MET WISKUNDIGE ZEKERHEID

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING VAN HET
AMBT VAN HOOGLERAAR IN DE WISKUNDE AAN
DE LANDBOUWHOGESCHOOL TE WAGENINGEN
OP 21 NOVEMBER 1963

DOOR

DR. B. VAN ROOTSELAAR

H. VEENMAN & ZONEN N.V. — WAGENINGEN

Mijne Heren Leden van het Bestuur der Landbouwhogeschool,
Dames en Heren Hoogleraren, Lectoren, Docenten en Wetenschappelijke Medewerkers,
Dames en Heren Studenten
en voorts Gij allen, die door Uw aanwezigheid blijk geeft van Uw belangstelling.

Zeer gewaardeerde Toehoorders,

De wiskunde, zo is mij van vele zijden meegedeeld, neemt aan deze hogeschool een zeer gewaardeerde plaats in. Ik heb dat ook reeds in het recente verleden kunnen ervaren. Daar het om allerlei voor de hand liggende redenen veel genoegen met zich kan brengen een vak te beoefenen, dat gewaardeerd wordt, lijkt het goed eens na te gaan wat de oorzaak van die waardering wel kan zijn.

Wat zich bij een dergelijke overweging onmiddellijk opdringt is het feit, dat de wiskunde een zeer oude wetenschap is. Evenwel is niet met zekerheid vastgesteld, dat de wiskunde ouder is dan andere wetenschappen en is het twijfelachtig, dat dit ooit als historisch feit zal komen vast te staan, zodat uit dien hoofde de waardering voor de wiskunde die voor andere wetenschappen althans niet zal overtreffen. Overigens bevestigt een ander historisch feit wel het primaat der wiskunde aan deze hogeschool: de leerstoel in de wiskunde is in zekere zin ouder dan de hogeschool zelve. Dat de gedachte hieraan nog steeds levendig gehouden wordt, blijkt bij het bezien van mijn bureaustoel op de afdeling wiskunde.

Ouderdom is echter in zich zelve niet altijd oorzaak van waardering en het lijkt me verstandiger dit aspect der wiskunde niet verder te beschouwen, maar de oorzaken elders te zoeken. Hiertoe bieden zich twee andere aangezichten der wiskunde aan, nl. haar schoonheid en haar bruikbaarheid.

Door de eeuwen heen vinden we getuigenissen zowel van wiskundigen als van buitenstaanders, die aan de bestudering der wiskunde een schoonheidservaring ontlenen. Maar nog veelvuldiger zijn de bewijzen van bruikbaarheid der wiskunde bij het wetenschappelijk onderzoek op velerlei gebied.

Deze toepasbaarheid is een algemeen aanvaard en gewaardeerd feit in de natuurwetenschappen, een soms aanvaard en dan weer verworpen feit, m.a.w. geen feit, in de geesteswetenschappen — men denke bijvoorbeeld aan DE SPINOZA's *Ethica, ordine geometrico demonstrata* en aan BUFFON's *Arithmétique de la morale* — de verwer-

pingen zijn legio — een erkend feit in de economische en sociale wetenschappen en niet in de laatste plaats in de bedrijfsleer. Ook de medische wetenschap vindt thans iets van haar gading in de toegepaste wiskunde, zoals blijkt uit de pogingen tot constructie van elektronische huisdokters en verpleegsters.

Biedt dus de bruikbaarheid van de exacte wetenschappen een goede basis voor het begrijpen van de waardering, welke voor wiskunde aan deze hogeschool bestaat, zij wordt pas goed verklaard door de bijzondere kwaliteiten van de twee wiskundigen, VAN UVEN en KUIPER, welke in opvolging en in toenemende mate zo overtuigend de schoonheid en de toepasbaarheid hebben aangetoond. Ik treed daarom in een rijke erfenis, nagelaten door deze eminente voorgangers, met de niet geringe zorg, deze in stand te houden en zo mogelijk uit te breiden. Een van de manieren om dit te doen is de verkondiging, d.w.z. de wiskundige kennis over te dragen aan jong en oud.

Echter, Uw waardering zou beslist niet toenemen indien ik op het ogenblik zou overgaan tot het nauwkeurige bewijs van de een of andere wiskundige stelling, welke uitmunt door overrompelende schoonheid of door zijn grote nut voor bijvoorbeeld de dierkunde of tuinarchitectuur, ofwel voor beide. Zeer waarschijnlijk zou ik daarbij namelijk al spoedig gedwongen zijn om naast de omgangstaal de symbolische en directe taal der wiskunde te hulp te roepen om U de draad van mijn betoog niet te doen verliezen. Ter voorbereiding op het gebruik daarvan zou ik U echter op de hoogte moeten stellen van het symbolisme dat ik zou gaan gebruiken, waardoor het gehele betoog voor geruime tijd en daarmee misschien wel voor goed uit ons gezichtsveld zou verdwijnen.

Thans dus geen wiskundig betoog, maar wel een betoog over wiskunde en wel zullen we in het bijzonder nagaan hoe het staat met die kwaliteit van de wiskunde, welke haar in veler ogen zo bewonderenswaardig maakt: de wiskundige zekerheid. Deze wiskundige zekerheid is nauw verbonden met het zojuist genoemde struikelblok, de wiskundige taal, welke enerzijds noodzakelijk is voor een nauwkeurige mededeling der wiskunde en anderzijds een rem lijkt te zijn voor een verbreiding van de wiskunde op grote schaal.

Velen van u zullen de wiskundige taal duidelijk als een rem zien en zelfs als een door de wiskundigen uit zuivere kwelzucht aangebrachte rem. Deze mening is begrijpelijk, omdat bij het invoeren van de wiskundige taal veelal (uit tijdsgebrek) achterwege gelaten wordt op overtuigende wijze vooraf het besef van de noodzaak van een dergelijke taal bij te brengen.

Men denke hierbij aan de trits: gegeven — te bewijzen — bewijs* der meetkunde-vraagstukken, waarmede men, meestal op zeer jeugdige leeftijd, bij eerste kennismaking met de meetkunde geconfron-

* Beter, het ouderwetse: onderstelde-gestelde-bewijs.

teerd wordt. Daarbij komt dan nog, dat het hele verhaal dat op de aankondiging „bewijs" volgt meestal als volmaakt overbodig en als zeer omslachtig gevoeld wordt.

Vragen we ons af wanneer de noodzaak van een speciale wiskundige taal naar voren komt, dan kunnen we algemeen stellen dat de behoefte daaraan zich doet gevoelen wanneer de omgangstaal onvoldoende blijkt om onze gedachten nauwkeurig uit te drukken. Hetzij omdat zij aanleiding geeft tot ingewikkelde en omslachtige mededelingen, hetzij omdat zij in meer principiële zin onmachtig is de bedoelde gedachtengang op juiste wijze te beschrijven en aanleiding geeft tot paradoxen.

Iedereen zal zich kunnen voorstellen dat de rekenkunde en de algebra onderwerpen zijn, waarbij de behoefte aan een speciale taal zich het sterkst doet gevoelen. Immers daar is men bezig met zeer bepaalde bewerkingen als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, welke bewerkingen men vaak een aanzienlijk aantal malen moet herhalen. Gebrek aan meegaandheid van de omgangstaal dwingt hier tot invoeren van symbolisme voor objecten, bewerkingen en relaties. Dit proces van symboliseren is in het algemeen zeer moeizaam gebleken en nauw verbonden aan een verdieping van het inzicht in de betrokken problemen. Hierbij kan men opmerken dat in het algemeen het inzicht en de nieuwe begrippen voorafgaan aan de invoering van geschikte symbolismen. In deze situatie is door de herwaardering van de term axioma in de tweede helft van de vorige eeuw enige verandering gekomen: tegenwoordig kan men ook vrijelijk symboliseren zonder inzicht.

Bezien we nu de rol die de wiskundige taal bijvoorbeeld voor de algebra heeft, dan moeten we voorop stellen, dat het gebruik van een speciale taal nimmer het gebruik van de omgangstaal uitsluit. Integendeel, men heeft die voor de beschrijving van het belangrijkste deel van het gedachtenproces nodig. Het voortschrijden van onderstelde naar gestelde in het bewijs van een wiskundige stelling geschiedt namelijk door logische redenering. Deze methode is niet in alle wetenschappen gebruikelijk en ook niet voor alle wetenschappen geschikt. Zij is een kenmerk van de exacte of deductieve wetenschappen. Welnu, voor de logische redenering heeft lange tijd de mening gegolden, dat de omgangstaal volledig geschikt is om deze uit te drukken. Eerst in de jongste honderd jaar is daarin verandering gekomen door de verschillende meningen over de aard der wiskunde en de pogingen tot nauwkeurige en zekere grondvesting van die wetenschap.

Indien we spreken over grondvesting der wiskunde denken we onwillekeurig aan de opbouw der meetkunde door EUCLIDES. Inderdaad mogen de *Elementen* van EUCLIDES zonder voorbehoud als een geweldige stap beschouwd worden in de ontwikkeling der wiskunde en als een eerste voorbeeld van een opbouw van de wiskunde als de-

ductieve theorie. Het lijkt daarom goed ook de meetkunde in onze beschouwing te betrekken, zonder evenwel over te gaan tot een analyse van de *Elementen.*

Als we naast elkaar leggen een niet al te modern, maar ook niet al te oud en niet al te moeilijk meetkundeboek en een dito algebraboek, dan vallen ons bij het opslaan twee grote verschillen onmiddellijk op. In het meetkundeboek vinden we nagenoeg geen formules, welke we veelvuldig in het algebraboek aantreffen en in het algebraboek treffen we geen figuren aan, waarmede het meetkundeboek voor een belangrijk deel gevuld is. Ook kunnen we opmerken, dat de bewijzen der meetkundige stellingen nagenoeg geheel opgeschreven zijn in de omgangstaal en niet zoals in het algebraboek rijtjes formules zijn met enkele opmerkingen ertussen, die mededelen dat de volgende formule een gevolg is van de vorige.

Zo op het eerste gezicht dus een volmaakt ander beeld, een volmaakt ander vak. De speciale wiskundige taal beperkt zich in het meetkundeboek tot enkele eenvoudig aan te leren naamgevingen en enige afkortingen, welke bovendien nog zonder groot bezwaar vermeden zouden kunnen worden. Zouden echter in een meetkundeboek geen figuren voorkomen dan zouden we het moeilijk als zodanig erkennen.

Wat is nu het doel van deze figuren? Natuurlijk ons te helpen bij het volgen van het betoog, waarvan we ons de gang aanschouwelijk kunnen voorstellen aan de hand van de getekende figuur. Dat hierbij figuren beter geschikt zijn dan lange beschrijvingen in de omgangstaal, ligt aan het feit dat de meetkundige begrippen afgeleid zijn van voorwerpen in de werkelijkheid, waarvan we door middel van een tekening een bondige beschrijving kunnen geven met inbegrip van de bestaande relaties tussen de onderdelen. Indien ik een rechthoek teken, heb ik onmiddellijk een overzicht van alle relaties die er tussen de zijden en hoeken bestaan, terwijl een beschrijving in de omgangstaal nog een zekere geestelijke inspanning vereist om tot hetzelfde overzicht te geraken.

Het tekenen van figuren, als hulpmiddel bij het redeneren over meetkundige begrippen schept echter problemen, welke zich sterker opdringen dan die, welke verbonden zijn aan de invoering van de symbolentaal der algebra. Als ik opschrijf a, b, c, . . . dan is het duidelijk dat ik het niet over drie letters en drie punten heb. Teken ik echter een driehoek, dan is al een subtiele geest vereist om te begrijpen, dat ik het niet over die driehoek zal hebben.

Juist omdat aan de figuren zelf veel interessants te beleven is, is het goed te beslissen of men het nu heeft over de getekende figuren zelf of over zekere dingen die er door worden aangeduid. En, indien dit laatste het geval is, over welke dingen men het dan heeft. Reeds in de griekse meetkunde wordt hier duidelijk gekozen door PLATO: hoewel de meetkundige begrippen tot ons komen uit de ervaring

hebben zij een bestaan onafhankelijk daarvan. De ervaring is het medium, waardoor zij tot onze gedachtenwereld komen. We hebben echter te maken met ideale begrippen en onze redeneringen slaan op deze. Hieruit volgt, dat de meetkundige begrippen vastgelegd dienen te worden onafhankelijk van de ervaring en de bij een redenering gebruikte figuren dragen niet bij tot een rechtvaardiging daarvan. Het is veeleer omgekeerd, zij kunnen haar eerder ondermijnen dan verstevigen. Namelijk, omdat ze in het algemeen geen getrouwe beelden van de begrippen zijn en ons er ongemerkt toe kunnen verleiden zekere eigenschappen van de figuren over te dragen op die begrippen.

Het is goed om hierbij een andere opvatting te noemen, omdat wij hierdoor een betere kijk op de ontwikkeling der wiskunde krijgen. Deze opvatting is een empirische en is daardoor gekenmerkt, dat zij, in tegenstelling tot de platonische, er van uitgaat, dat onze ideeën beelden zijn van de ervaringsobjecten en dat ze dus niet meer inhoud hebben dan we aan de objecten kunnen vaststellen. Onze ideeën kunnen niet helder zijn indien wij ze niet kunnen terugvinden in de werkelijkheid. Zijn onze ideeën volwaardige afbeeldingen der werkelijkheid, dan gelden alle relaties daartussen ook voor de corresponderende objecten. Met andere woorden, de werkelijkheid is een model voor onze theorieën (ARISTOTELES, en meer monomaan HUME). Deze overtuiging blijkt niet vol te houden. Het empirisme geeft zelfs geen basis voor het logisch redeneren en aanvaarden we het logisch redeneren toch, dan blijken we geen enkele reden te hebben om te beweren, dat de werkelijkheid een model is van onze theorie. Zo b.v. DESCARTES: „een driehoek veronderstellend, zag ik duidelijk in, dat zijn drie hoeken samen 180° moesten zijn, maar ik zag geen enkele reden welke mij verzekerde dat er op de wereld ook maar één driehoek was".

Nu zult U zich afvragen waarom ik over de empirische opvatting gesproken heb, indien die toch niet houdbaar blijkt te zijn. Bovendien hebben we de platonische waar we het best mee kunnen doen. De reden van het bespreken van bovenstaande opvatting is echter de volgende. Zij geeft uiting aan een streven naar zekerheid bij onze theoretische beschouwingen. Het concretiseren van onze gedachtengang door verwijzing naar werkelijk bestaande voorwerpen zou ons dit gevoel van zekerheid in hoge mate geven en ons ervan overtuigen dat onze speculaties niet onzinnig zijn. Het blijkt nu, dat deze zekerheid niet te verwerven is, tenzij we afzien van theoretische beschouwingen en slechts registreren wat we om ons heen zien.

We kunnen de consequentie trekken, dat we of het redeneren moeten nalaten of genoegen moeten nemen met een ander soort zekerheid. Een dergelijke zekerheid omschrijft DESCARTES bijvoorbeeld zo: „die dingen, welke wij heel helder en duidelijk begrijpen, zijn alle waar". „Maar," zo voegt hij er speels aan toe, „er blijven nog

wel enige moeilijkheden ten aanzien van de vraag welke dingen we duidelijk begrijpen." Deze zeer aanvaardbare en niet sterk bindende omschrijving laat zekere ruimte buiten de empirische zekerheid.

Met een variant op D'ALEMBERT's: reken maar, dan komt het vertrouwen vanzelf, kiezen we dus voor het theoretiseren en zullen we wel zien in hoeverre we daarbij op zekerheid kunnen rekenen.

We gaan daartoe eerst na hoe men een theorie opbouwt. De meest elegante methode is de axiomatische. Door een aantal afspraken legt men enige begrippen vast, alsmede enige beweringen welke voor deze begrippen zullen gelden, en leidt vervolgens door logische redenering uit deze afspraken allerlei uitspraken af, welke men stellingen noemt. Alle stellingen bij elkaar vormen de theorie. Deze theorie is zinvol indien wij er een model voor kunnen vinden, dat is een klasse van objecten waarop de theorie van toepassing is, d.w.z. waarvoor haar theorema's inderdaad ware uitspraken zijn. De objecten, welke men hierbij tracht te vinden zijn dan echter niet voorwerpen uit de ervaring, doch zogenaamde gedachtenobjecten (ook wel gedachte objecten), bijvoorbeeld de natuurlijke getallen en uitbreidingen daarvan, zoals gehele, rationale, reële getallen enz., welke door zekere min of meer overzichtelijke constructies uit de natuurlijke getallen verkregen kunnen worden.

Als ik voor de theorie een model kan vinden dan levert mij dat de zekerheid, dat ik bij het afleiden van de stellingen der theorie nooit tot een tegenspraak kom. Een tegenspraak in de theorie openbaart zich daarin, dat ik op zeker ogenblik heb afgeleid een stelling en zijn ontkenning. Deze situatie correspondeert in het model met het toekennen en het gelijktijdig ontzeggen van een eigenschap aan zekere objecten. Welnu, deze situatie is voor geconstrueerde objecten absurd.

Het model dat men zo van de theorie gevonden heeft, kan men zien als een toepassing ervan. We zien hier, dat de toepassing van de theorie iets over de theorie zelf aan het licht brengt, nl. dat ze niet onzinnig is, m.a.w. niet twee contradictore stellingen bevat.

Dat de theorie toepassing vindt beschouwt men soms niet als erg belangrijk en eigenlijk ook niet interessant. Het enige waar het dan om gaat is de zekerheid te hebben dat de theorie vrij van tegenspraak is. Men wil dat niet, omdat men zo bevreesd is voor tegenspraak, maar meer omdat theorieën met tegenspraak geen mogelijkheid tot tegenspraak meer laten. Ik wil dit even toelichten. De logica die men bij de opbouw van een theorie bezigt is zodanig, dat indien we beschikken over twee elkaar tegensprekende stellingen der theorie, we kunnen concluderen, dat elke uitspraak der theorie een stelling is. Het begrip stelling is dan zover gedevalueerd, dat er weinig aardigheid meer aan te beleven is.

Nu kan men zich afvragen of het nodig is de vrijheid van tegenspraak van een theorie aan te tonen door middel van een model. Is

het niet mogelijk om dit te doen zonder het construeren van een model, d.w.z. los van een rechtstreekse toepassing?

Hoewel een model ons natuurlijk de zekerheid van zinnigheid in hoge mate levert kunnen we ons op het standpunt stellen, dat elke andere methode, welke vrijheid van tegenspraak oplevert, ook goed is. Men kan zich zelfs voorstellen dat de methode van het model niet de meest rechtstreekse zal zijn. Immers bij het afleiden van de stellingen der theorie zijn we bezig met logische redeneringen uitgaande van axioma's. Het is voorstelbaar, dat we door nauwkeurige beschouwing van de axioma's en de manier waarop uit die axioma's stellingen worden afgeleid, kunnen beredeneren dat we nimmer twee tegenstrijdige stellingen kunnen afleiden. Daarbij zou dus de constructie van een model overbodig worden, wat het voordeel heeft dat we ons bij het bewijs van de zinnigheid van onze theorie niet behoeven te beroepen op het bestaan van een of ander wiskundig systeem, waarvan de opsporing grote moeilijkheden kan opleveren.

Hoe zou men een dergelijk bewijs moeten inrichten? Men moet dan bedenken dat de afleiding van een stelling uit zekere axioma's geschiedt door een bewijs, d.w.z. een logische redenering. Niet elke stelling wordt rechtstreeks uit de axioma's afgeleid, maar vaak mede uit vroeger bewezen stellingen. En tenslotte moet dan als resultaat uit de bus komen, dat twee tegenstrijdige stellingen niet beide bewezen kunnen worden. Om over deze kwestie tot een resultaat te kunnen komen, dat gesierd wordt door de befaamde wiskundige zekerheid, zal men om te beginnen overeenstemming moeten afdwingen over het te hanteren begrip „bewijs" in de te bespreken theorie, door een nauwkeurige vastlegging.

Met dit doel ontwerpt men een speciale taal: de formele logica. In deze taal wordt de gehele theorie ondergebracht inclusief de bewijzen, en we spreken erover in de omgangstaal, die we daarom metataal noemen.

Inderdaad lukt het op deze wijze van verschillende theorieën de zinnigheid te bewijzen, d.w.z. in de metataal te beredeneren. Dergelijke bewijzen van niet-tegenstrijdigheid van zogenaamde geformaliseerde theorieën zijn niet zelf van die nauwkeurig omschreven bewijzen als die welke tot de speciale theorie behoren. Men kan nl. niet alles formaliseren, doch moet een zeker restant uitdrukken in de omgangstaal. De bewijzen van vrijheid van contradictie van de geformaliseerde theorieën noemt men, omdat ze zich afspelen in de metataal, ook wel metamathematische bewijzen. Het is de bedoeling, dat zij in bewijskracht niet achter staan bij de zogenaamde formele bewijzen. Dit kan slechts zo lang men zich bij het redeneren in de metataal zekere beperkingen oplegt, welke als finitistisch aangemerkt worden en welke tot resultaat hebben dat bij dergelijke redeneringen de bovengenoemde Cartesiaanse zekerheid algemeen ervaren wordt. Deze beperkingen zijn nader bescheven door HERBRAND.

Neemt men deze beperkingen niet in acht, dan treden allerlei moeilijkheden, welke men door het invoeren van een speciale taal voor de bewijzen tracht te omzeilen, weer op.

Het is nu gebleken, dat men, om van zekere systemen de vrijheid van tegenspraak te bewijzen, zich moet bedienen van ingewikkelder systemen in de metawiskunde, voor welke systemen men natuurlijk weer zou moeten weten of ze vrij van tegenspraak zijn. Deze situatie was bij de oorspronkelijke opzet der finitistische bewijzen van niet-strijdigheid niet voorzien.

Op deze intrigerende omstandigheid zullen we nu niet nader ingaan. Liever willen we een ander aspect naar voren brengen van de voortgeschreden formalisering, welke zich uit in de theoretische beschouwing der wiskundige bewijzen. Deze beschouwing is mogelijk door een formalisering van de regels, welke gelden voor het logisch denken.

In de zo geformaliseerde theorieën komt men ook formules tegen die bedoeld zijn als precisering van zinnen als „er is een ding x met eigenschap E". Het kan voorkomen, dat men een dergelijke uitspraak als stelling van de theorie afleidt, zonder dat men in staat is op enigerlei wijze een gedachtenobject aan te wijzen dat inderdaad met deze eigenschap begiftigd is. Een gevolg is, dat de oorspronkelijke betekenis van het begrip existentie teloor gaat en slechts geïnterpreteerd kan worden als de niet-strijdigheid van de betrokken theorie. Men kan deze interpretatie zien als een generalisatie van het existentie-begrip. Volgens deze opvatting moeten we dus bij het onderzoek van de uitspraak „er is een ding x met de eigenschap E" niet vragen ons een zodanig object aan te wijzen, doch er genoegen mee nemen, dat bovengenoemde uitspraak geproduceerd is als stelling van een theorie welke vrij van tegenspraak is.

Nu is het generaliseren van begrippen in de wiskunde geen onbekende zaak en vaak zelfs een zeer belangrijke factor in de ontwikkeling. We hoeven daarvoor maar te denken aan de verschillende uitbreidingen van het getalbegrip. Hoewel met de nodige moeilijkheden en tegenstand doorgezet, zijn deze van grote betekenis gebleken voor de wiskunde. Kenmerk van de successieve uitbreidingen van het getalbegrip evenwel is, dat de uitbreiding in welomschreven verband staat tot het oorspronkelijke object en niet in de laatste plaats, dat de uitbreiding door constructie verkregen kan worden. Een eenvoudig voorbeeld moge dit verduidelijken. Niet elke vierkantsvergelijking met reële coëfficiënten heeft ook reële wortels. Uitbreiding van het getalsysteem tot dat der complexe getallen levert als resultaat dat de stelling: „elke vierkantsvergelijking met reële coëfficiënten heeft een wortel" bewijsbaar wordt. Verder kan men in ons voorbeeld een kenmerk aangeven, waarmede te beslissen is of de vergelijking een reële wortel heeft.

Ik kan begrippen ook op een wat slordiger manier een uitbreiding

geven — b.v. is het gemakkelijk het begrip winst zodanig uit te breiden, dat de stelling „elk bedrijf maakt winst" afleidbaar wordt. U begrijpt, dat we hiermede een zodanige uitholling bereikt hebben, dat het beter is om ook de lege dop maar weg te gooien. Zo is de situatie ook in de geformaliseerde wiskunde met de existentiestellingen. Wat er van gezegd kan worden is, dat het stellingen van een niet-strijdige theorie zijn, welke wat de vorm betreft lijken op uitspraken over het bestaan van dingen. Een middel om in het algemeen uit te maken of ze ook wat de inhoud betreft lijken op zulke uitspraken is niet aanwezig. Het ware dus beter de lege existentie-dop overboord te gooien, wat technisch mogelijk is en waardoor men elke overeenkomst met uitspraken over het bestaan van zekere objecten kan vermijden. Daarbij komt nog dat vele, hoewel niet alle, van de interessante existentiestellingen inderdaad niet veel meer opleveren dan de lege existentie-dop. Men zou de existentie-dop nog kunnen dulden in de volgende gevallen:

a. indien zij altijd leeg was; dan kon men immers volstaan met op te merken: daar is de lege dop weer, en zich de moeite van het overboord werpen besparen;

b. indien in alle gevallen nauwkeurig te omschrijven zou zijn, wat de inhoud van de dop nog is. Geen van deze twee gevallen is echter gerealiseerd: de inhoud van een existentiestelling is in het algemeen niet duidelijk aan te geven.

Tegen deze vaagheid der existentie-uitspraken, welke verhuld wordt door een niet te ontkennen elegantie, is verzet gerezen.

Zo tegen het einde van de vorige eeuw namelijk hield men zich intensief bezig met het opbouwen van de wiskunde op grond van zo weinig mogelijk veronderstellingen. Er waren onderzoekers die probeerden de gehele wiskunde op te bouwen op de logica welke zij gegeven veronderstelden (FREGE, RUSSELL). Anderen trachtten de wiskunde terug te brengen tot de leer der verzamelingen (CANTOR, ZERMELO, FRAENKEL), en wel onafhankelijk van de formele logica (hoewel ze logisch redeneerden). HILBERT tenslotte zag een gemeenschappelijk fundament in een formele behandeling van logica en wiskunde in zijn „bewijstheorie" of meta-wiskunde. Van het ogenblik af echter dat bovengenoemde meningen naar voren gebracht en uitgewerkt werden zijn er ontevredenen geweest zoals KRONECKER, BOREL, BAIRE, LEBESGUE, die van mening waren dat men zo de wiskunde niet kon opbouwen en wel speciaal bezorgd waren om het lot, dat het wiskundige existentie-begrip in deze theorieën ten deel viel.

Deze ontevredenen namen slechts genoegen met een geheel gevulde existentie-dop, d.w.z. zij wensten in de wiskunde slechts existentie-uitspraken te aanvaarden indien ook een object aangewezen kon worden waarvan de existentie beweerd werd. Uitspraken waarvoor dit niet gold beschouwden ze als illusoor. De meest radicale vertegenwoordiger van deze richting was wel KRONECKER, die even-

wel niet tegen de stroom van zijn tijd op kon. Een hernieuwde poging dergelijke ideeën ingang te doen vinden, in het begin van deze eeuw ondernomen door BROUWER heeft meer succes gehad en is door zijn elan en genie van blijvende invloed op de wiskunde gebleken. In het bijzonder houdt men zich op het ogenblik intensief bezig met zijn diepzinnigste scheppingen, welke kort geleden (1961) door SPECTOR met succes zijn toegepast in een bewijs van de niet-strijdigheid der klassieke analyse.

Volgens BROUWER ligt het wezen van de wiskunde in het construeren van gedachtenobjecten volgens helder en duidelijk begrepen richtlijnen. Secundair is bij hem de logica, welke vóór zijn tijd altijd voorop gesteld of toch minstens nevengesteld werd. BROUWER onderwerpt de principes der logica aan een kritisch onderzoek door na te gaan welke daarvan betrouwbare resultaten opleveren bij toepassing op zijn gedachten-constructies. Hij komt daarbij tot de conclusie dat aan sommige principes, met name aan dat van het uitgesloten derde, algemene geldigheid ontzegd moet worden.

Twijfel aan de algemene geldigheid der logische principes was in die tijd overigens niet geheel afwezig, doch een radicale verwerping van een of meer daarvan was ongehoord. Veel is er te doen geweest over het verwerpen van de traditionele logica en het goede recht van de nieuwe, de zogenaamde intuïtionistische logica. Grote verheldering is in deze kwestie vooral gebracht door HEYTING, die een formele beschrijving van de logica van BROUWER gaf.

Winst bij toepassing van deze logica is nu zeker, dat aan existentie-uitspraken weer de volle betekenis gehecht kan worden. Als groot nadeel wordt gezien, dat vele interessante resultaten der wiskunde afgewezen worden, omdat er geen constructieve zin aan gegeven kan worden, d.w.z. omdat men ze niet door constructies kan rechtvaardigen. Door het schrappen van dergelijke resultaten verminkt men in veler ogen de wiskunde op ontoelaatbare wijze en daarom aanvaardt men de intuïtionistische wiskunde en logica niet. Beide standpunten, nl. het afwijzen van intuïtionistisch niet te rechtvaardigen resultaten en het afwijzen van de intuïtionistische beschouwing zijn echter als bekrompen te verwerpen. In 1933 heeft GÖDEL reeds laten zien, dat aan de uitspraken der oude logica een zekere interpretatie in de intuïtionistische logica te geven is. Dit resultaat heeft aanleiding gegeven te onderzoeken of niet de gehele wiskunde binnen de intuïtionistische wiskunde te interpreteren is. Dit onderzoek is nog lang niet voltooid en over de uitslag zijn de meningen verdeeld. Zeker is echter, dat in het bijzonder de existentie-uitspraken bij een dergelijke interpretatie een essentiële verzwakking ondergaan. Juist het vaststellen van de mate van verzwakking is een van de belangrijkste punten van onderzoek.

Bij het overzien van het beeld van de wiskunde, dat ik U tot nu toe geschetst heb, zult U wel de wenkbrauwen optrekken en zich af-

vragen wat voor een vak dit nu eigenlijk wel moet zijn. In plaats van één vertrouwen wekkende wiskunde zijn er nu al minstens twee, maar of dat niet genoeg is, er zijn ook al minstens twee logica's. Zo beschouwd blijft er van de wiskundige zekerheid, welke gesuggereerd wordt door de ijzeren logica der wiskundigen, niet veel over. Het ziet er zo naar uit, dat we het geheel zonder de wiskundige zekerheid moeten stellen. Inderdaad is deze mening ook wel verkondigd, b.v. door MANNOURY, die aanraadt zich niet om zekerheid te bekommeren, omdat die er toch niet is. Waar hij overigens de zekerheid van deze uitspraak vandaan haalt is niet geheel duidelijk.

Om nu tenslotte toch tot enige klaarheid te geraken, moet ik U een bekentenis doen. Aan de in de aanvang gemaakte afspraak, dat ik geen wiskundig betoog zou houden heb ik me wel zeer streng gehouden. Ik heb namelijk gesproken over een begrip — de wiskundige zekerheid — dat ik niet behoorlijk gedefinieerd heb. Op een dergelijke grondslag is nauwelijks een verstandige uitspraak mogelijk. Uit het voorgaande kan men opmaken, dat de wiskundige zekerheid niet gelegen is in het verband met de werkelijkheid, noch in de nauwgezette toepassing van de logica, welke in sommige gevallen namelijk leidt tot onduidelijke uitspraken, noch in een rigoureuze formalisering, hoewel deze bijdraagt tot verhoging van de nauwkeurigheid. Indien we dus een nadere bepaling van het begrip wiskundige zekerheid willen bereiken, dienen we een andere weg in te slaan. Laten we daarom afspreken, *dat die dingen zeker zijn, welke we helder en duidelijk begrijpen.* Op grond van deze definitie kunnen we zeggen, dat de wiskundige een zeer grote mate van zekerheid kent en zodoende haar aureool voor de buitenstaander kan behouden. Zelfs de ontwikkeling, welke aanleiding is geweest tot een splitsing van de wiskunde en van de logica, blijkt een vergroting van de wiskundige zekerheid in te houden, als gevolg waarvan de splitsing slechts tijdelijk is geweest. Verder hebben we de geruststelling, dat de wiskunde zich blijft ontwikkelen, dank zij het feit dat er voortdurend moeilijkheden zijn ten aanzien van de vraag, welke dingen we duidelijk begrijpen. Hiervoor zorgt de menselijke weetgierigheid, die ook de wiskundige niet vreemd is.

Aan het einde van deze rede gekomen, betuig ik mijn eerbiedige dank aan Hare Majesteit de Koningin, die mij in het ambt van hoogleraar heeft willen benoemen.

Mijne Heren Leden van het Bestuur der Landbouwhogeschool,

Bij de overweging mij voor te dragen voor dit ambt, zal het U niet ontgaan zijn, dat U te doen had met een vagebond. Mijn zwakheden in ogenschouw nemend hebt U waarschijnlijk vertrouwen kunnen vinden in de wapenspreuk van Wageningen, ontleend aan Vergilius'

Aeneis: vires adquirit eundo. Uit deze spreuk zal ik kracht putten, nodig voor de vervulling van dit ambt.

Hooggeleerde Kuiper,

Ik mag aannemen, dat Uw advies zwaarder gewogen heeft dan de woorden van Vergilius. U bent ook meer terzake kundig. Een gevolg van Uw advies is, dat we ons thans regelmatig in tegengestelde richting langs elkaar bewegen. Binnen de wiskunde bewegen we ons noch in dezelfde, noch in tegengestelde richting, zodat daar mogelijkheden tot contact zijn.

Dames en Heren Hoogleraren aan de Landbouwhogeschool,

Het verheugt mij zeer, mij in Uw kring opgenomen te weten. De toepassingsmogelijkheden der wiskunde groeien nog steeds in aantal; U bent zich daarvan wel bewust. Het wetenschappelijk contact, dat uit dit bewustzijn voortvloeit is voor mij van grote waarde.

Ik bewaar vele goede herinneringen aan de tijd, gedurende welke ik werkzaam was aan het mathematisch instituut der universiteit van Amsterdam, de afdeling wiskunde der technische hogeschool te Delft, het mathematisch instituut der rijksuniversiteit te Leiden. Te veel namen zou ik moeten noemen om dank te zeggen voor de hulp en medewerking, welke ik in die tijd heb ondervonden. Het is vanzelfsprekend, dat ik een uitzondering maak voor U, hooggeleerde HEYTING. U kent mij van de aanvang van mijn studie in de wiskunde. Ik ken U enige tijd korter, maar, naar ik meen, toch ook wel vrij goed. U hebt altijd goed mijn fouten opgemerkt en ze mij ook kenbaar gemaakt. Daaruit heb ik de conclusie getrokken, dat U mij wel mocht. In een voor U aanvaardbare formulering kan ik wel zeggen, dat onze verhouding niet vrij is van vriendschap.

Dames en Heren studenten,

Voor diegenen onder U, die thans tot luisteren overgaan, wil ik samenvattend mededelen, dat het voorgaande in de omgangstaal gesteld was en niet tot de examenstof behoort. Hierbij wil ik het echter niet laten. Uit ervaring weet U, dat het gebruik is, dat U als laatsten wordt toegesproken. Ook zult U opgemerkt hebben, dat de sprekers zich soms wat ongemakkelijk voelen en U ervan trachten te overtuigen, dat de aangenomen volgorde in overeenstemming is met Uw belangrijkheid. Afhankelijk van het model der maatschappij, dat de spreker voor de geest zweeft, leidt dit tot verschillende interpretaties. De wiskundige methode kan in deze kwestie zijn nut bewijzen: een formalisering van het recht op het laatste woord maakt U onafhankelijk van de interpretatie. Gezien het rechtsvormend karakter van de langdurige gewoonte, lijkt het een eenvoudige oefening de studentenvakbeweging tot deze formalisering te geraken.

Ik heb gezegd.