_1})$ negatief mogen worden

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad c = (c_1 \ c_2), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$u = (u_1 \ u_2), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad v = (v_1 \ v_2)$$

Door toevoegen van de term $u_1 A^{11} x_1$ aan beide doelstellingsfuncties worden, als de coëfficiëntenmatrix A aan bepaalde voorwaarden voldoet, twee problemen verkregen die eenzelfde relatie hebben als een primaal en een duaal probleem. Dit kan worden ontleend aan twee in BALAS (1970) bewezen stellingen. Voor een goed begrip van deze stellingen zijn de volgende definities noodzakelijk.

Def. 6.1: Stel $H: V \rightarrow E^1$ is een functie. Definieer voor een verzameling $S \subset V$ de scalair γ , met $\gamma = \sup\{h(w) \mid w \in S\}$, als het supremum van h over S als geldt:

(a) $\gamma \geq h(w)$ voor alle $w \in S$ en

(b) er een reeks $w^k \in S$ bestaat zodanig dat $\lim_{k \rightarrow \infty} h(w^k) = \gamma$.

Het begrip supremum is een veralgemenisering van maximum. Hetzelfde geldt voor infimum (inf) ten opzichte van minimum.

Def. 6.2: Stel $s^1, \dots, s^p$ zijn elementen uit arbitraire vectorruimten.

Een vectorfunctie $G(s^1, \dots, s^p)$ heet *s c h e i d b a a r* (separable) met betrekking tot s^1 als er vectorfuncties $H(s^1)$, onafhankelijk van $s^2, \dots, s^p$, en $K(s^2, \dots, s^p)$, onafhankelijk van s^1 bestaan zodanig dat $G(s^1, \dots, s^p) = H(s^1) + K(s^2, \dots, s^p)$.

Def. 6.3: Stel $s^1, \dots, s^p$ zijn elementen uit arbitraire vectorruimten.

Een vectorfunctie $G(s^1, \dots, s^p)$ heet *s c h e i d b a a r i n c o m p o n e n t e n* (componentwise separable) als iedere component g_i van G kan worden geschreven als $g_i(s^1)$ of als $g_i(s^2, \dots, s^p)$.

Opnemen van de term $u_1 A^{11} v_1$ in de doelstellingsfunctie van de problemen (6.8) en (6.9) en substitutie* van $v_1 = c_1 - u_1 A^{11} - u_2 A^{21}$

*omdat v_1 en y_1 onbegrensd zijn kunnen ze worden uitgedrukt als een functie van u_1 en u_2 respectievelijk x_1 en x_2 . De gebruikte formuleringen volgen rechtstreeks uit de beperkingen van de problemen

en $y_1 = -b_1 + A^{11} x_1 + A^{12} x_2$ geeft:

$$z = \max_{u_1} \min_x cx + u_1(b_1 - A^{12} x_2) \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & A^{21} x_1 + A^{22} x_2 - y_2 = b_2 \\ & x_2, y_2 \geq 0 \\ & x_1 \in X_1, u_1 \in U_1 \end{aligned}$$

en

$$w = \min_{x_1} \max_u ub + (c_1 - u_2 \cdot A^{21}) x_1 \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & u_1 \cdot A^{12} + u_2 \cdot A^{22} + v_2 = c_2 \\ & u_2, v_2 \geq 0 \\ & x_1 \in X_1, u_1 \in U_1 \end{aligned}$$

De aan BALAS (1970) ontleende stellingen zijn:

Stelling 6.1: Als $f(r, s, t)$ scheidbaar is en $G(r, s, t)$ scheidbaar in componenten is met betrekking tot r of s dan geldt:

$$\begin{aligned} \inf_{s, r, t} \sup \{f(r, s, t) | G(r, s, t) \leq 0\} = \\ = \sup_r \inf_{s, t} \{\sup \{f(r, s, t) | G(r, s, t) \leq 0\}\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Stelling 6.2: Veronderstel dat v_2 (of y_2) scheidbaar in componenten is met betrekking tot u_1 (of x_1). Dan bestaat er, als het stelsel (6.10) een optimale oplossing $(\bar{x}, \bar{u}_1)$ heeft, een $\bar{u}_2$ zodanig dat $(\bar{u}, \bar{x}_1)$, met $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, een optimale oplossing van het stelsel (6.11) is waarbij geldt:

$$c\bar{x} - \bar{u}_1 \cdot \bar{y}_1 + \bar{u}_1 A^{11} \bar{x}_1 = \bar{u}_b + \bar{v}_1 \cdot \bar{x}_1 + \bar{u}_1 A^{11} \bar{x}_1 \quad (6.13)$$

$$\bar{u}_2 \cdot \bar{y}_2 = \bar{v}_2 \cdot \bar{x}_2 = 0 \quad (6.14)$$

en

$$(c_2 - \bar{u}_1 A^{12}) \bar{x}_2 = \bar{u}_2(b_2 - A^{21} \bar{x}_1) \quad (6.15)$$

Toepassing van Stelling 6.1 op de problemen (6.10) en (6.11) geeft

$$z = \max_{u1} \min_{x1} \{c1 \cdot x1 + u1 \cdot b1 + \min_{x2} \{(c2 - u1 A^{12}) x2\}\} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & A^{22} x2 - y2 = b2 - A^{21} x1 \\ & x2, y2 \geq 0 \\ & x1 \in X1, u1 \in U1 \end{aligned}$$

en

$$w = \min_{x1} \max_{u1} \{c1 \cdot x1 + u1 \cdot b1 + \max_{u2} \{u2(b2 - A^{21} x1)\}\} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & u2 A^{22} + v2 = c2 - u1 A^{12} \\ & u2, v2 \geq 0 \\ & x1 \in X1, u1 \in U1 \end{aligned}$$

Voor gegeven $x1$ en $u1$ zijn de problemen binnen de binnenste accolades in (6.16) en (6.17) dual ten opzichte van elkaar. Stelling 6.2 geeft dat hier de dualiteitseigenschappen gelden (verg. (6.14) en (6.15)). In Stelling 6.2 wordt daarnaast gesteld dat in het optimum geldt $\bar{z} = \bar{w}$. Dit gaat slechts dan op als de coëfficiëntenmatrix A aan bepaalde voorwaarden voldoet. Deze voorwaarden worden opgelegd om te garanderen dat $v2$ (of $y2$) scheidbaar in componenten is met betrekking tot $u1$ (of $x1$). Deze voorwaarden zijn:

$$|A_{.j}^{12}| \cdot |A_{.j}^{22}| = 0 \quad j = n_1 + 1, \dots, n \quad (6.18)$$

of

$$|A_{i.}^{21}| \cdot |A_{i.}^{22}| = 0 \quad i = m_1 + 1, \dots, m \quad (6.19)$$

Hierbij is $|B_{i.}|$ de i^e rij en $|B_{.j}|$ de j^e kolom van de matrix B .

In het geval dat alleen aan $x1$ extra voorwaarden worden opgelegd (zoals b.v. bij gemengd geheeltallige programmering het geval is) geldt dat $u2 = u$ en dus dat $A^{21} = \emptyset$. Hier is dus aan de voorwaarden (6.18) en (6.19) voldaan. De problemen (6.16) en (6.17) kunnen nu

geschreven worden als respectievelijk*:

$$\min_{x1} c1 \cdot x1 + c2 \cdot x2 \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & A2 \cdot x2 - y = b - A1 \cdot x1 \\ & x2, y \geq 0 \\ & x1 \in X1 \end{aligned}$$

en

$$\min_{x1} \max_u ub + (c1 - uA1) x1 = \min_{x1} \{c1 \cdot x1 + \max_u \{u(b - A1 \cdot x1)\}\} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & uA2 + v2 = c2 \\ & u, v2 \geq 0 \\ & x1 \in X1 \end{aligned}$$

Bij gegeven waarden voor $x1$ is (6.20) het duale probleem van (6.21).

Volgens Stelling 6.2 geldt in het optimum:

$$c1 \cdot \bar{x}1 + c2 \cdot \bar{x}2 = c1 \cdot \bar{x}1 + \bar{u}(b - A1 \cdot \bar{x}1) \quad (6.22)$$

Dit betekent dat als met behulp van een oplossingsprocedure de optimale oplossing voor het in (6.21) beschreven probleem is bepaald dat dan tevens de optimale $\bar{x}1$ voor het in (6.20) beschreven probleem bepaald is. Het in (6.21) beschreven gemengd geheeltallige lineair programmeringsprobleem wordt gereduceerd tot het in (6.23) gegeven lineaire programmeringsprobleem in $x2$.

$$\min_{x2} c2 \cdot x2 \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad & A2 \cdot x2 - y = b - A1 \cdot \bar{x}1 \\ & x2, y \geq 0 \end{aligned}$$

*Schrijf $A1$ voor A^{11} en $A2$ voor A^{22}

6.3. Formulering van een oplossingsalgorithme

De in de onderhavige nota voorgestelde oplossingsprocedure gaat uit van het hiervoor beschreven principe. Voor het duale probleem (6.21) worden achtereenvolgens bepaald:

- het maximum met betrekking tot u voor gegeven waarden van de elementen van x_1 ;
- het minimum met betrekking tot x_1 voor gegeven waarden van de elementen van u .

Dit wordt herhaald totdat de optimale oplossing is bereikt (en herkend!). Substitutie van de optimale x_1 in het primale probleem (6.23) geeft een normaal lineair programmeringsprobleem in x_2 . De procedure, die voor een deel ontleend is aan HU (1970), is de volgende:

STAP 0: bepaal een toelaatbare oplossingsvector $u(i)$ voor het in (6.21) weergegeven duale probleem. Er moet dus gelden:

$$u(i) A_2 \leq c_2.$$

$$\text{Stel } i = 0.$$

STAP 1: bepaal $\bar{z}(i)$ en $\bar{x}_1(i)$ zodanig dat:

$$\bar{z}(i) = \min_{x_1} z \quad (6.24)$$

$$\text{ST } z \geq c_1 \cdot x_1 + u(t) \{b - A_1 \cdot x_1\} \quad t = 0, \dots, i$$

$x_1 \in X_1$ (d.w.z. x_{1j} is een nul- één variabele)

STAP 2: bepaal $\bar{u}(i + 1)$, de optimale oplossing van het lineaire programmeringsprobleem dat in (6.25) is gegeven. $\bar{x}_1(i)$ is gegeven

$$\max_u u \{b - A_1 \cdot \bar{x}_1(i)\} \quad (6.25)$$

$$\text{ST } u A_2 + v_2 = c_2$$

$$u, v_2 \geq 0$$

$$\text{Als geldt: } \bar{z}(i) - c_1 \cdot \bar{x}_1(i) = \bar{u}(i + 1) \{b - A_1 \cdot \bar{x}_1(i)\},$$

ga naar STAP 4

$$\bar{z}(i) - c_1 \cdot \bar{x}_1(i) < \bar{u}(i + 1) \{b - A_1 \cdot \bar{x}_1(i)\},$$

ga naar STAP 3

STAP 3: voeg $z \geq c1 \cdot x1 + \bar{u}(i+1)\{b - A1 \cdot x1\}$ als beperking toe aan (6.24).

Stel $i = i + 1$ en ga naar STAP 1.

STAP 4: substitueer $\bar{x}1(i)$ in (6.23) en bepaal de optimale $x2$.

In de bovenstaande procedure kan in STAP 2 en in STAP 4 gebruik gemaakt worden van een standaardoplossingsprocedure voor lineaire programmering. Voorgesteld wordt de in par. 6.5 besproken Revised Simplex methode te gebruiken. In STAP 1 moet een lineair programmeringsprobleem bestaande uit nul-één variabelen worden opgelost. In de volgende paragraaf wordt hiervoor een procedure besproken.

6.4. Een selectieprocedure voor nul-één variabelen

Een probleem bestaande uit nul-één variabelen is een speciaal geval van een geheeltallig lineair programmeringsprobleem. In deze paragraaf wordt een oplossingsalgorithme besproken voor problemen bestaande uit nul-één variabelen. Het algorithme is toegespitst op het in (6.26) gegeven minimaliseringsprobleem.

$$\begin{array}{ll} \min_{x1} & z \\ \text{ST} & z \geq c1 \cdot x1 + \bar{u}(0)\{b - A1 \cdot x1\} \\ & \vdots \\ & z \geq c1 \cdot x1 + \bar{u}(T)\{b - A1 \cdot x1\} \\ & x1 \in X1 \end{array} \quad (6.26)$$

Dit komt overeen met het in (6.24) gegeven probleem dat is opgenomen in het in par. 6.3 beschreven oplossingsalgorithme.

$$\text{Definieer} \quad \alpha(t) = \beta(t) + \sum_j \gamma_j(t) x1_j$$

$$\beta(t) = \bar{u}(t) \cdot b$$

$$\text{en} \quad \gamma_j(t) = c1(j) + \bar{u}(t) A1_{.j} \quad (A1_{.j} \text{ is de } j^{\text{e}} \text{ kolom van de matrix } A1)$$

Substitutie van deze definities in (6.26) geeft

$$\min_{x_1} z \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \text{ST } z &\geq \alpha(t) & t = 0, 1, \dots, T \\ x_1 &\in X_1 \end{aligned}$$

Dit betekent dat de minimale z , dat is $\bar{z}(T+1)$, gelijk is aan de grootste $\alpha(t)$.

Definieer de verzameling GN als:

$$GN = \{j \mid \gamma_j(t) \leq 0 \text{ voor alle } t \text{ met } \gamma_j(t) < 0 \text{ voor tenminste één } t\} \quad (6.28)$$

Dit houdt in dat GN de verzameling van indices j is van die variabelen x_{1j} die in alle beperkingen (in (6.27)), een coëfficiënt kleiner dan of gelijk aan nul hebben met in tenminste één beperking een coëfficiënt kleiner dan nul. Als aan de x_{1j} met $j \in GN$ de waarde één is toegekend is één of meer van de $\alpha(t)$ kleiner en niet één van de $\alpha(t)$ groter dan in het geval dat aan deze x_{1j} de waarde nul is toegekend. In de optimale oplossing zullen deze variabelen de waarde één hebben*.

Analoog geldt voor de variabelen x_{1j} met $j \in GP$ dat deze x_{1j} in de optimale oplossing de waarde nul zullen hebben. Hierbij geldt:

$$GP = \{j \mid \gamma_j(t) \geq 0 \text{ voor alle } t\} \quad (6.29)$$

Door toekenning van de waarde één aan de x_{1j} met $j \in GN$ en de waarde nul aan de x_{1j} met $j \in GP$ kan het aantal variabelen in het minimaliseringsprobleem gereduceerd worden. Definieer:

$$\tilde{\beta}(t) = \beta(t) + \sum_{j \in GN} \gamma_j(t) \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (6.30)$$

*Als $\bar{z}(T+1)$ voor meerdere oplossingsvectoren $\bar{x}_1(T+1)$ optreedt zal voor minstens één van deze oplossingsvectoren gelden dat $x_{1j}(T+1) = 1$ voor $j \in GN$

en

$$G = \{j | j \notin GN, j \notin GP\}, \quad (6.31)$$

dan geldt:

$$\alpha(t) = \tilde{\beta}(t) + \sum_{j \in G} \gamma_j(t) \cdot x_{1j} \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (6.32)$$

De x_{1j} met $j \in G$ komen in verschillende beperkingen met tegengesteld teken voor. Aan deze x_{1j} moeten waarden worden toegekend zodanig dat $\max\{\alpha(t)\}$ zo klein mogelijk is. Hiertoe is een zoekprocedure ontwikkeld die de optimale oplossing bepaalt (en herkent). Op systematische wijze worden alle toelaatbare oplossingsvectoren x_1 onderzocht, met uitzondering van die vectoren waarvan in het betreffende stadium in de procedure duidelijk is dat deze niet de optimale oplossingsvector kunnen zijn. De spilvariabele in de procedure is x_{1j_1} . Dit is de variabele met de kleinste coëfficiënt in de effectieve beperking (de grootste $\alpha(t)$). Dat wil zeggen $\gamma_{j_1}(t_1) = \min_{j \in G} \{\gamma_j(t_1)\}$ en $\alpha(t_1) = \max\{\alpha(t)\}$. Door aan deze variabele de waarde één toe te kennen kan de grootste reductie in $\alpha(t_1)$ en mogelijk in z worden verkregen. De procedure is de volgende:

STAP 0: Stel: $\alpha^* = \max_t \{\tilde{\beta}(t)\}$. α^* is de kleinste waarde van z die in de voorgaande iteraties is bereikt

$x_1^* = (0 \dots 0)^T$ x_1^* is de optimale oplossingsvector behorend bij α^*

$x_{1j} = 0 \quad j \in G$

$GM = \emptyset$ GM is de verzameling indices j van de variabelen x_{1j} waaraan een waarde is toegekend

$m = 1$

STAP 1: Bereken voor alle t : $\alpha(t) = \tilde{\beta}(t) + \sum_{j \in GM} \gamma_j(t) x_{1j}$

Bepaal de maximale $\alpha(t)$: $\alpha(t_1) = \max_t \{\alpha(t)\}$.

Als $\alpha(t_1) < \alpha^*$, stel dan $\alpha^* = \alpha(t_1)$

$$\begin{aligned} \text{en } x_{1j}^* &= x_{1j} & j \in GM \\ &= 0 & j \in G \end{aligned}$$

STAP 2: Als $G = \emptyset$; ga naar STAP 5.

Bepaal in de beperking $\alpha(t_1)$ de variabele x_{j_1} met de kleinste coëfficiënt.

$$\text{Dus } \gamma_{j_1}(t_1) = \min_{j \in G} \{\gamma_j(t_1)\}$$

Als geldt $\gamma_{j_1}(t_1) < 0$, stel dan $n(m) = j_1$ en ga naar STAP 3

$\gamma_{j_1}(t_1) \geq 0$, ga dan naar STAP 5 (geen verbetering in de effectieve beperking meer mogelijk omdat alle $\gamma_j(t_1) \geq 0$ (voor $j \in G$)).

STAP 3: Voor $x_{j_1} = 0$ en $x_{j_1} = 1$ wordt voor alle $\alpha(t)$ bepaald wat de kleinst mogelijke waarde is die kan worden bereikt als de x_j met $j \in GM$ gegeven zijn. De x_j met $j \in G$ (en $j \neq j_1$) die in een beperking een negatieve coëfficiënt hebben krijgen dan de waarde één.

$$\text{Bepaal } GHN(t) = \{j | j \neq j_1, j \in G, \gamma_j < 0\} \quad t = 0, 1, \dots, T$$

De kleinst mogelijke waarde van $\alpha(t)$ is dan; als $x_{j_1} = \ell$,

$$\alpha_h(t, \ell) = \alpha(t) + \sum_{j \in GHN(t)} \gamma_j(t) + \gamma_{j_1}(t) \cdot x_{j_1} \quad (6.33)$$

$$\ell = 0, 1; t = 0, 1, \dots, T$$

$$\text{Stel } \alpha_m(\ell) = \max_t \{\alpha_h(t, \ell)\} \quad \ell = 0, 1$$

Dan is $\alpha_m(\ell)$ de ondergrens voor $\bar{z}(T+1)$ als $x_{j_1} = \ell$.

Aan x_{j_1} wordt vervolgens die waarde ℓ_1 toegekend waarvoor $\alpha_m(\ell)$ het kleinst is:

$$\alpha_m(\ell_1) = \min_{\ell} \{\alpha_m(\ell)\} \quad (\text{als } \alpha_m(0) = \alpha_m(1), \text{ kies } \ell = 1) \quad (6.34)$$

Definieer $\theta(j_1) = \max_{\ell} \{\alpha_m(\ell)\}$. $\theta(j_1)$ is een toetsparameter.

Als $\alpha_m(\ell_1) < \alpha^*$, ga naar STAP 4

$\alpha_m(\ell_1) = \alpha^*$, ga naar STAP 5

STAP 4: Stel $x_{j_1} = \ell_1$, $G = G/j_1$, $GM = GM \cup j_1$, $m = m + 1$ en ga naar stap 1.

STAP 5: Er is geen verbetering van α^* meer mogelijk door aan één van de x_{l_j} met $j \in G$ de waarde één toe te kennen. Vervolgens moet worden onderzocht of een reductie van α^* mogelijk is door één of meer van de x_{l_j} met $j \in GM$ een andere waarde te geven. Stel $m = m - 1$. Als $m = 0$ dan is geen verbetering meer mogelijk. Ga naar stap 6.

$j_1 = n(m)$, dat is de index van de spilvariabele in de voorlaatste iteratie. Als $\theta(j_1) \geq \alpha^*$ dan is door verandering van de waarde van $x_{l_{j_1}}$ geen verbetering mogelijk (in dit stadium). Verwijder j_1 uit GM , voeg j_1 toe aan G en herhaal STAP 5. Als $\theta(j_1) < \alpha^*$ dan kan α^* mogelijk gereduceerd worden. Stel $\bar{x}_{l_{j_1}} = 1 - \bar{x}_{l_{j_1}}$; $\theta(j_1) = 10^6$; $m = m + 1$ en ga naar STAP 1.

STAP 6: Er is geen reductie van α^* meer mogelijk, alle mogelijkheden zijn afgetast. De optimale oplossing is $\bar{z}(T + 1) = \alpha^*$
 $\bar{x}_l(T + 1) = x_l^*$

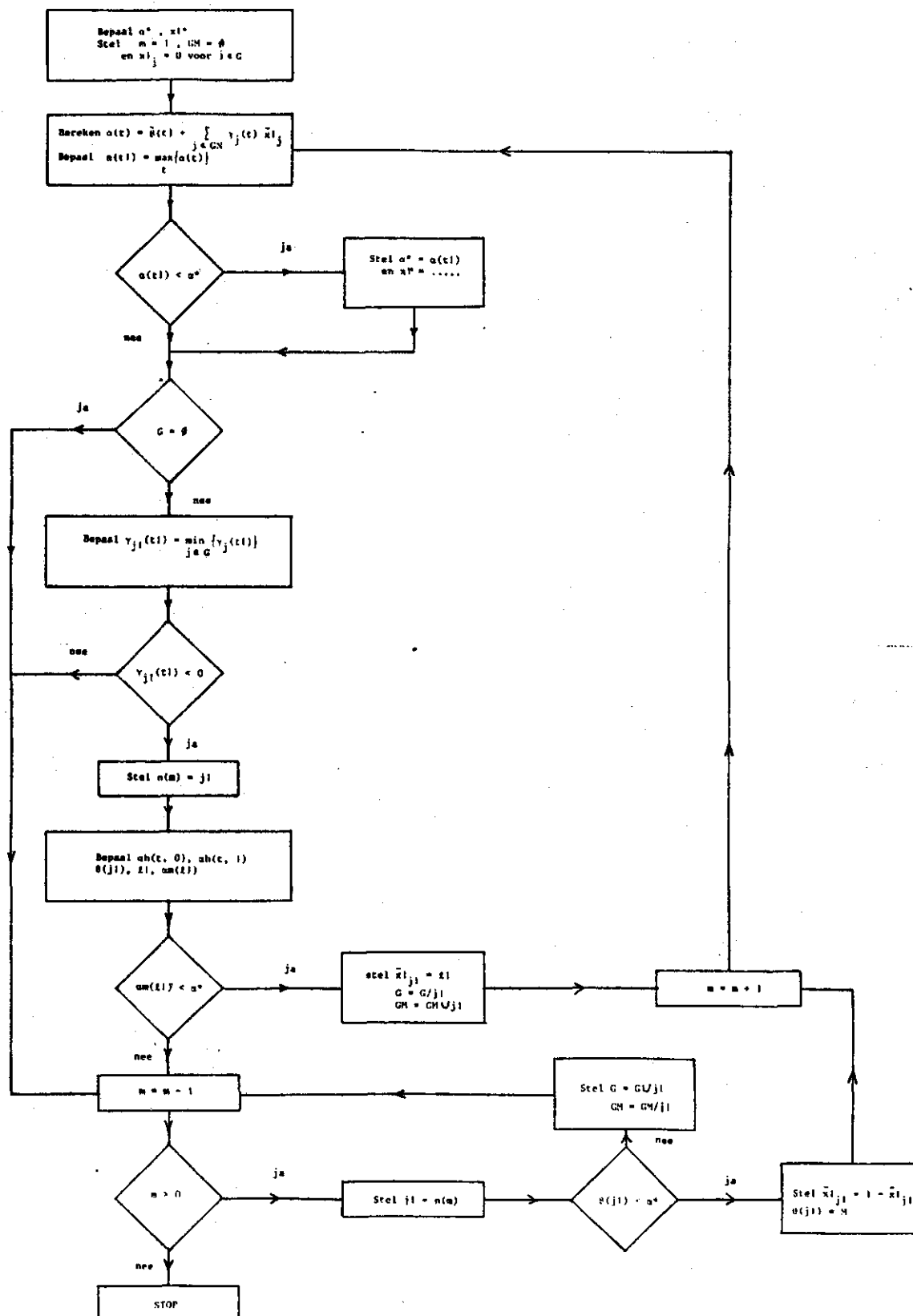
In schema 6.1 is de selectie procedure schematisch weergegeven.

De procedure wordt geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 6.1

$$\begin{array}{ll}
 \min & z \\
 \text{ST} & z \geq 10 - 8x_1 + 15x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 11x_5 \\
 & z \geq 13 + 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 - x_4 - 6x_5 \\
 & z \geq 9 - 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \\
 & z \geq 15 - 3x_1 - 6x_2 + 11x_3 - 3x_4 - 4x_5 \\
 & z \geq 11 + 8x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 + x_5
 \end{array} \tag{6.35}$$

Schema 6.1. Selectie procedure voor de dummievariabelen



Tabel 6.1. De belangrijkste' grootheden in voorbeeld 6.1

[illegible]

In tabel 6.1 zijn voor elke iteratie de belangrijkste grootheden gegeven. Deze tabel gaat uit van de in STAP 0 bepaalde oplossing $\alpha^* = \max_t \{\tilde{\beta}(t)\}$. Dit geeft $\alpha^* = \max\{10, 13, 9, 15, 11\}$. Voor de bijbehorende x_1^* geldt $x_{1j}^* = 0 \quad j \in G$. In tabel 6.1 is de getransponeerde van x_1^* opgenomen. Om een illustratie te geven van tabel 6.1 wordt de eerste iteratie besproken:

- in STAP 1, met $m = 1$, geldt $\alpha(4) = \max_t \{\alpha(t)\} = 15$. Omdat deze waarde gelijk is aan α^* wordt overgegaan naar STAP 2;
- in STAP 2 wordt $\gamma_{j1}(4)$ bepaald. $\gamma_{j1}(4) = \min\{-3, -6, 11, -3, -4\} = -6$ met $j1 = 2$.

Er geldt $\gamma_2(4) = -6 < 0$, stel nu $n(1) = 2$ en ga naar STAP 3;

- in STAP 3 worden $\theta(j1)$, $\ell 1$ en $\alpha m(\ell 1)$ bepaald. Dit gaat als volgt:

voor $t = 1$ geldt $GHN(1) = \{1, 5\}$, dit zijn de indices van de negatieve coëfficiënten in (6.35)

dit geeft $\alpha h(1, 0) = 10 - 8 - 11 = -9$

en $\alpha h(1, 1) = 10 - 8 - 11 + 15 = 6$

hierbij is gebruik gemaakt van vergelijking (6.33).

Op analoge wijze kunnen de andere $\alpha h(t, \ell)$ worden bepaald (zie tabel 6.1).

Nu geldt $\alpha m(0) = \max\{-9, 6, 4, 5, 1\} = 6$

$\alpha m(1) = \max\{6, -6, -1, -1, 2\} = 6$

$\theta(2) = \max\{6, 6\} = 6$.

Omdat $\alpha m(0) = \alpha m(1)$ geldt dat $\ell 1 = 1$. Er geldt $m(1) = 6 < \alpha^*(= 15)$, ga dus naar STAP 4;

- STAP 4 geeft $x_{12} = \ell 1 = 1$, $GM = \{2\}$ en $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}/2 = \{1, 3, 4, 5\}$.

Stel vervolgens $m = m + 1 = 1 + 1 = 2$ en ga naar STAP 1.

Opmerking: in tabel 6.1 is alleen GM opgenomen en niet de verzameling G. De verzameling G kan worden bepaald met behulp van vergelijking (6.36):

$$G = \{1, 2, 3, 4, 5\}/GM \quad (6.36)$$

De optimale oplossing (onderste rij in tabel 6.1) is:

$$z^* = 12$$

en $x_1^* = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$, dat wil zeggen $x_{11}^* = x_{12}^* = x_{13}^* = x_{14}^* = 0$ en $x_{15}^* = 1$

6.5. De Revised Simplex methode

In deze paragraaf wordt een beschrijving gegeven van de Revised Simplex methode waarbij niet nader wordt ingegaan op de (theoretische) achtergronden. Uitgangspunt van deze beschrijving is het in (6.37) beschreven maximaliseringsprobleem.

$$\begin{array}{ll} \max z = cx & (6.37) \\ \text{ST} & \\ Ax \leq b & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

Hierbij is c een $(1 \times n)$ vector, x een $(n \times 1)$ vector, A een $(m \times n)$ matrix en b een $(m \times 1)$ vector. Dit kan ook geschreven worden als:

$$\begin{array}{ll} \max z = cx & (6.38) \\ \text{ST} & \\ [A \ I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b & \\ x, x_s \geq 0 & \end{array}$$

waarbij x_s een vector met slackvariabelen is. Definieer nu de vector met basisvariabelen* x_B met bijbehorende kostenvector c_B en basis (coëfficiënten) matrix B . Dan geldt:

$$[A \ I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = B x_B \quad (6.39)$$

* Definitie: Als er een stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden ($n > m$) is kan een basisoplossing worden verkregen door m variabelen uit te drukken in de resterende $(n - m)$ variabelen en deze $(n - m)$ variabelen vervolgens nul te stellen. Een toelaatbare basisoplossing is een basisoplossing waarvan alle variabelen niet negatief (≥ 0) zijn. Een niet gedegenerende toelaatbare basisoplossing is een basisoplossing waarvan alle m variabelen positief (> 0) zijn. De m variabelen die deel uitmaken van de basisoplossing zijn de basisvariabelen; de resterende $(n - m)$ variabelen zijn de niet-basisvariabelen

waaruit is af te leiden:

$$x_B = B^{-1} b \quad (6.40)$$

en

$$B^{-1} [A \ I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = B^{-1} b \quad (6.41)$$

Hiervan wordt gebruik gemaakt bij toepassing van de Revised Simplex methode.

De werkwijze is als volgt:

STAP 1: bepaal de nieuwe basis variabele. Dit is de variabele waarvoor $c_B B^{-1} A_j - c_j$ negatief en minimaal is. Stel dit is de variabele x_k .

STAP 2: bepaal de variabele die de basis verlaat. Dit is de variabele waarvoor b'_i / a'_{ik} minimaal is (met positieve a'_{ik}). Stel dit is de variabele x_r .

Hierbij is $A'_k = B^{-1} A_k$ en $b' = B^{-1} b$ (A_k is de k^e -kolom van de matrix A).

STAP 3: pas B^{-1} aan aan de veranderde situatie. Er geldt:

$$B_{\text{new}}^{-1} = E \cdot B_{\text{old}}^{-1} \quad (6.42)$$

$$\text{waarbij } E = [u_1, \dots, u_{r-1}, \eta, u_{r+1}, \dots, u_m] \text{ met } \eta = \begin{pmatrix} -a'_{1k}/a'_{rk} \\ \vdots \\ 1/a'_{rk} \\ \vdots \\ -a'_{mk}/a'_{rk} \end{pmatrix}$$

en u_i een $(1 \times m)$ vector bestaande uit $(m - 1)$ nullen en een één op de i^e positie.

STAP 4: ga terug naar STAP 1.

De optimale oplossing is bereikt als voor alle niet basis variabelen geldt:

$$c_B B^{-1} A_j - c_j \geq 0 \quad (6.43)$$

Voor de optimale oplossing geldt nu: $x_B = B^{-1} b$

$$z = c_B x_B$$

De revised Simplex methode maakt gebruik van de volgende relaties:

$$A_{\text{new}} = B^{-1} A_{\text{old}} \quad (6.44)$$

$$b_{\text{new}} = B^{-1} b_{\text{old}} \quad (6.45)$$

$$\text{en } c_{\text{new}} = c_B B^{-1} A_{\text{old}} - c_{\text{old}} \quad (6.46)$$

De werking van de Revised Simplex methode wordt geïllustreerd in voorbeeld 6.2.

Voorbeeld 6.2:

Ga uit van het in (6.47) gegeven maximaliseringsprobleem:

$$\max x_0 = 3 x_1 + 5 x_2 \quad (6.47)$$

$$\text{ST } x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$3 x_1 + 2 x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Er geldt dus: } c = (3 \ 5), \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Introductie van slackvariabelen geeft voor de toelaatbare oplossingsruimte (de beperkingen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Kies voor de startoplossing als basisvector $x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$,

dan geldt $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$ en $c_B = (0 \ 0 \ 0)$.

Toepassing van de Revised Simplex methode geeft:

1e iteratie

STAP 1: $c_B B^{-1} A_1 - c_1 = 0 - 3 = -3$
 $c_B B^{-1} A_2 - c_2 = 0 - 5 = -5$ } $\rightarrow x_2$ is de nieuwe basis-
 basisvariabele (immers $-5 < -3$)

STAP 2: $A'_2 = B^{-1} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $b' = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$

Dit geeft: $b'_1/a'_{12} = 4/0 = \infty$
 $b'_2/a'_{22} = 6/1 = 6$
 $b'_3/a'_{32} = 18/2 = 9$ } $\rightarrow x_{B_2} = x_4$ wordt niet-basis
 variabele ($6 < 9 < \infty$)

De nieuwe basis is $X_B = (x_3 \ x_2 \ x_5)$ met $c_B = (0 \ 5 \ 0)$

STAP 3: $\eta = \begin{pmatrix} -0/1 \\ 1/1 \\ -2/1 \end{pmatrix}$ Dit geeft $B_{\text{new}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

STAP 4: ga naar STAP 1

2e iteratie

STAP 1: Bereken $c_B B^{-1} = (0 \ 5 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 5 \ 0)$

Dit geeft: $c_B B^{-1} A_1 - c_1 = 0 - 3 = -3$
 $c_B B^{-1} A_4 - c_4 = 5 - 0 = 5 > 0$ } $\rightarrow x_1$ is de nieuwe
 basisvariabele

$$\text{STAP 2: } A'_1 = B^{-1} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b' = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dit geeft: } \left. \begin{array}{l} b'_1/a'_{11} = 4/1 = 4 \\ b'_2/a'_{12} = 6/0 = \infty \\ b'_3/a'_{13} = 6/3 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_{B_3} = x_5 \text{ verlaat} \\ \text{de basis} \end{array}$$

De nieuwe basis is $X_B = (x_3 \ x_2 \ x_1)$ met $c_B = (0 \ 5 \ 3)$

$$\text{STAP 3: } n = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -0/3 \\ +1/3 \end{pmatrix}, \text{ dit geeft } B_{\text{new}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

STAP 4: Ga naar STAP 1.

3e iteratie

$$\text{STAP 1: } c_B B^{-1} = (0 \ 5 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0 \ 3 \ 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dit geeft: } c_B B^{-1} A_4 = 3 - 0 = 3 > 0 \\ c_B B^{-1} A_5 = 1 - 0 = 1 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{huidige basis} \\ \text{is optimaal} \end{array}$$

De optimale basis is $(x_3 \ x_2 \ x_1)$ met

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dit geeft voor het maximum:

$$x_0 = c_B x_B = 0 \times 2 + 5 \times 6 + 3 \times 2 = 36$$

7. HET ALLOCATIEMODEL

7.1. Algemeen

In de voorgaande hoofdstukken zijn aan de orde geweest de kosten verbonden aan de zandwinning, de formulering van het allocatiemodel (hfdst. 5) en enkele algemene onderwerpen uit de lineaire programmering, resulterend in de formulering van een oplossingsalgoritme (hfdst. 6). In het onderhavige hoofdstuk wordt dit samengevoegd en wordt het oplossingsalgoritme toegepast op het allocatiemodel.

In hoofdstuk 5 is het allocatiemodel als volgt geformuleerd:

$$\min TCG = c_1 \cdot d + c_2 \cdot q \quad (5.13)$$

$$ST : A_1 \cdot d + A_2 \cdot q \geq b$$

$$q \geq 0$$

$$d \in D$$

Voor een verklaring van de symbolen wordt verwezen naar hoofdstuk 5. In het kort kan worden gesteld dat c_1 en c_2 kostenvectoren zijn, dat de vector d bestaat uit dummievariabelen en de vector q uit hoeveelheidsvariabelen.

Analoog aan (6.21) kan het met het allocatiemodel corresponderende duale probleem worden weergegeven als:

$$\min_{d, u} \max_{u, d} u b + (c_1 - u \cdot A_1) d \quad (7.1)$$

$$ST \quad u A_2 \leq c_2$$

$$u \geq 0$$

$$d \in D$$

hierbij is $u = (u(0) \ u(1) \ \dots \ u(n))$

met $u(0) = (u(0, 1) \ \dots \ u(0, m))$

en $u(i) = (u(i, 1, 1) \ u(i, 1, 2) \ u(i, 2) \ u(i, 3, 1) \ \dots$

$\dots u(i, 3, S) \ u(i, 4, 1) \ u(i, 5, 1) \ \dots u(i, 4, K) \ u(i, 5, K))$

uitschrijven van het duale probleem (7.1) en invoeren van slackvariabelen geeft:

$$\min_d \max_u \sum_j u(0, j) \cdot a(j) + \sum_i \left[\{A(i) + r_q(i, 0) \cdot u(i, 1, 1) - Q_A \cdot u(i, 1, 2)\} d_1(i) + \right. \\ \left. + \{B(i) - Q_A \cdot u(i, 2)\} d_2(i) + \sum_s \{E(i, s) - Q_B(i, s) \cdot u_3(i, s)\} d_3(i, s) + \right. \\ \left. + \sum_k \{kq(i, k) \cdot u(4, i, k) - Q(i, k) u(i, 5, k)\} d_4(i, k) \right] \quad (7.2)$$

ST

$$u(0, j) + u(i, 1, 1) - u(i, 1, 2) - u(i, 2) + \sum_k u(i, 4, k) + XS(1, i, j) = F(i, j)$$

$$u(0, j) + u(i, 1, 1) - u(i, 1, 2) - \sum_s \text{coef}(i, s, j) \cdot u(3, i, s) + \sum_k u(i, 4, k) + \\ + XS(2, i, j) = C(i, j)$$

$$- u(i, 4, k) - u(i, 5, k) + XS(3, i, k) = H(i, k)$$

$$XS, u \geq 0$$

$$d \in D$$

Voor de beperkingen geldt: $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, K$.

Voordat het in hoofdstuk 6 beschreven oplossingsalgorithme kan worden toegepast moet een toelaatbare (start)oplossingsvector $\bar{u}(0)$ bepaald worden. Ten einde het aantal iteraties zo klein mogelijk te maken moet deze oplossingsvector zo dicht mogelijk bij de uiteindelijke optimale oplossingsvector liggen (Er wordt immers steeds een 'betere' oplossingsvector gegenereerd). Uitgangspunt bij de bepaling van $\bar{u}(0)$ is de oplossingsvector van het in (5.13) gegeven probleem in het geval dat wordt afgezien van de geheeltalligheidseis*. In par. 7.2 wordt de bepaling van dit optimum beschreven. In par. 7.3 wordt aangegeven hoe uitgaande van deze optimale oplossingsvector een toelaatbare oplossingsvector voor het in (7.1) gegeven minimaliseringsprobleem kan worden verkregen. De toepassing van het oplossingsalgorithme op het allocatieprobleem wordt samengevat in par. 7.4.

*Dit optimum is een ondergrens voor de totale kosten

7.2. De bepaling van een ondergrens voor de totale kosten

Als in het primale probleem (5.13) de voorwaarde $d \in D$ wordt vervangen door $d \geq 0$ en $d \leq 1$, dat wil zeggen als wordt afgezien van de geheeltalligheidseis, kan het probleem als volgt geschreven worden:

$$\min_{d, q} \sum_i \{A(i) d_1(i) + B(i) d_2(i) + \sum_s E(i, s) d_3(i, s)\} + \sum_i \left\{ \sum_j F(i, j) q_w(i, j) + \sum_j G(i, j) q_b(i, j) + \sum_k H(i, k) q_x(i, k) \right\} \quad (7.3)$$

$$\text{ST} \quad \sum_i \{q_b(i, j) + q_w(i, j)\} \geq a(j) \quad j = 1, \dots, m$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_j \{q_b(i, j) + q_w(i, j)\} - r_q(i, 0) d_1(i) \geq 0 \\ & - \sum_j \{q_b(i, j) + q_w(i, j)\} + Q_A \cdot d_1(i) \geq 0 \\ & - \sum_j q_w(i, j) + Q_A \cdot d_2(i) \geq 0 \\ & - \sum_s \text{coef}(i, s, j) q_b(i, j) + Q_B(i, s) d_3(i, s) \geq 0 \quad s = 1, \dots, S \\ & \left. \begin{aligned} & \sum_j \{q_b(i, j) + q_w(i, j)\} - q_x(i, k) - k q(i, k) d_4(i, k) \geq 0 \\ & - q_x(i, k) + Q(i, k) d_4(i, k) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

De vorm van dit probleem is zodanig dat als de optimale waarden van $q_b(i, j)$ en $q_w(i, j)$ zijn bepaald dat dan tevens de optimale waarden van de overige variabelen bepaald zijn. Dit betekent dat het probleem gereduceerd kan worden tot een probleem in $q_b(i, j)$ en $q_w(i, j)$.

Dit kan als volgt worden aangetoond:

- $d_1(i)$ heeft een positieve coëfficiënt in de doelstellingsfunctie van een minimaliseringsprobleem. In de optimale oplossing zal $d_1(i)$ dus zo klein mogelijk zijn. Uit (7.3) blijkt dat voor $d_1(i)$ moet gelden:

$$d_1(i) \leq \sum_j \{q_b(i, j) + q_w(i, j)\} / r_q(i, 0) \quad (7.4)$$

en

$$d1(i) \geq \sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} / QA \quad (7.5)$$

Omdat geldt dat $rq(i, 0) < QA$, geldt:

$$\sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} / QA \leq \sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} / rq(i, 0) \quad (7.6)$$

De kleinst mogelijke toelaatbare waarde voor $d1(i)$ is dus:

$$d1(i) = \sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} / QA \quad (7.7)$$

- op analoge wijze kan voor $d2(i)$ en $d3(i)$ worden afgeleid:

$$d2(i) = \sum_j qw(i, j) / QA \quad (7.8)$$

en

$$d3(i, s) = \sum_j \text{coef}(i, s, j) qb(i, j) / QB(i, s) \quad (7.9)$$

- $qx(i, k)$ heeft in de doelstellingsfunctie van een minimaliseringsprobleem een negatieve coëfficiënt zodat $qx(i, k)$ in het optimum zo groot mogelijk zal zijn. Voor de variabele $d4(i, k)$ kan geen 'richting' worden aangegeven omdat $d4(i, k)$ niet voorkomt in de doelstellingsfunctie.

Uit (7.3) blijkt dat moet gelden:

$$qx(i, k) \leq \sum_j \{qw(i, j) + qb(i, j)\} - kq(i, k) d4(i, k) \quad (7.10)$$

en

$$qx(i, k) \leq Q(i, k) \cdot d4(i, k) = \{QA - kq(i, k)\} \cdot d4(i, k) \quad (7.11)$$

Hieruit is eenvoudig af te leiden dat in het optimum moet gelden:

$$d4(i, k) = \sum_j \{qb(i, j) + qw(i, j)\} / QA \quad (7.12)$$

en

$$q_x(i, k) = \sum_j \{q_b(i, j) + q_w(i, j)\} \cdot Q(i, k)/Q_A \quad (7.13)$$

Door substitutie van (7.7), (7.8), (7.9) en (7.13) in de doelstellingsfunctie wordt een aantal beperkingen overbodig. Dit betreft de beperkingen die in de afleidingen gebruikt zijn. Als deze beperkingen weggelaten worden, wordt het in (7.3) gegeven minimaliseringsprobleem gereduceerd tot:

$$\min \sum_i \left\{ \sum_j \Psi_1(i, j) \cdot q_w(i, j) + \sum_j \Psi_2(i, j) \cdot q_b(i, j) \right\} \quad (7.14)$$

$$\text{ST } \sum_i \{q_w(i, j) + q_b(i, j)\} \geq a(j) \quad j = 1, \dots, m$$

$$q_w(i, j), q_b(i, j) \geq 0$$

$$\text{waarbij } \Psi_1(i, j) = F(i, j) + \{A(i) + B(i) + \sum_k H(i, k) \cdot Q(i, k)\}/Q_A$$

$$\text{en } \Psi_2(i, j) = G(i, j) + \{A(i) + \sum_k H(i, k) \cdot Q(i, k)\}/A_Q + \\ + \sum_s E(i, s)/Q_B(i, s)$$

Omdat al de coëfficiënten in het minimaliseringsprobleem (7.14) positief zijn kan van het variabelenpaar $q_w(i, j)$, $q_b(i, j)$ de variabele met de grootste coëfficiënt (dit komt overeen met de hoogste kosten) bij voorbaat nul gesteld worden. Definieer nu:

$$v(i, j) = 0 \quad \text{als } \Psi_1(i, j) < \Psi_2(i, j)$$

$$= 1 \quad \text{als } \Psi_1(i, j) \geq \Psi_2(i, j)$$

$$\zeta(i, j) = \{1 - v(i, j)\} \Psi_1(i, j) + v(i, j) \Psi_2(i, j)$$

$$i_j = i^* \quad \text{met } \zeta(i^*, j) = \min_i \{\zeta(i, j)\}$$

$$\delta_{i_j}^j = 1 \quad \text{als } i = i_j$$

$$= 0 \quad \text{als } i \neq i_j$$

$$q(i, j) = \{1 - v(i, j)\} q_w(i, j) + v(i, j) q_b(i, j)$$

Als voor meerdere waarden van i aan de gelijkheid $\zeta(i^*, j) = \min_i \{\zeta(i, j)\}$ is voldaan moet uit deze waarden arbitrair de i^* worden gekozen.

Invoering van deze parameters leidt ertoe dat $q(i, j)$ gelijk is aan de variabele behorend tot het variabelenpaar $q_w(i, j)$, $q_b(i, j)$ met de kleinste coëfficiënt. Als de variabele met de grootste coëfficiënt nul wordt gesteld, wordt het in (7.14) gegeven minimaliseringsprobleem gereduceerd tot:

$$\min \sum_i \sum_j \zeta(i, j) \cdot q(i, j) \quad (7.15)$$

$$\text{ST } \sum_i q(i, j) \geq a(j) \quad j = 1, \dots, m$$

$$q(i, j) \geq 0$$

Dankzij de structuur van dit minimaliseringsprobleem kan de optimale oplossing eenvoudig bepaald worden. De optimale oplossingsvector bestaat uit nullen met uitzondering van de $q(i, j)$ waarvoor $i = i_j$, dat wil zeggen de $q(i, j)$ met minimale kosten om voor vraagpunt j aan de vraag te voldoen. De $q(i_j, j)$ zijn gelijk aan $a(j)$. Dit betekent dat de optimale oplossing kan worden geschreven als:

$$q^*(i, j) = \delta_{i_j}^{i_j} \cdot a(j) \quad (7.16)$$

De optimale oplossing van het in (7.3) beschreven probleem wordt gevonden door substitutie van:

$$q_w^*(i, j) = \{1 - v(i, j)\} q^*(i, j) = \{1 - v(i, j)\} \delta_{i_j}^{i_j} a(j) \quad (7.17)$$

$$\text{en } q_b^*(i, j) = v(i, j) \cdot q^*(i, j) = v(i, j) \delta_{i_j}^{i_j} a(j) \quad (7.18)$$

in achtereenvolgens de vergelijkingen (7.7), (7.8), (7.9), (7.12) en (7.13). Dit geeft

$$d1^*(i) = \sum_j \delta_{i_j}^{i_j} a(j) / Q_A \quad i = 1, \dots, n \quad (7.19)$$

$$d2^*(i) = \sum_j \{1 - v(i, j)\} \delta_i^{i,j} a(j)/QA \quad i = 1, \dots, n \quad (7.20)$$

$$d3^*(i, s) = \sum_j \text{coef}(i, s, j) v(i, j) \delta_i^{i,j} a(j)/QB(i, s) \quad i = 1, \dots, n; s = 1, \dots, S \quad (7.21)$$

$$d4^*(i, k) = \sum_j \delta_i^{i,j} a(j)/QA \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (7.22)$$

$$\text{en } qx^*(i, k) = \sum_j \delta_i^{i,j} a(j) Q(i, k)/QA \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K \quad (7.23)$$

Voor de totale kosten geldt:

$$\begin{aligned} TCG^* = \sum_j \left\{ a(j) \cdot \left[\sum_i \delta_i^{i,j} \left(\frac{A(i)}{QA} + \{1 - v(i, j)\} \cdot \left\{ \frac{B(i)}{QA} + F(i, j) \right\} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + v(i, j) \left\{ \sum_s \text{coef}(i, s, j) \frac{E(i, s)}{QB(i, s)} + G(i, j) \right\} + \sum_k H(i, k) \frac{Q(i, k)}{QA} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Dit is een ondergrens voor de kosten (van het oorspronkelijke probleem). Door de invoering van de voorwaarde $d \in D$ worden extra beperkingen opgelegd waardoor de verzameling toelaatbare oplossingen kleiner wordt. Dit heeft tot gevolg dat het minimum niet kleiner kan zijn dan de in vergelijking (7.24) gegeven waarde.

De in de vergelijkingen (7.17) tot en met (7.23) beschreven optimale oplossing is het startpunt bij de bepaling van een toelaatbare (duale) startoplossing voor de in par. 7.1 aangegeven optimaliseringsprocedure.

7.3. De bepaling van de startoplossing voor het duale probleem

De in de voorgaande paragraaf bepaalde optimale oplossingsvector $\begin{pmatrix} d^* \\ q^* \end{pmatrix}$ dient als uitgangspunt bij de bepaling van de (toelaatbare) duale oplossingsvector $\bar{u}_0$. Hiertoe moet deze vector eerst toelaatbaar

gemaakt worden voor het oorspronkelijke, in (5.13) gegeven, probleem. De toelaatbaar gemaakt oplossingsvector wordt gebruikt bij de bepaling van het starttableau voor toepassing van de Revised Simplex methode op het, in (7.28) gegeven, duale probleem.

Bij het toelaatbaar maken van de in par. 7.2 bepaalde oplossingsvector kunnen worden onderscheiden:

- a. het geheeltallig maken van de dummievariabelen;
- b. de controle van de voorwaarden die een ondergrens aangeven (eventueel uitmondend in een correctie van de hoeveelheidsvariabelen).

Hiertoe wordt de volgende procedure voorgesteld:

STAP 1: stel $\tilde{d}_1(i) = 1$ als $\sum_j \delta_{i,j}^{i,j} a(j) > 0$

$= 0$ als dit niet het geval is.

Definieer de hulpvariabele $\gamma(i)$ en stel $\gamma(i) = 0$ ($i = 1, \dots, n$)

STAP 2: controleer of voor alle i met $\tilde{d}_1(i) = 1$ voldaan is aan de voorwaarde

$$\sum_j \{qb^*(i, j) + qw^*(i, j)\} \geq rq(i, 0) \quad (7.25)$$

Als niet aan (7.25) is voldaan, stel dan

$$\gamma(i) = rq(i, 0) - \sum_j \{qw^*(i, j) + qb^*(i, j)\} \quad (7.26)$$

en voeg de hoeveelheid $\gamma(i)$ toe aan de hoeveelheid $qb(i, j)$ of $qw(i, j)$ waarvoor geldt:

$$z(i, j) = \min_j \{\delta_{i,j}^{i,j} z(i, j) | \delta_{i,j}^{i,j} = 1\} \quad (7.27)$$

Dit is toegestaan omdat de voorwaarde is

$$\sum_i \{qw(i, j) + qb(i, j)\} \geq a(j).$$

STAP 3: Stel: $\tilde{d}_2(i) = 1$ als $d_2^*(i) > 0$
 $= 0$ als $d_2^*(i) = 0$
 $\tilde{d}_3(i, s) = 1$ als $d_3^*(i, s) > 0$
 $= 0$ als $d_3^*(i, s) = 0$
 $\tilde{d}_4(i, k) = 1$ als $qx^*(i, k) + \gamma(i) \geq kq(i, k)$
 $= 0$ als $qx^*(i, k) + \gamma(i) < kq(i, k)$
 $\tilde{q}_x(i, k) = \tilde{d}_4(i, k) \left\{ \sum_j \{q_w^*(i, j) + q_b^*(i, j)\} + \gamma(i) - kq(i, k) \right\}$

Door substitutie van deze oplossing in vergelijking (7.3) kunnen de kosten, $\tilde{TCG}$, worden berekend. Dit is een bovengrens voor de kosten omdat deze oplossing toelaatbaar is. De uiteindelijke optimale oplossing ligt dus in het interval $[TCG^*, \tilde{TCG}]$.

De duale oplossing $\bar{u}_0$ die dient als de beginoplossing voor de oplossingsprocedure kan worden bepaald door toepassing van de Revised Simplex methode op:

$$\max_u \quad u(b - A1 \cdot \tilde{d}) \quad (7.28)$$

$$ST \quad u A2 + XS = c2$$

$$u, XS \geq 0$$

Ga hierbij uit van het starttableau bestaande uit de volgende basisvariabelen:

- de $u(0, j)$ voor $j = 1, \dots, m$;
- de $XS(1, i, j)$ en $XS(2, i, j)$ met uitzondering van de slackvariabelen die gekoppeld zijn aan de $\tilde{q}_w(i, j)$ en $\tilde{q}_b(i, j)$ die ongelijk nul zijn;
- de $u(i, 4, k)$ in het geval dat $\tilde{d}_4(i, k) = 1$ en de $u(i, 5, k)$ in het geval dat $\tilde{d}_4(i, k) = 0$.

Deze keuze is gebaseerd op de primale oplossing $\tilde{q}$ en op de stelling (zie par. 6.1) dat of de i^e duale slackvariabele of de i^e primale variabele gelijk is aan nul. Het oorspronkelijke primale probleem is gegeven in (7.29).

$$\min_q \quad c2 \cdot q \quad (7.29)$$

$$ST \quad A2 \cdot q - YS = b - A1 \cdot \tilde{d}$$

$$q, YS \geq 0$$

Dit betekent dat de variabelen $qw(i, j)$ en $qb(i, j)$ gekoppeld zijn aan respectievelijk $XS(1, i, j)$ en $XS(2, i, j)$. De $u(0, j)$ zijn gekoppeld aan de gelijkheden

$$\sum_i \{qb(i, j) + qw(i, j)\} - YS(0, j) = a(j) \quad j = 1, \dots, m \quad (7.30)$$

en de $u(i, 4, k)$ en $u(i, 5, k)$ aan respectievelijk

$$\sum_j \{qw(i, j) + qb(i, j)\} - qx(i, k) - kq(i, k) d4(i, k) - YS(i, 4, k) = 0 \quad (7.31)$$

$$\text{en } -qx(i, k) + Q(i, k) d5(i, k) - YS(i, 5, k) = 0 \quad (7.32)$$

Omdat in de meeste gevallen $qw(i, j)$ en $qb(i, j)$ gelijk aan nul zijn geldt dat de bijbehorende duale slackvariabelen $XS(1, i, j)$ respectievelijk $XS(2, i, j)$ basisvariabelen voor het duale probleem zijn. Analooog geldt dat omdat de $YS(0, j) = 0$ de $y(0, j)$ basisvariabelen zijn. Met betrekking tot (7.31) en (7.32) kan worden opgemerkt dat als $d4(i, k) = 1$ dat dan $YS(i, 4, k) = 0$ zodat $u(i, 4, k)$ basisvariabele is. Als $d4(i, k) = 0$, dan geldt $YS(i, 5, k) = 0$ en $u(i, 5, k)$ is basisvariabele.

Door deze keuze voor het starttableau zal slechts een klein aantal iteraties nodig zijn om de optimale oplossingsvector $\bar{u}_0$ te bepalen.

7.4. Toepassing van het algoritme op het allocatieprobleem

Door gebruik te maken van de in dit hoofdstuk en in hoofdstuk 6 beschreven resultaten kan de optimale allocatie (corresponderend met minimale kosten) worden bepaald. In deze paragraaf wordt dit kort samengevat, waarbij de nadruk ligt op de bepaling van de dummievariabelen.

Het allocatieprobleem is weergegeven in het stelsel (5.13). Dit wordt opgelost in twee fasen. In de eerste fase wordt gebruik gemaakt van het in stelsel (7.1) gegeven duale probleem om de optimale oplossing voor de dummievector d te bepalen. In de tweede fase wordt na substitutie van deze dummievector in het stelsel (5.13) de optimale

hoeveelheidsvector q bepaald. Hiertoe wordt het volgende oplossings-algoritme voorgesteld.

STAP 0: bepaal een toelaatbare oplossingsvector $\bar{u}_t$ voor het duale probleem dat in het stelsel (7.2) is gegeven. Voor de vector $\bar{u}_t$ moet gelden:

$$\bar{u}_t A2 \leq c2 \quad (7.33)$$

$$\bar{u}_t \geq 0$$

Stel $t = 0$. (De vector $\bar{u}_0$ kan worden bepaald op de in par. 7.3 aangegeven wijze).

STAP 1: bepaal de optimale oplossing $\bar{z}_t, \bar{d}_t$ van het in (7.34) gegeven probleem.

$$\min_d z \quad (7.34)$$

$$ST \quad z \geq c1 \cdot d + \bar{u}_t \{b - A1 \cdot d\} \quad \tau = 0, 1, \dots, t$$

$$d \in D$$

In par. 6.4 is een oplossingsprocedure behandeld waarmee dit probleem kan worden opgelost.

STAP 2: bepaal de optimale oplossing $\bar{u}_{t+1}$ van het in stelsel (7.35) gegeven probleem (hierbij is $\bar{d}_t$ gegeven)

$$\max_u u \{b - A1 \cdot \bar{d}_t\} \quad (7.35)$$

$$ST \quad u A2 \leq c2$$

$$u \geq 0$$

(Dit probleem kan worden opgelost met de Revised Simplex methode).

Als geldt: $\bar{z}_t - c1 \cdot \bar{d}_t = \bar{u}_{t+1} \{b - A1 \cdot \bar{d}_t\}$, ga naar STAP 4

$\bar{z}_t - c1 \cdot \bar{d}_t < \bar{u}_{t+1} \{b - A1 \cdot \bar{d}_t\}$, ga naar STAP 3

STAP 3: voeg $z \geq c1 \cdot d + \bar{u}_{t+1} \{b - A1 \cdot d\}$ als beperking toe aan het in (7.34) gegeven probleem. Stel $t = t + 1$ en ga naar STAP 1.

STAP 4: substitueer $\bar{d}_t$ in het oorspronkelijke primale probleem, dit geeft stelsel (7.36), en bepaal de optimale oplossingsvector $\bar{q}$. Hierbij kan de Revised Simplex methode (zie par. 6.5) worden gebruikt.

$$\min_{\bar{q}} c2 \cdot \bar{q} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \text{ST} \quad A2 \cdot \bar{q} &\geq b - A1 \cdot \bar{d}_t \\ \bar{q} &\geq 0 \end{aligned}$$

De minimale kosten (CTG) zijn gelijk aan: $c1 \cdot \bar{d}_t + c2 \cdot \bar{q}$.

De verwachting is dat deze procedure redelijk snel naar de optimale oplossing convergeert. Door de keuze van goede startwaarden kan mogelijk het aantal iteraties dat nodig is om de optimale oplossing te bereiken, worden verkleind. Of de voorgestelde procedure inderdaad voldoende snel naar de optimale oplossing convergeert moet in een vervolgstudie getoetst worden.

8. SAMENVATTING

In deze nota is een optimaliseringsmodel geformuleerd dat bij een gegeven vraag naar zand (zowel de gevraagde hoeveelheid als de plaats van bestemming gegeven) uit een aantal potentiële zandwin-objecten de uit het oogpunt van kostenminimalisering optimale keuze maakt. De structuur van dit model is zodanig dat uitbreiding van het model met bijvoorbeeld depotvorming of door invoering van alternatieve transportwijzen (naast transport per persleiding en transport per as) geen moeilijkheden geeft. Door uitvoering van gevoeligheidsanalyses met het model is het mogelijk de invloed van veranderingen in één of meer kostencategorieën op de totale kosten te bepalen.

Naast de formulering van het allocatiemodel is een oplossings-algorithme geformuleerd om de optimale allocatie te bepalen. Dit is

nodig omdat bij toepassing van één van de gebruikelijke algoritmen voor gemengd geheeltallige lineaire programmering door de omvang van het probleem een zeer groot aantal iteraties nodig is voordat het optimum is bereikt.

Kort samengevat komt het oplossingsalgoritme op het volgende neer:

1. Bepaal het 'duale probleem' voor het allocatiemodel (5.13):

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 \cdot d + c_2 \cdot q & (5.13) \\ \text{ST} \quad & A_1 \cdot d + A_2 \cdot q \geq b \\ & q \geq 0 \\ & d \in D \end{aligned}$$

dit geeft (7.1):

$$\begin{aligned} \min \max_d \quad & u b + (c_1 - u \cdot A_1) d & (7.1) \\ \text{ST} \quad & u A_2 \leq c_2 \\ & u \geq 0 \\ & d \in D \end{aligned}$$

2. Bepaal een toelaatbare vector $\bar{u}_0$ voor het 'duale probleem'. Toelaatbaar betekent dat moet gelden:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 A_2 &\leq c_2 & (7.33) \\ \bar{u}_0 &\geq 0 \end{aligned}$$

Voor de bepaling van $\bar{u}_0$ worden de volgende stappen genomen:

- bepaal het optimum $\begin{pmatrix} d^* \\ q^* \end{pmatrix}$ van het probleem (7.3). Dit kan ook worden geschreven als:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 \cdot d + c_2 \cdot q & (8.1) \\ \text{ST} \quad & A_1 \cdot d + A_2 \cdot q \geq b \\ & q, d \geq 0 \end{aligned}$$

- pas op $\begin{pmatrix} d^* \\ q^* \end{pmatrix}$ een correctieprocedure toe (zie par. 7.3) zodanig dat de oplossingsvector toelaatbaar wordt voor het oorspronkelijke probleem. Dit geeft $\begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}$
- gebruik de oplossingsvector $\begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{q} \end{pmatrix}$ om de basisvariabelen van het starttableau te bepalen voor toepassing van de Revised Simplex methode op

$$\max_u u(b - A1 \cdot \tilde{d}) \quad (7.28)$$

$$\text{ST } u A2 + XS = c2$$

$$u, XS \geq 0$$

De optimale oplossing van dit probleem is de vector $\bar{u}_0$.

3. Bepaal de optimale dummievector $\bar{d}_t$. De optimale oplossing wordt gevonden door oplossing van achtereenvolgens (7.34) met de in par. 6 besproken selectieprocedure voor de dummievariabelen:

$$\min_d z \quad (7.34)$$

$$\text{ST } z \geq c1 \cdot d + \bar{u}_\tau \{b - A1 - d\} \quad \tau = 0, 1, \dots, t$$

$$d \in D$$

dit geeft $\bar{z}_t$ en $\bar{d}_t$, en (7.35) met behulp van de Revised Simplex methode

$$\max_u u\{b - A1 \cdot \bar{d}_t\} \quad (7.35)$$

$$\text{ST } u A2 \leq c2$$

$$u \geq 0$$

dit geeft $\bar{u}_{t+1}$. Dit wordt herhaald totdat de optimale $\bar{d}_t$ bereikt en herkend is.

4. Bepaal de optimale hoeveelheidsvector $\bar{q}$ door toepassing van de Revised Simplex methode op

$$\min_q c2 \cdot q \quad (7.36)$$

$$\text{ST } A2 \cdot q \geq b - A1 \cdot \bar{d}_t$$

$$q \geq 0$$

Hiermee is de optimale allocatie bepaald.

Of de procedure inderdaad voldoende snel naar de optimale oplossing convergeert moet in een vervolgstudie getoetst worden.

9. LITERATUUR

BALAS, E. Minimax and duality for linear and nonlinear mixed integer programming. Uit: Abadie J. (editor). Integer and nonlinear programming. North Holland 1970.

AGRAWAL, R.C. and EARL O. HEADY. Operations Research Methods for Agricultural Decisions. Iowa State University Press 1972.

BARTSCH, H.J. Handbook of mathematical formulas. Academic Press Inc. London 1974.

HENDERIKS, R.E.D. Lineaire Programmering. Aula boeken nr 485. Uitgeverij Het Spectrum B.V. Utrecht/Antwerpen 1972.

HILLIER, F.S. en G.J. LIEBERMAN. Introduction to operations research Holden-Day Inc. San Francisco 1967.

HU, T.C. Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley Publishing Company Inc. Massachusetts 1969.

INTRILLIGATOR, M.D. Mathematical optimization and Economic Theory. Prentice-Hall Inc. 1971.

KUNZI, H.P., H.G. TZSCHACH and C.A. ZEHNDER. Numerical Methods of Mathematical Optimization. Academic Press New York 1968.

LANCASTER, K. Mathematical Economics. Macmillan Company London 1968.

NES, F. VAN. Gebroken rechten en vloeiende krommen, het gebruik van spline functies in wiskunde en economie. Interne nota CPB, 1977.

POIRIER, D.J. The econometrics of structural change. North Holland/American Elsevier, 1976.

ROY, B, R. BENAYOUN and J. TERGNY. From SEP produce to the mixed ophelic program. Uit: Abadie J. (editor): Integer and non-linear programming. North Holland 1970.

SAATY, T.L. Optimization in integers and related extremal problems. Mc.Graw-Hill 1970.

SPIEGEL, M.R. Theory and problems of Advanced Calculus. Schaum's Outline Series, Mc.Graw-Hill London 1974.