

INSTITUUT VOOR CULTUURTECHNIEK EN WATERHUISHOUDING

NOTA 267, d.d. 15 augustus 1964

Gebruik van enige basisformules bij het kwelonderzoek  
in Nederlandse polders in afhankelijkheid  
van beschikbare gegevens

dr. L. F. Ernst

---

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten.

Aan gebruikers buiten het Instituut wordt verzocht ze niet in publikaties te vermelden.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking.

---



## 1. De eenvoudigste afbeelding van een kwelstroming in het verticale vlak

Voor een eerste oriëntatie wordt bij het kwelonderzoek veelvuldig gebruik gemaakt van de volgende formule:

$$h(x) - h_p = ae^{\frac{x}{\lambda}} + be^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (1)$$

- met  $h$  stijghoogte van het grondwater in het diepe grove pakket  
 $x$  afstand tot de zeedijk of grens van twee polders  
 $h_p$  polderpeil  
 $\lambda$  spreidingslengte =  $\sqrt{kDc}$   
 $k$  doorlatendheid van het grove pakket  
 $D$  dikte van het grove pakket  
 $c$  verticale weerstand van de afdekkende laag  
 $a, b$  nader te bepalen constanten, welke nodig zijn om aanpassing aan de randvoorwaarden te verkrijgen.

Bij de afleiding van deze formule zijn enkele vereenvoudigende veronderstellingen gebruikt. Om te beginnen werd aangenomen dat het gebied met inzijging en het gebied met kwel door een lange rechte grens worden gescheiden, zodat een afbeelding in het verticale vlak loodrecht op deze grens kan worden aanvaard. Verder werd aangenomen, dat de ondergrond van het betrokken gebied (deel van het gebied) het Hollandse profiel heeft met constante waarden voor  $kD$  en  $c$ , en dat aldaar ook het polderpeil  $h_p$  constant is. Bij een voldoende groot verschil in doorlatendheid tussen grove laag en afdekkende laag kan worden aangetoond, dat de stroming in de bovenste laag grotendeels verticaal, in de onderste laag grotendeels horizontaal is.

Daar  $h(x)$  kan worden beschouwd als een potentiaalverdeling op een horizontale rechte lijn en dit ook voor  $h_p$  op een (andere) horizontale lijn in hetzelfde verticale vlak kan worden aangenomen, heeft men hier feitelijk te doen met een vereenvoudiging tot een 1-dimensionaal verschijnsel. Een dergelijke toestand kan men nog vervangen door een stelsel lineaire vergelijkingen (zie bijv. ERNST, 1956; de behandeling in deze publikatie komt hiermee overeen door  $Lw = c$  te stellen), of door een elektrisch model (gelijkstroom) bestaande uit een reeks normaalweerstandjes voor de horizontale stroming en in elk contactpunt een nevenweerstand voor de verticale stroming.

2. Een oplossing voor de stijghoogteverdeling van de kwelstroming in een horizontaal vlak bij aanneming van het Hollandse profiel

In vele gevallen moet bovenstaande schematisering als minder gewenst worden beschouwd. Zo worden bijvoorbeeld bij het huidige onderzoek van het Delta-gebied in zuid-west Nederland betrekkelijk grote eilanden in hun geheel beschouwd. Daarbij zijn de onregelmatige regionale eigenschappen van een zodanige invloed dat de opgegeven formule in het algemeen alleen voor de naaste omgeving van een lange rechte zeedijk of poldergrens als een redelijke benadering wordt beschouwd.

In die gevallen, dat men wel het Hollandse profiel met horizontale stroming in de goed doorlatende laag en verticale stroming in de slecht doorlatende laag kan aanvaarden, maar niet meer uitsluitend een afbeelding in een enkel verticaal vlak loodrecht op de zeedijk, is het nodig twee coördinaten te gebruiken voor de aanduiding van alle punten in het horizontale vlak.

Maakt men gebruik van de Cartesiaanse coördinaten  $x$  en  $y$ , dan leidt dit tot de differentiaalvergelijking van Poisson in de volgende vorm:

$$kD \left( \frac{\partial^2 h''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h''}{\partial y^2} \right) = v_z(x,y) \quad (2)$$

Evenals tevoren blijft geldig:

$$h'' - h' = v_z c \quad (3)$$

Uit (2) en (3):

$$\frac{\partial^2 h''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h''}{\partial y^2} = \frac{h'' - h'}{kDc} \quad (4)$$

- $h'$  hoogte van het freatisch oppervlak
- $h''$  stijghoogte van het grondwater in het diepe pakket
- $v_z$  kwelintensiteit (flux in de richting  $z$ )

Een oplossing van deze vergelijkingen leidt in het algemene geval tot veel ingewikkelder formules dan formule (1) geldig voor het 1-dimensionale geval.

3. Toepassing van differentiemethodes voor afbeelding van de stijghoogteverdeling van de kwelstroming in het horizontale vlak

Een belangrijke vereenvoudiging is mogelijk door met differenties te werken (SHAW and SOUTHWELL, 1941; SOUTHWELL, 1946; EDELMAN, 1947; VAN DEEMTER, 1950). Voor elk speciale geval is dan in het algemeen weer een nieuwe behandeling nodig tenzij het om lineaire combinaties van enkele basisgevallen gaat. Daarop behoeft hier niet verder te worden ingegaan.

Het betrokken gebied kan door twee onderling loodrechte stelsels van evenwijdige lijnen in een groot aantal voldoende kleine vierkanten met zijden  $a$  worden verdeeld. Wordt een willekeurig roosterpunt aangeduid met de index 0 en de omliggende dichtstbijzijnde roosterpunten met de indices 1, 2, 3 en 4, dan gaan de vergelijkingen (2), (3) en (4) voor het centraal gekozen roosterpunt over in differentievergelijkingen van de volgende vorm:

$$h_1'' + h_2'' + h_3'' + h_4'' - 4h_0'' = \frac{v_z a^2}{kD} \quad (5)$$

$$h_0' - h_0'' = v_z c \quad (6)$$

$$h_1'' + h_2'' + h_3'' + h_4'' - 4h_0'' = \frac{a^2}{kDc} (h_0' - h_0'') \quad (7)$$

$a$  = afstand tussen elk tweetal naburige roosterpunten.

Bij  $n$  roosterpunten in het inwendige van het gebied moeten  $n$  vergelijkingen van de eerste graad met als onbekenden  $h_i''$  worden opgelost. In elk roosterpunt moet  $h_i'$  gegeven zijn, langs de rand bovendien  $h''$ .

Behalve een indeling in vierkanten is ook een indeling in gelijkzijdige driehoeken mogelijk (EDELMAN, 1947) of een indeling in regelmatige zeshoeken. Deze afwijkende indelingen worden in de praktijk echter slechts sporadisch gebruikt (SHAW, 1953).

De afstand  $a$  wordt in de praktijk zo groot gekozen dat niet meer dan enkele honderden roosterpunten ontstaan. Of hiermee een voldoende nauwkeurigheid ontstaat, kan men voor kritieke punten (gebieden) nagaan door te vergelijken met bekende exacte oplossingen van de differentiaalvergelijking van Poisson (bijv. radiale symmetrie en constante  $v_z$ ), welke een zekere overeenkomst vertonen met het betrokken gebiedsdeel. Een plaatselijke verfijning van een netwerk van vierkanten (VAN DEEMTER, 1950) of een naar buiten toe grover netwerk van driehoeken

(EDELMAN, 1947) kan eventueel verbetering geven.

Voor de oplossing van een groot aantal vergelijkingen van de eerste graad staan verschillende bekende methodes ter beschikking: elektronische rekenmachines, elektrische weerstandjes - modellen, relaxatie-methode. Deze drie methodes leveren gelijkwaardige resultaten. Op de verschillen in aan te wenden kennis, tijdsduur en kosten behoeft in deze beschouwing niet nader te worden ingegaan.

#### 4. Gebruik van de differentievergelijkingen in de praktijk afhankelijk van de beschikbare gegevens

Evenals de vergelijkingen (2), (3) en (4) zijn de vergelijkingen (5), (6) en (7) onderling afhankelijk. De betrokken grootheden: polderpeilen, kD-waarden, c-waarden, stijghoogten van het diepe grondwater en kwelverdeling moeten alle in principe als mogelijk afhankelijk van x en y worden beschouwd. Van de vijf genoemde grootheden moeten er drie worden gegeven om de andere twee grootheden te kunnen berekenen met behulp van de twee gegeven betrekkingen (5) - (7). Welke twee vergelijkingen in de praktijk zullen worden gebruikt en in welke volgorde, zal afhangen van de beschikbare gegevens. Een en ander zal worden toegelicht aan de hand van de volgende vier voorbeelden.

a. In de praktijk zijn polderpeilen en kD-waarden meestal het best bekend, daarentegen c-waarden, kwelverdeling en stijghoogten van het diepe grondwater minder goed bekend. Een oplosbaar geval, waarbij echter een techniek voor het oplossen van een groot aantal lineaire vergelijkingen moet worden toegepast, ontstaat wanneer polderpeilen, kD-waarden en c-waarden als gegeven (eventueel gemiddelde waarden) worden aangenomen. Met behulp van (7) kan dan een isohypsenkaart worden afgeleid en vervolgens met behulp van (6) een kwelverdelingskaart.

b. Een tweede geval, dat eenvoudiger is doordat het oplossen van een groot aantal lineaire vergelijkingen overbodig is, ontstaat wanneer naast polderpeilen en kD-waarden ook een isohypsenkaart is gegeven. Met behulp van (5) volgt dan een kwelverdelingskaart en met behulp van (6) een c-waardenkaart.

c. Indien in tegenstelling tot het tweede voorbeeld, geen isohypsenkaart maar wel een kwelverdelingskaart is verkregen op grond van slootdebiet- en drainbuisafvoermetingen (VAN DER WEERD, 1962), kan het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen weer niet worden vermeden. Met behulp van (5) kan een iso-

hypsenskaart worden verkregen. Daarna volgt onmiddellijk met behulp van (6) een c-waardenkaart. Indien een daarbij gebruikte gemiddelde kD-waarde aan een zekere twijfel onderhevig is en de randen van het gebied hebben overal eenzelfde potentiaal (eventueel buitenwater met peil 0), dan kan een andere kD-waarde zonder moeite worden ingevoerd.

d. In het vierde en laatste voorbeeld wordt verondersteld, dat behalve de polderpeilen zowel een isohypsenskaart als een kwelverdelingskaart zijn gegeven. Met behulp van (5) en (6) zijn dan onmiddellijk waarden voor kD en c in alle roosterpunten van het betrokken gebied af te leiden.

Indien bij dit laatste geval een isohypsenskaart behoort, welke op een klein aantal waarnemingen is gebaseerd, zodat aan de juistheid van de interpolatie zekere twijfel bestaat, kan een eenvoudige methode voor correctie worden aangegeven. De verkregen kD-waardenkaart kan dan namelijk als een eerste benadering worden beschouwd. Na afvlakking van deze kD-waardenkaart kan vervolgens te werk worden gegaan als in het derde voorbeeld. Hiermee wordt een isohypsenskaart verkregen, welke zeer waarschijnlijk afwijkt van de waarnemingen, maar waarmee in ieder geval een wijziging van de interpolatie tussen de waarnemingspunten kan worden overwogen. Of verdere correcties overbodig mogen worden geacht, valt nog niet te zeggen, daar deze correctiemethode nog niet in de praktijk werd toegepast. In ieder geval is bij de voorgestelde (eerste) correctie de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen (eenmaal) nodig.

Literatuur

- DEEMTER, J. J. VAN, 1950 - Theoretische en numerieke behandeling van ontwaterings- en infiltratie-stromingsproblemen. Proefschrift Amsterdam.
- EDELMAN, J. H., 1947 - Over de berekening van grondwaterstromingen. Proefschrift Delft.
- ERNST, L. F., 1956 - Calculation of the steady flow of groundwater in vertical cross sections. Neth. J. Agr. Sci. 4, 126-131.
- SHAW, F. S., 1953 - Relaxation methods. Dover publications.
- , and R. V. SOUTHWELL, 1941 - Problems relating to the percolation of fluids through porous materials. Proc. Roy. Soc. Londen, A 178, 1-17.
- SOUTHWELL, R. V., 1946 - Relaxation methods in theoretical physics. Clarendon press, Oxford.
- WEERD, B. VAN DER, 1962 - Een benaderingsmethodiek voor het bepalen en localiseren van zoute kwel en de toepassing hiervan op het onderbemalingsgebied 'Prunje'. Inst. Cult. Waterh., nota 146.