



rapporten
nieuwe serie

**Wegzijing en kwel;
de grondwaterstroming van
hogere naar lagere gebieden**

L.F. Ernst

WEGZIJGING EN KWEL; DE GRONDWATERSTROMING VAN
HOGERE NAAR LAGERE GEBIEDEN

L.F. ERNST

RAPPORT 7

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING (ICW)
POSTBUS 35, 6700 AA WAGENINGEN 1983

Tussen de jaren 1957 en 1964 zijn 23 Rapporten (eerste serie) verschenen. In 1982 is de reeks in een andere vorm hervat als RAPPORTEN (nieuwe serie).

Te verkrijgen RAPPORTEN (nieuwe serie):

1. Sprik, J.B. en G.H. Horst. 1982. Onderzoek naar capaciteitsnormen voor diepploegen, bulldozers en hydraulische graafmachines.
2. Nieuwenhuis, G.J.A. en C.L. Palland. 1982. Verdamping van een aardappelgewas en de meting daarvan via remote sensing.
3. Hoeks, J. en G.J. Agelink. 1982. Onderzoek naar mogelijkheden om de infiltratie van regenwater in een afvalstort te verminderen.
4. Alderwegen, H.A. van. 1982. Planning van openluchtrecreatievoorzieningen bij voorbereiding van landinrichtingsprojecten.
5. Rijtema, P.E. et al. 1982. Bemesting, waterhuishouding, perceelscheidingen en landbouw. Commentaar op een RIN-rapport.
6. Harmsen, J. en H. van Drumpt. 1982. Conservering van watermonsters.
7. Ernst, L.F. 1983. Wegzijing en kwel; de grondwaterstroming van hogere naar lagere gebieden.

De RAPPORTEN (nieuwe serie) zijn te bestellen door storting van het verschuldigde bedrag op giro 817672 t.n.v. ICW, Wageningen, onder vermelding van de gewenste publikatie en het aantal exemplaren. Toezending geschiedt na ontvangst van het bedrag.

Prijs Rapport 1 f 15; Rapport 2 f 10; Rapport 3 f 5; Rapport 4 f 5; Rapport 5 f 5; Rapport 6 f 5; Rapport 7 f 7,50.

I N H O U D

	blz.
1. INLEIDING	1
2. HET TWEE-POTENTIALEN PROBLEEM	1
3. EERSTE BENADERING VAN DE KWELSTROMING ALS EEN DRIE-POTENTIALEN PROBLEEM	2
4. BASISFORMULES VOOR DE BEREKENING VAN DE STIJGHOOGTEVERDELING $\phi_i(x)$ TUSSEN EVENWIJDIGE OPEN LEIDINGEN DOOR ONDERSCHIEDING VAN HORIZONTALE, VERTICALE EN RADIALE STROMINGSCOMPONENTEN	6
5. DE OPLOSSING VAN DE STIJGHOOGTEVERDELING $\phi_i(x)$ BIJ SYMMETRISCHE DRAINAGE VAN HET NEERSLAG-OVERSCHOT (PAKKETTEN MET DRIE OF VIER LAGEN)	8
6. DE AFLEIDING VAN DE VORMFACTOR α	12
7. DE SYMMETRISCHE GRONDWATERSTROMING BIJ KWEL EN WEGZIJGING	16
8. HET SCHEIDINGSVLAK TUSSEN GRONDWATERMASSA'S AFKOMSTIG UIT VERSCHILLENDE BRONNEN	18
9. DE ALGEMENE OPLOSSING VAN $\phi_i(x)$ VOOR EEN PAKKET BESTAANDE UIT EEN WILLEKEURIG AANTAL LAGEN, DIE AFWISSELEND GOED EN SLECHT DOORLATEND ZIJN	20
10. DE GRONDWATERSTROMING VEROORZAAKT DOOR HET HOOGTEVERSCHIL TUSSEN TWEE HALF-ONEINDIGE, DOOR EEN RECHTE LIJN GESCHIEDEN, HOMOGENE GEBIEDEN	25
11. DE PRAKTISCHE VEREENVOUDIGING VAN DE TWEDE DEELOPLOSSING UIT HOOFDSTUK 10	28
12. SAMENVATTING EN CONCLUSIES	36
LITERATUUR	38
ALGEMENE SYMBOLEN	38

1. INLEIDING

Bij de behandeling van stationaire grondwaterstromingen in homogene, isotroop doorlatende grond kan de wet van Darcy worden gecombineerd met de continuïteitsvergelijking. Daardoor ontstaat een partiële differentiaalvergelijking van de 2e orde, de differentiaalvergelijking van Laplace, in de wiskunde ook wel aangeduid als de grondformule van de potentiaaltheorie:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

ϕ = potentiaal functie c.q. stijghoogte
 x, y, z = coördinaten in een Cartesiaans assenstelsel

Indien de potentiaal functie of stroomfunctie is gegeven in elk punt van het oppervlak dat een samenhangend deel van de beschouwde, drie-dimensionale ruimte begrenst, dan is het in principe mogelijk een eenduidige oplossing $\phi(x, y, z)$ te vinden welke binnen deze ruimte aan formule (1) en op het oppervlak aan de gegeven randvoorwaarden voldoet.

Het hangt af van de vorm van het begrenzende oppervlak en van de randvoorwaarden op dit oppervlak hoe ingewikkeld de oplossing zal zijn. Voor de praktische toepassing zijn bepaalde, relatief eenvoudige gevallen van zo veel belang, dat hierop nader zal worden ingegaan.

De stationaire afvoer van een constant neerslagoverschot door een grondwaterpakket van nagenoeg constante dikte naar een stelsel van evenwijdige, op gelijke afstand van elkaar gelegen, gelijksoortige open leidingen is schematisch afgebeeld in Fig. 1. Daarbij kan de volgende formule worden gebruikt:

$$h_m - h_d = NT = U_f T = U_d T \quad (2)$$

waarbij h_m = grondwaterstand midden tussen de open leidingen

h_d = peil van het water in de open leidingen

N = neerslagoverschot

= neerslag P - verdamping E

U_f = volumestroomdichtheid van het verticale transport door het freatisch oppervlak

U_d = specifieke afvoer door de open leidingen
 = afvoer gedeeld door oppervlak van het voedingsgebied

T = ontwateringsweerstand

In dit eenvoudige systeem wordt de grondwaterstroming vanuit een enkele bron gevoed en is er ook slechts een enkel soort afvoerleidingen. De veronderstelling van een nagenoeg constante dikte van het watervoerende pakket is ingevoerd om te verkrijgen dat aan de ontwateringsweerstand T een constante waarde kan worden toegekend. Daarbij is de intensiteit van de grondwaterstroming recht evenredig te nemen met het verschil tussen de twee karakteristieke potentialen h_m en h_d .

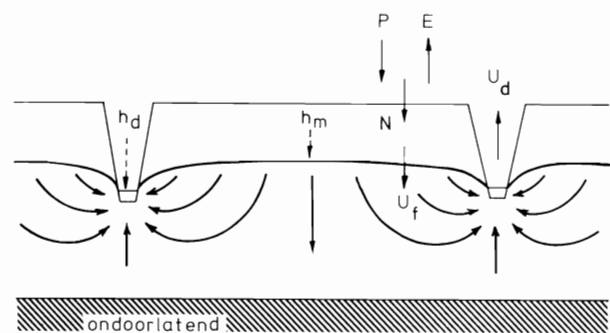


Fig. 1. Symmetrische grondwaterstroming bij afvoer van uitsluitend neerslagoverschot door een homogeen pakket naar evenwijdige open leidingen

Wordt aan deze voorwaarde niet voldaan, maar zijn er geen grote verschillen in doorlaatfactor in de laag waarin zich het freatisch oppervlak bevindt, dan is het mogelijk om formules van de 2e of 3e graad af te leiden voor het verband tussen $h_m - h_d$ en N , c.q. tussen $h_m - h_d$ en U (ERNST, 1979). Om grotere complicaties te vermijden, wordt in het ene als in het andere geval meestal verondersteld dat voor de radiale weerstand een constante waarde mag worden gebruikt. Nader onderzoek heeft geleerd in welke mate de radiale weerstand bij een homogeen doorlatende bovenlaag afhankelijk is van de intensiteit van de grondwaterstroming (ERNST, 1962, 1979).

In het verdere betoog is de toepassing van het principe van het superponeren van veel belang en dit is alleen toegestaan als het om lineaire betrekkingen gaat, zoals het geval is in formule (2).

3. EERSTE BENADERING VAN DE KWELSTROMING ALS EEN DRIE-POTENTIALEN PROBLEEM

Bij een nadere beschouwing blijkt dat er in de praktijk dikwijls toestanden voorkomen, die ingewikkelder zijn dan wat tevoren werd behandeld. Dit brengt met zich dat het nodig is met meer dan twee karakteristieke potentialen te werken. Als tevoren zullen daarbij uitsluitend stationaire toestanden worden behandeld.

Bij de onderhavige grondwaterstromingsproblemen kan men beginnen met een indeling in twee groepen. Bij de eerste groep worden, wat betreft de voeding van het gebied, geen andere veronderstellingen ingevoerd dan tevoren. Het stelsel van open leidingen kan echter ingewikkeldere eigenschappen hebben. In het algemeen bestaat het waterlopenpatroon uit grotere en kleinere open leidingen. Het ligt vervolgens voor de hand, ten einde de behandeling niet al te ingewikkeld te maken, dat verondersteld zal worden dat de grotere en kleinere leidingen gelijkmatig zijn verdeeld over het gebied (ERNST, 1978).

Men kan in dergelijke gevallen aan het grondwater een karakteristieke potentiaal toekennen (extreme waarde, eventueel gerekend ten opzichte van een willekeurig, niet-horizontaal grondoppervlak) en verder een karakteristieke potentiaal voor elk van de klassen, die in het waterlopenpatroon kunnen worden onderscheiden. De gelijktijdige afvoer van het neerslagoverschot door sloten en drainbuizen kan tot deze groep worden gerekend, evenals de ontwatering met behulp van sloten en diepe verticale putten.

In dit rapport zal verder uitsluitend aandacht worden gegeven aan een andere groep van grondwaterstromingen doorgaans aangeduid als de grondwaterstroming met diepe wegzijging en kwel. Bedoelde grondwaterstromingen worden gevonden in die gevallen dat er gebieden zijn die een meer of minder belangrijk verschil in hoogte hebben en daarbij een zekere samenhang, waardoor een grondwaterstroming ontstaat van hogere naar lagere gebieden. In het geval dat naast een homogeen hoger gebied een homogeen lager gebied kan worden onderscheiden, moet reeds met een verdubbeling van het aantal karakteristieke potentialen worden gerekend.

Het is echter ook mogelijk om van een van beide gebieden, hetzij het hoge gebied dat water levert, hetzij het lage gebied dat water ontvangt, een afzonderlijke beschouwing te geven. Het is immers nog meer dan tevoren gewenst met de eenvoudigste veronderstellingen te werken.

De meest relevante eigenschappen van de te beschouwen grondwaterstroming kunnen nu als volgt wor-

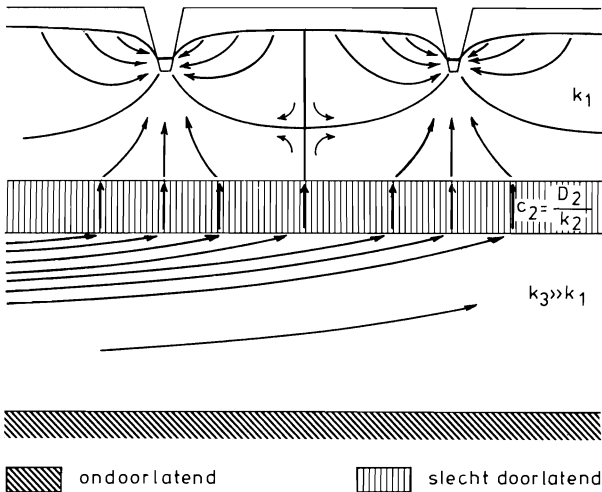


Fig. 2. Grondwaterstroming bij afvoer van neerslagoverschot en kwel door een drie-lagen-pakket naar evenwijdige open leidingen

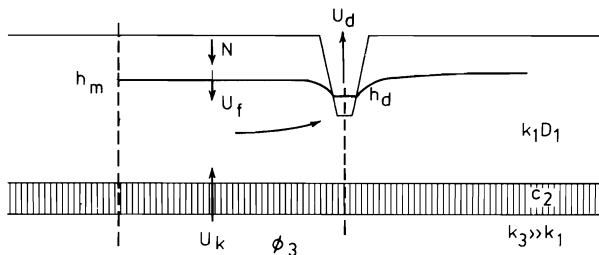


Fig. 3. Schematische voorstelling van de grondwaterstroming uit Fig. 2: algemeen geval

den omschreven. Er zijn 3 karakteristieke potentiaalen:

- 1) de grondwaterstand midden tussen de open leidingen;
- 2) het peil van het water in de open leidingen;
- 3) de stijghoogte van het diepe grondwater op een nader aan te geven plaats of gemiddeld over een nader aan te geven gebied.

Voor invoer en uitvoer bestaan de volgende drie mogelijkheden:

- a. via de grondwaterspiegel;
- b. via een of meer diepe, goed doorlatende lagen;
- c. via de open leidingen of de drainbuizen.

Een voorbeeld van een dergelijk geval wordt getoond in Fig. 2. Evenals bij de eenvoudigere gevallen kan men om te beginnen vooral aandacht geven aan de grootheden, die in de praktijk van het meeste belang zijn: de waarden van invoer en uitvoer gedeeld door de grootte (horizontaal oppervlak) van het beschouwde gebied. Hier wordt dus nog afgezien van de vraag

in hoeverre invoer of uitvoer aan de onderzijde van het gebied afhankelijk is van de plaats.

Het stromingspatroon van Fig. 2 kan zo worden vervangen door het sterk vereenvoudigende schema in Fig. 3, waarin slechts enkele pijlen voorkomen ter aanduiding van de specifieke invoer of uitvoer. Gezien de beperking tot stationaire toestanden geldt opnieuw $N = U_f$ en behoeven er geen bergingsveranderingen in rekening te worden gebracht.

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$U_d = U_f + U_k = N + U_k \quad (3)$$

U_k = kwelintensiteit = specifieke invoer aan de onderzijde van het beschouwde gebied

Bij de volgende behandeling wordt bovendien verondersteld dat het doorlaatvermogen van het diepe watervoerende pakket zo groot is, dat er slechts zeer kleine variaties kunnen zijn in de stijghoogte van het diepe grondwater binnen het beschouwde gebied. Op grond daarvan behoeft voor elk geval slechts een enkele waarde voor deze stijghoogte te worden ingevoerd.

Bij de kleine verschillen in de stijghoogte van het diepe grondwater is er weinig reden om onderscheid te maken tussen enkele dicht bij elkaar gelegen leidingen van een evenwijdig stelsel, mits deze leidingen maar gelijk zijn in natte doorsnede en in peil en op gelijke afstand van elkaar gelegen zijn. Als de open leidingen in het beschouwde gebied als gelijkwaardig mogen worden beschouwd, kunnen er een aantal lijnen (vlakken) van symmetrie worden aangegeven, te weten de verticale lijnen (vlakken) door de open leidingen en halverwege daartussen. Om deze reden behoefde in Fig. 3 slechts een relatief klein gebied te worden afgebeeld, waarbij twee naast elkaar liggende verticale symmetrielijnen als begrenzing van het gebied werden genomen.

Behalve de willekeurige toestand afgebeeld in Fig. 3 kunnen ook drie bijzondere toestanden worden genomen, waarbij telkens een van de drie componenten a, b of c ontbreekt. Van deze drie gevallen zijn er slechts twee nodig om door middel van lineaire combinaties elke willekeurig gewenste toestand te verkrijgen. Daar verondersteld wordt dat de vorm van de grondwaterspiegel voor de te beschouwen gevallen niet belangrijk mag verschillen, kan tegen de superpositie van bovengenoemde bijzondere oplossingen of eventueel andere bijzondere oplossingen geen bezwaar worden aangevoerd.

De twee bijzondere oplossingen die voor de verdere behandeling nodig zijn, zullen van elkaar worden onderscheiden door aan de reeds gebruikte symbo-

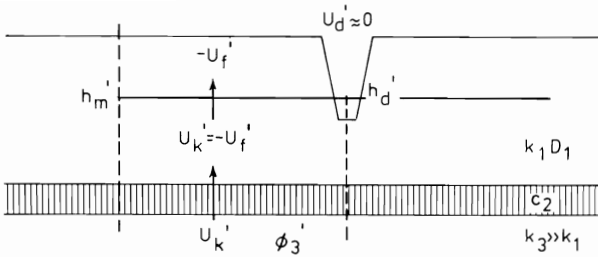


Fig. 4. Schematische voorstelling van de grondwaterstroming uit Fig. 2 indien $U_k = -U_f$ en $U_d = 0$ (eventueel ≈ 0 bij open leidingen van aanzienlijke breedte): geval A

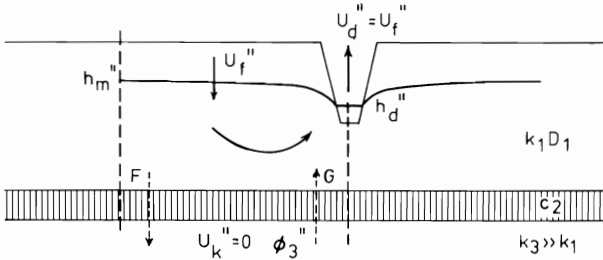


Fig. 5. Schematische voorstelling van de grondwaterstroming uit Fig. 2 indien $U_k = 0$: geval B

len en eventueel andere symbolen ofwel een enkel accent ofwel een dubbel accent toe te voegen.

Geval A. Het eenvoudigste geval is de zuiver verticale stroming (Fig. 4). Hierbij is de grondwaterspiegel horizontaal en daaruit volgt:

$$h_m' = h_d' \quad (4)$$

$$\phi_3' - h_d' = U_k' c_2 \quad (5)$$

$c_2 =$ verticale weerstand van de slecht doorlatende, tweede laag

Bij de veronderstelde verticale stroming kan de invoer of uitvoer door de open leidingen of drainbuizen meestal worden verwaarloosd, zodat geldt:

$$U_d' = 0 \quad (6)$$

$$U_k' = -U_f' \quad (7)$$

Indien de open leidingen een aanzienlijke breedte hebben, geldt formule (6) slechts bij benadering. Een soortgelijk voorbehoud dient ook bij de volgende gevallen te worden gemaakt.

Geval B. Als tweede bijzonder geval wordt genomen het ontbreken van kwel of wegzijging (Fig. 5). Dit houdt in dat hetgeen in het midden van de strook (bij F)

wegzigt, in de nabijheid van de open leidingen (bij G) weer omhoog moet komen, maar ook niet meer dan dat. Hierbij moet ϕ_3'' dus gelijk zijn aan de gemiddelde waarde $\bar{\phi}_1''$ van de stijghoogte van het grondwater direct boven de slecht doorlatende laag.

Daar in dit geval ook voor de goed doorlatende bovenlaag geldt dat de gemiddelde waarde van het verticale transport gelijk nul is, kan de gemiddelde stijghoogte $\bar{\phi}_1''$ aan de onderkant van deze laag met goede benadering worden gelijk gesteld aan de gemiddelde hoogte van de grondwaterspiegel \bar{h}'' . Met behulp van de vormfactor α , die voor de stationaire grondwaterspiegel wel gebruikelijk is ($2/3 < \alpha < 1$), kan de volgende uitdrukking worden gevonden voor het verschil tussen de stijghoogte van het diepe grondwater en het slootpeil:

$$\phi_3'' - h_d'' = \bar{\phi}_1'' - h_d'' = \bar{h}'' - h_d'' = \alpha(h_m'' - h_d'') \quad (8)$$

Formule (2) kan opnieuw worden gebruikt:

$$h_m'' - h_d'' = U_f'' T \quad (9)$$

Voor dit geval geldt:

$$U_k'' = 0 \quad (10)$$

en dus bovendien:

$$U_f'' = U_d'' \quad (11)$$

Het algemene geval. De som van beide bijzondere oplossingen moet overeenkomen met de werkelijke toestand. Voor het algemene, drie-dimensionale geval geldt:

$$\phi(x, y, z) = \phi'(x, y, z) + \phi''(x, y, z) \quad (12)$$

Een gelijksoortige betrekking geldt voor alle andere grootheden, zoals hoogte van de grondwaterspiegel $h(x, y)$, invoer, uitvoer, enz. Daaruit is dus onmiddellijk af te leiden:

$$U_k = U_k' = -U_f' \quad (13)$$

$$U_d = U_d'' = U_f'' \quad (14)$$

Samenvoeging van deze formules leidt ten slotte tot:

$$U_d = U_f'' = \frac{h_m'' - h_d''}{T} = \frac{h_m - h_d}{T} \quad (15)$$

$$U_k = U_k' = \frac{\phi_3' - h_d'}{c_2} = \frac{\phi_3 - h_d - (\phi_3'' - h_d'')}{c_2} = \frac{1}{c_2}(\phi_3 - h_d) - \frac{\alpha}{c_2}(h_m - h_d) \quad (16)$$

4. BASISFORMULES VOOR DE BEREKENING VAN DE STIJGHOOGTEVERDELING $\phi_i(x)$ TUSSEN EVENWIJDIGE OPEN LEIDINGEN DOOR ONDERSCHIEDING VAN HORIZONTALE, VERTICALE EN RADIALE STROMINGSCOMPONENTEN

In de praktijk is het dikwijls nodig gebieden van veel grotere omvang te beschouwen dan waar het in de vorige hoofdstukken om ging. Dit geldt vooral bij dikke gelaagde pakketten, waar door diepe goed doorlatende lagen een belangrijk horizontaal transport over grote afstanden mogelijk is. In vergelijking daarmee kan de toestand in Fig. 2 afgebeeld tot de vrij eenvoudige gevallen worden gerekend: een gebied van beperkte omvang met slechts drie homogeen doorlatende, horizontale lagen en verwaarlozing van de derde dimensie.

Met de bedoeling voor een groot aantal praktische problemen tot een vrij eenvoudige en toch voldoende nauwkeurige oplossing te komen, zal worden aangenomen dat er in de goed doorlatende lagen een horizontale stroming is, terwijl in de slecht doorlatende lagen de stromingsrichting verticaal is (Fig. 7). Hieraan moet dan nog worden toegevoegd dat in het algemeen in de onmiddellijke omgeving van de open leidingen vrij belangrijke convergerende of divergerende stromingscomponenten kunnen voorkomen. Deze zullen in rekening worden gebracht door invoering van de zogenaamde radiale weerstanden.

Bovendien zal evenals tevoren worden verondersteld dat er een enkelvoudig stelsel van evenwijdige open leidingen is en dat de hoogteverschillen in de grondwaterspiegel relatief klein zijn. Dit laatste houdt in dat bij een horizontale gelaagdheid alle lagen van constante dikte zijn en opnieuw het superponeren van deeloplossingen kan worden toegepast.

Het voordeel van deze veronderstellingen is dat hiermee een systeem wordt verkregen dat ook toepasbaar is bij sterk heterogene profielen (willekeurig aantal lagen, afwisselend goed en slecht doorlatend) en waarmee bovendien niet-stationaire en asymmetrische toestanden kunnen worden behandeld (ERNST, 1962).

Voor zover in het beschouwde gebied de radiale stromingscomponenten ontbreken, zullen slechts drie basis-vergelijkingen nodig zijn:

$$q_i = -k_i D_i \frac{d\phi_i}{dx} \quad (29)$$

$$\frac{dq_i}{dx} = v_{z,i+1} - v_{z,i-1} \quad (30)$$

$$v_{z,i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{c_i} \quad (31)$$

waarbij q_i = intensiteit van de horizontale stroming per strekkende meter in een goed doorlatende laag met index i

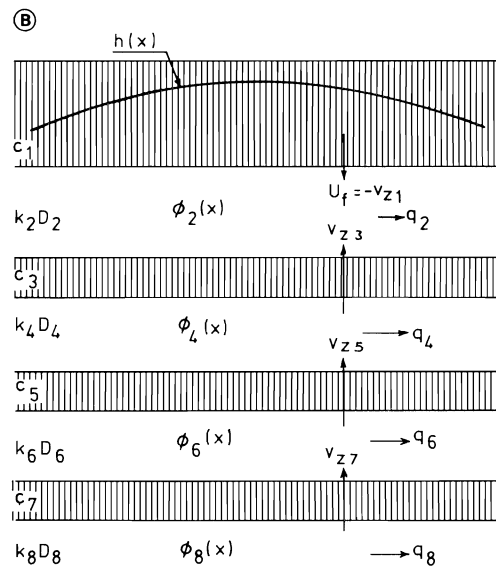
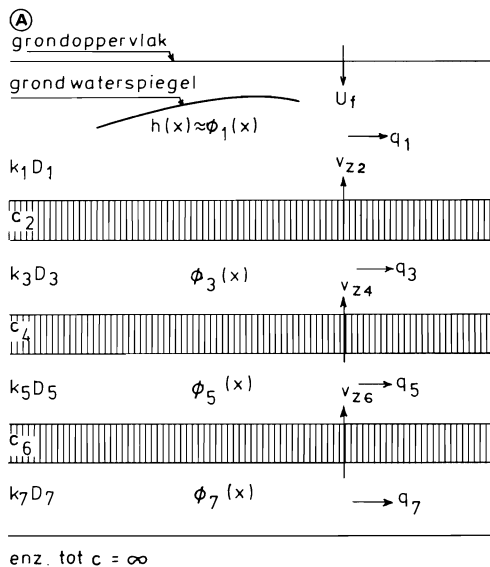


Fig. 7. Notatie voor gelaagde pakketten met horizontale stroming in de goed doorlatende lagen en verticale stroming in de slecht doorlatende lagen
A. bovenlaag is goed doorlatend; B. bovenlaag is slecht doorlatend

- k_i = doorlaatfactor van laag i
 D_i = dikte van laag i
 ϕ_i = stijghoogte van het grondwater in laag i
 x = coördinaat voor de horizontale richting
 $v_{z,i}$ = intensiteit van de verticale stroming (filtersnelheid, specifiek debiet) in de richting z in een slecht doorlatende laag met index i
 c_i = verticale weerstand van laag $i = D_i/k_i$

Voor de goed doorlatende lagen geldt dat de stijghoogte nauwelijks afhankelijk is van z . Bij dergelijke lagen kan met goede benadering worden aangenomen dat ϕ_i alleen afhankelijk is van de horizontale coördinaat x .

Voor de slecht doorlatende lagen is de stijghoogte wel duidelijk afhankelijk van z . Met goede benadering geldt dat in dergelijke lagen ϕ_i lineair afhankelijk is van z . In eerste instantie hoeft ϕ_i dus voor de slecht doorlatende lagen niet in beschouwing te worden genomen, omdat steeds een lineaire interpolatie tussen ϕ_{i+1} en ϕ_{i-1} mogelijk is.

Uit het bovenstaande blijkt, dat indien de bovenste laag goed doorlatend is (Fig. 7a) daar met voldoende benadering kan worden gesteld $\phi_1 = h$, waardoor in dat geval formule (29) kan worden vervangen door:

$$q_1 = -k_1 D_1 \frac{dh}{dx} \quad (32)$$

Vervolgens kan dan formule (30) worden vervangen door:

$$\frac{dq_1}{dx} = v_{z,2} + U_f \quad (33)$$

Bij een slecht doorlatende bovenlaag (Fig. 7b) moet formule (31) worden vervangen door:

$$-U_f = v_{z,1} = \frac{\phi_2 - h}{c_1} \quad (34)$$

De invloed van de radiale stromingscomponent in de directe omgeving van de open leiding kan met behulp van het begrip radiale weerstand in rekening worden gebracht en dat zowel bij symmetrische als bij asymmetrische toestanden (ERNST, 1962). Voor een grondwaterstroming, die willekeurig asymmetrisch is ten opzichte van de open leiding, zijn de volgende formules te gebruiken (Fig. 8):

$$q_d = q_{dL} - q_{dR} \quad (35)$$

met q_d = uitvoer van grondwater door de open leiding per strekkende meter van deze leiding

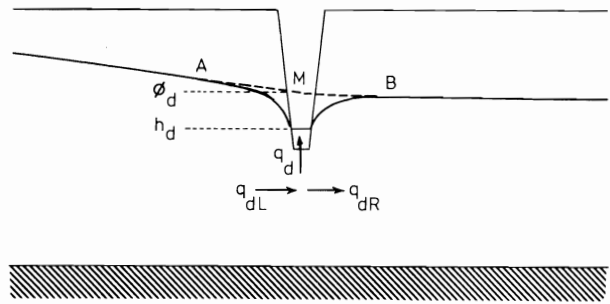


Fig. 8. Toelichting van de berekening van Ω met de formules (35) en (36). AM en BM zijn rechtlijnige extrapolaties van de grondwaterspiegel

q_{dL} = toestroming van links door de bovenste watervoerende laag

q_{dR} = afstroming naar rechts door de bovenste watervoerende laag

Voor een nadere bepaling van q_{dL} en q_{dR} kan formule (29) worden gebruikt. Voor q_d geldt de volgende formule, die als definitie van de radiale weerstand Ω is te beschouwen:

$$q_d = \frac{\phi_d - h_d}{\Omega} \quad (36)$$

Bij een symmetrische toestroming kan dit ook op een iets andere manier worden uitgedrukt. De radiale weerstand kan dan worden gelijkgesteld aan het verschil in de weerstanden, die respectievelijk worden ondervonden door de werkelijke grondwaterstroming en door een fictieve grondwaterstroming bij aanwezigheid van een volkomen drain met bodem in de onderkant van de eerste watervoerende laag.

Bij toepassing van de formules (29), ... (36) op een speciaal geval kan men van het principe van superpositie van deeloplossingen tweemaal gebruik maken. Enerzijds is er de mogelijkheid om opnieuw de superpositie uit te voeren, zoals in hoofdstuk 3 reeds werd gedaan. Daarbij lijkt het een voordeel vooral van de gevallen A en B gebruik te maken (respectievelijk Fig. 4 en 5). Het is immers mogelijk een deeloplossing af te zonderen met een vrijwel verticale stroming overeenkomstig geval A in het bovengedeelte van een groot gebied, waarin een asymmetrische grondwaterstroming voorkomt. De asymmetrie is inherent aan alle gebieden, waarin zowel wegzijging als kwel voorkomen. Wordt een kleiner gebied genomen waarin bijvoorbeeld alleen kwel voorkomt, dan moet er nog een zekere asymmetrie aan de grondwaterstroming worden toegekend, zodra over dit kleinere gebied een zeker verloop in de kwelintensiteit merkbaar wordt. De toepassing van het ingewikkeldere

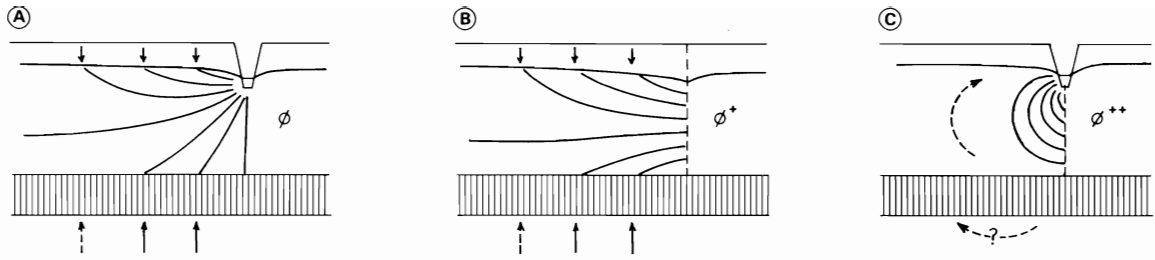


Fig. 9. Vervanging van de werkelijke grondwaterstroming bij willekeurige verdeling van U_f , U_k en U_d (stijghoogte ϕ) door de som van twee deeloplossingen, respectievelijk zonder een radiale stromingscomponent met uitstroming door het middenvlak (stijghoogte ϕ^+) en met een radiale toestroming vanuit het middenvlak (stijghoogte ϕ^{++})

geval B kan vervolgens beperkt blijven tot symmetrische toestanden.

Anderzijds is er steeds de mogelijkheid om de radiale stromingscomponent afzonderlijk te behandelen door deze op te nemen in een bijzondere deeloplossing. Men mag immers altijd de werkelijke stroming gelijk stellen aan de som van twee andere stromingen, die zodanige eigenschappen hebben dat optelling van in- en uitvoer langs de randen van het beschouwde gebied het gewenste resultaat oplevert. Om verschil te maken met voorgaande superposities worden nu enkel accent en dubbel accent vervangen door enkel kruis en dubbel kruis (Fig. 9):

$$\phi = \phi^+ + \phi^{++} \quad (37)$$

Dit principe kan zowel op een willekeurig geval als op elk bijzonder geval worden toegepast, bijvoorbeeld bij afwezigheid van neerslagoverschot of bij afwezigheid van kwel. Het behoeft nauwelijks toelichting dat ϕ^{++} (zie het meest rechtse gedeelte van Fig. 9) geldig blijft onafhankelijk van de verdeling van de componenten U_f , U_k en U_d .

Ten aanzien van de deeloplossing ϕ^{++} kan worden aangetoond dat in de meeste praktische gevallen het diepe pakket een te verwaarlozen aandeel geeft ($< 1\%$). Om deze reden lijkt het toelaatbaar bij de radiale stromingscomponent aan te nemen dat de onderkant van de eerste watervoerende laag een ondoorlatend grensvlak is. Voor de afleiding van $\phi^{++}(x, z)$ en Ω kunnen dus met goede benadering dezelfde formules worden gebruikt als elders afgeleid voor de symmetrische drainage van een pakket bestaande uit 1 of 2 homogene lagen (ERNST, 1962).

5. DE OPLOSSING VAN DE STIJGHOOGTEVERDELING $\phi_1(x)$ BIJ SYMMETRISCHE DRAINAGE VAN HET NEERSLAGOVERSCHOT (PAKKETTEN MET DRIE OF VIER LAGEN)

Zoals in het vorige hoofdstuk werd uiteengezet is het voordelig om te beginnen met een deeloplossing, waarbij de toevoer vanuit het buitengebied (kwel) of de afvoer daarheen (infiltratie) nog buiten beschouwing wordt gelaten. Om die reden zal in dit hoofdstuk eerst een behandeling worden gegeven van de symmetrische grondwaterstroming tussen evenwijdige open leidingen, en wel voor die omstandigheden dat alleen het overschot van de neerslag gevallen binnen het beschouwde gebied behoeft te worden afgevoerd en kwel of wegzijging niet voorkomen.

Het pakket waarin de grondwaterstroming plaats heeft mag uit een willekeurig aantal lagen bestaan die afwisselend goed en slecht doorlatend zijn zonder dat dit de toepasbaarheid van de onderhavige methode

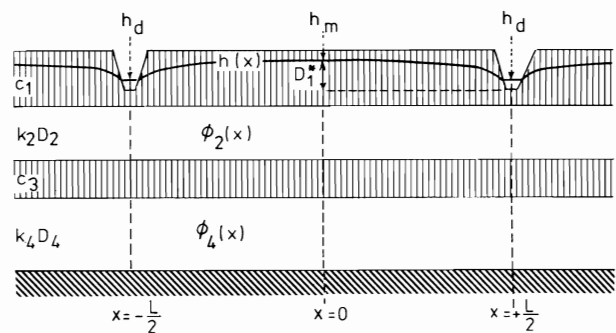


Fig. 10. De notatie bij de symmetrische drainage van het neerslagoverschot door een vier-lagenpakket

in de weg staat. Ter beperking van het schrijfwerk zal in de volgende regels slechts voor een vier-lagenpakket de volledige afleiding van de diverse formules worden gegeven voor de symmetrische drainage (Fig. 10). Daar het echter toch nodig is nu al rekening te houden met de behandeling van meer complexe gevallen (zie bijvoorbeeld hoofdstuk 11), zullen hier en daar andere symbolen worden ingevoerd dan in enkele oudere publikaties, waarin problemen van deze soort werden behandeld.

De basisformules (29) ... (34) kunnen nu in de volgende vorm worden geschreven:

$$U_f = \frac{h - \phi_2}{c_1} \quad (38)$$

$$q_2 = -k_2 D_2 \frac{d\phi_2}{dx} \quad (39)$$

$$\frac{dq_2}{dx} = \frac{\phi_4 - \phi_2}{c_3} + \frac{h - \phi_2}{c_1} \quad (40)$$

$$q_4 = -k_4 D_4 \frac{d\phi_4}{dx} \quad (41)$$

$$\frac{dq_4}{dx} = \frac{\phi_2 - \phi_4}{c_3} \quad (42)$$

Uit de formules (38), (39) en (40) zijn h en q_2 te elimineren:

$$\frac{d^2 \phi_2}{dx^2} = \frac{\phi_2 - \phi_4}{k_2 D_2 c_3} - \frac{U_f}{k_2 D_2} \quad (43)$$

Uit (41) en (42) is q_4 te elimineren:

$$\frac{d^2 \phi_4}{dx^2} = \frac{\phi_4 - \phi_2}{k_4 D_4 c_3} \quad (44)$$

Aftrekken van (43) en (44) levert:

$$\frac{d^2(\phi_2 - \phi_4)}{dx^2} = \left(\frac{1}{k_2 D_2 c_3} + \frac{1}{k_4 D_4 c_3} \right) (\phi_2 - \phi_4) - \frac{U_f}{k_2 D_2} \quad (45)$$

Ter vereenvoudiging van de notatie wordt de volgende substitutie ingevoerd:

$$\frac{1}{k_2 D_2 c_3} = W_2 \quad \frac{1}{k_4 D_4 c_3} = V_4 \quad W_2 + V_4 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (46)$$

De algemene oplossing van (45) kan nu als volgt worden beschreven:

$$\phi_2 - \phi_4 = A e^{\frac{x}{\lambda}} - B e^{-\frac{x}{\lambda}} + \frac{U_f \lambda^2}{k_2 D_2} \quad (47)$$

Door substitutie van (47) in (43) en (44) zijn vervolgens voor ϕ_2 en ϕ_4 afzonderlijk de oplossingen met vier integratieconstanten A, B, F en G te vinden:

$$\phi_2 = W_2 \lambda^2 \left(A e^{\frac{x}{\lambda}} + B e^{-\frac{x}{\lambda}} \right) - \frac{U_f x^2}{2(k_2 D_2 + k_4 D_4)} + Fx + G \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \phi_4 = & -V_4 \lambda^2 \left(A e^{\frac{x}{\lambda}} + B e^{-\frac{x}{\lambda}} \right) - \frac{U_f x^2}{2(k_2 D_2 + k_4 D_4)} + Fx + \\ & + G - \frac{U_f \lambda^2}{k_2 D_2} \end{aligned} \quad (49)$$

De oplossing voor de grondwaterspiegel volgt onmiddellijk uit (48) met behulp van (38):

$$h = \phi_2 + U_f c_1 \quad (50)$$

Bij de symmetrische drainage kunnen drie van de vier integratieconstanten worden verwijderd door gebruik te maken van de volgende randvoorwaarden (zie Fig. 10):

- symmetrie ten opzichte van $x = 0$;
- geen horizontale stromingsintensiteit in de diepere watervoerende laag recht onder de open leidingen ($d\phi_4/dx = 0$ voor $x = \pm L/2$).

Hieruit volgt respectievelijk:

$$A = B \quad F = 0 \quad (51)$$

$$\text{en } A = \frac{1}{4} U_f L c_3 W_2 \lambda \sinh^{-1} \frac{L}{2\lambda} \quad (52)$$

Substitutie van (51) en (52) in (48) en (49) levert op:

$$\begin{aligned} \phi_2 = & -\frac{1}{2} U_f L c_3 W_2^2 \lambda^3 \frac{\cosh \frac{x}{\lambda}}{\sinh \frac{L}{2\lambda}} - \frac{U_f x^2}{2(k_2 D_2 + k_4 D_4)} + G = \\ = & -\frac{U_f L^2}{8(k_2 D_2 + k_4 D_4)} \left\{ \frac{4k_4 D_4 \lambda \cosh \frac{x}{\lambda}}{k_2 D_2 L \sinh \frac{L}{2\lambda}} + \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right\} + G \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \phi_4 = & +\frac{1}{2} U_f L c_3 W_2 V_4 \lambda^3 \frac{\cosh \frac{x}{\lambda}}{\sinh \frac{L}{2\lambda}} - \frac{U_f x^2}{2(k_2 D_2 + k_4 D_4)} + G - \\ & - \frac{U_f \lambda^2}{k_2 D_2} = \\ = & +\frac{U_f L^2}{8(k_2 D_2 + k_4 D_4)} \left\{ \frac{4\lambda \cosh \frac{x}{\lambda}}{L \sinh \frac{L}{2\lambda}} - \left(\frac{2x}{L} \right)^2 \right\} + G - \frac{U_f \lambda^2}{k_2 D_2} \end{aligned} \quad (54)$$

De coëfficiënt G kan ten slotte worden bepaald zodra voor slechts een enkele waarde van x de bijbehorende waarde van ofwel h , ofwel ϕ_2 , ofwel ϕ_4 wordt gegeven. Indien het echter alleen om stijghoogteverschillen gaat, is de waarde van G niet belangrijk. Immers substitutie van twee waarden van x in de formules (53) of (54) en aftrekking van de uitkomsten doet G vanzelf verdwijnen.

Substitutie van $x = 0$ en $x = \pm \frac{L}{2}$ in (53) en aftrekking van de uitkomsten geeft het maximale stijghoogteverschil voor het horizontale transport in de bovenste watervoerende laag. Door hieraan toe te voegen het stijghoogteverschil voor de verticale stroming in de bovenlaag en voor de radiale stroming, ontstaat een bekende drainageformule voor het vier-lagenpakket (voor D_1^* zie Fig. 10 en ERNST, 1962):

$$\frac{h_m - h_d}{U_f} = \frac{D_1^*}{k_1} + \frac{L^2}{8(k_2 D_2 + k_4 D_4)} \left(1 + \frac{4k_4 D_4 \lambda}{k_2 D_2 L} \tanh \frac{L}{4\lambda} \right) + L\Omega \quad (55)$$

Formule (55) kan ook als volgt worden geschreven:

$$T = T_{\text{vert}} + T_{\text{hor}} + T_{\text{rad}} \quad (56)$$

$$\text{met } T_{\text{vert}} = \frac{h_m - \phi_m}{U_f} = \frac{D_1^*}{k_1} \quad (57)$$

$$T_{\text{hor}} = \frac{\phi_m - \phi_d}{U_f} = \frac{L^2}{8(k_2 D_2 + k_4 D_4)} \times \left(1 + \frac{4k_4 D_4 \lambda}{k_2 D_2 L} \tanh \frac{L}{4\lambda} \right) \quad (58)$$

$$T_{\text{rad}} = \frac{\phi_d - h_d}{U_f} = L\Omega - \frac{D_1 - D_1^*}{k_1} \approx L\Omega \quad (59)$$

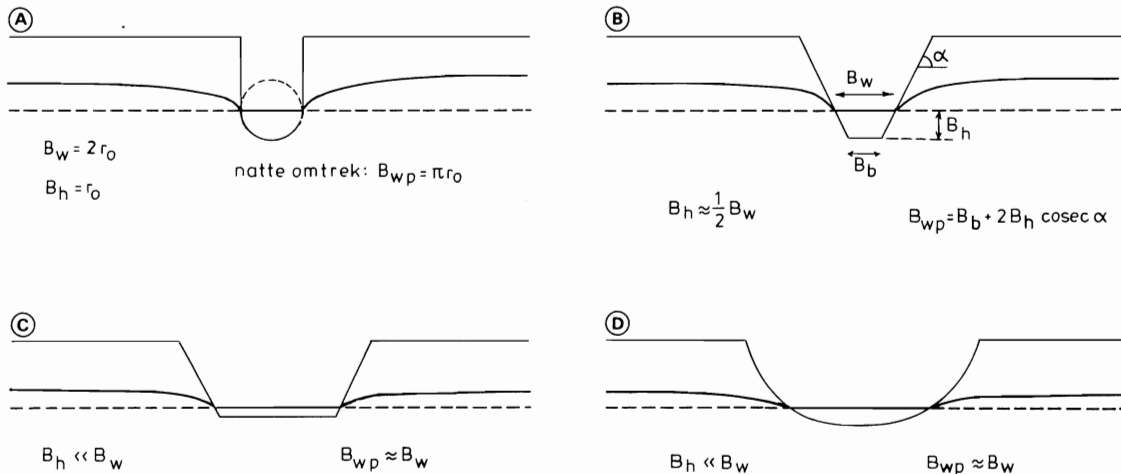


Fig. 12. Natte omtrek van open leidingen. Indien deze de vorm heeft van een halve cirkel (A) of daar veel op lijkt (B), dan geldt voor de coëfficiënt uit de formules (60) en (63): $f = 1$. Voor brede, ondiepe leidingen (C en D) geldt: $f = 4/\pi$ (Ernst, 1962)

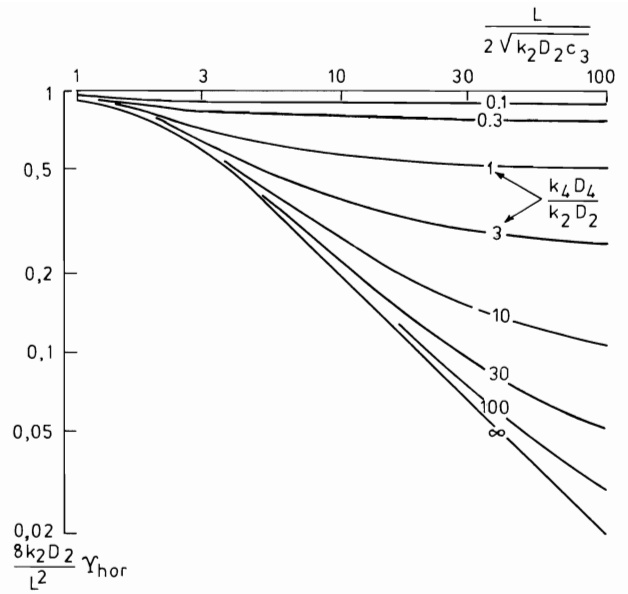


Fig. 11. Grafische voorstelling van formule (58). Indien $k_4 \rightarrow \infty$, dan kan deze formule worden vereenvoudigd tot:

$$\frac{8k_2 D_2}{L^2} T_{\text{hor}} = \frac{4\sqrt{k_2 D_2 c_3}}{L} \tanh \frac{L}{4\sqrt{k_2 D_2 c_3}}$$

Een grafische voorstelling van formule (58) wordt gegeven in Fig. 11. Voor een berekening van de radiale weerstand Ω , die in (59) voorkomt, moet onderscheid worden gemaakt tussen het homogene pakket en het twee-lagenpakket (ERNST, 1962, 1979).

Voor zover het om een twee-lagen-pakket gaat met $D_2/D_1 > 2$ en $k_2/k_1 > 2$, waarbij de vorm van de grondwaterspiegel (opbolling aan weerszijden van de open leiding) niet van belang is, kan voor de radiale weerstand de volgende empirische formule worden gebruikt. De waarde van de coëfficiënt f hangt af van de vorm van het natte pakket van de open leiding (Fig. 12):

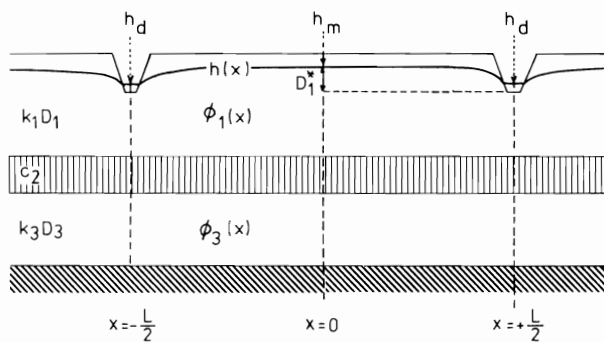


Fig. 13. Notatie bij de symmetrische drainage van het neerslagoverschot door een drie-lagen-pakket

$$\Omega = \frac{1}{\pi k_1} \ln \frac{4fD_1}{B_{wp}} + \frac{1}{3,5k_2} \ln \frac{D_2}{3D_1} \quad (60)$$

De intensiteit van de horizontale stroming in de goed doorlatende lagen kan gemakkelijk worden gevonden door differentiëren van (53) en (54) en vermenigvuldigen met de respectievelijke doorlaatvermogens. Dit geeft:

$$q_2 = + \frac{1}{2} U_f L c_3 W_2^2 \lambda^2 k_2 D_2 \frac{\sinh \frac{x}{\lambda}}{\sinh \frac{L}{2\lambda}} + \frac{U_f k_2 D_2 x}{k_2 D_2 + k_4 D_4} =$$

$$+ \frac{1}{2} U_f L \frac{k_4 D_4 \sinh \frac{x}{\lambda}}{(k_2 D_2 + k_4 D_4) \sinh \frac{L}{2\lambda}} + \frac{U_f k_2 D_2 x}{k_2 D_2 + k_4 D_4} \quad (61)$$

$$q_4 = - \frac{1}{2} U_f L c_3 W_2 V_4 \lambda^2 k_4 D_4 \frac{\sinh \frac{x}{\lambda}}{\sinh \frac{L}{2\lambda}} + \frac{U_f k_4 D_4 x}{k_2 D_2 + k_4 D_4} =$$

$$- \frac{1}{2} U_f L \frac{k_4 D_4 \sinh \frac{x}{\lambda}}{(k_2 D_2 + k_4 D_4) \sinh \frac{L}{2\lambda}} + \frac{U_f k_4 D_4 x}{k_2 D_2 + k_4 D_4} \quad (62)$$

Voor de symmetrische drainage in een drie-lagen-pakket (Fig. 13) worden de uitkomsten weinig anders. Daar de bovenste slecht doorlatende laag uit het vierlagenpakket is verdwenen, kan dit in rekening worden gebracht door te stellen: $c_1 \rightarrow 0$ en daaruit volgt dan $h \approx \phi_2$ (zie formules 38, 40 en 50). De overige formules blijven bruikbaar nadat alle laag-indices met 1 zijn verminderd (vergelijk Fig. 7a met 7b). Verder is het duidelijk dat nu de term D_1^*/k_1 uit (55) en T_{vert} uit (56) kan worden weggelaten.

Bij een goed doorlatende bovenlaag kan worden gebruik gemaakt van een eenvoudigere formule voor de radiale weerstand (ERNST, 1962, pag. 22-25). Voor de coëfficiënt f zijn hierbij dezelfde waarden afhankelijk van de doorsnede van de open leiding te gebruiken als bij (60):

$$\Omega = \frac{1}{\pi k_1} \ln \frac{fD_1}{B_{wp}} \quad (63)$$

Wat bij (60) en bij (63) ongeveer in gelijke mate geldt, is dat bij groeiende afvoer de grondwaterspiegel aan weerszijden van de open leiding hoger komt te liggen. Dit houdt in dat Ω in beginsel geen constante waarde heeft, maar kleiner moet worden naarmate de grondwaterafvoer q_0 toeneemt. Hoewel dit effect bij de meeste praktische toepassingen wordt verwaarloosd, is dit in grootte-orde in rekening te brengen door toevoeging aan (63) van een langs empirische weg verkregen term (ERNST, 1979):

$$k_1 \Omega = \frac{1}{\pi} \ln \frac{fD_1}{B_{wp}} + \frac{q_0}{15\alpha k_1 B_{wp}} \quad (64)$$

met $f = 1$ tot $4/\pi$ (zie Fig. 12)

B_{wp} = natte omtrek

q_0 = grondwateruitvoer per strekkende meter van de open leiding

α = hellingshoek van talud (radialen)

Zowel in het geval dat er 4 lagen worden onderscheiden als bij 3 lagen is er een verdere vereenvoudiging mogelijk door aan te nemen dat de diepe goed doorlatende laag een zo grote doorlaatfactor heeft dat de substitutie respectievelijk van $k_4 = \infty$ of $k_3 = \infty$ is toegestaan. De formules (53), (61) en (55) ... (59) worden dan door de volgende uitdrukkingen vervangen:

$$\phi_2(x) = - \frac{U_f L c_3 \cosh \frac{x}{\lambda}}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} + G \quad (65a)$$

$$\text{met } \lambda = \left(\frac{1}{k_2 D_2 c_3} + \frac{1}{k_4 D_4 c_3} \right)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{k_2 D_2 c_3}$$

$$\text{ofwel } \phi_2(x) - \phi_{2d} = \frac{U_f L c_3 (\cosh \frac{L}{2\lambda} - \cosh \frac{x}{\lambda})}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} \quad (65b)$$

$$q_2(x) = \frac{1}{2} U_f L \frac{\sinh \frac{x}{\lambda}}{\sinh \frac{L}{2\lambda}} \quad (66)$$

$$T = \frac{D_1^*}{k_1} + \frac{L c_3 (\cosh \frac{L}{2\lambda} - 1)}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} + L\Omega =$$

$$= \frac{D_1^*}{k_1} + \frac{L}{2} \sqrt{\frac{c_3}{k_2 D_2}} \tanh \frac{L}{2\lambda} + L\Omega \quad (67)$$

In Fig. 11 is de middelste term van formule (67) te vinden als onderste lijn van de lijnenbundel. Uit deze figuur blijkt onmiddellijk hoe het verschil tussen (55) en (67) toeneemt naarmate het argument van de hy-

perbolische functie groter en het quotiënt $k_4 D_4 / k_2 D_2$ kleiner wordt.

In de praktijk geldt echter dat meestal $L/2\sqrt{k_2 D_2 c_3} < 5$ en vooral bij problemen, waarbij het transport van grondwater over relatief grote afstanden van belang is (kwelproblemen e.d.), mag worden aangenomen dat $k_4 D_4 \gg k_2 D_2$. Fig. 11 toont aan dat in dergelijke gevallen het verschil tussen de formules (55) en (67) van weinig praktisch belang is (<10%) en dat op grond hiervan voor het verdere betoog de eenvoudigere formules (65), (66) en (67) zouden mogen worden gebruikt.

6. DE AFLEIDING VAN DE VORMFACTOR α

Met behulp van de oplossing van het symmetrische drainageprobleem zoals gegeven in hoofdstuk 5, kan een nadere bepaling van de vormfactor α worden verkregen. Deze vormfactor werd in hoofdstuk 3 gedefinieerd als de verhouding van de gemiddelde hoogte van de grondwaterspiegel boven het peil van open water ten opzichte van de maximale hoogte van de grondwaterspiegel boven hetzelfde peil. Het rechter gedeelte van formule (8) kan hier worden herhaald:

$$\alpha = \frac{\bar{h} - h_d}{h_m - h_d} \quad (68)$$

Door gebruik te maken van het superponeren, zoals in Fig. 9 bij een goed doorlatende bovenlaag is aangegeven, kan formule (68) in een gemakkelijker te hanteren vorm worden gebracht:

$$\bar{h} - h_d = \bar{h}^+ - h_d^+ + \bar{h}^{++} - h_d^{++} \quad (69)$$

$$\bar{h}^+ - h_d^+ = \alpha_1 (h_m^+ - h_d^+) \quad (70)$$

$$\bar{h}^{++} - h_d^{++} = \alpha_2 (h_m^{++} - h_d^{++}) = (1 - \alpha_2^*) (h_m^{++} - h_d^{++})$$

$$\text{ofwel } h_m^{++} - \bar{h}^{++} = \alpha_2^* (h_m^{++} - h_d^{++}) \quad (71)$$

α_1 = vormfactor voor de horizontale stromingscomponent

α_2, α_2^* = vormfactoren voor de radiale stromingscomponent ($\alpha_2 + \alpha_2^* = 1$)

Vervolgens kan formule (2) c.q. formule (15) worden toegepast op de drie onderdelen van Fig. 9. Dit leidt tot:

$$h_m - h_d = U_d T \quad (72)$$

$$h_m^+ - h_d^+ = U_d T_{\text{hor}} \quad (73)$$

$$h_m^{++} - h_d^{++} = U_d T_{\text{rad}} \quad (74)$$

Uit (68) ... (74) volgt:

$$\begin{aligned} \alpha T &= \alpha_1 T_{\text{hor}} + (1 - \alpha_2^*) T_{\text{rad}} \\ &= \alpha_1 T_{\text{hor}} + (1 - \alpha_2^*) L \Omega \end{aligned} \quad (75)$$

De verdere behandeling in dit hoofdstuk zal betrekking hebben op het drie-lagenpakket (Fig. 13). Daarbij geldt:

$$T = T_{\text{hor}} + T_{\text{rad}} \quad (76)$$

Uit (75) en (76) volgt:

$$\alpha = \alpha_1 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2^*) \frac{L\Omega}{T} \quad (77)$$

Voor de berekening van T en Ω kan worden verwezen naar formule (55) aangepast voor het drie-lagenpakket (weglating van D_1^*/k_1 en verlaging van indices in de overige termen) en naar formule (63). Er blijft dus nu nog over uit de deeloplossingen $h^+(x)$ en $h^{++}(x)$ de coëfficiënten α_1 en α_2^* af te leiden.

Afleiding van α_1

Voor het gemiddelde van h^+ boven het peil van open water h_d^+ kan wegens $h^+ \approx \phi^+$ de volgende uitdrukking worden gebruikt:

$$\bar{h}^+ - h_d^+ = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \{\phi_1(x) - \phi_1(\frac{L}{2})\} dx \quad (78)$$

Substitutie van (53) met verlaagde indices in (78) levert op:

$$\begin{aligned} \bar{h}^+ - h_d^+ &= - \frac{U_f L}{k_1 D_1 + k_3 D_3} \int_0^{\frac{L}{2}} \left\{ \frac{k_3 D_3 \lambda (\cosh \frac{x}{\lambda} - \cosh \frac{L}{2\lambda})}{k_1 D_1 L \sinh \frac{L}{2\lambda}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} dx = \\ &= \frac{U_f L^2}{8(k_1 D_1 + k_3 D_3)} \left\{ \frac{4k_3 D_3 \lambda (\cosh \frac{L}{2\lambda} - \frac{2\lambda}{L} \sinh \frac{L}{2\lambda})}{k_1 D_1 L \sinh \frac{L}{2\lambda}} + \frac{2}{3} \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

Het maximale hoogteverschil over de grondwater-spiegel is onmiddellijk af te leiden uit (53):

$$h_m^+ - h_d^+ = \frac{U_f L^2}{8(k_1 D_1 + k_3 D_3)} \left\{ \frac{4k_3 D_3 \lambda (\cosh \frac{L}{2\lambda} - 1)}{k_1 D_1 L \sinh \frac{L}{2\lambda}} + 1 \right\} \quad (80)$$

Uit (79) en (80) volgt:

$$\alpha_1 = \frac{\bar{h}^+ - h_d^+}{h_m^+ - h_d^+} = \frac{\frac{2\lambda}{L} (\cosh \frac{L}{2\lambda} - \frac{2\lambda}{L} \sinh \frac{L}{2\lambda}) + \frac{k_1 D_1}{3k_3 D_3} \sinh \frac{L}{2\lambda}}{\frac{2\lambda}{L} (\cosh \frac{L}{2\lambda} - 1) + \frac{k_1 D_1}{2k_3 D_3} \sinh \frac{L}{2\lambda}} \quad (81)$$

Indien $k_3 \rightarrow \infty$, dan gaat (81) over in een veel eenvoudiger uitdrukking:

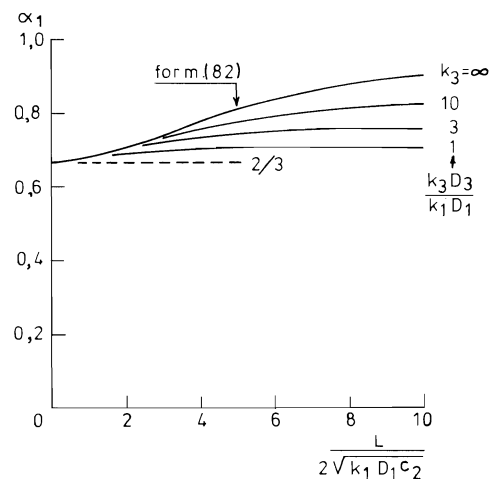


Fig. 14. Grafische voorstelling van de formules (81) voor willekeurige $k_3 D_3 / k_1 D_1$ en (82) voor $k_3 \rightarrow \infty$

$$\alpha_1 = \frac{\cosh \frac{L}{2\lambda} - \frac{2\lambda}{L} \sinh \frac{L}{2\lambda}}{\cosh \frac{L}{2\lambda} - 1} \quad (82)$$

Een grafische voorstelling van de formules (81) en (82) wordt gegeven in Fig. 14.

Afleiding van α_2

Voor het stromingsprobleem dat in Fig. 9 geheel rechts is afgebeeld bestaat een eenvoudige oplossing, indien $L \rightarrow \infty$, de open leiding in doorsnede de vorm heeft van een kleine halve cirkel ($r_0 \ll D$) en de tweede laag ook werkelijk ondoorlatend is. In dat geval kan met gebruikmaking van complexe functies ω en ζ de volgende betrekking worden afgeleid (ERNST, 1962, formule 18):

$$\frac{\pi\omega}{q_0} = \ln \frac{1 - e^{\frac{\pi\zeta}{D}}}{2} \quad (83)$$

Het nulpunt van het assenstelsel ligt bij formule (83) in het centrum van de open leiding. Er is dus een verschuiving met $\frac{L}{2}$ toegepast op de horizontale coördinaat x in Fig. 9. Vervolgens verliest L zijn betekenis bij gebruik van (83), maar hieruit kan voor $-\infty < x < 0$ de volgende benadering van de grondwater-spiegel $h(x)$ worden verkregen:

$$\frac{\pi kh(x)}{q_0} = \ln(1 - e^{\frac{\pi x}{D}}) - \ln 2 \quad (84)$$

De bepaling van het gemiddelde van $h(x)$ dient echter te gebeuren over het traject $-\frac{1}{2}L$ tot $-r_0$. Dit leidt tot:

$$\begin{aligned}
h_m^{++} - \bar{h}^{++} &= \frac{2q_0}{\pi kL} \int_{-\frac{L}{2}}^{-r_0} \ln(1 - e^{\frac{\pi x}{D}}) dx = \\
&= \frac{2q_0 D}{\pi^2 kL} \int_{-\frac{\pi L}{2D}}^{-\frac{\pi r_0}{D}} \ln(1 - e^X) dX \quad (85)
\end{aligned}$$

De integraal uit (85) kan op de volgende manier worden herleid door substitutie van $\pi x/D = \ln \xi$:

$$\int \ln(1 - e^X) dX = \int \frac{\ln(1 - \xi)}{\xi} d\xi \quad (86)$$

Van deze integraal is een oplossing bekend in de vorm van een oneindige reeks (DWIGHT, 1957, formule 621.1). Uit deze gegevens is af te leiden dat als $L > 4D$ en $x_0 < \frac{1}{4}D$ met goede benadering geldt, dat de ondergrens van de integraal bij $-\infty$ kan worden gelegd. Daar bovendien geldt dat $q_0 = U_f L$, kan (85) door de volgende formule worden vervangen:

$$\begin{aligned}
h_m^{++} - \bar{h}^{++} &= \frac{2U_f D}{\pi^2 k} (e^{-\chi_0} + \frac{1}{4}e^{-2\chi_0} + \frac{1}{9}e^{-3\chi_0} + \\
&\quad + \frac{1}{16}e^{-4\chi_0} + \dots) \quad (87)
\end{aligned}$$

$$\text{met } \chi_0 = \frac{\pi r_0}{D} = \frac{B_{wp}}{D}$$

waarin B_{wp} = natte omtrek van de open leiding

Door substitutie van $x = -\infty$ en $x = -r_0$ in (84) kan onmiddellijk worden afgeleid:

$$h_m^{++} - h_d^{++} = -\frac{U_f L}{\pi k} \ln(1 - e^{-\frac{\pi r_0}{D}}) \approx \frac{U_f L}{\pi k} \ln \frac{D}{B_{wp}} \quad (88)$$

Uit (87) en (88) volgt:

$$\alpha_2^* = \frac{h_m^{++} - \bar{h}^{++}}{h_m^{++} - h_d^{++}} = \frac{2D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{nB_{wp}}{D}}}{\pi L \ln \frac{D}{B_{wp}}} \quad (89)$$

Fig. 15 geeft een grafische voorstelling van formule (89). Daaruit blijkt dat over het traject dat voor de praktijk van het meeste belang is ($0,05 < \frac{B_{wp}}{D} < 0,5$), de volgende uitdrukking met voldoende benadering kan worden aanvaard. Daaruit is onmiddellijk af te lezen dat α_2^* vooral afhankelijk is van $\frac{D}{L}$.

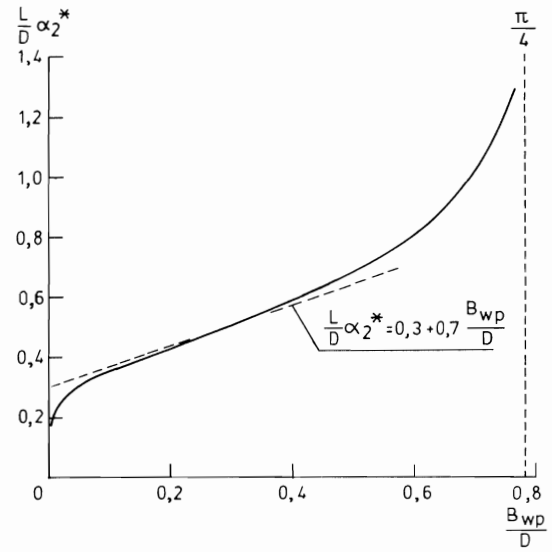


Fig. 15. Grafische voorstelling van formule (89)

$$\alpha_2^* \approx \frac{D}{L} (0,3 + 0,7 \frac{B_{wp}}{D}) = \frac{0,3D + 0,7B_{wp}}{L} \quad (90)$$

De gevonden uitdrukkingen voor α_1 en α_2^* - bijvoorbeeld de formules (81) of (82) en (89) of (90) - moeten in (75) of (77) worden gesubstitueerd om de verlangde uitkomst voor α te verkrijgen.

In de praktijk liggen de parameters α_1 en α_2^* respectievelijk tussen 0,67 en 0,80 en tussen 0,01 en 0,1. Daaruit is af te leiden dat α_1 het grootste deel uitmaakt van α .

Er moet echter worden herinnerd aan het feit dat in de voorgaande afleidingen niet zijn opgenomen pakketten met een slecht doorlatende bovenlaag. De waarde van k_1/k_2 heeft een belangrijke invloed op T_{rad}/T (zie form. 58, 59 en 60) en wordt daarbij nog gesteld dat behalve $k_1 \ll k_2$ ook $B_{wp} \ll D_1$, dan komt T_{rad}/T te liggen tussen 0,9 en 0,95.

Voor snelle oriënterende berekeningen zou men daarom in plaats van (77) de volgende vrij ruwe benaderingen kunnen gebruiken (α in ieder geval < 1):

$$\alpha \approx \alpha_1 + 0,25 \frac{T_{rad}}{T} \quad (91)$$

Bij een goed doorlatende bovenlaag kan dit worden vervangen door:

$$\alpha \approx \alpha_1 + 0,1 \quad (92)$$

Bij een slecht doorlatende bovenlaag:

$$\alpha \approx \alpha_1 + 0,25 \quad (93)$$

Ten slotte zijn er nog die gevallen dat $D > L$ en

mogelijk zelfs $D \gg L$, waarbij een goede benadering is te vinden door aan te nemen: $D \rightarrow \infty$. In dergelijke gevallen behoeft met slechts één stromingscomponent te worden gerekend en kan de volgende formule worden afgeleid voor de vorm van de grondwaterspiegel door draaiing over $\frac{\pi}{2}$ van formule (83) (zie ERNST, 1962, formule 21):

$$\frac{\pi kh}{q_0} = \ln \sin \frac{\pi |x|}{L} \quad (94)$$

Voor de vormfactor $\alpha_{D\infty}$ moet dezelfde formule (68) als tevoren worden gebruikt:

$$\alpha_{D\infty} = \frac{\bar{h} - h(x_0)}{h(\frac{L}{2}) - h(x_0)} \quad (95)$$

Wegens $h(\frac{L}{2}) = 0$ (zie formule 94) volgt hieruit:

$$\alpha_{D\infty} = 1 - \frac{\bar{h}}{h(x_0)} \quad (96)$$

Voor de gemiddelde hoogte van de grondwaterspiegel kan worden afgeleid:

$$\begin{aligned} \frac{\pi k}{q_0} \bar{h} &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x_0} \int_{x_0}^{0,5L} \ln \sin \frac{\pi x}{L} dx = \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \chi_0} \int_{\chi_0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin \chi d\chi \end{aligned} \quad (97)$$

De integraal uit (97) kan worden vervangen door een oneindige reeks (DWIGHT, 1957: formule 630.1). Daaruit volgt:

$$\begin{aligned} \frac{\pi k}{q_0} \bar{h} &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \chi_0} \left\{ -\chi_0 \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2\chi}{1^2} + \frac{\sin 4\chi}{2^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin 6\chi}{3^2} + \dots \right) \right\} \end{aligned} \quad (98)$$

Substitutie van (94) en (98) in (96) geeft:

$$\alpha_{D\infty} = 1 + \frac{1,089 - \chi_0 \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\chi_0}{n^2}}{(\frac{\pi}{2} - \chi_0) \ln \sin \chi_0} \quad (99)$$

$$\text{met } \chi_0 = \frac{\pi r_0}{L}$$

Een grafische voorstelling van formule (99) wordt gegeven in Fig. 16. Bovenstaande afleiding van de vormfactor dient dus in alle gevallen te worden gebruikt waarbij de dikte van de bovenste watervoerende

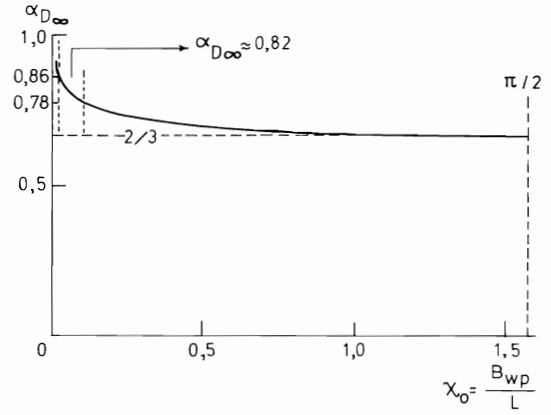


Fig. 16. Grafische voorstelling van formule (99)

laag aanmerkelijk groter is dan $0,25L$. Daar voor de praktijk mag worden aangenomen dat vrijwel altijd geldt dat $0,01 < B_{wp}/L < 0,1$, volgt uit Fig. 15 voor deze gevallen:

$$0,78 < \alpha_{D\infty} < 0,86 \quad (100)$$

Nu blijkt dat (92) en (100) in grootte-orde gelijk zijn. Daaruit volgt dat in het algemeen de verhouding van k_1 en k_2 meer invloed heeft dan de verhouding van de dikte van de bovenste watervoerende laag en de afstand tussen de open leidingen.

7. DE SYMMETRISCHE GRONDWATERSTROMING BIJ KWEL EN WEGZIJJING

De symmetrische grondwaterstroming bij invoer of uitvoer van grondwater door een of meer diepe, goed doorlatende lagen zal op dezelfde manier worden behandeld als in hoofdstuk 3. Deze behandeling zal dus bestaan uit het maken van lineaire combinaties van de gevallen A en B (zie hoofdstuk 3 en Fig. 17). Daarmee kan men elk genoemd, willekeurig geval doen ontstaan, maar ook het derde bijzondere geval C.

Minstens een van de goed doorlatende lagen moet een zeer hoge kD -waarde hebben. Alleen dan is een belangrijk transport over grote afstanden mogelijk en daarbij heeft de stijghoogte van het grondwater in de diepere lagen een zo klein verloop over wat grotere afstanden, dat de symmetrie over een strookbreedte L er nauwelijks door wordt aangetast.

Gemakshalve zal hier een toepassing volgen voor het betrekkelijk eenvoudige geval van een drie-lagenpakket met $k_3 \rightarrow \infty$ (Fig. 17). De formules (65), (66) en (67), die voor geval B werden geleverd aan het einde van hoofdstuk 5, zijn hier bruikbaar. Dit geldt in zover dat wel alle indices met 1 moeten worden verlaagd (drie in plaats van vier lagen) en dat h , ϕ en q moeten worden voorzien van dubbele c.q. drievoudige accenten voor de onderscheiding van de bijbehorende bijzondere oplossingen.

Samenvoeging van de bedoelde deeloplossingen A en B leidt tot het geval C, indien $U_f'' = -U_f' = U_k' = U_k''$. Uit formule (65a) volgt:

$$\phi_1'''(x) = -\frac{U_k''' L c_2 \cosh \frac{x}{\lambda}}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} + G \quad (101)$$

met $\lambda = \sqrt{k_1 D_1 c_2}$

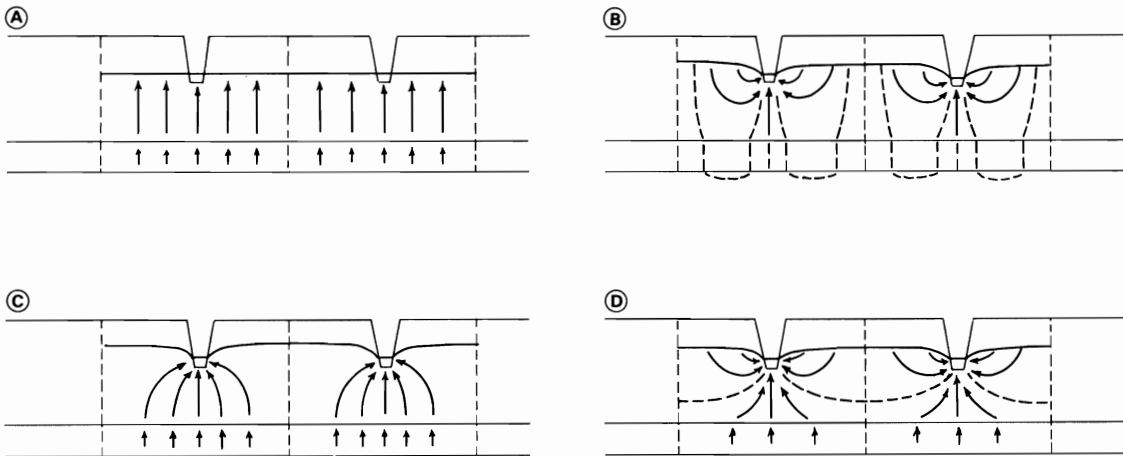


Fig. 17. Vier dwarsdoorsneden bij de symmetrische drainage van neerslagoverschot en kwel (vergelijk Fig. 3, 4, 5 en 6): A. $U_d = 0$; B. $U_k = 0$; C. $U_f = 0$; D. het algemene geval

Evenals bij (65) en (66) is hier door differentiëren het volgende resultaat te verkrijgen:

$$q_1'''(x) = \frac{1}{2} U_k''' L \frac{\sinh \frac{x}{\lambda}}{\sinh \frac{L}{2\lambda}} \quad (102)$$

Een geringe omwerking van (101) geeft:

$$\phi_1'''(x) - \phi_{1d}''' = \frac{U_k''' L c_2 (\cosh \frac{L}{2\lambda} - \cosh \frac{x}{\lambda})}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} \quad (103)$$

Door substitutie van $x = 0$ volgt uit (103):

$$\phi_{1m}''' - \phi_{1d}''' = \frac{U_k''' L c_2 (\cosh \frac{L}{2\lambda} - 1)}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} = \frac{U_k''' L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} \quad (104)$$

Analoog aan (59) geldt hier:

$$\phi_{1d}''' - h_d''' = U_k''' L \Omega \quad (105)$$

Daar bij een goed doorlatende bovenlaag geldt $h \approx \phi_1$ kan door optelling van (104) en (105) een uitdrukking worden verkregen voor het maximale hoogteverschil in de grondwaterspiegel:

$$h_m''' - h_d''' = U_k''' \left(\frac{L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L \Omega \right) \quad (106)$$

ofwel analoog aan (67):

$$T = \frac{h_m''' - h_d'''}{U_k'''} = \frac{L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L \Omega \quad (107)$$

Indien wordt gevraagd naar formules voor h en ϕ ten opzichte van ϕ_3 , dat is de constant gedachte stijghoogte in de derde laag, dan is het goed eerst een

uitdrukking te vinden voor $\phi_3 - h_d$. De formules (22) en (23) kunnen hiervoor onmiddellijk worden overgenomen:

$$\begin{aligned}\phi_3''' - h_d''' &= U_k''' T_k = U_k''' (c_2 + \alpha T) = \\ &= \alpha (h_m''' - h_d''') + U_k''' c_2\end{aligned}\quad (108)$$

Om van (108) gebruik te kunnen maken, worden de stijghoogteverschillen $\phi_1'''(x) - \phi_3'''$ en $h_m''' - \phi_3'''$ als volgt geschreven:

$$\begin{aligned}\phi_1'''(x) - \phi_3''' &= \phi_1'''(x) - \phi_{1d}''' + (\phi_{1d}''' - h_d''') - \\ &\quad - (\phi_3''' - h_d''')\end{aligned}\quad (109)$$

$$h_m''' - \phi_3''' = h_m''' - h_d''' - (\phi_3''' - h_d''')\quad (110)$$

Substitutie van (103), (105), (106) en (108) in (109) en van (106) en (108) in (110) levert op:

$$\begin{aligned}\frac{\phi_1'''(x) - \phi_3'''}{U_k'''} &= \frac{Lc_2(\cosh \frac{L}{2\lambda} - \cosh \frac{x}{\lambda})}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} + L\Omega - \\ &\quad - \alpha \left(\frac{Lc_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L\Omega \right) - c_2\end{aligned}\quad (111)$$

$$\frac{h_m''' - \phi_3'''}{U_k'''} = (1 - \alpha) \left(\frac{Lc_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L\Omega \right) - c_2\quad (112)$$

Voor het algemene geval (vierde kwadrant van Fig. 17) zijn uitdrukkingen analoog aan (102), (103), (104), (105), (106) en (107) te verkrijgen door de indices weg te laten en door U_k te vervangen door U_d . Dit geeft:

$$\phi_1(x) - \phi_{1d} = \frac{U_d L c_2 (\cosh \frac{L}{2\lambda} - \cosh \frac{x}{\lambda})}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}}\quad (113)$$

$$\phi_{1m} - \phi_{1d} = \frac{U_d L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda}\quad (114)$$

$$\phi_{1d} - h_d = U_d L \Omega\quad (115)$$

$$h_m - h_d = U_d \left(\frac{L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L \Omega \right)\quad (116)$$

$$T = \frac{h_m - h_d}{U_d} = \frac{L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L \Omega\quad (117)$$

$$q = \frac{1}{2} U_d L \frac{\sinh \frac{x}{\lambda}}{\sinh \frac{L}{2\lambda}}\quad (118)$$

Voor formule (108) komt in de plaats:

$$\phi_3 - h_d = (\phi_3'' - h_3'') + (\phi_3''' - h_d''')\quad (119)$$

De stijghoogte van het grondwater in de derde laag is in geval B gelijk te stellen aan de gemiddelde hoogte van de grondwaterspiegel. Daarvoor geldt dus:

$$\phi_3'' - h_d'' = \alpha (h_m'' - h_d'')\quad (120)$$

Door substitutie van (120) en (108) gaat (119) over in:

$$\begin{aligned}\phi_3 - h_d &= \alpha (h_m'' - h_d'') + \alpha (h_m''' - h_d''') + U_k c_2 = \\ &= \alpha (h_m - h_d) + U_k c_2\end{aligned}\quad (121)$$

Hiermee is een uitdrukking verkregen die al in hoofdstuk 3 voorkomt, zie formule (16). Vervolgens is (116) in (121) te substitueren:

$$\phi_3 - h_d = U_d \alpha \left(\frac{L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L \Omega \right) + U_k c_2\quad (122)$$

Door in (111) U_k''' te vervangen door $U_k + U_f$ en vervolgens aan deze deeloplossing een verticale neerwaartse stroming met intensiteit U_f toe te voegen, ontstaat de volgende uitdrukking ($U_d = U_k + U_f$):

$$\begin{aligned}\frac{\phi_1(x) - \phi_3}{U_d} &= \frac{L c_2 (\cosh \frac{L}{2\lambda} - \cosh \frac{x}{\lambda})}{2\lambda \sinh \frac{L}{2\lambda}} + L \Omega - \\ &\quad - \alpha \left(\frac{L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L \Omega \right) - \frac{U_k}{U_d} c_2\end{aligned}\quad (123)$$

Uit (123) kan onmiddellijk worden afgeleid:

$$\frac{h_m - \phi_3}{U_d} = (1 - \alpha) \left(\frac{L c_2}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + L \Omega \right) - \frac{U_k}{U_d} c_2\quad (124)$$

8. HET SCHEIDINGSVLAK TUSSEN GRONDWATERMASSA'S AFKOMSTIG UIT VERSCHILLENDE BRONNEN

Het water dat aan de tevoren behandelde grondstromingen deelneemt, kan uit een van de volgende bronnen afkomstig zijn: a. uit het neerslagoverschot dat zich in de onverzadigde zone naar beneden beweegt; b. uit het grondwater in het diepe pakket; c. uit het water in de open leidingen. Een bepaling van de vorm (diepte) van het scheidingsvlak tussen grondwaterstromingen van verschillende oorsprong kan van belang zijn. Dit geldt vooral voor die gevallen dat er een meer of minder belangrijk verschil is in de concentraties van de opgeloste stoffen.

In de figuren 18 en 19 is in twee vrij complete reeksen aangegeven welke variaties in de vorm van het scheidingsvlak mogelijk zijn. Het verschil tussen de twee figuren ligt in hoofdzaak in de tegengestelde stromingsrichtingen; voor het overige zijn de onderdelen van beide figuren twee aan twee gelijkwaardig. Afgezien van de gevallen 4 en 10, waarin slechts één voedingscomponent en één afvoercomponent voorkomen, vindt men bij de overige gevallen ofwel in Fig. 18 ofwel in Fig. 19 ofwel in beide figuren een voeding vanuit twee bronnen respectievelijk bij Fig. 18: 1, 2 en 3, bij Fig. 19: 5, 6, 7 en 8 en bij Fig. 18: 8 en 9.

Welke verschillen in het algemeen mogelijk zijn in het water afkomstig uit diverse bronnen zal hier buiten beschouwing blijven, evenals de diffusie die

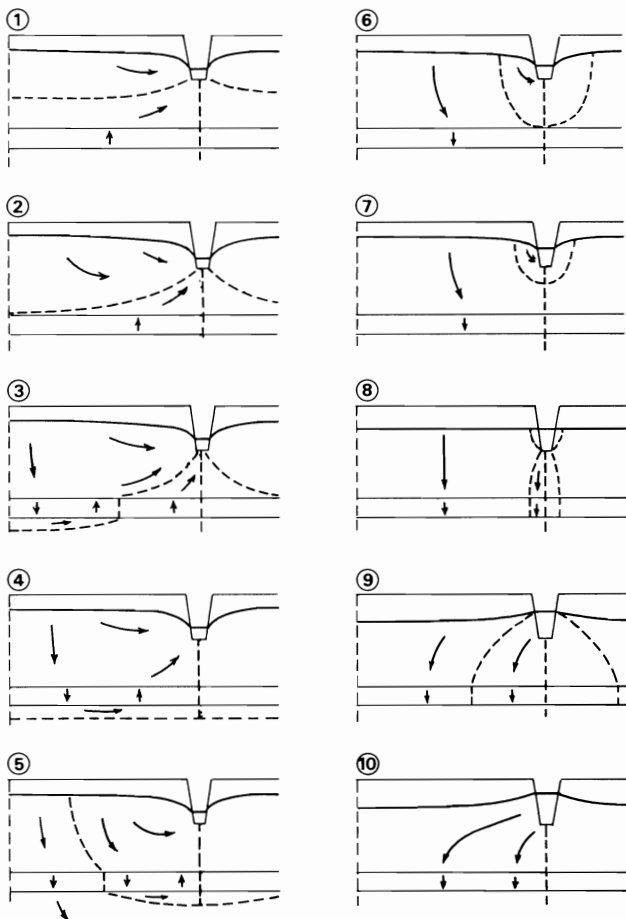


Fig. 18. Grensvlak tussen grondwatermassa's van verschillende oorsprong

$U_f > 0$	$U_d > 0$	$U_k > 0$	gevallen 1, 2, 3
			$U_k = 0$
	$U_d = 0$	$U_k < 0$	5, 6, 7
			8
$U_f = 0$	$U_d < 0$	$U_k < 0$	9
			10

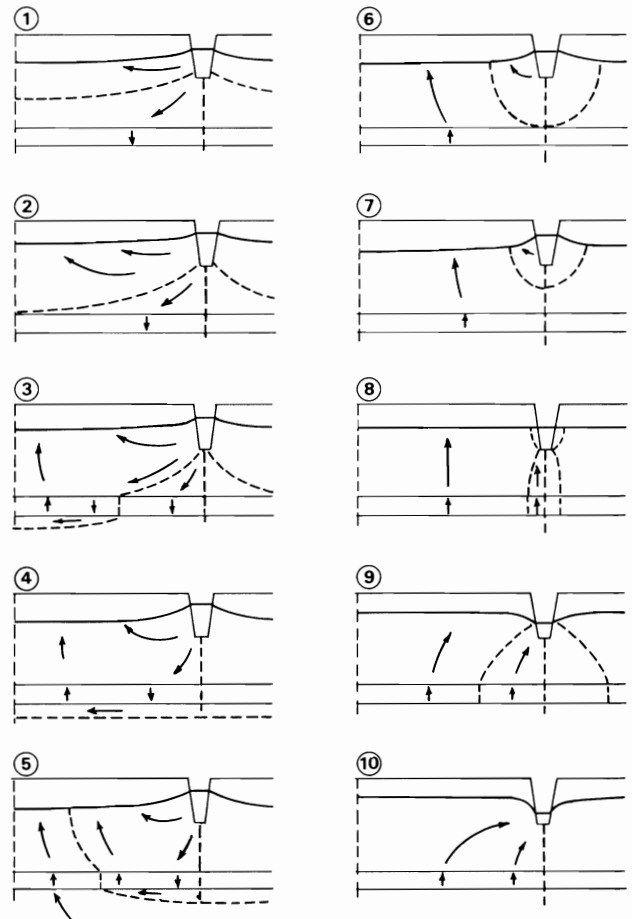


Fig. 19. Grensvlak tussen grondwatermassa's van verschillende oorsprong. Elk van de tien gevallen is analoog aan het geval met hetzelfde nummer in Fig. 18, echter steeds met omgekeerde stromingsrichting

loodrecht op het grensvlak zal ontstaan. De volgende beschouwingen geven slechts een berekening van de stationaire stroomlijn die in een verticale doorsnede de van gelijke dichtheid veronderstelde stromingscomponenten van elkaar scheidt. Bij deze berekening zullen dezelfde benaderende methoden worden gebruikt als in voorgaande hoofdstukken.

Door het benaderende karakter van de voorgestelde rekenmethode is de toepassing ervan bij de gevallen 6, 7 en 8 niet aan te bevelen, omdat in deze gevallen het scheidingsvlak geheel in het gebied met een belangrijke radiale stromingscomponent ligt. Voor de andere gevallen kunnen de volgende berekeningen met goede benadering geldig worden verklaard, weliswaar met de beperking dat $-\frac{L}{2} + D_1 < x < \frac{L}{2} - D_1$. Hierbij is dan het nulpunt van de x-as gelegd halverwege twee symmetrische open leidingen, zoals in de figuren 10 en 13 reeds werd gedaan. Op grond van de bekende veronderstelling van symmetrie is van de gebiedsbreedte die in de figuren 10 en 13 werd afgebeeld, slechts de helft overgebracht naar de figuren 18 en 19.

De gevallen 4, 8 en 10 zijn bijzondere gevallen die in hoofdstuk 3 werden aangeduid als de gevallen B, A en C. Voor de gevallen B en C is in de bovenste goed doorlatende laag geen bijzonder grensvlak aan te wijzen.

Voor geval A werd in voorgaande hoofdstukken steeds aangenomen dat de stroming zuiver verticaal zou zijn. In de figuren 18.8 en 19.8 wordt echter aangegeven dat de grondwaterstroming in de nabijheid van de open leidingen in wat sterkere mate van de verticale richting moet afwijken. In een dergelijk geval, bijvoorbeeld Fig. 18.8, zal er immers een kleine stromingscomponent zijn die afkomstig uit de grondwaterspiegel door de taluds aan weerszijden in de open leiding zal uittreden, om vervolgens via het diepere gedeelte van de natte omtrek weer als grondwaterstroming bij te dragen tot het neerwaartse transport. De breedte van het gebied, waarin dit verschijnsel zich afspeelt, kan niet veel groter zijn dan B_{wp} . Vermoedelijk zal daarom voor dit geval een nauwkeurige bepaling van de vorm van de grensvlakken van weinig praktisch belang zijn.

Geval 2 (zie Fig. 18.2 en 19.2) kan eveneens als een bijzonder geval worden aangemerkt. Onder deze omstandigheden geldt immers:

$$h_m = \phi_{1m} = \phi_3 \quad (125)$$

Substitutie van (125) in (124) levert op:

$$\frac{U_k}{U_d} = \frac{1}{1 + \frac{U_f}{U_k}} = (1 - \alpha) \left(\frac{L}{2\lambda} \tanh \frac{L}{4\lambda} + \frac{L\Omega}{c_2} \right) \quad (126)$$

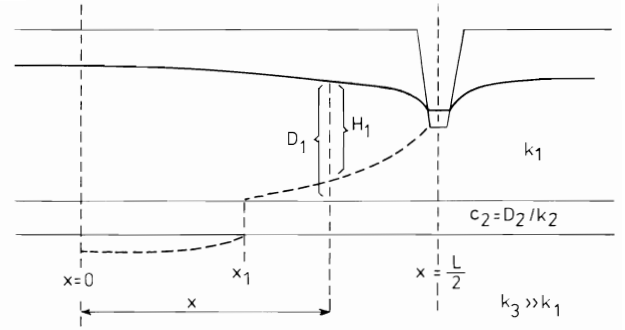


Fig. 20. Notatie gebruikt in de formules (127) ... (132)

Voor de rest zijn nu nog uit de figuren 18 en 19 de gevallen 1, 2, 3, 5 en 9 te behandelen. Het onderhavige probleem betreft de vorm van het grensvlak tussen de twee stromingscomponenten. Deze vorm kan het eenvoudigste worden beschreven door een uitdrukking te zoeken waarmee de verticale afstand H_1 tussen het grensvlak en de grondwaterspiegel kan worden berekend in afhankelijkheid van de horizontale coördinaat x (Fig. 20).

De verhouding van de lijnstukken D_1 en H_1 is gelijk te stellen aan de verhouding van de horizontale transportintensiteiten door deze lijnstukken. Voor het transport door D_1 moet formule (118) worden gebruikt. Het transport door H_1 is gelijk aan de invoer door het freatisch oppervlak tussen $x = 0$ en het lijnstuk H_1 met coördinaat x . Hieruit volgt voor de gevallen 1, 2 en 3:

$$\frac{H_1(x)}{D_1} = \frac{U_f x}{q_1(x)} = \frac{2U_f x \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d L \sinh \frac{x}{\lambda}} \quad (127)$$

$$\text{met } -\frac{L}{2} + D_1 < x < \frac{L}{2} - D_1$$

Voor geval 5 is een gelijksoortige afleiding mogelijk. Men verkrijgt dan de volgende uitdrukking die geldig is voor waarden van x binnen dezelfde grenzen als tevoren:

$$\frac{H_1(x)}{D_1} = \frac{U_f x + U_k \frac{L}{2}}{q_1(x)} = \frac{(2U_f x + U_k L) \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d L \sinh \frac{x}{\lambda}} \quad (128)$$

Evenzo voor geval 9:

$$\frac{H_1(x)}{D_1} = \frac{(x_1 - \frac{L}{2})U_f}{q_1(x)} = \frac{(2x_1 - L)U_f \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d L \sinh \frac{x}{\lambda}} \quad (129)$$

Voor de bepaling van het punt x_1 waar in de gevallen 3, 5 en 9 de bovenkant van de slecht doorlatende laag door het grensvlak wordt gesneden is niet meer

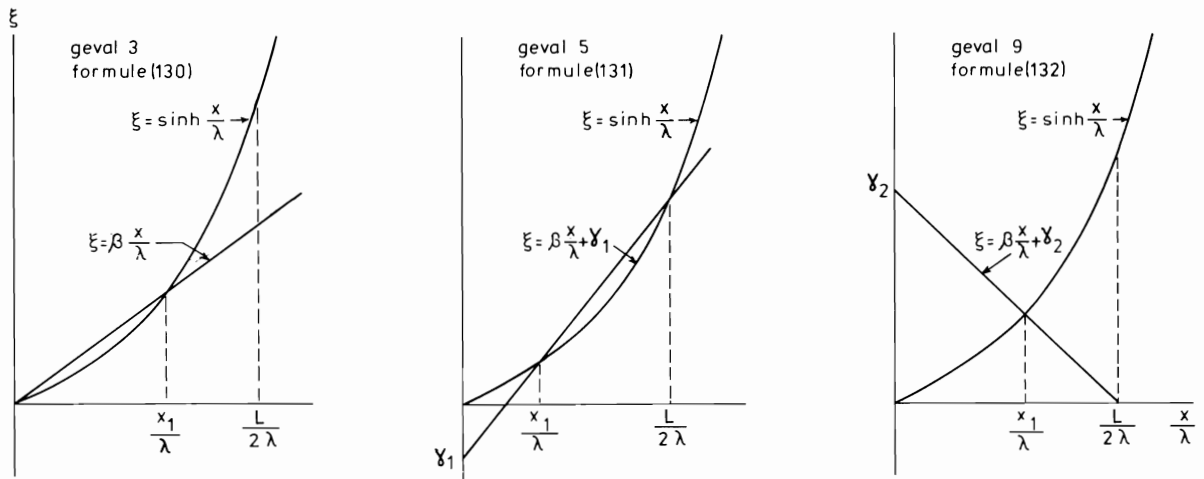


Fig. 21. Grafische oplossing van het snijpunt x_1 (zie Fig. 18, 19 en 20). De parameter ζ is een hulpgrootheid die geen bijzondere fysische betekenis heeft. Ter bekorting zijn de volgende parameters ingevoerd:

$$\beta = \frac{2U_f \lambda}{U_d L} \sinh \frac{L}{2\lambda}; \quad \gamma_1 = \frac{U_k}{U_d} \sinh \frac{L}{2\lambda}; \quad \gamma_2 = -\frac{U_f}{U_d} \sinh \frac{L}{2\lambda}$$

nodig dan wat door de formules (127), (128) en (129) wordt geleverd.

Immers voor het punt x geldt steeds $H_1 = D_1$ en dit leidt onmiddellijk tot de volgende betrekkingen:

$$\text{Geval 3: } \sinh \frac{x_1}{\lambda} = \frac{2U_f \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d L} x_1 \quad (130)$$

$$\text{Geval 5: } \sinh \frac{x_1}{\lambda} = \frac{2U_f \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d L} x_1 + \frac{U_k \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d} \quad (131)$$

$$\text{Geval 9: } \sinh \frac{x_1}{\lambda} = \frac{2U_f \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d L} x_1 - \frac{U_f \sinh \frac{L}{2\lambda}}{U_d} \quad (132)$$

De oplossing van x_1 kan in deze gevallen het eenvoudigste gebeuren door toepassing van een grafische methode, Fig. 21.

9. DE ALGEMENE OPLOSSING VAN $\phi_i(x)$ VOOR EEN PAKKET BESTAANDE UIT EEN WILLEKEURIG AANTAL LAGEN, DIE AFWISSELEND GOED EN SLECHT DOORLATEND ZIJN

Bij de problemen die in vorige hoofdstukken werden behandeld, werd het aantal lagen van de ondergrond steeds beperkt gehouden en wel niet meer dan vier. Een algemene behandeling van stromingsproblemen bij pakketten met meer lagen (in principe een willekeurig aantal) geeft weinig moeilijkheden indien dezelfde vereenvoudigende veronderstellingen als in hoofdstuk 4 mogen worden aangehouden. Voorlopig zal hier echter de afvoer van het neerslagoverschot U_f buiten beschouwing blijven (verg. hoofdstuk 5, formules 38-50). Dit houdt in dat achteraf nog een deeloplossing moet worden toegevoegd. Aan het einde van dit hoofdstuk zal deze betrekkelijk eenvoudige deeloplossing worden behandeld (zie formules 164-171).

Hier kan dus worden begonnen met het overnemen van de basisvergelijkingen (29), (30) en (31) uit het begin van hoofdstuk 4, waarbij U_f nog van geen invloed is:

$$q_i = -k_i D_i \frac{d\phi_i}{dx} \quad (133)$$

$$\frac{dq_i}{dx} = v_{z,i+1} - v_{z,i-1} \quad (134)$$

$$v_{z,i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{c_i} \quad (135)$$

Door (133) naar x te differentiëren en daarin

(134) en (135) te substitueren ontstaat een differentiaalvergelijking van de tweede orde. De verschillen met de formules (43), (44) en (45) berusten op het buiten beschouwing laten van het neerslagoverschot U_F :

$$k_i D_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\phi_i - \phi_{i-2}}{c_{i-1}} + \frac{\phi_i - \phi_{i+2}}{c_{i+1}} \quad (136)$$

Om een compactere formulering te verkrijgen worden de volgende substituties ingevoerd (verg. form. 46):

$$V_i = \frac{1}{k_i D_i c_{i-1}} \quad W_i = \frac{1}{k_i D_i c_{i+1}} \quad (137)$$

Differentiaalvergelijking (136) kan nu als volgt worden geschreven:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = -V_i \phi_{i-2} + (V_i + W_i) \phi_i - W_i \phi_{i+2} \quad (138)$$

Het is echter nodig formule (138) voor de bovenste watervoerende laag in een iets andere vorm te brengen. Er moet daarbij onderscheid worden gemaakt tussen de gevallen, waarbij de eerste laag goed doorlatend is en de gevallen, waarbij de eerste laag slecht doorlatend is.

- a. De eerste laag met index $i = 1$ is goed doorlatend (Fig. 7a). In dit geval kan formule (138) worden herleid tot:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = W_1 \phi_1 - W_1 \phi_3 \quad (139)$$

Bij het onderhavige stelsel differentiaalvergelijkingen kan een bijzondere oplossing onmiddellijk in de volgende, vrij eenvoudige vorm worden gegeven, waarbij de coëfficiënten β_i en λ nog aan nader te bepalen voorwaarden moeten voldoen:

$$\phi_i(x) = \beta_i e^{\frac{x}{\lambda}} \quad (140)$$

Substitutie van (140) in de differentiaalvergelijkingen (139) en (138) leidt tot de volgende formules:

$$(\lambda^{-2} - W_1) \beta_1 + W_1 \beta_3 = 0 \quad (141)$$

$$V_i \beta_{i-2} + (\lambda^{-2} - V_i - W_i) \beta_i + W_i \beta_{i+2} = 0 \quad (142)$$

De uitdrukkingen (141) en (142) toegepast op n goed doorlatende lagen geven tezamen een stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen, waarin het

aantal onbekenden β_i eveneens gelijk is aan n. In een dergelijk stelsel kan er slechts één oplossing zijn voor de onbekende β_i indien de determinant van de coëfficiënten gelijk is aan nul (verg. ERNST, 1962, hoofdstuk III, 4b).

$$\begin{vmatrix} \lambda^{-2} - W_1 & W_1 & 0 & - & - \\ V_3 & \lambda^{-2} - V_3 - W_3 & W_3 & - & - \\ 0 & V_5 & \lambda^{-2} - V_5 - W_5 & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & \lambda^{-2} - V_{2n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (143)$$

In de coëfficiënt λ is echter nog een vrijheidsgraad aanwezig, zodat (143) moet worden gebruikt voor het vinden van n wortels voor λ^{-2} . Deze wortels zullen worden onderscheiden door toevoeging van een index k. In totaal zijn er dus n wortels λ_k en n wortels $-\lambda_k$.

Wat niet onmiddellijk uit (143) is af te leiden, maar wat wel aan de differentiaalvergelijkingen (138) en (139) is te zien, is dat één van de wortels λ_k gelijk moet zijn aan nul. Immers de volgende bijzondere oplossing met willekeurige coëfficiënten a en b voldoet ook aan het stelsel differentiaalvergelijkingen (vergelijk formules 48 en 49):

$$\phi_i(x) = ax + b \quad (144)$$

Bij elke wortel $\lambda_k \neq 0$ kunnen de bijbehorende waarden voor β_{ik} met behulp van de volgende formules worden gevonden. Er kan worden begonnen met een willekeurige waarde voor β_{1k} . Eenvoudigheidshalve neemt men meestal $\beta_{1k} = 1$. Daarna kunnen de volgende formules worden gebruikt:

$$\beta_{3k} = \frac{(W_1 - \lambda_k^{-2}) \beta_{1k}}{W_1} \quad (145)$$

$$\beta_{(i+2)k} = \frac{(V_i + W_i - \lambda_k^{-2}) \beta_{ik} - V_i \beta_{(i-2)k}}{W_i} \quad (146)$$

(voor $i = 3 \dots 2n-3$)

$$\beta_{(2n-1)k} = \frac{V_{2n-1} \beta_{2n-3}}{V_{2n-1} - \lambda_k^{-2}} \quad (147)$$

Hiermee kunnen dus alle coëfficiënten λ_k en β_{ik} worden berekend. De algemene oplossing kan nu in de volgende vorm worden geschreven:

$$\phi_i(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{ik} (A_k e^{-\frac{x}{\lambda_k}} + B_k e^{\frac{x}{\lambda_k}}) + ax + b \quad (148)$$

A_k , B_k , a en b blijven over als $2n$ onbekende coëfficiënten die eerst kunnen worden bepaald als de randvoorwaarden, meestal samenhangend met de aangrenzende gebieden, bekend zijn.

- b. De bovenste laag van het pakket is slecht doorlatend (Fig. 7b). De tweede laag wordt dus als goed doorlatend opgevat en voor deze laag geldt dan de volgende formule:

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = -V_2 h_c + (V_2 + W_2) \phi_2 - W_2 \phi_4 \quad (149)$$

met h_c = constante hoogte van de grondwaterspiegel

In de onderhavige beschouwingen wordt de grondwaterstand als onafhankelijk van x aangenomen, hoewel een lineaire afhankelijkheid van x ook zonder meer kan worden toegelaten. Bij het stelsel differentiaalvergelijkingen voorgesteld door (138) en (149) met constante h_c kan als bijzondere oplossing, iets afwijkend van (140) en (144), de volgende uitdrukking worden gebruikt:

$$\phi_i(x) = \phi_i e^{\frac{x}{\lambda}} + h_c \quad (150)$$

Substitutie van (150) in de differentiaalvergelijking (149) geeft eveneens een iets andere uitkomst als tevoren:

$$(\lambda^{-2} - V_2 - W_2) \beta_2 + W_2 \beta_4 = 0 \quad (151)$$

Substitutie van (150) in (138) geeft een uitkomst gelijk aan (142):

$$V_i \beta_{i-2} + (\lambda^{-2} - V_i - W_i) \beta_i + W_i \beta_{i+2} = 0 \quad (152)$$

De determinant van de coëfficiënten van de onbekende β_i is hierdoor op een plaats verschillend van (143), afgezien van het minder belangrijke feit dat er in (143) alleen oneven indices voorkomen en in de volgende determinant alleen even indices:

$$\begin{vmatrix} \lambda^{-2} - V_2 - W_2 & W_2 & 0 & - & - \\ V_4 & \lambda^{-2} - V_4 - W_4 & W_4 & - & - \\ 0 & V_6 & \lambda^{-2} - V_6 - W_6 & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & \lambda^{-2} - V_{2n} \end{vmatrix} = \quad (153)$$

Uit het kleine verschil tussen (143) en (153) moet kunnen worden verklaard dat in dit geval alle wortels $\lambda_k \neq 0$ zijn. De algemene oplossing voor dit geval kan daarom als volgt worden geschreven:

$$\phi_i(x) = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} (A_k e^{-\frac{x}{\lambda_k}} + B_k e^{\frac{x}{\lambda_k}}) + h_c \quad (154)$$

De afleiding van de aanvankelijk onbekende coëfficiënten β_{ik} kan gebeuren met behulp van de volgende formules analoog aan (145), (146), (147):

$$\beta_{4k} = \frac{(V_2 + W_2 - \lambda_k^{-2}) \beta_{2k}}{W_2} \quad (155)$$

$$\beta_{(i+2)k} = \frac{(V_i + W_i - \lambda_k^{-2}) \beta_{ik} - V_i \beta_{(i-2)k}}{W_i} \quad (156)$$

(voor $i = 4 \dots 2n-2$)

$$\beta_{2nk} = \frac{V_{2n} \beta_{2n-2}}{V_{2n} - \lambda_k^{-2}} \quad (157)$$

De overblijvende onbekende coëfficiënten A_k en B_k moeten worden bepaald met behulp van de in een concreet geval geldende randvoorwaarden (samenhang tussen de deelgebieden).

Formule (153) is een n^e -graadsvergelijking in λ^{-2} . In de volgende regels wordt de expliciete afleiding van voor enkele eenvoudige gevallen nader toegelicht.

1. Voor het twee-lagen-pakket bestaat (153) uit slechts één element:

$$\frac{1}{\lambda^2} - V_2 = 0 \quad (158)$$

$$\text{ofwel } \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{V_2}} = \pm \sqrt{k_2 D_2 c_1} \quad (159)$$

2. Voor het vier-lagen-pakket is uit (153) onmiddellijk de volgende formule af te leiden:

$$(\lambda^{-2} - V_2 - W_2)(\lambda^{-2} - V_4) - W_2 V_4 = 0$$

$$\text{ofwel } \lambda^{-4} - (V_2 + W_2 + V_4)\lambda^{-2} + V_2V_4 = 0 \quad (160)$$

Formule (160) heeft een algemeen bekende oplossing:

$$\frac{1}{\lambda} = \pm \sqrt{\frac{V_2 + W_2 + V_4 \pm \sqrt{(V_2 + W_2 + V_4)^2 - 4V_2V_4}}{2}} \quad (161)$$

3. Voor het zes-lagenpakket wordt op soortgelijke manier de volgende uitdrukking gevonden:

$$\begin{aligned} & (\lambda^{-2} - V_2 - W_2)(\lambda^{-2} - V_4 - W_4)(\lambda^{-2} - V_6) - \\ & - (\lambda^{-2} - V_2 - W_2)W_4V_6 - (\lambda^{-2} - V_6)W_2V_4 = 0 \end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned} & \lambda^{-6} - (V_2 + W_2 + V_4 + W_4 + V_6)\lambda^{-4} + \{V_4(V_2 + V_6) + \\ & + (V_2 + W_2)(W_4 + V_6)\}\lambda^{-2} - V_2V_4V_6 = 0 \quad (162) \end{aligned}$$

Formule (162) kan worden opgevat als een vergelijking van de 3e graad in λ^{-2} . Diverse leerboeken voor de algebra geven een volledige behandeling van 3e en 4e graadsvergelijkingen, zodat dit hier achterwege kan blijven (WIJDENES, 1957; LOONSTRA, 1958; ZURMÜHL, 1961). De eindformules kan men bovendien vinden in sommige verzamelingen van wiskundige formules (SPIEGEL, 1968; BURINGTON, 1973).

4. Bij het acht-lagenpakket ontstaan nog omvangrijkere vergelijkingen. Uitwerking van de determinant (141) met $n = 4$ geeft:

$$\begin{aligned} & \lambda^{-8} - (V_2 + W_2 + V_4 + W_4 + V_6 + W_6 + V_8)\lambda^{-6} + \\ & + \{(V_2 + W_2 + V_4)(V_6 + W_6 + V_8) + \\ & + W_4(V_2 + W_2 + W_6 + V_8) + V_2V_4 + V_6V_8\}\lambda^{-4} - \\ & - \{V_2V_4(V_6 + W_6 + V_8) + (V_2W_4 + W_2V_4)(W_6 + V_8) + \\ & + V_6V_8(V_2 + W_2 + V_4)\}\lambda^{-2} + V_2V_4V_6V_8 = 0 \quad (163) \end{aligned}$$

Als gesteld wordt $\lambda^{-2} = \xi$, dan is formule (163) te beschouwen als een vergelijking van de 4e graad in ξ . Met betrekking tot de oplossing van vergelijkingen van de 4e graad zijn dezelfde opmerkingen geldig als tevoren bij behandeling van vergelijkingen van de 3e graad ten behoeve van het zes-lagen-pakket.

Hoe hoog de graad ook is van een vergelijking $f(\xi) = 0$, het is altijd mogelijk een oplossing van alle gevraagde wortels ξ te vinden zonder van enige

theorie gebruik te maken. Men kan immers een grafische voorstelling maken van de functie $y = f(\xi)$ door substitutie van een voldoende aantal willekeurige waarden van ξ . Daaruit zijn dan bij een n^e -graads vergelijking de n waarden van ξ af te lezen waarvoor met voldoende benadering geldt $y = 0$.

Voor profielen met een oneven aantal lagen (bovenste laag goed doorlatend, dus $n = 3, 5, 7, \dots$) zijn de gewenste formules op eenzelfde manier te verkrijgen als bij gevallen met een even aantal lagen. Uit de formules (161), (162) en (163), respectievelijk voor $n = 4, 6$ en 8 , zijn gelijksoortige formules voor $n = 3, 5$ en 7 onmiddellijk te verkrijgen door $V_2 = 0$ te substitueren en vervolgens alle indices met één te verminderen. Het weglaten van V_2 houdt in dat de constante term uit (161), (162) en (163) verdwijnt. Dit bevestigt dus wat tevoren reeds werd afgeleid, dat het aantal wortels $\neq 0$ met één wordt verminderd. Voor $n = 3, 5$ en 7 zijn dus voor λ^2 slechts respectievelijk 1, 2 en 3 wortels te bepalen. Voor het drie-lagenpakket leidt dit tot een uitdrukking analoog aan formule (46).

Bij de afvoer van een zeker neerslagoverschot U_f is er steeds de mogelijkheid om een bijzondere deeloplossing te geven zonder dat daarbij het gebruik van enige differentiaalvergelijking nodig is. Men kan immers veronderstellen dat elke goed doorlatende laag zorgt voor de afvoer van een deel van U_f evenredig met de kD -waarde van de betrokken laag. Dit zou moeten inhouden dat de stijghoogte in elk van deze lagen een parabolische verdeling heeft. Dit kan alleen opgaan als alle parabolen hun top bij een gelijke waarde van x hebben (b.v. $x = 0$), maar bovendien moet daarbij voor voor elke parabool een zekere verticale verschuiving worden aangenomen. Naarmate de goed doorlatende laag hoger ligt, moet ook de parabool hoger liggen. Deze deeloplossing kan als volgt worden geschreven:

$$\phi_2^V(x) - \phi_2^V(0) = \frac{-U_f x^2}{2(k_2D_2 + k_4D_4 + \dots + k_{2n}D_{2n})} \quad (164)$$

$$\phi_i^V(x) - \phi_2^V(0) = \frac{-U_f x^2}{2(k_2D_2 + k_4D_4 + \dots + k_{2n}D_{2n})} - g_i \quad (165)$$

Aan het voorkomen van even indices in de noemers van (164) en (165) wordt duidelijk dat de bovenste laag (index 1) als relatief slecht doorlatend wordt beschouwd. De index i (165) kan daarom slechts even waarden hebben. Zou de bovenste laag goed doorlatend zijn, dan blijft het betoog houdbaar met een kleine aanpassing van de indices.

Door de verschillen in de termen g_i moet het ver-

ticale transport door de slecht doorlatende lagen mogelijk worden. Daaruit volgt onmiddellijk:

$$g_2 = U_f c_1 \quad (166)$$

$$g_4 = g_2 + U_f c_3 \left(1 - \frac{k_2 D_2}{k_2 D_2 + \dots + k_{2n} D_{2n}}\right) \quad (167)$$

$$g_i = g_{i-2} + U_f c_{i-1} \left(1 - \frac{k_2 D_2 + \dots + k_{i-2} D_{i-2}}{k_2 D_2 + \dots + k_{2n} D_{2n}}\right) \quad (168)$$

$$g_{2n} = g_{2n-2} + U_f c_{2n-1} \frac{k_{2n} D_{2n}}{(k_2 D_2 + \dots + k_{2n} D_{2n})} \quad (169)$$

Door sommeren van (166), (168) ontstaat een gesloten uitdrukking voor g_i :

$$g_i = \frac{U_f}{k_2 D_2 + \dots + k_{2n} D_{2n}} \sum_{j=2}^i c_{j-1} (k_j D_j + \dots + k_{2n} D_{2n}) \quad (170)$$

Uit (165) en (170) volgt voor $i = 2, \dots, 2n$:

$$\begin{aligned} \phi_i^v(x) - \phi_2^v(0) &= \frac{U_f}{k_2 D_2 + \dots + k_{2n} D_{2n}} x \\ &\times \left\{ -\frac{1}{2} x^2 - \sum_{j=2}^i c_{j-1} (k_j D_j + \dots + k_{2n} D_{2n}) \right\} \end{aligned} \quad (171)$$

De onwerkelijke randvoorwaarden die aan de deeloplossing gevormd door (164) en (165) inherent zijn, moeten worden gecompenseerd door middel van de coëfficiënten A_k , B_k , a en b in de eerder gevonden deeloplossing. Daarbij moet dan niet van formule (150) en volgende gebruik worden gemaakt, maar van formule (140) en volgende, ook in geval de bovenste laag slecht doorlatend is.

De verklaring van deze schijnbare inconsequentie is eenvoudig. Immers door de deeloplossing bestaande uit de formules (164) en (171) wordt de juiste verticale stromingsintensiteit voor de bovenlaag al in rekening gebracht. Door de andere deeloplossing moet dus voldaan worden aan de volgende voorwaarde:

$$v_{z,1} = 0 \quad (172)$$

ofwel:

$$h(x) = \phi_2(x) \quad (173)$$

Dit laatste houdt in dat aan de grondwaterspiegel geen enkele voorwaarde mag worden opgelegd (noch $h = \text{constant}$, noch $h = ax + b$, of wat dan ook). De

gevraagde deeloplossing kan men dus vinden door de slecht doorlatende bovenlaag buiten beschouwing te laten en van de formules (140) ... (148) gebruik te maken. Daarbij moeten dan wel de indices voor de diverse lagen met één worden verhoogd. Hiermee is dan ook verklaard dat terwijl formule (160) bij een profiel bestaande uit vier lagen aangeeft, dat voor λ^2 in het algemeen twee waarden nodig zijn om aan alle randvoorwaarden te voldoen, in hoofdstuk 5 slechts één waarde behoefde te worden gebruikt (formules 48 en 49).

10. DE GRONDWATERSTROMING VEROORZAAKT DOOR HET HOOG-
TEVERSCHIL TUSSEN TWEE HALF-ONEINDIGE, DOOR EEN
RECHTE LIJN GESCHIEDEN, HOMOGENE GEBIEDEN

Het gaat in dit hoofdstuk om de grondwaterstroming tussen twee gebieden die hydrologisch in hoogte verschillen. Deze omschrijving is bedoeld om duidelijk te maken dat niet de hoogte van het grondoppervlak of het peil van het water in de open leidingen maatgevend zijn, maar dat het feitelijk gaat om de gemiddelde waarde van de stijghoogte van het grondwater in de bovenlaag, waarop evenzeer de afvoer van neerslagoverschot en kwel door de grond naar de open leidingen als wel het peil van het open water van invloed zijn.

Vervolgens wordt verondersteld dat de twee gebieden aan elkaar grenzen en door een verticaal plat vlak worden gescheiden. Bij afbeelding in het horizontale vlak is er een scheiding door een rechte lijn. Deze veronderstelling brengt met zich dat het probleem als tevoren kan worden teruggebracht tot een twee-dimensionale behandeling van de stroming in het verticale vlak loodrecht op deze lijn.

Fig. 22 geeft een voorbeeld van een dergelijke grondwaterstroming van een hoger naar een lager gebied door een ondergrond bestaande uit twee slecht doorlatende lagen ($i = 1$ en $i = 3$) en twee goed doorlatende lagen ($i = 2$ en $i = 4$). Voor toepassing van de onderhavige rekenmethode is het voordelig als de kD -waarden en de c -waarden per laag als constant kunnen worden aangenomen of, als dit niet voor het gehele gebied geldig is, een klein aantal deelgebieden kunnen worden onderscheiden waarbinnen de homogeniteit per laag wel geldig is. Zo zijn om het probleem wat eenvoudiger te houden in Fig. 22 wel variaties in D_1 en D_2 aangenomen, maar de overgang van grotere naar kleinere laagdikte valt samen met de overgang van het hogere gebied A naar het lagere gebied B.

Gebied A en gebied B zullen om de verdere behandeling niet al te omvangrijk te maken intern als homo-

geen worden beschouwd. Dit houdt in dat er in het hoge gebied een constant slootpeil h_{dA} , een constante radiale weerstand Ω_A en een constante slootafstand L_A worden aangenomen en voor het lage gebied een lager constant slootpeil h_{dB} en mogelijk ook andere constante waarden voor Ω_B en L_B .

Toepassing van de formules uit het vorige hoofdstuk geeft in principe geen moeilijkheden. Elk deelgebied, waarop deze toepassing plaatsvindt, kan niet meer beslaan dan de ruimte tussen twee opeenvolgende open leidingen. De reden voor het afbreken van het deelgebied bij de open leidingen ligt in het feit dat daar in de bovenste laag of mogelijk in de bovenste twee lagen meestal een belangrijke radiale stromingscomponent voorkomt.

Voor de goede aansluiting van twee aangrenzende deelgebieden met indices j en $j + 1$ kan met behulp van de formules (29), (35) en (36) de volgende gemeenschappelijke randvoorwaarde worden gevormd:

$$\frac{\phi_i(x_{dj}) - h_{dj}}{\Omega_j} = (k_i D_i \frac{d\phi_i}{dx})_{djR} - (k_i D_i \frac{d\phi_i}{dx})_{djL} \quad (174)$$

- ϕ_i = stijghoogte in de eerste goed doorlatende laag ($i = 1$ of 2)
- x_{dj} = coördinaat van open leiding met index j gelegen aan de rechterzijde van gebied j
- h_{dj} = peil van open leiding met index j
- Ω_j = radiale weerstand van open leiding met index j
- djL = index voor de limietwaarde bij nadering van links tot x_{dj}
- djR = index voor de limietwaarde bij nadering van rechts tot x_{dj}

Voor het overige zijn de randvoorwaarden van de meest eenvoudige vorm. Voor alle goed doorlatende lagen moet gelden:

$$\phi_{idjL} = \phi_{idjR} = \phi_i(x_{dj}) \quad (175)$$

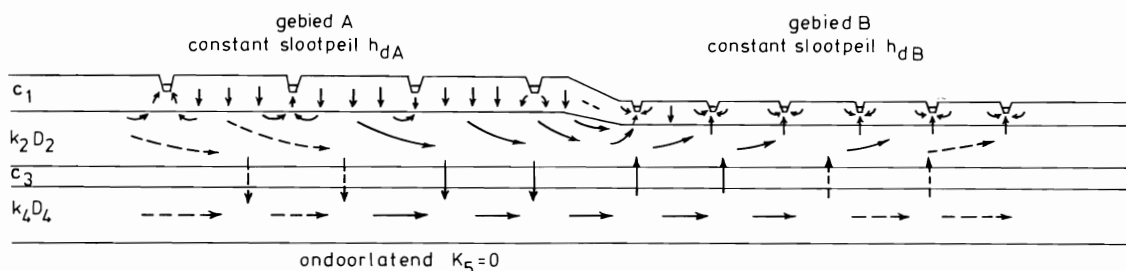


Fig. 22. Grondwaterstroming door een vier-lagen-pakket van een hoog gebied A met slootpeil h_{dA} naar een laag gebied B met slootpeil h_{dB}

Voor zover $i > 2$:

$$q_{idjL} = q_{idjR} = q_i(x_{dj}) \quad (176)$$

Deze manier van werken brengt met zich dat in het algemeen een vrij groot aantal deelgebieden zal moeten worden onderscheiden. Als er n open leidingen zijn, wordt het aantal deelgebieden $n + 1$. In Fig. 22 kan het totale gebied door 10 open leidingen in 11 deelgebieden worden verdeeld. De omvang van het rekenwerk kan dus vrij groot worden, maar de uitvoerbaarheid in principe wordt hierdoor niet aangetast.

De overzichtelijkheid van de berekeningen kan dikwijls worden bevorderd door als tevoren het rekenwerk in een aantal stappen uit te voeren. Onder alle omstandigheden kan worden begonnen met een eerste deeloplossing, waarbij alleen de afvoer van het neerslagoverschot in rekening hoeft te worden gebracht. Zijn het hoge en het lage gebied inwendig homogeen, respectievelijk met slootafstanden L_A en L_B en in de overgangsstrook een slootafstand $\frac{1}{2}(L_A + L_B)$, dan ligt het voor de hand slechts 2 gebieden A en B te onderscheiden, overeenkomstig Fig. 22. Bij elke open leiding kan dan een symmetrische grondwaterstroming worden aangenomen als eerste deeloplossing om te voldoen aan de afvoer van het neerslagoverschot. Daarbij geldt dus $U_f' = U_f$ en $U_k' = 0$. Indien het profiel weinig lagen telt of indien het aannemelijk lijkt dat voor deze symmetrische deeloplossing met een vereenvoudigd profiel mag worden gerekend, dan is het soms mogelijk hiervoor enkele formules uit voorgaande hoofdstukken te gebruiken.

Bovengenoemde symmetrische deeloplossingen zijn slechts aannemelijk indien in gedachten in de overgangsstrook van het hoge naar het lage gebied een

scheiding wordt aangebracht in de vorm van een ondoorlatend verticaal vlak vlak (Fig. 23).

Onder deze omstandigheden behoeven dus slechts twee symmetrische deeloplossingen te worden gezocht, respectievelijk voor gebied A en gebied B. Behalve bij het verticale ondoorlatende vlak ($x = 0$) wordt verder op alle gebiedsscheidingen x_{mj} in alle goed doorlatende lagen aan de noodzakelijke randvoorwaarden voldaan:

$$\phi_{imjL} = \phi_{imjR} \quad \text{voor alle } x_{mj} \text{ behalve } x_{mj} = 0 \quad (177)$$

$$q_{imjL} = q_{imjR} \quad \text{voor alle } x_{mj} \quad (178)$$

x_{mj} = waarde van x in het midden van gebied j tussen de open leidingen $j-1$ en j

mjL = index voor de waarde die in het punt x_{mj} behoort bij het gebied links van x_{mj}

mjR = index voor de waarde die in het punt x_{mj} behoort bij het gebied rechts van x_{mj}

Voor $x_{mj} = 0$ wordt niet aan formule (177) voldaan. Afgezien van het verschil in slootpeil kunnen daarvoor nog meer redenen worden opgegeven. Het is immers aannemelijk dat er verschillen in slootafstanden zijn tussen het hoge en het lage gebied en evenzo verschillen in natte omtrek van de open leidingen. Verder is het niet uit te sluiten dat er verschillen in doorlatendheid zijn tussen de overeenkomstige lagen van beide gebieden. Al deze eigenschappen kunnen op de waarde van ϕ_{imj} een meer of minder grote invloed hebben en dus ook op het verschil $\phi_{imjL} - \phi_{imjR}$.

Hieruit kan men afleiden dat in het algemeen op meer plaatsen de symmetrische oplossingen niet goed aan elkaar zullen sluiten. In het onderhavige geval

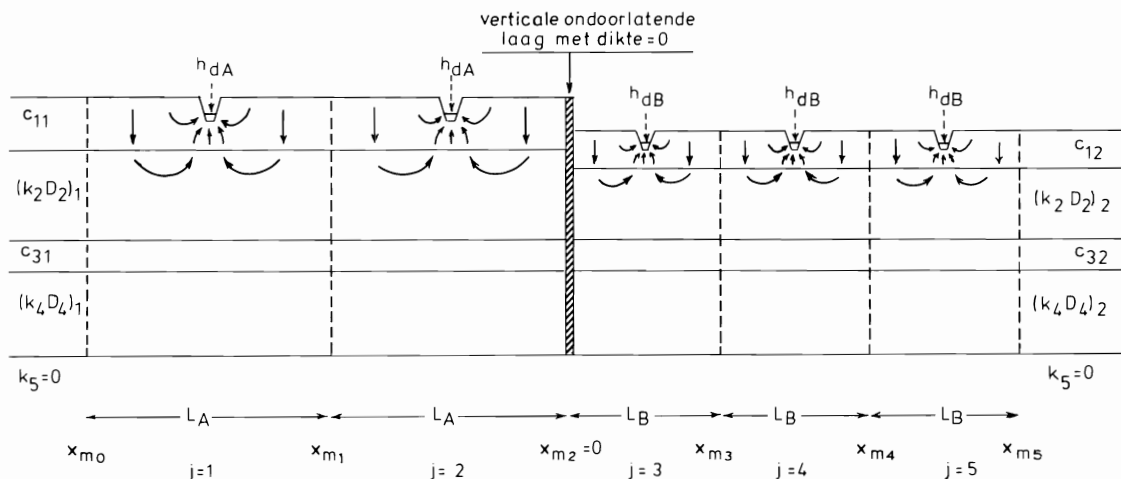


Fig. 23. Symmetrische toestanden die ontstaan wanneer op de grens van het hoge en het lage gebied in Fig. 22 een fictief verticaal scheidingsvlak wordt aangebracht: eerste deeloplossing

(Fig. 23) is het nodig aan (177) de volgende betrekkingen toe te voegen, waarbij de waarde van $\Delta\phi_i$ is gelijk te stellen aan het verschil van de symmetrische deeloplossing voor $x_{mj} = 0$:

$$\phi_i'(0)_L - \phi_i'(0)_R = \Delta\phi_i \quad \text{voor } i = 2 \text{ of } 4 \quad (179)$$

Indien het de bedoeling is met de eerste deeloplossing de afvoer van het neerslagoverschot in rekening te brengen, dan zou men daarbij de verschillen in slootpeil nog buiten beschouwing kunnen laten ($h_{dj} = 0$). Vervolgens zou men dan kunnen overgaan tot het zoeken van een tweede deeloplossing, waarbij noch het neerslagoverschot, noch de slootpeilen enige invloed hebben ($U_f'' = 0$ en $H_{dj}'' = 0$), maar waarbij de discontinuïteiten $\Delta\phi_i$ uit de eerste deeloplossing (in dit geval $\Delta\phi_i$ evenredig met U_f) moeten worden gecompenseerd. Ten slotte dient men een derde deeloplossing toe te voegen, waarvoor moet gelden $U_f'' = 0$ en geen discontinuïteiten meer behoeven te worden verwerkt, maar waarbij uitsluitend de peilverschillen tussen de open leidingen in rekening worden gebracht.

Men heeft echter ook de vrijheid om reeds bij de eerste deeloplossing voor de peilen van het open water de juiste waarden in te voeren, zoals bijvoorbeeld in Fig. 23 werd aangenomen. Dan vervalt de derde deeloplossing en zal men slechts een tweede deeloplossing behoeven te zoeken met dezelfde formules als tevoren, maar met andere waarden voor $\Delta\phi_i$, nu dus niet meer evenredig met U_f omdat in $\Delta\phi_i$ ook de peilverschillen van het open water zijn opgenomen. Welke manier van werken in dit opzicht dient te worden gekozen, zal van diverse omstandigheden kunnen afhangen. De aard van het rekenwerk verandert er nauwelijks door.

Voor het verdere betoog zal hier worden aangenomen dat in de eerste deeloplossing de juiste peilen al zijn verwerkt. Bij de tweede deeloplossing behoeft daarmee dus geen rekening meer te worden gehouden, zo-

dat voor het gehele gebied nu een constant slootpeil en afwezigheid van het neerslagoverschot kan worden aangenomen (Fig. 24):

$$h_{dj}'' = 0 \quad (180)$$

$$U_f'' = 0 \quad (181)$$

Het is duidelijk dat bij de eerste deeloplossing nog een zekere vrijheid was in het kiezen van de gebiedsgrenzen, maar dat het weinig verschil uitmaakt op welke plaats, mits het maar in de symmetrievlakken is. In Fig. 23 is een verschuiving van de gebiedsgrenzen gelijk $\frac{1}{2}L$ toegepast ten opzichte van de figuren 10, 13 en 17.

Bij de tweede deeloplossing is het echter nodig de grenzen van de deelgebieden te leggen bij de open leidingen en bovendien bij $x = 0$, waar volgens (179) in alle goed doorlatende lagen een discontinuïteit in ϕ_i kan voorkomen.

Bij de gebiedsgrenzen x_{dj} (Fig. 24) zijn voor de stijghoogte en de horizontale stroomsterkte in de goed doorlatende lagen gelijksoortige gemeenschappelijke randvoorwaarden te gebruiken als tevoren (zie formules 174, 175 en 176):

$$\phi_{idjL}'' = \phi_{idjR}'' = \phi_i''(x_{dj}) \quad \text{voor alle } i \quad (182)$$

$$\frac{\phi_i''(x_{dj}) - h_{dj}''}{\Omega_j} = q_{idjL}'' - q_{idjR}'' \quad \text{voor } i = 1 \text{ of } 2 \quad (183)$$

$$q_{idjL}'' = q_{idjR}'' = q_i''(x_{dj}) \quad \text{voor } i > 2 \quad (184)$$

Aan de compensatie van de discontinuïteit in ϕ_i bij $x = 0$ wordt voldaan door bij de tweede deeloplossing voor alle goed doorlatende lagen de volgende randvoorwaarde te gebruiken:

$$\phi_i''(0)_L - \phi_i''(0)_R = -\Delta\phi_i \quad (185)$$

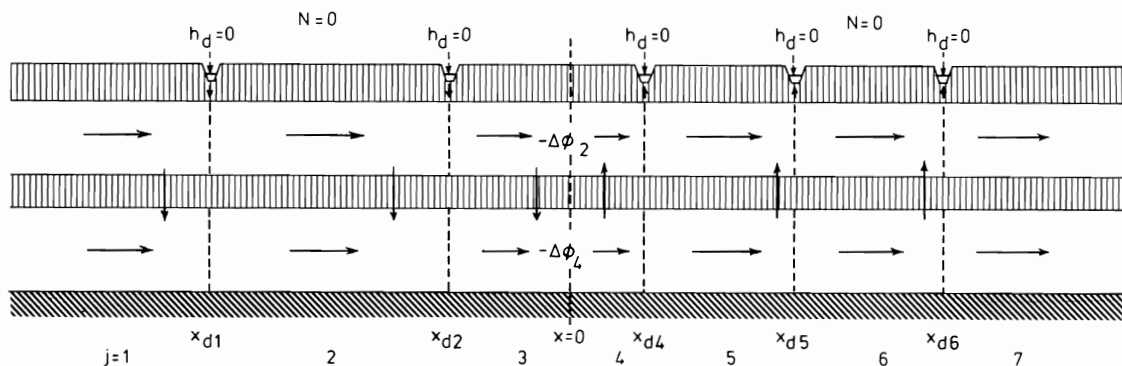


Fig. 24. Schematische voorstelling van de grondwaterstroming, die als tweede deeloplossing bij de grondwaterstroming afgebeeld in Fig. 22, kan worden gebruikt. Bij deze deeloplossing wordt een constant slootpeil aangenomen. De strooming wordt veroorzaakt door de potentiaalsprongen $-\Delta\phi_i$ die nodig zijn voor compensatie van de ongewenste potentiaalsprongen $\Delta\phi_i$ op de overeenkomstige plaatsen in Fig. 23

De horizontale stroomsterkte had in de eerste deeloplossing in geen van de goed doorlatende lagen aan afwijking bij $x = 0$ en daaruit volgt dus:

$$q_i''(0)_L = q_i''(0)_R \quad (186)$$

Indien in het betrokken gebied meer hoogtevverschillen voorkomen dan aangenomen in de figuren 22, 23 en 24 en indien de geohydrologische gesteldheid in horizontale richting zo sterk varieert dat het niet raadzaam lijkt met slechts 1 of 2 profielen te werken, dan moet een meer gedifferentieerde indeling van het gebied worden ingevoerd. Dit houdt in dat op meer plaatsen gebruik moet worden gemaakt van randvoorwaarden als (179) en (185).

Bovendien is er in het algemeen nog een aparte beschouwing nodig van het eerste en het laatste gebied in de reeks van deelgebieden (zie bijvoorbeeld in Fig. 24 de gebieden $j = 1$ en $j = 7$). Aan de linkerkant van het meest linkse gebied en aan de rechterkant van het meest rechtse gebied moet voor elke goed doorlatende laag nog een zekere randvoorwaarde worden ingevoerd. Zijn deze uiterste grenzen zo ver weg gekozen dat verwacht mag worden dat daar slechts een heel bescheiden wegzijging of kwel kan voorkomen, dan kan er weinig bezwaar tegen zijn het gebied aan weerszijden af te sluiten met eenvoudige benaderende veronderstellingen (bijvoorbeeld $\phi_i'' = 0$ of $q_i'' = 0$ voor alle i ; deze randvoorwaarden gelden ook indien gesteld $x_{do} = -\infty$ en $x_{dn} = +\infty$). Zodoende wordt ten slotte verkregen dat het aantal randvoorwaarden gelijk is aan het aantal onbekende coëfficiënten (zie A_{jk} , B_{jk} , a_j en b_j in de formules 148 en 154), hetgeen nodig is om de oplossing van deze onbekenden mogelijk te maken.

11. DE PRAKTISCHE VEREENVOUDIGING VAN DE TWEDE DEEL- OPLOSSING UIT HOOFDSTUK 10

Uit voorgaande beschouwingen is duidelijk geworden dat de bepaling van de invloed van het neerslagoverschot op de grondwaterstroming in het algemeen weinig moeilijkheden behoeft op te leveren. Deze invloed kan men immers met behulp van een symmetrische deeloplossing per deelgebied afzonderlijk behandelen. In de praktijk zal men zich daarbij meestal kunnen beperken tot de berekening van een klein aantal weinig omvangrijke gevallen.

In vergelijking met de symmetrische deeloplossing geeft de asymmetrische deeloplossing duidelijk meer moeilijkheden. In de asymmetrische deeloplossing zijn dezelfde coëfficiënten λ_k en β_{ik} te gebruiken als in de symmetrische deeloplossingen. Bij de tweede deeloplossing moeten echter in een keer alle deelgebieden in hun onderlinge samenhang worden betrokken en daarvoor is in elk deelgebied een stel coëfficiënten A_{jk} , B_{jk} , a_j en b_j (form. 148 en 150) beschikbaar. In totaal is het aantal van deze coëfficiënten gelijk aan IJ als I even is en gelijk aan $(I + 1)J$ als I oneven is, waarbij I het aantal lagen is en J het aantal deelgebieden. Indien de twee uiterste deelgebieden tot in het oneindige reiken, dan zijn deze aantallen respectievelijk $I(J - 1)$ en $(I + 1)(J - 1)$. Wordt het aantal goed doorlatende lagen aangeduid door n , dan wordt onmiddellijk duidelijk dat hierbij I en $I + 1$ kunnen worden vervangen door $2n$.

Het aantal eerste graads vergelijkingen dat nodig is om deze onbekenden op te lossen, moet hieraan gelijk zijn. Zo is onmiddellijk af te leiden dat bij het voorbeeld dat in Fig. 22 werd gegeven, 40 vergelijkingen van de eerste graad met 40 onbekenden behoren: $4 \times (11 - 1) = 40$. Vervolgens werd het gebied

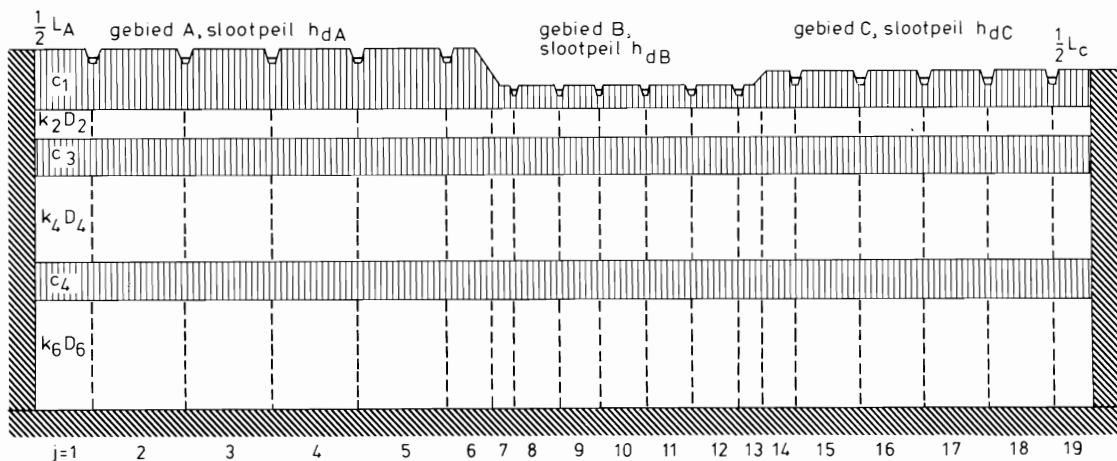


Fig. 25. De gebiedsindeling bij drie gebieden A, B en C, respectievelijk met vijf sloten op peil h_{dA} , zes sloten op peil h_{dB} en vijf sloten op peil h_{dC}

uit Fig. 22 enigszins verkleind naar de figuren 23 en 24 overgebracht. Dit heeft tot gevolg dat het aantal voor Fig. 24 is gereduceerd tot $4 \times (7 - 1) = 24$.

Het kost weinig moeite een voorbeeld te geven dat wat meer gecompliceerd is. Een dergelijk voorbeeld wordt in Fig. 25 gegeven met 19 deelgebieden, waarvan de beide uitersten op de halve perceelsbreedte worden afgesloten. Er zijn 3 slecht doorlatende lagen en 3 goed doorlatende lagen. In Fig. 25 is bovendien het aantal verschillende peilen verhoogd van 2 tot 3. Of nu twee of drie of nog meer peilgebieden moeten worden onderscheiden, dergelijke complicaties zijn in principe geen bezwaar om de rekenmethode uit hoofdstuk 10 toe te passen. Het houdt echter meestal wel in dat een groter gebied in beschouwing moet worden genomen en ook daardoor zal de omvang van het rekenwerk toenemen. Bij het voorbeeld dat in Fig. 25 wordt gegeven, is het aantal onbekende coëfficiënten A_{jk} , B_{jk} , a_j en b_j reeds toegenomen tot $6(19 - 1) = 108$.

Welke methode ook wordt gebruikt voor oplossing van het onderhavige stelsel van vergelijkingen van de eerste graad, hoe groter het aantal vergelijkingen wordt, hoe meer het de vraag zal zijn of daarmee wel veel relevante informatie zal worden verkregen. Op dit punt is een zekere vereenvoudiging mogelijk door samenvoeging van kleine deelgebieden, die onderling gelijkwaardig zijn. Dit zal inhouden dat een afzonderlijke beschouwing van elke open leiding achterwege blijft. Er zal worden gewerkt met grotere deelgebie-

den, die intern als homogeen worden aangenomen en die onderling, in het bijzonder wat betreft de peilen van het open water, verschillend zijn.

Het verdwijnen van de open leidingen moet worden gecompenseerd door toevoeging van een slecht doorlatende laag met een fictieve c -waarde aan de bovenkant in gevallen dat in werkelijkheid de bovenlaag goed doorlatend is, of door vergroting van de werkelijke waarde van c_1 , indien de bovenlaag slecht doorlatend is. Dit houdt dus in dat uit hoofdstuk 9 de formules (149) ... (157) moeten worden gebruikt met een constante waarde voor h_c . De oplossing van de wortels λ_k uit (153) is iets moeilijker dan uit (143), omdat bij een gelijk aantal goed doorlatende lagen de graad van eerstgenoemde vergelijking één hoger is.

Om een onveranderde intensiteit van de verticale stromingscomponent te verkrijgen, is het duidelijk welke waarde c^* voor de nieuw aan te nemen slecht doorlatende bovenlaag moet worden ingevoerd (Fig. 26).

Bij een goed doorlatende bovenlaag (Fig. 26a) is hiervoor de volgende formule te gebruiken:

$$c^* = \alpha T \quad (187)$$

Indien de goed doorlatende bovenlaag een relatief lage kD -waarde heeft (bijvoorbeeld door een kleine laagdikte, zie Fig. 26b) dan zal geen belangrijk horizontaal transport over wat grotere afstanden door deze laag kunnen ontstaan, maar wel zal in dergelijke gevallen door kleinere slootafstanden voor een vol-

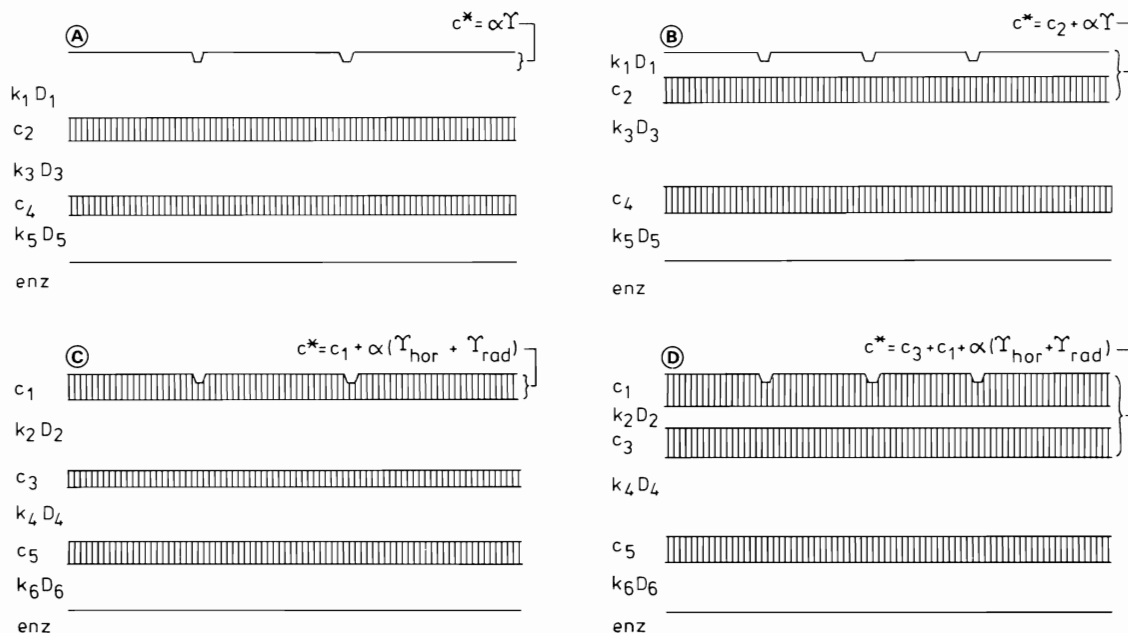


Fig. 26. Vervanging van de open waterlopen met radiale stroming (discrete invoer of uitvoer) door een fictieve slecht doorlatende bovenlaag met verticale weerstand c^* (diffuse invoer of uitvoer)
A. een goed doorlatende bovenlaag met relatief hoge waarde van $k_1 D_1$; B. een goed doorlatende bovenlaag met relatief lage waarde van $k_1 D_1$; C. een slecht doorlatende bovenlaag met relatief hoge waarde van $k_2 D_2$; D. een slecht doorlatende bovenlaag met relatief lage waarde van $k_2 D_2$

doende afvoer van het neerslagoverschot en eventueel de kwel worden verzorgd. Een verdere vereenvoudiging van de asymmetrische deeloplossing is dan mogelijk door weglating van $k_1 D_1$ en door gebruik van de volgende formule voor de c-waarde van de bovenlaag:

$$c^* = c_2 + \alpha T \quad (188)$$

Deze vereenvoudiging heeft als bijkomend voordeel dat de oplossing van de wortels λ_k weer wat eenvoudiger wordt en dat ook de verdere vergelijkingen minder omvangrijk worden.

In die gevallen dat de bovenlaag slecht doorlatend is en $k_2 D_2$ niet zeer klein is (Fig. 26c), verandert de uitdrukking voor c^* maar weinig:

$$c^* = c_1 + \alpha(T_{\text{hor}} + T_{\text{rad}}) \quad (189)$$

Enige vereenvoudiging is hierin mogelijk voor zover $k_2 > 10 k_1$ en $D_2 > D_1$:

$$c^* = \frac{D_1}{k_1} + \alpha \left(\frac{L^2}{8k_2 D_2} + \frac{L}{\pi k_1} \ln \frac{4D_1}{B_{\text{wp}}} \right)$$

$$= \frac{L}{k_1} \left(\frac{D_1}{L} + \frac{\alpha k_1 L}{8k_2 D_2} + \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{4D_1}{B_{\text{wp}}} \right) \quad (190)$$

Daar in (190) de laatste term tussen de haken verreweg de grootste is, kan hiervoor ten slotte worden geschreven:

$$c^* \approx \frac{L}{\pi k_1} \ln \frac{4D_1}{B_{\text{wp}}} = L\Omega \quad (191)$$

Analoog aan de overgang van (187) naar (188) kan bij kleine waarden van $k_2 D_2$ (Fig. 26d) deze laag worden weggelaten, wat inhoudt dat aan (189), (190) en (191) een term c_3 moet worden toegevoegd. Dit houdt in dat bijvoorbeeld formule (191) overgaat in:

$$c^* = c_3 + L\Omega \quad (192)$$

Vervolgens dient echter te worden nagegaan in hoeverre hiermee het horizontale transport door de bovenlaag, vooral in het geval van Fig. 26a en in wat mindere mate voor Fig. 26c, goed kan worden weergegeven. De vervanging van een discrete invoer of uitvoer (via de open leidingen) door een diffuse invoer of uitvoer (via elk punt van de grondwaterspiegel) moet een zekere verandering met zich brengen. Een vrij uitputtende behandeling van dit probleem is nog niet ondernomen, maar een eerste indruk van de onnauwkeurigheden die kleven aan de methode met diffuse uittrekking van de kwel c.q. diffuse invoer van de wegzijging kan worden verkregen door toepassing op twee zeer eenvoudige gevallen die zo weinig van elkaar verschillen dat zij met vrijwel gelijke formules zijn te behandelen.

Het eerste geval betreft de grondwaterstroming door een homogeen pakket vanuit een half-oneindig gebied met hoge peilen van het open water naar een half-oneindig gebied met lage peilen. Het tweede geval verschilt hiervan slechts doordat er twee lagen zijn, te weten een slecht doorlatende laag boven een goed doorlatende laag (Fig. 27).

Volgens de methode die in voorgaande hoofdstukken werd gebruikt, wordt een lineaire relatie $\phi_j = a_j x + b_j$ verkregen voor de stijghoogte van het water in de goed doorlatende laag. Wegens het lineaire karakter van alle ϕ_j zijn voor de oplossing om te beginnen alleen de waarden van ϕ verticaal onder de open leidingen van belang. Formule (174) kan nu in de volgende vorm worden gebracht. Hierbij is overal een index d toegevoegd en de niet-relevante index i weggelaten.

$$kD \frac{\phi_{d(j-1)} + \phi_{d(j+1)} - 2\phi_{dj}}{L} = \frac{\phi_{dj} - h_d}{\Omega} \quad (193)$$

Wegens het feit dat zowel gebied A als gebied B zich in een richting tot in het oneindige uitstrekken, is er een constante verhouding η voor alle opeenvolgende ϕ_{dj} -waarden ten opzichte van het peil van het open water.

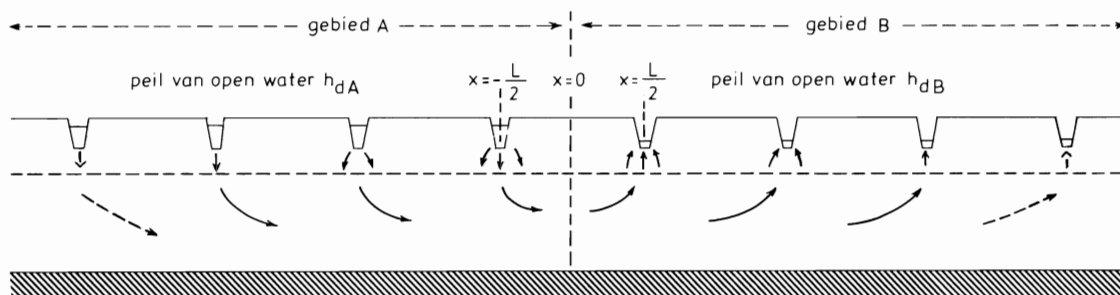


Fig. 27. Grondwaterstroming door een twee-lagen-pakket van een gebied A met hoog slooppeil h_{dA} naar een gebied B met laag slooppeil h_{dB}

Voor het hoge gebied: $\frac{h_{dA} - \phi_{d(j-1)}}{h_{dA} - \phi_{dj}} = \eta$ (194)

Voor het lage gebied: $\frac{\phi_{d(j+1)} - h_{dB}}{\phi_{dj} - h_{dB}} = \eta$ (195)

Wordt vervolgens voor de verhouding tussen T_{hor} en T_{rad} de volgende bekortende substitutie ingevoerd:

$$\frac{T_{rad}}{T_{hor}} = L\Omega \frac{8kD}{L^2} = \frac{8kD\Omega}{L} = \nu$$
 (196)

dan volgt zowel door substitutie van (194) en (196) in (193) als door substitutie van (195) en (196) in (193):

$$\frac{\nu}{8} (\eta + \frac{1}{\eta} - 2) = 1$$
 (197a)

ofwel:

$$\eta^2 - (2 + \frac{8}{\nu})\eta + 1 = 0$$
 (197b)

ofwel:

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\nu} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\nu} + 1}$$
 (197c)

Wordt het lineaire verloop van $\phi(x)$ tussen $x = 0$ en $x = 0,5L$ naar links geëxtrapoleerd tot $x = -0,5L$, dan volgt daaruit:

$$\phi(-0,5L) + \phi(0,5L) = 2\phi(0)$$
 (198)

Door een gelijksoortige substitutie als bij (193) volgt nu:

$$(\frac{1}{\eta} + 1)\{\phi(0,5L) - h_{dB}\} = 2\{\phi(0) - h_{dB}\}$$
 (199)

Hieruit kan onmiddellijk worden afgeleid dat voor het lage gebied alle waarden van ϕ_{dj} met behulp van de volgende formule kunnen worden gevonden, waarbij aan de eerste leiding in het lage gebied de index $j = 1$ wordt toegekend:

$$\phi_{dj} - h_{dB} = \eta^{j-1} \{\phi(0,5L) - h_{dB}\} = \frac{2\eta^j}{1 + \eta} \{\phi(0) - h_{dB}\}$$
 (200)

Met behulp van (199) kan voor de horizontale stroomsterkte bij $x = 0$ de volgende uitdrukking worden gevonden:

$$q(0) = \frac{kD}{L} \{\phi(0) - h_{dB}\} \frac{2(1 - \eta)}{1 + \eta}$$
 (201)

Het is vervolgens niet moeilijk om soortgelijke formules af te leiden voor de stroming tussen een hoger en een lager gebied met in het hoge gebied een horizontale grondwaterspiegel in niveau gelijk aan het werkelijke slootpeil h_{dA} en evenzo in het lage gebied een horizontale grondwaterspiegel h_{dB} . Het profiel bestaat in dit geval uit twee lagen en wel een bovenlaag met verticale weerstand c^* (zie formule 187 ... 192) en daaronder een goed doorlatende laag met doorlaatvermogen kD (Fig. 28). De volgende formules zijn bedoeld voor het lage gebied. Het behoeft geen toelichting dat de formules voor het hoge gebied hiervan zeer weinig verschillen.

$$\phi^*(x) - h_{dB} = \{\phi^*(0) - h_{dB}\} e^{-\frac{x}{\sqrt{kD\alpha T}}}$$
 (202)

De noemer van de exponent van de e-macht in (202) kan op de volgende manier wat handzamer worden geschreven:

$$\begin{aligned} \sqrt{kD\alpha T} &= L\sqrt{\frac{kD}{L^2} \alpha (\frac{L^2}{8kD} + L\Omega)} = \\ &= L\sqrt{0,125\alpha(1 + \nu)} \approx L\sqrt{0,1(1 + \nu)} \end{aligned}$$
 (203)

Uit (202) en (203) volgt nu onmiddellijk:

$$\eta^* = e^{-\frac{L}{\sqrt{kD\alpha T}}} = e^{-\frac{1}{\sqrt{0,125\alpha(1 + \nu)}}}$$
 (204)

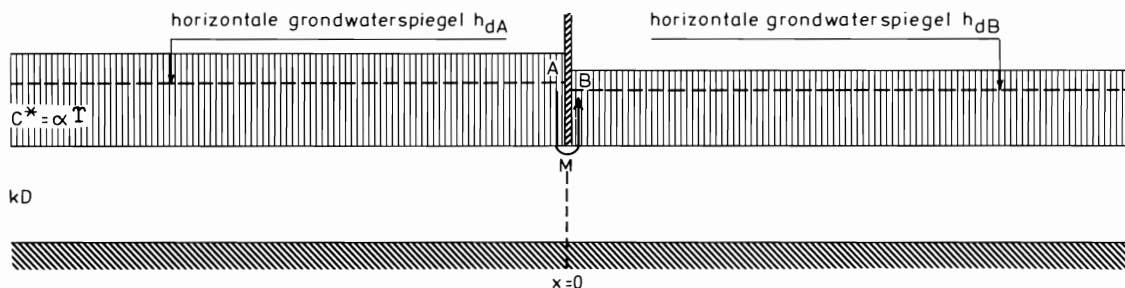


Fig. 28. Schematische voorstelling ter vervanging van Fig. 27. In deze figuur wordt verondersteld dat bij $x = 0$ in de bovenlaag een verticaal ondoorlatend vlak voorkomt met dikte = 0

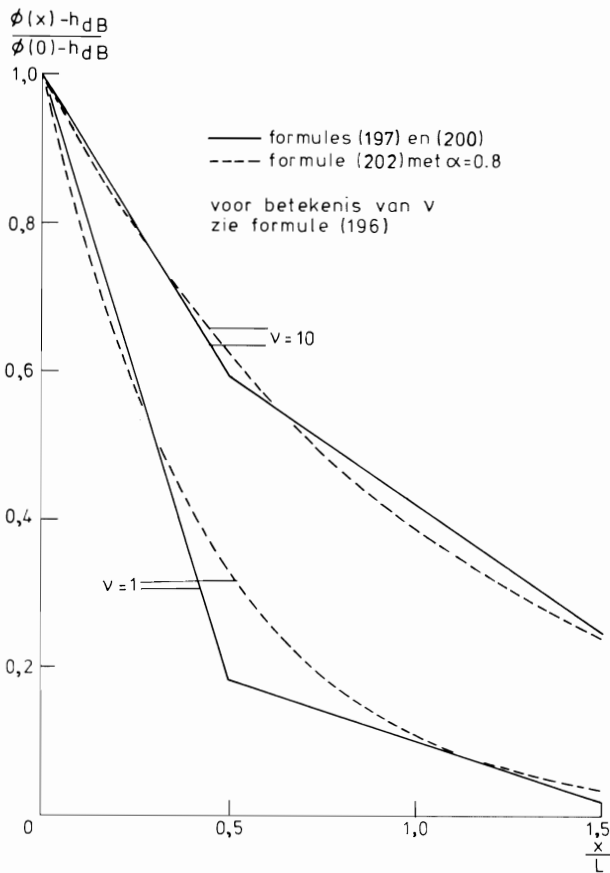


Fig. 29. Toepassing van de formules (197) en (200) tegenover formule (202) met $\alpha = 0,8$ op twee bijzondere gevallen, respectievelijk met $\nu = 1$ en met $\nu = 10$

$$q^*(0) = \frac{kD\{\phi^*(0) - h_{dB}\}}{\sqrt{kD\alpha T}} = \frac{kD\{\phi^*(0) - h_{dB}\}}{L\sqrt{0,125 \alpha(1 + \nu)}} \quad (205)$$

Met behulp van voorgaande formules kan men gemakkelijk nagaan hoe groot de verschillen zijn tussen de beide methoden. Daaruit volgt een goede overeenstemming voor $\nu > 10$ en een vrij bevredigende benadering voor $1 < \nu < 10$. Fig. 29 geeft hiervan twee voorbeelden.

Voor waarden van $\nu < 1$ ontstaan vrij belangrijke verschillen. Men kan met behulp van formule (197) uit de bijbehorende waarde van η afleiden dat in dergelijke gevallen de twee open leidingen bij $x = -0,5L$ en $x = +0,5L$ minstens 90% van de totale stroming leveren c.q. ontvangen. Dit houdt dus in dat buiten dit centrale gebied het aandeel van de stroming maar van heel weinig belang is.

Het slechte resultaat dat onder sommige omstandigheden door de vereenvoudigde methode wordt verschaft, kan in hoofdzaak hierdoor worden verklaard dat er een zeer korte verbindingsweg is tussen het hoge peil en het lage peil: zie stroomlijn AMB in Fig. 28.

Uit het bovenstaande wordt duidelijk dat buiten het centrale gebied ($-\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}$) het aandeel van de stroming van minder belang is naarmate ν kleiner is. Indien bij $\nu < 1$ naar een nauwkeurige bepaling van de stroming wordt gestreefd, dan zou ook een gedetailleerde kennis van de smalle grensstrook beschikbaar moeten zijn. Dit laatste laat in de praktijk dikwijls te wensen over.

Bij de vergelijking van de stroming in Fig. 27 met de stroming in Fig. 28 is het probleem buiten de eigenlijke context geplaatst. Het gaat immers om de wegzijging in het hoge gebied en de kwel in het lage gebied, welke stroming vooral ontstaat omdat een vrij dik gelaagd pakket een belangrijk horizontaal transport mogelijk maakt en dit over veel grotere afstanden dan wat bij het twee-lagenprobleem bij kleine waarden van ν nodig bleek te zijn. In dergelijke gevallen is er dus reden om de fouten die in een bovenste goed doorlatende laag met relatief kleine kD -waarde worden gemaakt, als van weinig belang te beschouwen wegens het veel sterkere horizontale transport door de diepere goed doorlatende lagen. Deze laatste afweging geldt natuurlijk niet in die gevallen dat juist de ondiepe stroming in de bovenlaag een belangrijk onderdeel van het probleem is, bijvoorbeeld bij transport van opgeloste stoffen door de grondwaterstroming in de grensstrook van het hoge naar het lage gebied.

De vraag of de voorgestelde vereenvoudigende methode aanvaardbaar is, zal verder buiten beschouwing blijven. Een en ander hangt immers af van de geohydrologische gesteldheid van het gebied dat onderzocht moet worden, verder van de beschikbare kennis omtrent dit gebied en van de aard van de problemen, bovendien van de rekentechnische mogelijkheden, van de gewenste nauwkeurigheid en misschien nog andere factoren.

Toepassing van deze vereenvoudigende methode b.v. op de toestand afgebeeld in Fig. 25 leidt tot een vervanging van deze figuur door Fig. 30. Daarbij wordt het twijfelachtige afsluiten van de beide uiterste gebieden in Fig. 25 vermeden. In Fig. 30 wordt een voortzetting tot in het oneindige verondersteld van de homogene buitengebieden $j = 1$ met slootpeil h_{d1} en $j = 3$ met slootpeil h_{d3} . Handhaving van precies dezelfde gebiedsbreedten als in Fig. 25 zou de omvang van het rekenwerk slechts weinig doen toenemen. Een dergelijke herhaling geeft de mogelijkheid om vrij snel enig inzicht te verkrijgen in de invloed, die de omvang van het beschouwde gebied op de uitkomsten heeft.

Voor de diverse lagen en deelgebieden afgebeeld in Fig. 30 kan formule (154) als volgt worden uitgeschreven:

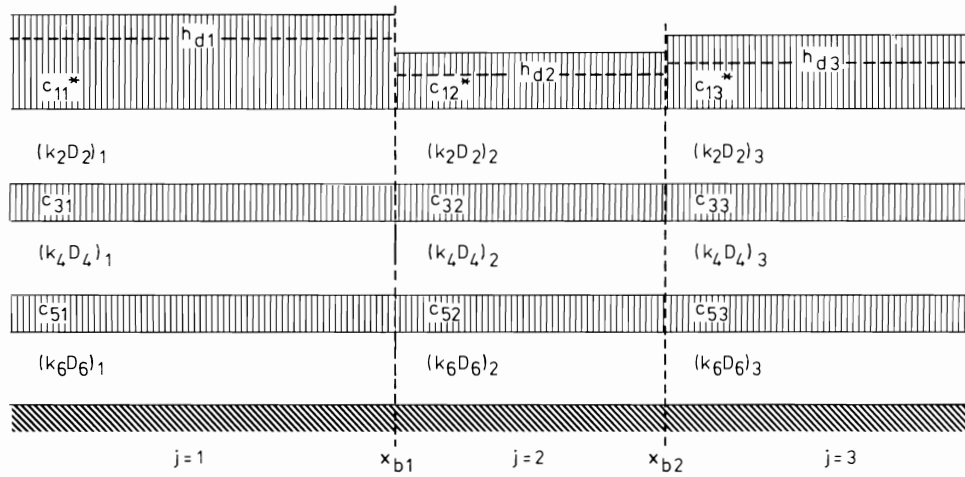


Fig. 30. Vereenvoudiging zoals voorgesteld in Fig. 26C, toegepast op Fig. 25

$$\phi_{21}''(x) - h_{d1}'' = \beta_{211} B_{11} e^{\frac{x}{\lambda_{11}}} + \beta_{212} B_{12} e^{\frac{x}{\lambda_{12}}} + \beta_{213} B_{13} e^{\frac{x}{\lambda_{13}}} \quad (206)$$

$$\phi_{41}''(x) - h_{d1}'' = \beta_{411} B_{11} e^{\frac{x}{\lambda_{11}}} + \beta_{412} B_{12} e^{\frac{x}{\lambda_{12}}} + \beta_{413} B_{13} e^{\frac{x}{\lambda_{13}}} \quad (207)$$

$$\phi_{61}''(x) - h_{d1}'' = \beta_{611} B_{11} e^{\frac{x}{\lambda_{11}}} + \beta_{612} B_{12} e^{\frac{x}{\lambda_{12}}} + \beta_{613} B_{13} e^{\frac{x}{\lambda_{13}}} \quad (208)$$

$$\phi_{22}''(x) - h_{d2}'' = \beta_{221} (A_{21} e^{-\frac{x}{\lambda_{21}}} + B_{21} e^{\frac{x}{\lambda_{21}}}) + \beta_{222} (A_{22} e^{-\frac{x}{\lambda_{22}}} + B_{22} e^{\frac{x}{\lambda_{22}}}) + \beta_{223} (A_{23} e^{-\frac{x}{\lambda_{23}}} + B_{23} e^{\frac{x}{\lambda_{23}}}) \quad (209)$$

$$\phi_{42}''(x) - h_{d2}'' = \beta_{421} (A_{21} e^{-\frac{x}{\lambda_{21}}} + B_{21} e^{\frac{x}{\lambda_{21}}}) + \beta_{422} (A_{22} e^{-\frac{x}{\lambda_{22}}} + B_{22} e^{\frac{x}{\lambda_{22}}}) + \beta_{423} (A_{23} e^{-\frac{x}{\lambda_{23}}} + B_{23} e^{\frac{x}{\lambda_{23}}}) \quad (210)$$

$$\phi_{62}''(x) - h_{d2}'' = \beta_{621} (A_{21} e^{-\frac{x}{\lambda_{21}}} + B_{21} e^{\frac{x}{\lambda_{21}}}) + \beta_{622} (A_{22} e^{-\frac{x}{\lambda_{22}}} + B_{22} e^{\frac{x}{\lambda_{22}}}) + \beta_{623} (A_{23} e^{-\frac{x}{\lambda_{23}}} + B_{23} e^{\frac{x}{\lambda_{23}}}) \quad (211)$$

$$\phi_{23}''(x) - h_{d3}'' = \beta_{231} A_{31} e^{-\frac{x}{\lambda_{31}}} + \beta_{232} A_{32} e^{-\frac{x}{\lambda_{32}}} + \beta_{233} A_{33} e^{-\frac{x}{\lambda_{33}}} \quad (212)$$

$$\phi_{43}''(x) - h_{d3}'' = \beta_{431} A_{31} e^{-\frac{x}{\lambda_{31}}} + \beta_{432} A_{32} e^{-\frac{x}{\lambda_{32}}} + \beta_{433} A_{33} e^{-\frac{x}{\lambda_{33}}} \quad (213)$$

$$\phi_{63}''(x) - h_{d3}'' = \beta_{631} A_{31} e^{-\frac{x}{\lambda_{31}}} + \beta_{632} A_{32} e^{-\frac{x}{\lambda_{32}}} + \beta_{633} A_{33} e^{-\frac{x}{\lambda_{33}}} \quad (214)$$

Hierbij wordt het dubbele accent gebruikt omdat het om de tweede deeloplossing gaat. Aan de indices wordt de volgende betekenis toegekend:

ϕ_{ij} = stijghoogte in laag i in gebied j
 h_{dj} = peil van de open waterlopen c.q. niveau van de grondwaterspiegel in gebied j

λ_{jk} = wortel k van formule (153) - eventueel (161), (162) of (163) - toegepast op gebied j
 β_{ijk} = coëfficiënt voor laag i behorende bij wortel λ_{jk} en te bepalen met behulp van (155), (156) of (157)

Nu blijft nog over de bepaling van de coëfficiënten A_{jk} en B_{jk} . In het beschouwde geval (Fig. 30) is een half-oneindige uitgestrektheid aangenomen voor het linker gebied en voor het rechter gebied. Daardoor worden A_{11} , A_{12} , A_{13} , B_{31} , B_{32} en B_{33} gelijk nul en komen deze coëfficiënten niet voor in de formules (206 ... (214). Er blijven 12 onbekende coëfficiënten A_{jk} , B_{jk} over, die bepaald kunnen worden door substitutie van (206) ... (214) in de volgende randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \phi_{21}''(x_{b1}) - \phi_{22}''(x_{b1}) &= \phi_{22}'(x_{b1}) - \phi_{21}'(x_{b1}) = \\ &= -\Delta\phi_2(x_{b1}) \end{aligned} \quad (215)$$

$$(k_2D_2)_1 \left(\frac{d\phi_{21}''}{dx}\right)_{x_{b1}} = (k_2D_2)_2 \left(\frac{d\phi_{22}''}{dx}\right)_{x_{b1}} \quad (216)$$

$$\begin{aligned} \phi_{41}''(x_{b1}) - \phi_{42}''(x_{b1}) &= \phi_{42}'(x_{b1}) - \phi_{41}'(x_{b1}) = \\ &= -\Delta\phi_4(x_{b1}) \end{aligned} \quad (217)$$

$$(k_4D_4)_1 \left(\frac{d\phi_{41}''}{dx}\right)_{x_{b1}} = (k_4D_4)_2 \left(\frac{d\phi_{42}''}{dx}\right)_{x_{b1}} \quad (218)$$

$$\begin{aligned} \phi_{61}''(x_{b1}) - \phi_{62}''(x_{b1}) &= \phi_{62}'(x_{b1}) - \phi_{61}'(x_{b1}) = \\ &= -\Delta\phi_6(x_{b1}) \end{aligned} \quad (219)$$

$$(k_6D_6)_1 \left(\frac{d\phi_{61}''}{dx}\right)_{x_{b1}} = (k_6D_6)_2 \left(\frac{d\phi_{62}''}{dx}\right)_{x_{b1}} \quad (220)$$

$$\begin{aligned} \phi_{22}''(x_{b2}) - \phi_{23}''(x_{b2}) &= \phi_{23}'(x_{b2}) - \phi_{22}'(x_{b2}) = \\ &= -\Delta\phi_2(x_{b2}) \end{aligned} \quad (221)$$

$$(k_2D_2)_2 \left(\frac{d\phi_{22}''}{dx}\right)_{x_{b2}} = (k_2D_2)_3 \left(\frac{d\phi_{23}''}{dx}\right)_{x_{b2}} \quad (222)$$

$$\begin{aligned} \phi_{42}''(x_{b2}) - \phi_{43}''(x_{b2}) &= \phi_{43}'(x_{b2}) - \phi_{42}'(x_{b2}) = \\ &= -\Delta\phi_4(x_{b2}) \end{aligned} \quad (223)$$

$$(k_4D_4)_2 \left(\frac{d\phi_{42}''}{dx}\right)_{x_{b2}} = (k_4D_4)_3 \left(\frac{d\phi_{43}''}{dx}\right)_{x_{b2}} \quad (224)$$

$$\begin{aligned} \phi_{62}''(x_{b2}) - \phi_{63}''(x_{b2}) &= \phi_{63}'(x_{b2}) - \phi_{62}'(x_{b2}) = \\ &= -\Delta\phi_6(x_{b2}) \end{aligned} \quad (225)$$

$$(k_6D_6)_2 \left(\frac{d\phi_{62}''}{dx}\right)_{x_{b2}} = (k_6D_6)_3 \left(\frac{d\phi_{63}''}{dx}\right)_{x_{b2}} \quad (226)$$

De betekenis van de nog niet verklaarde indices is als volgt:

- $(k_iD_i)_j$ = doorlaatvermogen van laag i in gebied j
- x_{b1} = waarde van x op de grens tussen de gebieden 1 en 2
- x_{b2} = waarde van x op de grens tussen de gebieden 2 en 3
- $-\Delta\phi_i(x_{b1})$ = compensatie voor de discontinuïteit in ϕ_i' bij x_{b1} (vergelijk hoofdstuk 10, formules 179 en 185)
- $-\Delta\phi_i(x_{b2})$ = compensatie voor de discontinuïteit in ϕ_i' bij x_{b2}

Uit het voorgaande blijkt dat behalve de berekening van de wortels λ_{jk} en de coëfficiënten β_{ijk} nu nog slechts een stelsel van 12 vergelijkingen van de eerste graad dient te worden opgelost om de zes coëfficiënten A_{jk} en de zes coëfficiënten B_{jk} te vinden. Dit betekent een aanzienlijke vermindering in vergelijking met wat nodig is bij een behandeling van het systeem afgebeeld in Fig. 25 (108 vergelijkingen).

Nu kan men nog verder gaan met vereenvoudigen, namelijk zoals aangegeven in de figuren 26B en D. De weglating van de bovenste watervoerende laag zou inhouden dat de wortels λ_{jk} uit tweede graadsvergelijkingen moeten worden opgelost in plaats van uit derde graadsvergelijkingen. Het aantal coëfficiënten A_{jk} en B_{jk} gaat terug naar acht. Een zeer grote vermindering van het rekenwerk brengt dit niet meer met zich mee.

Met laatstgenoemde vereenvoudiging worden minder uitkomsten verkregen (geen antwoord op de vraag naar het transport door de bovenste watervoerende laag) en ook een zekere verschuiving in de overige uitkomsten (minder nauwkeurigheid in de uitkomsten voor het horizontale transport in de diepere lagen?). Men kan zich echter ook afvragen in hoeverre betere uitkomsten kunnen worden verkregen door in een dergelijk geval het transport door de bovenste goed doorlatende laag afzonderlijk te beschouwen en daarbij waarden voor c_1 en k_2D_2 te gebruiken, die behoren bij een smalle strook langs de grenslijn (van $x = -0,5 L$ tot $x = 0,5 L$) en vervolgens voor de berekening van het diepere transport van waarden voor c_i en k_iD_i gebruik te maken, die als gemiddelde kunnen gelden voor een veel groter gebied.

Om van bovengenoemde afwijkingen een wat betere indruk te verkrijgen, zijn beide methoden (vereenvoudiging volgens Fig. 26C en volgens Fig. 26D) toegepast op de scheef-symmetrische toestand afgebeeld in Fig. 31. De uitkomsten van de berekeningen zijn weergegeven in de figuren 32 en 33. De uitkomsten blijken niet belangrijk te verschillen. Het is duidelijk dat de schematisering volgens Fig. 31C geen uitkomsten kan

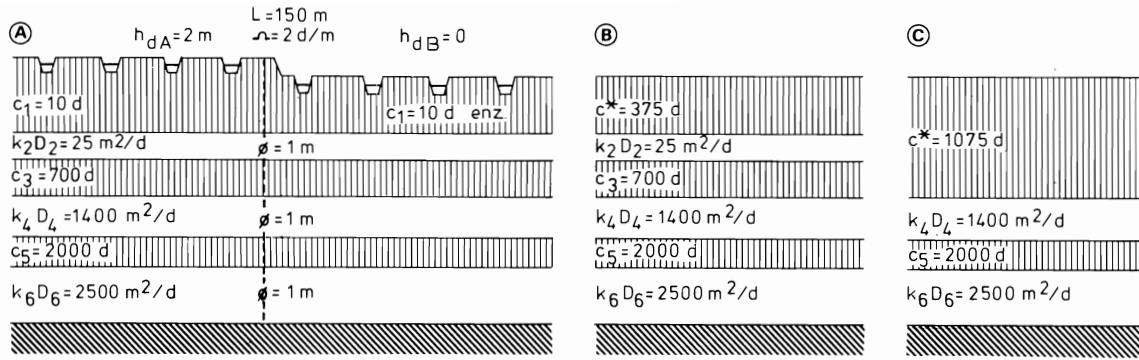


Fig. 31. Schematische voorstelling van een gebied, waarin een scheef-symmetrische grondwaterstroming plaatsvindt van een hoger naar een lager gebied door een pakket bestaande uit zes lagen, waarbij de tweede laag een relatief lage kD -waarde heeft. A. de werkelijke toestand; B. de vereenvoudiging volgens Fig. 26C; C. de vereenvoudiging volgens Fig. 26D

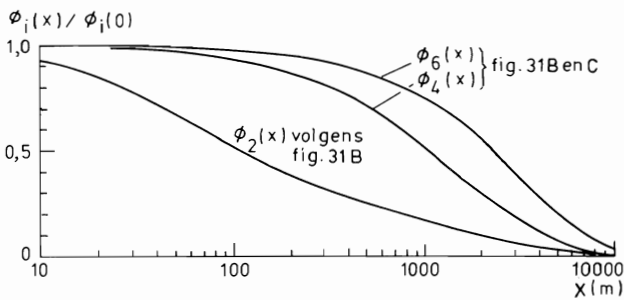


Fig. 32. De stijghoogten $\phi_2(x)$, $\phi_4(x)$ en $\phi_6(x)$ behorende bij Fig. 31. De uitkomst voor $\phi_2(x)$ is berekend met behulp van het schema gegeven in Fig. 31B. Voor $\phi_4(x)$ en $\phi_6(x)$ zijn de verschillen tussen de uitkomsten volgens Fig. 31B dan wel volgens Fig. 31C zo klein, dat het niet mogelijk was het bij de gebruikte schaal in deze figuur te tonen: de uitkomsten zijn praktisch aan elkaar gelijk

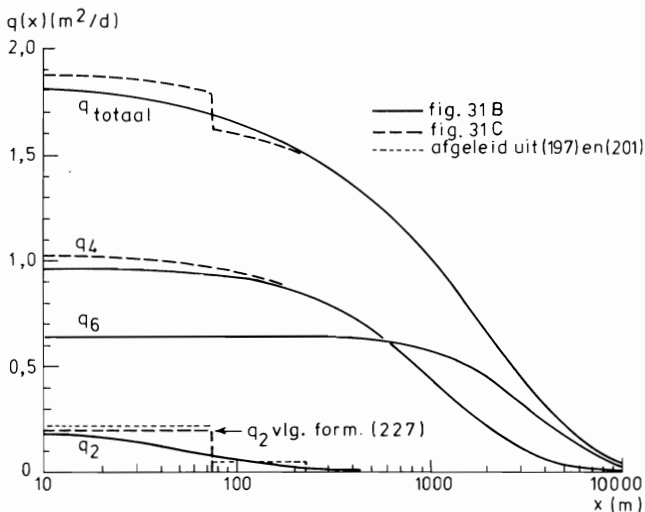


Fig. 33. Berekende uitkomsten voor de horizontale stroomsterkten q_i in Fig. 31 in afhankelijkheid van de horizontale coördinaat x
 $q_{\text{totaal}} = q_2 + q_4 + q_6$

leveren voor $\phi_2(x)$ en $q_2(x)$. Men kan echter voor de overgangsstrook een afzonderlijke benadering geven voor $q_2(x)$ en wel op de volgende manier:

$$q_2 = \frac{h_{dA} - h_{dB}}{\frac{L}{k_2 D_2} + 2\Omega} \quad \text{voor } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \quad (227)$$

Evenzo is het duidelijk dat tegen de uitkomst voor $\phi_2(x)$ volgens Fig. 32 enige bezwaren kunnen worden ingebracht. De parameter $\nu = 8kD\Omega/L$ die in de formules (197), (203), (204) en (205) voorkomt, heeft hier de waarde $8/3$.

Deze waarde van de parameter ν (vergelijk Fig. 29) zou reden kunnen zijn om toch de uitvoerige rekenmethode toe te passen. Nu blijkt echter dat als men een gebied in de berekening zou willen betrekken tot waar volgens Fig. 33 de totale horizontale stroomsterkte is teruggebracht tot 10% van $q(0)$, dat dit leidt tot $x = 6000 \text{ m}$ en daarmee zouden dan 40 sloten in de berekening moeten worden opgenomen. Om hieraan te ontkomen zou men een hybride schematisering kunnen toepassen zoals weergegeven in Fig. 34. Daarbij wordt de uitvoerige methode toegepast in een beperkt gebied met een klein aantal open leidingen. Dit hoeft niet verder te gaan dan de breedte van een zekere overgangsstrook, waarin $q_2(x)$ nog belangrijk is. Daarbuiten kan vervolgens worden gerekend met een diffuse instroming (in het hoge gebied) of een diffuse uitstroming (in het lage gebied) tussen de diepe goed doorlatende lagen en de grondwaterspiegel. De hoeveelheid rekenwerk kan hiermee in ieder geval nog aanzienlijk worden verminderd.

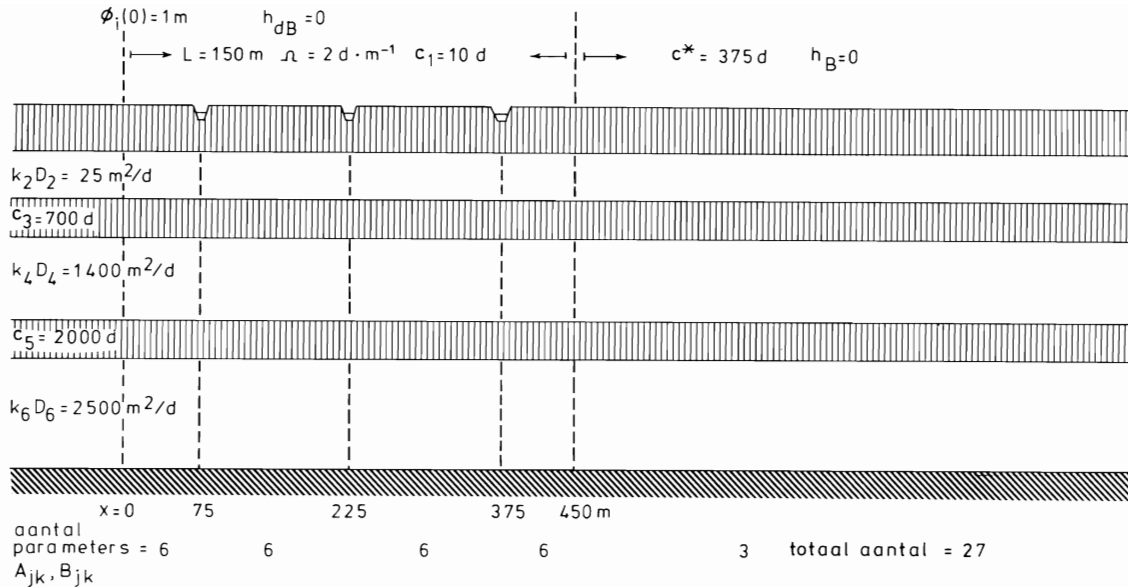


Fig. 34. Hybride schematisering voor de berekening van de grondwaterstroming in Fig. 31

12. SAMENVATTING EN CONCLUSIES

Overall waar hoge naast lage gebieden voorkomen of waar een bepaald gebied door een onregelmatig relief niet meer als bij benadering horizontaal mag worden beschouwd, kan over grote afstanden een meer of minder belangrijke grondwaterstroming voorkomen. De sterkte van de grondwaterstroming en de afmetingen van het gebied waarbinnen deze grondwaterstroming zich grotendeels ontwikkelt, hangen af van de grootte van de peilverschillen, van het doorlaatvermogen van het diepe pakket en van de verticale weerstand van de afdekkende lagen. Door de grote afstanden waarover de grondwaterstroming zich uitstrekt en door de vele waterlopen die daarbij betrokken kunnen zijn, ontstaat een probleem dat wat meer formules en rekenwerk met zich brengt dan wat meestal bij de zogenaamde symmetrische drainageproblemen in een horizontaal gebied voorkomt.

Om het rekenwerk wat overzichtelijk te houden, is het van belang het principe van het superponeren te kunnen toepassen. Dit houdt in dat de vorm van de grondwaterspiegel geen invloed mag hebben op doorlaatvermogen of weerstand. Alleen dan mag met lineaire formules en met constante coëfficiënten worden gewerkt. Dit brengt zelfs met zich dat als er twee gevallen zijn met tegengestelde randvoorwaarden, de grondwaterstroming in het ene geval en de omgekeerde grondwaterstroming in het andere geval met dezelfde formules en dezelfde parameterwaarden voor doorlaatvermogen en weerstanden mogen worden berekend.

Bedoelde problemen worden meestal aangeduid als grondwaterstromingen met wegzijging en kwel. Indien de intensiteit van wegzijging of kwel op een bepaalde plaats a priori is gegeven, dan mag een kleine omgeving van een dergelijk punt ook afzonderlijk worden beschouwd. Er kan immers in dit kleine gebied bij benadering een symmetrische grondwaterstroming worden verondersteld en daarbij kunnen formules worden ontwikkeld die weinig omvangrijker zijn dan bij de symmetrische afvoer van uitsluitend neerslagoverschot. In dergelijke gevallen is het ook niet moeilijk om een berekening te geven van de vorm van het scheidingsvlak tussen de grondwatermassa's afkomstig respectievelijk uit neerslagoverschot, kwel of opgestuwde open leidingen.

Wanneer het gaat om de gemiddelde intensiteit van wegzijging of kwel af te leiden en vooral wanneer het gaat om de afhankelijkheid van de plaats te berekenen, wordt het probleem aanzienlijk ingewikkelder. Wordt echter verondersteld dat alle open leidingen evenwijdig zijn (dit wordt immers ook gedaan bij de gewone symmetrische drainageformules) en wordt verder verondersteld dat er een afwisseling is van goed doorlatende en slecht doorlatende lagen met een horizontale stroming in de goed doorlatende lagen en een verticale stroming in de slecht doorlatende lagen, dan kan een stelsel formules worden ontwikkeld (hoofdstukken 9, 10 en 11) dat met het daaraan verbonden rekenwerk nog goed hanteerbaar is.

De overzichtelijkheid van het rekenwerk kan in het algemeen worden bevorderd door gebruik te maken van het superponeren. Het voordeel daarvan is dat men

de behandeling van het onderhavige probleem in stukken kan verdelen, zodanig dat elke deeloplossing slechts één van de aspecten van het probleem behoeft te bevatten. Men kan met deze opsplitsing zeer ver gaan, maar in vele gevallen is een opsplitsing in twee delen voldoende.

Zo kan men beginnen met een symmetrische component van de grondwaterstroming in elk onderdeel van het beschouwde gebied te onderscheiden, waarbij telkens de gegeven waarden dienen te worden ingevoerd voor de invoer U_f door het freatisch oppervlak en voor de slootpeilen h_{d_j} . Dit houdt in dat deze symmetrische deeloplossingen niet overal op de juiste manier aan elkaar sluiten, maar dat daarin foutieve stijghoogtesprongen $\Delta\phi$ voorkomen. Vervolgens kan men een tweede deeloplossing zoeken met $U_f = 0$ en $h_d = 0$, echter met invoering van stijghoogtesprongen $-\Delta\phi$ op die plaatsen waar in de eerste deeloplossing de tegengestelde stijghoogtesprongen $\Delta\phi$ voorkomen, zodanig dat beide fouten elkaar opheffen.

De uitvoering van het rekenwerk bij deze tweede deeloplossing bestaat, evenals in het algemene geval dat geen splitsing wordt aangebracht, uit de volgende drie delen:

- a. de oplossing van de coëfficiënten λ_k behorende bij $\exp(\pm x/\lambda_k)$ met behulp van een vergelijking van de m^e -graad, waarbij m gelijk is aan het aantal slecht doorlatende lagen (hoofdstuk 9);
- b. de berekening van een stelsel coëfficiënten β_{ik} . Deze coëfficiënten hangen af van de waarden voor $k_i D_i$ en c_i in een bepaald deelgebied en bovendien van λ_k . Ze zijn onafhankelijk van de aangrenzende deelgebieden (hoofdstuk 9);
- c. de oplossing van een dikwijls vrij omvangrijk stelsel van eerste graadsvergelijkingen. Het aantal formules is gelijk te stellen aan $2nJ$ of $2n(J-1)$, waarbij n het aantal goed doorlatende lagen voorstelt en J het aantal deelgebieden. Op elk gemeenschappelijk grensvlak moeten immers n randvoorwaarden voor de stijghoogte en n randvoorwaarden voor de horizontale stroomsterkte worden toegepast. Hiermee wordt verkregen dat alle deelgebieden op de juiste manier aan elkaar sluiten (zie hoofdstuk 10 en begin hoofdstuk 11).

Ten slotte is het mogelijk in die gevallen dat een zeer groot aantal waterlopen in het probleem moet worden betrokken en men dus een zeer groot aantal deelgebieden zou moeten onderscheiden, tot een nog verdere schematisering over te gaan. Dit kan namelijk gebeuren door in plaats van een discrete invoer of uitvoer door de open leidingen te veronderstellen dat er een diffuse invoer of uitvoer is door een

slecht doorlatende bovenlaag met fictieve c^* -waarde, welke waarde met vrij eenvoudige middelen is te bepalen (hoofdstuk 11).

Deze vereenvoudiging kan vooral worden aanvaard indien het transport door de bovenste watervoerende laag relatief onbelangrijk is. Het is duidelijk dat dit lang niet altijd het geval behoeft te zijn en tevoren zal dit ook dikwijls onbekend zijn. Deze moeilijkheid kan echter grotendeels worden opgevangen door invoering van een hybride schematisering (een voorbeeld hiervan wordt gegeven in Fig. 34 als vervanging van de rechterhelft van Fig. 31A).

LITERATUUR

- BURINGTON, R.S., 1973. Handbook of mathematical tables and formulas. Mac Graw-Hill Book Company, New York. 5th edition. 500 pp.
- DWIGHT, H.B., 1957. Tables of integrals and other mathematical data. The Mac Millan Company, New York, London.
- ERNST, L.F., 1962. Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij aanwezigheid van horizontale evenwijdige open leidingen. Proefschrift Rijksuniversiteit Utrecht. 189 pp. (ook Versl. Landbouwk. Onderz. nr. 67.15, Pudoc, Wageningen).
- , 1978. Drainage of undulating sandy soils with high groundwater tables. I. A drainage formula based on a constant hydraulic head ratio. II. The variable hydraulic head ratio. J. Hydrol. 39,3/4: 1-50. Techn. Bull. ICW 106.
- , 1979. Second and third degree equations for the determination of the spacings between parallel drainage channels. Proc. Int. Drainage Workshop, Wageningen, 16-20 May 1978: 85-107. Publ. 2 International Institute for Land Reclamation and Improvement.
- LOONSTRA, F., 1958. Inleiding tot de algebra. P. Noordhof, Groningen.
- SPIEGEL, M.R., 1968. Mathematical handbook of formulas and tables. Schaum's outline series. Mac Graw-Hill Book Company, New York.
- WIJDENES, P., 1957. Middel-algebra, deel I. P. Noordhof, Groningen.
- ZURMÜHL, R., 1961. Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer Verlag, Berlin.

ALGEMENE SYMBOLEN

- B_{wp} = natte omtrek van open leiding
- c = verticale weerstand = D/k
- D = laagdikte
- E = verdamping
- H = verticale afstand tussen grensvlak en grondwaterspiegel (zie Fig. 20)
- h = hoogte van de grondwaterspiegel
- k = doorlaatfactor
- L = afstand tussen evenwijdige open leidingen
- N = neerslagoverschot = $P - E$
- P = neerslag
- q = intensiteit van de horizontale stroming per strekkende meter van de open leiding
- r = straal, radius
- U = specifieke afvoer
- v = filtersnelheid, specifiek debiet
- x = horizontale coördinaat
- y = horizontale coördinaat loodrecht op x
- z = verticale coördinaat
- α = vormfactor (zie pag. 4 en hoofdstuk 6)
- T = drainageweerstand
- Ω = radiale weerstand
- ϕ = stijghoogte