

DE RUIJITE

REDE UITGESPROKEN OP DEN 9DEN MAART 1922
TER GELEGENHEID VAN DEN VIERDEN VER-
JAARDAG DER LANDBOUWHOOGESCHOOL
DOOR DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. M. J. VAN UVEN

H. VEENMAN - WAGENINGEN - 1922

DE RUIMTE

REDE UITGESPROKEN OP DEN 9DEN MAART 1922 TER GELEGENHEID
VAN DEN VIERDEN VERJAARDAG DER LANDBOUWHOOGESCHOOL
DOOR DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. M. J. VAN UVEN.

Mijne Heeren Curatoren, Professoren, Lectoren, Dames en Heeren Studenten en verder Gij allen, die U hierheen hebt opgemaakt om den dies natalis der Landbouwhoogeschool te vieren, zeer welkome toehoorderessen en toehoorders.

Bij de feestelijke herdenking van de geboorte der Landbouwhoogeschool geniet de Rector Magnificus het voerrecht hen, die zijn samengestroomd om van hun belangstelling in de Landbouwhoogeschool te getuigen, te mogen bezighouden met een rede over een onderwerp, ontleend aan de door hem beoefende wetenschap. Voor de meeste Rectoren zal het gemakkelijk zijn een echte feestrede te houden. Ik gewaag daarbij nog niet eens van die velen onder ons, die door den aard hunner leervakken een wetenschappelijke ontleding kunnen geven van de verschillende gerechten van een feestmaaltijd, van den microbioloog af, die ons de verdiensten prijst van een kop bouillon, met de uitgezochtste diphtherie-, typhus- en cholera-bacillen, naar keuze, tot den beoefenaar van de leer der tropische cultures, die onze verbeelding leidt naar een heerlijk kop koffie en aan onze fantasie de bouwstof verschaft voor een fijne sigaar. De culinaire zijde van vele onzer studievakken is reeds zoo dikwijls bezongen, dat oorspronkelijke variaties op dit thema een minstens goddelijke inspiratie vereischen. Neen, ook de meer geestelijke onderwerpen, die we uit onze wetenschappen kunnen putten, leenen zich veelal uitstekend tot stof voor feestreden. Hoe verblijdend

is het bijv. niet uit den mond der economen de onfeilbare geneeswijzen te vernemen voor de tot dusver ongeneeslijke kwalen der samenleving!

Zulke echte feestreden worden dan ook dankbaar door het auditorium genoten; het gehoor is dan zoo vriendelijk den spreker tegemoet te treden met een aanmoedigende stemming van volkomen verstandhouding, geput uit de overtuiging van eigen deskundigheid. En de spreker zelf is zoo hoffelijk de toehoorders in die zelfverzekerdheid te laten, met het gevolg dat op 't eind feestredenaar en gehoor in de hartelijkste overeenstemming van gevoelens, zonder eenige vrees voor misverstand van elkaar afscheid nemen.

Er zijn echter ook leervakken, die gebukt gaan onder nijpende armoede aan dankbare onderwerpen. De spreker — feestredenaar mag hij al niet meer heeten — tracht nog wel met de meest geraffineerde verleidingskunst zijn gehoor tot ontvanke-lijkheid te stemmen, en het gehoor laat zich ook wel voor een oogenblik door die vleierij verstrikken, maar al spoedig bemerkt het, dat het op misdadige wijze gelokt is in een doolhof van onontwarbare begrippen; het wordt schuw, sluit de geestesoogen, en wacht, gelaten of ongeduldig, totdat de kwelling is afgelopen en de gedachten weer tot hun vrijen natuurlijken loop worden losgelaten.

In verreweg den ongunstigsten toestand te dezen opzichte verkeert zeker wel de wiskunde, die bij zoo velen slechts herinneringen oproept aan kinderfoltering en jeugdvergalling. De vertegenwoordiger van deze wetenschap zal zich dus hoogstens kunnen vleien met de illusie, dat hij zijn gehoor, al is 't dan niet op aangename, dan toch op niet onaangename wijze zal bezighouden. Hoewel deze ontboezeming bijna stereotyp is geworden in de openbare redevoeringen van die wiskundigen, die voor hun gehoor nog een greintje eerbied hebben, heb ik me er toch nog weer aan bezondigd, al was 't alleen om mijn hoorders te verzekeren, dat ik me de zwaarte van mijn taak terdege bewust ben.

Elk onderwerp eischt een zekere vakkennis, hoe gering ook, bij den hoorder; maar zelfs de schuchterste poging om bij den hoorder een beroep te doen op de herinnering aan zijn vroegere wiskundige kennis ontmoet bij hem levendig verzet, zoo niet grondigen afkeer. Een bescheiden mensch bekent zijn vroeger verkeer met de wiskunde hoogstens als een jeugdige onbezonnenheid, waarvan men met een vergoelijkenden glimlach het gesprek zoo spoedig mogelijk afleidt. Ik heb daarom besloten mijn gehoor te plaatsen op het standpunt van hen, die hun eerste

les in meetkunde zullen gaan ontvangen. Daarmee hoop ik mijn gehoor niet te hebben overschat.

Ik wil dan heden met u spreken over de *ruimte*.

Nu is de „ruimte” hier in Wageningen, waar juist zulk een gebrek aan werkruimte heerscht, een eenigszins kiesch, of liever een bepaald onkiesch onderwerp; het is alsof men tot een arme spreekt van de macht van den rijkdom. Wel zong reeds SCHILLER: „Raum ist in der kleinsten Hütte für ein glücklich liebend Paar”, maar van ons in Wageningen verwacht men toch andere bezigheden dan van den „Jüngling am Bache.”

Wanneer ik u dan verzoek aan mijn onderwerp niet al te veel aanstoot te nemen, doe ik dat in het vertrouwen, dat mijn beschouwingen niemand tot afgunst zullen prikkelen.

Wat zijn de eigenschappen van onze ruimte? Hoe leeren we ze kennen? Welke zintuigen brengen ons met de ruimte in aanraking?

Op deze laatste vraag is het antwoord wellicht het gemakkelijkst. We kunnen veilig beweren, dat alle zintuigen ons gewaarwordingen verschaffen, die ruimtelijk vertolkt worden. Maar niet alle zintuiglijke gewaarwordingen zijn even geschikt om in de verruimtelijking orde te brengen. Een smaakgewaarwording — wel te onderscheiden van het begeleidend tastgevoel in den mond — vestigt ruimtelijk alleen de aandacht op een vaste plek in ons lichaam, onze tong. Bij de reukgewaarwording, die onmiddellijk slechts in den neus wordt ondervonden, komen we al reeds eenigermate op het denkbeeld den oorsprong van den geur op eenigen afstand buiten ons lichaam te stellen. Het gehoor is al veel beter geschikt om de geluidsbron in de ruimte te localiseeren. Nóg weer veel zuiverder weet ons gezicht aan de geziene voorwerpen in de ruimte hun plaats aan te wijzen. Maar het allervolledigst worden we ingelicht door onzen tastzin. Het klinkt wonderlijk, dat onze tastzin, zoo grof als hij is in vergelijking tot ons gezicht, ons vollediger inlichtingen zou verschaffen dan ons gezicht. Dit wordt echter begrijpelijker, als men zich goed bewust maakt welke *onmiddelijke* gegevens het gezicht ons verschaft.

Stelt uzelf eens voor op een donkeren avond op den overgang van een spoorbaan. In de richting van de baan ziet ge twee kleine lichtjes schitteren. Na eenigen tijd zijn deze lichtjes helderder geworden en is hun afstand *vergroót*. Steeds sterker stralen de twee lichten, steeds *groeter* wordt hun afstand. Bovendien doet zich een geraas vernemen, dat voortdurend luider wordt. Hoe reageert ge op die gewaarwording? Ge maakt

zoo gauw mogelijk, dat ge van de rails af komt. Maar waarom? Omdat het geraasmakend gevaarte, waarop de lichtjes bevestigd zijn, u met groote snelheid nadert en u spoedig zou overrijden, als ge bleeft stilstaan. Volgt deze overweging nu rechtstreeks uit het sterker gloeien van de lichtjes, of uit de divergentie daarvan of uit het luider worden van het geraas? In 't geheel niet! Ge *maakt* dat alles er bij. En gelukkig ook, want zonder uw aanvullende fantasie zou het voorgoed met uw proefnemingen gedaan zijn.

Het gezicht geeft dus wel nauwkeurige aanwijzingen omtrent de voorwerpen in de ruimte, maar allesbehalve volledige. Eerst wanneer ge uw gezichtswaarnemingen behoorlijk weet uit te leggen, levert uw oog u gegevens van waarde.

De tastzin daarentegen geeft wel is waar grove, maar zeer ondubbelzinnige inlichtingen aangaande de rangschikking van de voorwerpen in de ruimte.

Ten einde over de betrekkelijke waarde van den tast- en den gezichtszin voor de ruimtelijke oriëntatie afdoende te worden ingelicht, zoudt ge begaafd moeten zijn met een zoo sterk geheugen, dat ge u bijvoorbeeld nog zoudt weten te herinneren, hoe ge in de wieg een begrip hebt gekregen van de meetkundige eigenschappen van uw rammelaar.

Gaat ge, bij gebrek aan zulk een geheugen, letten op de gedragingen van met u verwante of bevriende zuigelingen, dan zult ge vermoedelijk tot de overtuiging komen, dat dezen allereerst hun handen en mond als tastwaarnemingswerktuigen gebruiken en dat de gezichtsindrukken van lieverlede aan de hand van de tastwaarnemingen verklaard worden. In den regel openbaart zulk een zuigeling wat er in hem omgaat duidelijker door een min of meer doelmatige beweging der ledematen dan door een intelligenten blik. Van groote waarde voor de oplossing van dit vraagstuk zijn ook de gewaarwordingen van blind-geborenen, die door een operatie het gezicht terugkrijgen. Zulke blind-geborenen schijnen van de weldaad, die de operatie hun bracht, eerst zeer geleidelijk besef te krijgen; de eerste dagen, ja weken weten ze met hun gezicht niets aan te vangen en eerst langzamerhand leeren ze hun nieuwe gezichtswaarnemingen interpreteren, d.w.z. in overeenstemming brengen met hun reeds vroeger aan den tastzin ontleende opvatting van de ruimtelijke verhoudingen ¹⁾.

¹⁾ Zie hierover o.a. H. von HELMHOLTZ: Handbuch der physiologischen Optik.; Hamburg und Leipzig, 1896, p. 731 en vv. — M. DUFOUR: Guérison d'un aveugle-né; Bulletin de la Société médicale de la Suisse

Nu zoodoende aan den tastzin als ruimtezijn de prioriteit schijnt toe te komen, vragen we ons af, volgens welk beginsel we uit de tastgewaarwordingen onze ruimte construeeren. Het is duidelijk, dat de tastgewaarwordingen op zichzelf weinig gegevens zouden verschaffen, wanneer we niet — in tegenstelling tot de planten en de koraaldieren — het vermogen hadden onze ledematen, waarmede we tasten, en ons geheele lichaam te bewegen. Eerst door deze beweeglijkheid zijn we in staat een zoodanig ruimteschema te ontwerpen, dat de gezichtsindrukken daarin kunnen worden verwerkt.

Wanneer we een lichaamsdeel, bijv. onzen wijsvinger, bewegen, dan hebben we den indruk, dat we de beweging in elk willekeurig stadium kunnen eindigen, dat de beweging volkomen geleidelijk verloopt. En daar we elk stadium van de beweging in onze gedachten laten correspondeeren met het punt van de ruimte, dat door onzen wijsvinger wordt ingenomen, denken we ons ook de ruimte volkomen opgevuld met punten, zonder eenig hiaat, hoe klein ook. Zoodoende komen we er toe aan de ruimte *continuïteit*, d.i. een onafgebroken samenhang, toe te kennen. Verder achten we het mogelijk een eenmaal aangevangen beweging, althans in gedachte, onbepaald ver voort te zetten; en in verband daarmee verklaren we de ruimte voor *onbegrensd*, hetgeen nog niet wil zeggen: oneindig.

Zooals we reeds opmerkten, geeft elk zintuig, het eene meer, het andere minder, ons indrukken, die we ruimtelijk rangschikken. Het zou dus op zichzelf niet ongerijmd zijn, wanneer we voor elk zintuig een afzonderlijke ruimte oepsichten. Het is evenwel zeer de vraag, of onze smaakzin en zelfs onze reukzin in ons een ruimtevoorstelling zouden kunnen oproepen, die eenigszins aan onze gewone ruimte herinnert, indien niet de andere zintuigen, in 't bijzonder de tastzin en het gezicht, ons met veel meer nadruk zulk een ruimte opdrongen. Geen wonder, dat de zwakke ruimtevoorstellingen van de smaak en den reuk in onzen geest geheel worden verzwolgen door de veel sterkere ruimtevoorstelling van den tastzin. Maar niet alleen wordt de zwak bewuste smaak- en reukruimte door de sterker bewuste gehoor-, gezicht- en tastruimte opgeslorpt, ook de drie laatste ruimten worden door onzen geest eenvoudig met elkaar vereenzelvigd. Onze geestesaanleg dwingt ons nu eenmaal steeds naar de eenvoudigste samenvatting der gewaarwordingen te streven; en zoo postuleert onze geest, krachtens zijn aard, voor

romande, 1876, pp. 58, 79, 102. — W. UHTHOFF: Untersuchungen über das Sehenlernen eines siebenjährigen blindgeborenen und mit Erfolg operierten Knabe, Hamburg und Leipzig, 1891.

alle zintuiglijke gewaarwordingen eenzelfde ruimte. Door die verschillende gewaarwordingen in één ruimte te localiseeren en ze met behulp van de herinnering tot onderwerp van gedachtenverbindingen te maken, verwerkt onze geest die gewaarwordingen tot waarnemingen, d.z. zintuiglijke indrukken voorzien van een beoordeeling, van een etiket.

Onze gezichtswaarnemingen eischen voor zich een ruimte van twee afmetingen. Wel is waar kan men door oefening verschillen in accomodatie constateeren en ook zich rekenschap geven van de convergentie der oogassen, dus van het stereoscopisch karakter van ons zien, en kunnen deze beide soorten gewaarwordingen ieder voor zich aanleiding geven tot het aannemen van een nieuwe afmeting; maar het tweedimensionale gezichtsveld oefent een zóóveel sterker indruk uit op den geest, dat het twijfelachtig is, of men voor die beide andere onderdeelen van den gezichtszin wel een nieuwe afmeting zou noodig oordeelen, wanneer deze niet reeds door een volkomen andere groep van gewaarwordingen, n.l. de tast- en bewegingsgewaarwordingen met veel grooter nadruk werd opgeëischt. Deze twijfel wordt gevoed door het feit, dat de twee nieuwe afmetingen, die theoretisch zouden moeten dienen om die beide onderdeelen van den gezichtszin: accomodatie en stereoscopie te herbergen, zonder eenige moeite tot een enkele worden versmolten en vereenigd met de derde afmeting, die de tast- en bewegingsgewaarwordingen ons opdringen.

Gelijk we zoeven met het voorbeeld van den naderenden spoortrein toelichtten, wordt de derde afmeting aan ons gezichtsbild toegevoegd door onzen geest, ten einde de overeenstemming met eventueele tast- en bewegingsgewaarwordingen te verzekeren.

Zoo reageert onze geest op onze zintuiglijke gewaarwordingen, door de op ons inwerkende dingen-buiten-ons te rangschikken in één enkele ruimte, waarvan we nu hebben vastgesteld dat ze is: 1e continu, 2e onbegrensd, 3e driedimensionaal.

Alvorens verdere eigenschappen van de ruimte te gaan opsporen, moeten we trachten ons er rekenschap van te geven: hoe we er toe komen de dingen-buiten-ons in *ruimte* te plaatsen.

De boven geschetste ontwikkelingsgang van onze ruimtevoorstelling zou doen vermoeden, dat onze verruimtelijking van de op ons inwerkende dingen-buiten-ons eenvoudig een gevolg is van den aard der inwerking zelve, m. a. w. dat we de *ervaring* opdoen, dat er een ruimte is. Dit vermoeden wordt echter hoe langer hoe zwakker, naarmate we ons scherper bewust maken op welk oogenblik de ruimtevoorstelling haar intrede doet.

De bewegingsgewaarwordingen, die in de eerste plaats in

aanmerking zouden komen om ons de ruimte te doen ervaren, moeten, alvorens ze iets tot onze kennis aanbrengen, eerst in onzen geest worden geïnterpreteerd, en het valt moeilijk in te zien, hoe ze door onzen geest tot bewustzijnsinhoud zouden kunnen worden verheven, zonder dat daarbij onze geest gebruik maakte van het ruimtebegrip, tot welks opbouw ze juist moesten dienen. Sommigen hebben getracht deze moeilijkheid te ontgaan, door in plaats van bewegingsgewaarwordingen te stellen: richtingsgevoelens, innerlijke bewegingsaandriften in verschillende richtingen¹⁾; maar een bewegingsaandrift als zoodanig is toch ook moeilijk tot klaar bewustzijn te brengen, zonder dat men van de beweging, waartoe men aandrift gevoelt, een zekere, al is 't ook nog zoo vage, maar in elk geval ruimtelijke voorstelling heeft. De moeilijkheid wordt eerst volkomen opgeheven, wanneer men in navolging van KANT²⁾ de rangschikking van de dingen in de ruimte als een spontane daad van onzen geest beschouwt, zonder welke geen zintuiglijke waarneming tot ons besef kan doordringen. Volgens deze opvatting is dus de ruimtelijke uitgebreidheid van de dingen een eigenschap, waarmee onze geest zelf ze bekleedt, zooals de sensatie van een kleur, bijv. rood, alleen kan worden verklaard als een reactie van onzen geest op de op zichzelf kleurlooze waarnemingsdaad van licht van een zekere golflengte.

Wanneer aldus onze geest de ruimtelijkheid der dingen levert, is het van belang te weten, of die verruimtelijking a priori reeds aan bepaalde grondregels is gebonden. Bijv. kan men vragen, of die ruimte, waarin onze geest de gewaarwordingen localiseert, uit haar aard reeds die grondeigenschappen heeft, die we zooveen bij onze empirische analyse hebben gevonden, n.l. dat ze continu is, dat ze onbegrensd is en dat ze drie afmetingen heeft. De beantwoording van deze vragen is zeer moeilijk, vooral daarom, omdat we bij de analyse van onze *denkwetten* onwillekeurig bevangen zijn door een zeker vooroordeel ten gunste van onze *denkgewoonten*, welke voor zulk een belangrijk deel afhangen van het beperkte ervaringsmateriaal, waarover we toevallig beschikken.

Velen kennen de drie bovengenoemde grondeigenschappen

¹⁾ A. RIEHL: Der philosophische Kritizismus und seine Bedeutung für die positive Wissenschaft; Bd. II, Leipzig 1879, p. 143 en vv.

G. HEYMANS: Zur Raumfrage; Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie XII, 3, 4.

G. HEYMANS: Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens; Leipzig, 1905, p. 204 en vv.

²⁾ I. KANT: Kritik der reinen Vernunft; Kant's gesammelte Schriften. Bd. III, Berlin 1904, pp. 51 en vv.

zonder eenig voorbehoud toe aan de meest algemeene verruimtelijking, waartoe onze geest krachtens zijn aard in staat zou zijn.

De groote wiskundige en wijsgeer HENRI POINCARÉ daarentegen, die voor het ruimtevraagstuk een levendige belangstelling had, en in zijn wijsgeerige geschriften dan ook telkens op die kwestie terugkwam, heeft, door onze veelsoortige gewaarwordingen aan een scherpe wiskundige ontleding te onderwerpen, ons geleerd, hoe voorzichtig we moeten zijn met het aannemen van a-prioristische eigenschappen. Hij kwam daarbij, telkens op andere bewijsgronden, tot de uitkomst, dat onze ruimtezin niet naar zijn aard tot drie afmetingen beperkt is, maar dat de keuze van drie afmetingen berust op het streven van onzen geest om in de samenvatting van onze gewaarwordingen den hoogst mogelijken eenvoud te bereiken. Zonder de wijsgeerige beschouwingen van POINCARÉ als een evangelie te willen aanprijzen, zou ik toch ieder, die eenigermate prijs stelt op verheldering van zijn zelfs meest elementaire wiskundige begrippen, willen aanraden van de wijsgeerige geschriften van POINCARÉ kennis te nemen ¹⁾. Men behoeft niet te vreezen, dat die lectuur spoedig zal vervelen; POINCARÉ schrijft boeiend, ja meeslepend; van zijn taal op zichzelf gaat een sterke bekoring uit. Niet elke uiteenzetting is even gemakkelijk te begrijpen door hem, die niet gewoon is met de door POINCARÉ gebruikte wiskundige begrippen te werken; maar talrijke gedeelten zijn zelfs voor den wiskundig minst ontwikkelden lezer een bron van verheven genot.

De uitkomst van onze tot dusver gehouden beschouwingen kunnen we als volgt samenvatten: Krachtens zijn aanleg scheidt onze geest de ruimte: de ruimte die kan zijn continu of verbrokkeld, die kan zijn begrensd of onbegrensd, die kan hebben een willekeurig aantal afmetingen. Of de aanleg van onzen geest reeds een keuze doet tusschen continu en discontinu, tusschen begrensd en onbegrensd, is niet zonder nader onderzoek uit te maken; twijfelachtig zelfs is het, of onze geestesaanleg het aantal afmetingen vaststelt. Nadat we echter de ruimte met behulp van onze elementaire zintuiglijke gewaarwordingen hebben

¹⁾ H. POINCARÉ: La Science et l'Hypothèse; p. 68: L'Espace et la Géométrie.
 „ La Valeur de la Science; p. 59: La Notion d'Espace, p. 96: L'Espace et ses Trois Dimensions.
 „ Science et Méthode; p. 95: La Relativité de l'Espace.
 „ Dernières Pensées; p. 57: Pourquoi l' Espace a trois Dimensions.

georganiseerd, blijkt deze in haar meer volmaakte phase te zijn continu, onbegrensd en drie-dimensionaal.

We vragen ons nu af: Kunnen we ons de ruimte leeg voorstellen, dus ontdaan van natuurobjecten en zelfs ook van door onze verbeelding geschapen figuren? Het antwoord hierop moet ontkennend luiden. Zelfs de vaagste voorstelling van de ruimte klampt zich vast aan hetzij zintuiglijk ervaren, hetzij alleen in de verbeelding aanwezige voorwerpen, hoe klein van afmeting ze ook zijn. Trachten we ons de leege wereldruimte voor te stellen, dan doorloopen we die ruimte in gedachte, d.w.z. we richten ons denken telkens op een object, hoe klein ook, waarvan we de beweging met ons geestesoog volgen. Een volkomen leege ruimte is een zinledig begrip. Niet ten onrechte zegt men ook, dat een architect bij het bouwen ruimte schept. Een absolute ruimte, d.i. een ruimte onafhankelijk van de dingen, blijkt dan ook tegen de kritiek der rede niet bestand te zijn.

Tot dusver hebben we nog met geen woord gerept van de meetkunde, en ge kunt me dus niet verwijten, dat ik van u meer verlangd heb dan van een beginneling vóór zijn eerste meetkundeles.

De eigenschappen toch, die we aan de ruimte hebben toegekend: continuïteit, onbegrensdheid, drie afmetingen, geven nog niet de minste aanwijzing, of zelfs 't geringste vermoeden ten aanzien van den inhoud der meetkundige stellingen. Wil men die eigenschappen van de ruimtelijke figuren bestudeeren, welke uitsluitend een gevolg zijn van de bovengenoemde drie grondeigenschappen der ruimte, dan verkrijgt men stellingen, die eenerzijds een hoogen graad van algemeenheid bezitten, maar daartegenover ook in 't geheel geen licht verspreiden over vraagstukken van maat en verhouding. Zulke stellingen spreken bijv. over het onderscheid tusschen een gesloten lijn en een zich onbepaald ver uitstrekkende lijn of een afgebroken lijn, over het onderscheid tusschen twee ringen, die in elkaar zijn geschakeld en twee ringen die geheel los van elkaar zijn; of ze hebben betrekking op de karakteristieke verschilpunten tusschen een eivormig oppervlak en een windkussen. Kortom, men zou die stellingen kwalitatief kunnen noemen in tegenstelling tot de kwantitatieve stellingen van onze meetkunde, waarin steeds uitspraak wordt gedaan over de gelijkheid van twee lijnstukken of twee hoeken, of formules worden afgeleid, die ook niet anders zijn dan uitdrukkingen voor zekere gelijkheden. De bovengenoemde, zeer algemeene stellingen vormen samen een zeer belangrijk, maar ook zeer moeilijk onderdeel der wiskunde, de

z.g. *topologie* of *analysis situs*, de analyse van de ligging der figuren t. o. van elkaar. Tot de *analysis situs* behoort o.a. het in elkaar zetten en ontwarren van puzzles, en de goochelaar, die zijn vest uittrekt, terwijl hij zijn jas aanhoudt, daikt zijn succes aan zijn min of meer bewuste toepassing van de *analysis situs*.

Men kan zich dus zóó uitdrukken: zoodra men aan de ruimte toekent: continuïteit en onbegrenstheid, en tevens het aantal van haar afmetingen geeft, schept men de mogelijkheid tot het beoefenen van de *analysis situs*, d. i. de wiskunde van deze *vormlooze* ruimte. In het dagelijksch leven gebruiken we van de *analysis situs* slechts enkele elementaire waarheden, die ons, door de kracht waarmee onze intuïtie ze ons opdringt, zoo evident schijnen, dat we ze nauwelijks geschikt achten als bouwsteenen van een wetenschap. De praktijk van het leven eischt allereerst een *meetkunde*, een wiskunde, die ons inlicht over maten en verhoudingen, een *meetkunde*, waardoor de ruimte een *vorm* krijgt.

Aan de hand van onze elementaire zintuiglijke gewaarwordingen hebben we aan de ruimte haar drie grondeigenschappen voorgeschreven en daarmee de wetenschap „*analysis situs*” mogelijk gemaakt. Wat moeten we nu doen om de *meetkunde* mogelijk te maken? Welke gegevens hebben we om te werken tot bouwstoffen van een wetenschap van maat en verhouding?

Klaarblijkelijk moeten het weer de zintuiglijke gewaarwordingen zijn, die ons vooruitbrengen; nu echter niet meer elementaire gewaarwordingen, maar gewaarwordingen, die reeds voor een deel tot ervaringen zijn verwerkt.

Tracht u eens een oogenblik te ontdoen van allerlei denkgewoonten, die ge door de praktijk van het leven hebt aangenomen, en zoo onbevangen mogelijk te zijn. Stelt u eens voor; dat ge uw heele vroegere leven hebt doorgebracht in een nauwe gevangenis, zoodat ge niet geleerd hebt uw gezichtsindrukken van voorwerpen op grooten afstand te interpreteren. Ge wordt nu geplaatst aan den ingang van een lange rechte laan. Ge ziet dan den weg en de boomen als een vlak schilderij voor u, waarop, naar 't midden toe, de weg smaller, de boomen kleiner worden. Een van uw vrienden, even lang als gijzelf, gaat een eindweegs vooruit in de laan. Tot uw ontsteltenis ziet ge den geliefden vriend ineenschrompelen tot de halve lengte, tot een kwartlengte. Wat moet er van hem worden? Ge acht uw vriend verloren, wilt hem redden en laat u naar hem toe rijden (loopen hebt ge niet kunnen leeren in uw gevangenis). Ge ziet nu het wonder gebeuren, dat uw vriend weer hoe langer hoe grooter wordt.

Bovendien bemerkt ge, voor zoover uw emotie u dat veroorlooft, dat de weg even breed is geworden als aan uw punt van uitgang en dat de boomen even hoog zijn geworden. Aangekomen bij uw vriend omhelst ge hem van aandoening en constateert met blijde verbazing, dat hij weer even lang is geworden als gijzelf. Nog vol van dit wonder kijkt ge om naar de plaats, vanwaar ge vertrokken zijt, en een nieuw mirakel doet u verstommen. De weg op dat punt is veel smaller, de boomen zijn veel korter geworden dan toen gij zelf daar waart. Wat al verbijsterende waarnemingen! Wat is de natuur toch veel ingewikkelder dan ge in uw kleine cel hadt vermoed! Met uw buitengewonen aanleg voor natuuronderzoeker formuleert ge al spoedig uw bevindingen in enkele samenvattende regels: „Voorwerpen, die zich van mij af verplaatsen, worden door die beweging kleiner, ze herstellen hun grootte, wanneer ik er naar toe ga.” Ge denkt nog met welgevallen na over de geweldige macht, die ge over uw medeschepselen hebt, maar wordt dan wreed daarin gestoord door de opmerking van uw vriend, dat hij, midden in de laan naar u omkijkend, terwijl ge nog aan den ingang stond, u veel kleiner zag, dan nu ge vlak bij hem staat. Ineengestort is uw koninkrijk! Uw vriend is even machtig als gijzelf! Hoogbegaafde wijsgeer die ge zijt, komt ge onmiddellijk tot de volgende inkleeding van uw ervaring: worden twee even groote voorwerpen A en B van elkaar verwijderd, dan neemt men op de plaats A waar dat B kleiner is dan A, maar op de plaats B dat A kleiner is dan B. De relativiteitsidee blijkt u al in 't bloed te zitten! Toch steekt het u heimelijk, dat gezelf en alle voorwerpen een veranderlijke grootte hebben, terwijl ge uzelf toch nooit van eenige grootteverandering bewust wordt. Ge tracht uw waarneming zóó te vertolken, dat ge de standvastigheid van uw eigen lengte en van de lengte van alle harde lichamen kunt redden.

Maar dan moet ge de leer der perspectief gaan uitvinden! Voor u, volmaakt wiskundige, is dit een kleinigheid. En wat hebt ge dan verworven? Een meetkunde, die als grondslag kan dienen van onze gewone stereometrie. De ruimte, waarin ge u de u omringende voorwerpen geplaatst denkt, is nu niet langer amorf, ze heeft een vorm gekregen; maar dien vorm dankt ze aan uw wensch om uw waarnemingen volgens een zeer bepaald beginsel te interpreteren, n.l. het beginsel van het behoud van de afmeting bij beweging. Let wel: dat beginsel is geen logische noodzakelijkheid, maar een willekeurige afspraak; een afspraak echter, die op andere dergelijke, logisch even geoorloofde afspraken dit voor heeft, dat ze in een bepaald opzicht zeer doelmatig is; Dank zij deze afspraak toch kunnen we voortaan

spreken van *de* lengte van de staaf A, terwijl we anders zouden moeten zeggen: de lengte van de staaf A zooals ik haar beoordeel met de ijkstaaf B, op dien en dien afstand. Hierbij zouden we hoogstens als vereenvoudiging kunnen invoeren de lengte van staaf A beoordeeld met de ijkstaaf B ter zelfder plaatse, of, gebruik makend van een term uit de relativiteitstheorie, de „eigenlengte” van A.

Dit eenigszins breed uitgewerkte voorbeeld moge er toe bijdragen u toegankelijk te maken voor de opvatting, dat de aard van onze meetkunde geheel gedetermineerd wordt door de wijze, waarop de dingen-buiten-ons door tusschenkomst van onze zintuigen onzen geest beïnvloeden en niet minder door de wijze, waarop onze geest, geleid door den hem eigen drang tot eenvoud, orde scheidt in de waarnemingen en deze verwerkt tot ervaring.

Ik zou onbehoorlijk misbruik maken van uw welwillende aandacht, wanneer ik u nog uitvoeriger ging schetsen, hoe telkens nieuwe vereenvoudigende afspraken onze meetkunde hoe langer hoe meer in haar vrijheid gaan belemmeren, totdat we eindelijk zooveel hebben voorgeschreven — de wiskundigen zeggen: zooveel axioma's hebben opgesteld — dat alle meetkundige stellingen nu verder volkomen gedetermineerd zijn. Laat het voldoende zijn u er op te wijzen, dat al die afspraken of axioma's ons voeren tot de meetkunde, die gij indertijd geleerd hebt en waarvan ik den inhoud volgens belofte onaangeroerd zal laten. Laat ik er alleen volledigheidshalve op wijzen, dat de eigenschappen, die wij aan de rechte lijn toekennen, ons voor een belangrijk deel worden aan de hand gedaan door de lichtverschijnselen.

Evenals alle axioma's een doelmatigheidskarakter dragen, d.w.z. hun oorsprong hebben in de behoefte van onzen geest om de gewaarwordingen van de dingen-buiten-ons met zoo min mogelijk omslag tot waarnemingen en vervolgens tot natuurwetenschap te verwerken, is dit ook het geval met het vermaarde axioma der evenwijdige lijnen, het z.g. 5e postulaat van Euclides. Ook dit axioma is ter wille van de doelmatigheid opgesteld; maar van dit axioma dringt zich de nuttigheid toch niet met zoo overweldigende kracht aan ons op als het geval is bij de andere axioma's. Geeft men het axioma van Euclides prijs, dan zijn er twee andere afspraken mogelijk¹⁾; vervangt men nu het axioma door

¹⁾ Het axioma van Euclides luidt in de tegenwoordig meest gebruikelijke redactie: In het platte vlak kan men door een punt buiten een lijn *l* één en slechts één lijn trekken, die, hoever ook verlengd, *l* niet

een dezer beide andere afspraken, dan gaat de meetkunde er kwalitatief anders uitzien; men spreekt dan van niet-Euclidische meetkunde. Daarentegen kan men het verschil kwantitatief zoo klein maken als men wil. Verlangt men een meetkunde, die ons veroorlooft onze waarnemingen gemakkelijk te beschrijven, dan zal een zwak-niet-Euclidische meetkunde in doelmatigheid niet ver behoeven achter te staan bij onze ouderwetsche Euclidische meetkunde. Ja, het is integendeel gebleken, dat onze geest meer eenheid in de samenvatting der natuurkundige ervaring kan brengen, wanneer hij de Euclidische meetkunde prijs geeft. Herinnert ge u uw avontuur in de laan, dan zult ge kunnen inzien, dat een vereenvoudiging in de opvatting van de natuur der dingen-buiten-ons verworven wordt door ons meetkundig denken hooger op te voeren.

Toen Copernicus de hoogst ingewikkelde natuurbeschouwing van het Ptolemaeïsche geocentrische wereldstelsel verving door het voor de beschrijving ongeloofelijk veel eenvoudiger heliocentrische planetenstelsel, moest hij al zijn meetkundige denkkracht aanwenden om zich los te maken van de naïeve opvatting van de beweging der hemellichamen. En zoo ligt het voor de hand, dat we de eenheid in ons natuurbeeld kunnen versterken, door de tot dusver toegepaste meetkunde te verruimen, al blijft het natuurlijk iedereen vrij aan zijn eenmaal met zooveel moeite

sniijdt (evenwijdig is met l). Laat men dit axioma vervallen, dan moet men het door één der beide volgende vervangen:

a. door een punt buiten een lijn l gaat *meer dan één* lijn, die, hoe ver ook verlengd, l niet snijdt;

b. door een punt buiten een lijn l gaat *geen enkele* lijn, die, hoe ver ook verlengd, l niet snijdt.

Het axioma a. voert tot de z.g. hyperbolische niet-Euclidische meetkunde van LOBATSCHESKY—BOLYAI.

Het axioma b. voert tot de z.g. elliptische niet-Euclidische meetkunde van RIEMANN.

De Euclidische of parabolische meetkunde is te beschouwen als overgangsvorm tusschen de hyperbolische meetkunde (a) en de elliptische meetkunde (b). Zoowel de elliptische als de hyperbolische meetkunde kunnen in verschillenden graad afwijken van de parabolische (Euclidische) meetkunde. Men kan zich ook voorstellen, dat in het platte vlak de graad van afwijking van den Euclidischen toestand van punt tot punt verandert; daarbij kan dan het geheele vlak zijn: 1e hyperbolisch, hoewel van punt tot punt in graad verschillend, 2e elliptisch, hoewel van punt tot punt verschillend in graad, 3e voor een deel hyperbolisch en voor een ander deel elliptisch, met een overgangslijn van punten, waarin de meetkunde parabolisch is. In deze 3 gevallen zou men het vlak algemeen-niet-Euclidisch kunnen noemen. Zulk een algemeen-niet-Euclidische meetkunde kan men ook opbouwen voor een ruimte (continuum) van een willekeurig aantal afmetingen. RIEMANN heeft het eerst op deze mogelijkheid gewezen en tevens geleerd hoe men den graad van afwijking van den Euclidischen toestand in elk punt van zulk een ruimte in formule kan brengen.

verworven meetkunde vast te houden en zich niets aan te trekken van de minder of meerder volmaaktheid der natuurkundige synthese.

Een zeer sterk sprekend voorbeeld dateert uit den laatsten tijd. Zooals velen uwer zal bekend zijn, is het EINSTEIN in zijn relativiteitstheorie gelukt voor de bewegingsverschijnselen onder invloed van de zwaartekracht een wiskundige formulering te vinden, die onafhankelijk is van den bewegingstoestand van de omgeving of, wiskundig uitgedrukt, van het coördinaatstelsel, ten opzichte waarvan de verschijnselen worden beschreven. EINSTEIN heeft daartoe den tijd als vierde afmeting, als vierde coördinaat, aan onze drie-dimensionale ruimte toegevoegd en in het aldus verkregen vier-dimensionale z.g. wereldcontinuum is nu zijn formule bestand tegen elke verandering van coördinaatstel. Deze transformatie van coördinaten kan binnen zekere grenzen ook tijd in ruimte omzetten en omgekeerd, hetgeen bij 't eerste hooren wonderspreukig lijkt, maar ons aan den anderen kant hoop geeft, dat er in de toekomst nog eens een nieuwe EINSTEIN zal opstaan, die deze transformatiemogelijkheid tot zulk een hoogte zal opvoeren, dat al de tijd, dien de Landbouwhoogeschool wacht op haar nieuwe laboratoria, zal kunnen worden getransformeerd in laboratoriumruimte.

Intusschen willen we, zonder ons te laten betooveren door dat hoopvolle verschiet, reeds nu met bewondering stilstaan bij de geniale ontdekking van EINSTEIN, die het mogelijk maakt de geheimzinnige zwaartekracht te interpreteeren als een gevolg van meetkundige, en wel niet-Euclidische eigenschappen van de vier-dimensionale ruimte-tijd-wereld¹⁾. Daarmee heeft het begrip zwaartekracht opgehouden tot de natuurkunde, d. i. tot de wetenschap van de dingen-buiten-ons, te behooren; het is nu ingelijfd bij die begrippen, die onze geest uit zichzelf vormt, al of niet daartoe opgewekt door de gewaarwordingen der zintuigen.

De meetkunde van de vier-dimensionale ruimte-tijd-wereld, het wereld-continuum, wordt beheerscht door de verdeling van de materie in de drie-dimensionale ruimte van oogenblik tot oogenblik, en ook de meetkunde van deze drie-dimensionale ruimte heeft zich te richten naar de wijze, waarop die materie in ruimte en tijd is verspreid, zooals de twee-dimensionale meetkunde op een gerimpeld watervlak afhankelijk is van de ligging en de beweging der golven. In verband met de uit-

¹⁾ EINSTEIN past de in de noot op pag. 13 aangeduide algemeen-niet-Euclidische meetkunde toe in het vier-dimensionale wereldcontinuum.

komsten der sterrekunde eischt de leer van EINSTEIN, dat onze drie-dimensionale ruimte *eindig* is, en daar ze onbegrensd is, is ze in zichzelf gesloten, zooals, in twee afmetingen overgezet, een bolvormig oppervlak onbegrensd maar toch eindig is. Terwijl dus de Euclidische meetkunde of gewone stereometrie de ruimte voor oneindig verklaart, leert een nauwkeuriger analyse van de natuur, dat meer eenheid in de voorstelling bereikt wordt door een eindige ruimte aan te nemen.

De natuurkundige HERMANN WEYL heeft op zeer vernuftige wijze aangetoond, hoe ook de electromagnetische verschijnselen zouden kunnen worden ondergebracht bij de meetkunde, mits deze nog een zeker, hier niet nader te noemen axioma prijsgeeft, dat zelfs in de algemeene niet-Euclidische meetkunde nog wordt gehandhaafd ¹⁾. Zijn beschouwingen voeren tot een wiskundige vertolking van de electromagnetische verschijnselen, waarvan de formuleering ²⁾ haar eenvoud dankt aan de omstandigheid, dat men in een ruimte-tijd-wereld van vier afmetingen, dus met een „ruimtelijke” ruimte van drie afmetingen werkt. Zodoende zou onze geest in haar wiskundige verwerking van de natuurervaring de grootste economie betrachten door aan onze ruimte drie afmetingen toe te kennen.

De uitkomsten van WEYL zijn nog aan kritiek blootgesteld, maar, aangezien de algemeene niet-Euclidische meetkunde, zooals ze door EINSTEIN is toegepast, nog in verschillende richtingen algemeener kan worden gemaakt ³⁾, lijkt het zeer waarschijnlijk, dat men, al is 't niet op de manier van WEYL, dan toch met een andere verruiming van de meetkundige beginselen er in zal slagen ook de electromagnetische natuurwetten tot meetkundige stellingen te herleiden. De heele natuur, voorzover ze object van onderzoek is in de natuurkunde, zal dan een meetkundig stelsel zijn, welks eigenschappen gedetermineerd zijn door onzen eigen menschenlijken geest. De causaliteit in de natuurkunde zal daarbij het karakter aannemen van wiskundige noodzakelijkheid. De opeenvolging van twee verschijnsels zal

¹⁾ Terwijl in de algemeen-niet-Euclidische meetkunde een lijnstuk bij beweging wel is waar in 't algemeen van lengte verandert, maar zijn oude lengte terugkrijgt, als het weer in zijn oorspronkelijken stand is teruggekeerd, neemt WEYL aan, dat ook na terugkeer in den oorspronkelijken stand deze lengte veranderd is, tenzij elk punt van het lijnstuk precies denzelfden weg heen en terug heeft doorloopen.

²⁾ N.l. de formule voor de „Werking” (Wirkungsgrösse) in de theorie van MAXWELL; deze werking is de eenvoudigste z.g. integraalinvariant in het vierdimensionale wereldcontinuum en heeft geen analoon in een continuum van minder of meer dan 4 afmetingen. Zie H. WEYL: Raum, Zeit und Materie; Berlin, 1920, p. 245.

³⁾ Zooals o.a. is aangetoond door Prof. J. A. Schouten te Delft.