
Bepalen van stroomlijnen met behulp van de stroomfunctie

André Blonk

Momenteel wordt de stroming van grondwater veelal met numerieke methoden berekend. Het numerieke geweld doet de kracht en de schoonheid van de analytische methoden wel eens vergeten. Deze 'vergeten hydrologie' heeft namelijk nog tal van onontdekte trucjes. Een van die trucjes wil ik hier presenteren, namelijk het berekenen van stroomlijnen met behulp van de stroomfunctie.

Allereerst geef ik een korte uiteenzetting van de algemeen gangbare methode die ook in de numerieke modellerwereld wordt gebruikt. Vervolgens presenteer ik een alternatieve methode waarbij complete patronen op een eenvoudige manier kunnen worden gegenereerd. Daarbij werk ik eerst de algemene methode uit, waarna ik afsluit met enkele illustratieve voorbeelden.

Algemeen gangbare methode

Voor een putonttrekking in een homogeen isotroop watervoerend pakket in het punt (x_{put}, y_{put}) kan de grondwatersnelheid in het punt (x, y) worden berekend met de volgende formules:

$$v_x = \frac{Q}{2 \pi \mu D} \frac{x - x_{put}}{(x - x_{put})^2 + (y - y_{put})^2}$$

$$v_y = \frac{Q}{2 \pi \mu D} \frac{y - y_{put}}{(x - x_{put})^2 + (y - y_{put})^2}$$

Met:

D = de gemiddelde pakketdikte (m)

Q = het ontrekkingsdebiet van de put (m^3/dag)

μ = de porositeit of het doorstroomd poriewatervolume van het pakket (-)

Het berekenen van een stroomlijn wordt meestal uitgevoerd door een integratie van de snelheidsvectoren v_x en v_y in de tijd uit te voeren. De meest eenvoudige manier om een stroomlijn uit te rekenen is met de predictor methode van Euler. Bij deze methode moet eerst een startpunt (x_0, y_0) worden gekozen vanwaar de stroomlijn vertrekt. Na een bepaalde tijdstap Δt kan het nieuwe punt van de stroomlijn (x_{new}, y_{new}) worden berekend door de volgende rekenexercitie uit te voeren:

$$x_{new} = x_0 + v_x \Delta t$$

$$y_{new} = y_0 + v_y \Delta t$$

Door vervolgens het nieuw verkregen punt als startpunt voor de volgende tijdstep te kiezen kan op deze wijze de afgelegde weg van het grondwater worden berekend. Tijdens deze integratie kan de tijdstep slim worden aangepast om de stroomlijnberekening efficiënt maar voldoende nauwkeurig uit te voeren. Nu zijn er meer methodes om zo'n stelsel differentiaalvergelijkingen op te lossen (Heun, Runge Kutta) maar de essentie van de verschillende methodes is gelijk.

Maar het kan ook anders

Er is echter nog een andere minder gangbare methode om een stroomlijnenpatroon te genereren.

Deze methode gaat uit van de stroomfunctie van een onttrekking. Om deze methode nader uit te leggen schakel ik even over naar de hydrologie in het complexe z-vlak. In het complexe z-vlak kan een putonttrekking in het punt z_{put} met de volgende formule worden beschreven:

$$\Omega = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_{put}) + C$$

Met:

Ω = de complexe potentiaal in (m³/dag)

Q = het onttrekkingsdebiet van de put in m³/dag

De complexe potentiaal Ω kan worden gesplitst in een reëel deel (de stijghoogte) en een imaginair deel (de stroomfunctie) volgens $\Omega = \Phi + i\Psi$. Na verdere uitwerking volgt voor de stroomfunctie van een put de volgende vergelijking:

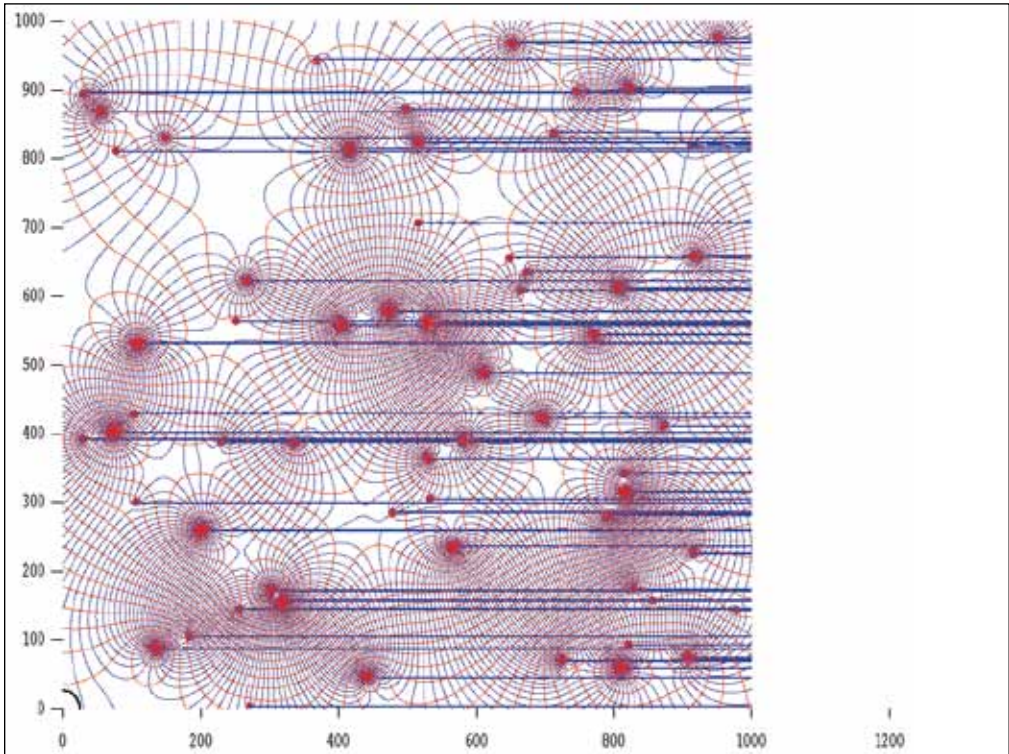
$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \mathbf{g} \tan \frac{y - y_{put}}{x - x_{put}}$$

Met deze vergelijking ga ik vervolgens aan de slag. De waarde van de stroomfunctie in een punt (x,y) door een putonttrekking kan op basis van deze functie variëren tussen 0 en Q. Om de stroomfunctie waarde Ψ in een punt (x,y) ten gevolge van meerdere putten (bijvoorbeeld n putten op posities x_i, y_i) uit te rekenen kunnen de verschillende bijdragen worden opgeteld volgens:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q}{2\pi} \mathbf{g} \tan \frac{y - y_i}{x - x_i}$$

Nu kan voor een bepaald gebied een grid worden gedefinieerd en kan de waarde van de stroomfunctie in de verschillende gridpunten worden berekend. Vervolgens kunnen van de gridwaarden met een willekeurige contourroutine (bijvoorbeeld SURFER) de contourlijnen worden berekend. De berekende contourlijnen noem ik in het vervolg iso-psi-lijnen.

Als voorbeeld is een randomputtenveld gekozen Voor dit puttenveld zijn de isohypsen en de iso-psi-lijnen berekend en in figuur 1 weergegeven.



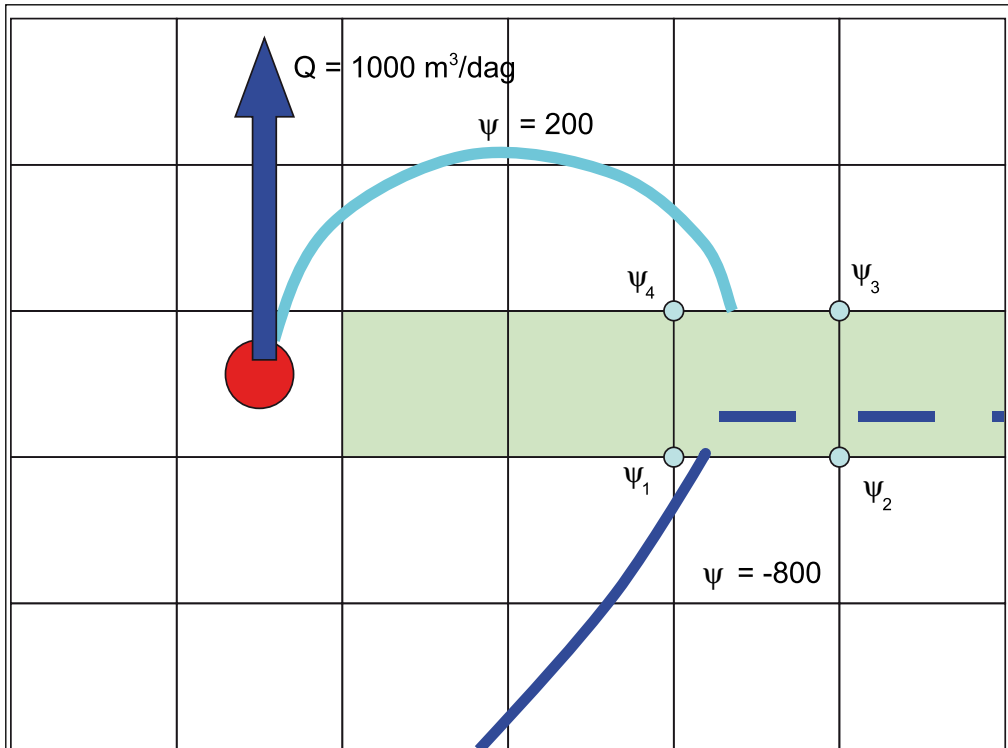
Figuur 1: Isohypsen en iso-psi-lijnen van een random puttenveld

Bij het contouren van de stroomfunctie ontstaan echter ongewenste horizontale banen die het stroomlijnenpatroon verstoren. Het is niet moeilijk deze verstorende banen uit de berekening te poetsen als de mathematische achtergrond duidelijk is. Deze horizontale ‘meerwaardigheids’ vlaggen worden namelijk veroorzaakt door de definitie van de *bgtan* functie.

In figuur 2 is schematisch een gecontourde stroomlijn $\Psi=200$ weergegeven,

Voor het gridpunt Ψ_4 is de waarde van de *bgtan* functie nagenoeg gelijk aan 0. Voor het daaronder gelegen punt Ψ_1 is de waarde van de *bgtan* functie om en nabij 2π . Er vindt dus over de betreffende cellen een sprong plaats van circa 2π . De stroomlijn met stroomfunctiewaarde 200 vervolgt zijn weg met de stroomfunctiewaarde -800. De sprong is gelijk aan het onttrekkingsdebiet van de betreffende put.

De stroomlijn met stroomfunctiewaarde -800 veroorzaakt bij het contouren de horizontale baan.



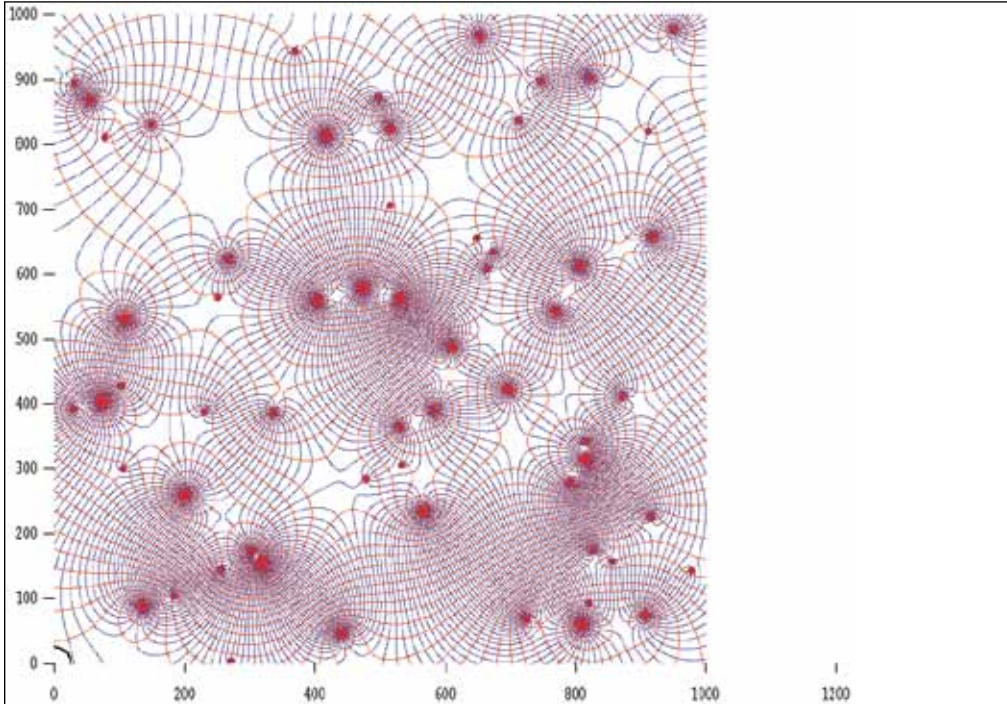
Figuur 2: Schematische weergave iso-psi-lijn berekening

De posities van de vlaggen zijn precies bekend. Door nu slim te contouren kunnen de horizontale vlaggen worden voorkomen. Voor elke put kan de positie van de vlag en de grootte van de sprong worden bepaald door de rasterindices en het debiet vast te leggen. Als bij het berekenen van de iso-psi-lijnen de cellen met een vlag worden 'gecontoured', worden de stroomfunctiewaarden in de punten 3 en 4 van de betreffende cel verhoogd met het bij de vlag behorende debiet. Op deze wijze wordt een continu stroomlijnenpatroon zonder vlaggen verkregen.

Ook samenvallende vlaggen met verschillende debieten worden op deze wijze goed afgehandeld.

In het algemeen kan worden gesteld dat elk element dat grondwater onttrekt of infiltreert een discontinue iso-psi-lijnen patroon veroorzaakt. Als de plaats en de grootte van de vlag kan worden vastgesteld kan door het slim contouren een continu stroomlijnenpatroon worden verkregen. Een constante regionale grondwaterstroming vertoont geen discontinuïteit. Een nadeel van deze methode is dat alleen de weg van het waterdeeltje kan worden bepaald. Het bepalen van de verblijftijd is met deze methode niet mogelijk.

Aan de hand van een tweetal voorbeelden kunnen de resultaten van het ‘slim’ contoureren worden geïllustreerd. In het eerste voorbeeld is gekozen voor het eerder genoemde random puttenveld. In figuur 3 is voor dit puttenveld het correcte stroomlijnen- en stijghoogtepatroon gepresenteerd.



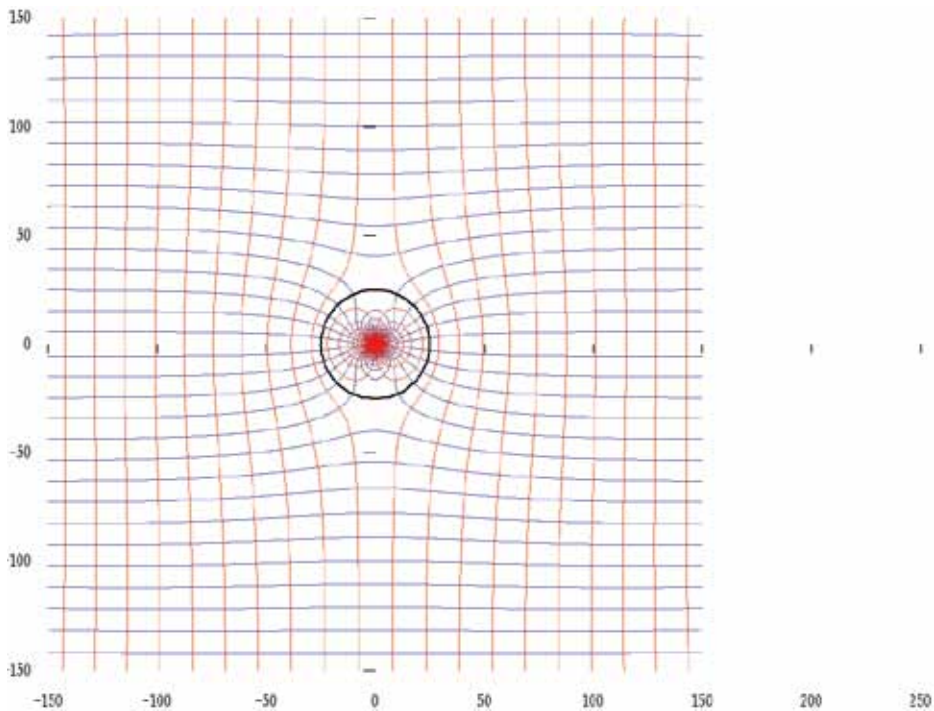
Figuur 3: Isohyphen en iso-psi-lijnen van een random puttenveld na slim contouren

In het tweede voorbeeld is gekozen voor een cirkelvormig meer in een uniforme regionale grondwaterstroming. In dit voorbeeld wordt de regionale grondwaterstroming met een onttrekkingsput en een infiltratieput op grote afstand van elkaar gemodelleerd. Het meer wordt vervolgens met spiegelputten gemodelleerd. Een uitleg van deze spiegeltechniek is samengevat in het grijs omkaderde tekstdeel. Voor het modelleren van een uniforme grondwaterstroming q_0 van $1 \text{ m}^3/\text{dag}$ en een meer met een straal van 100 m kunnen de volgende putten worden toegepast:

x (m)	y (m)	Q (m^3/d)
-10000	0	31416
10000	0	-31416
-1	0	-31416
1	0	31416

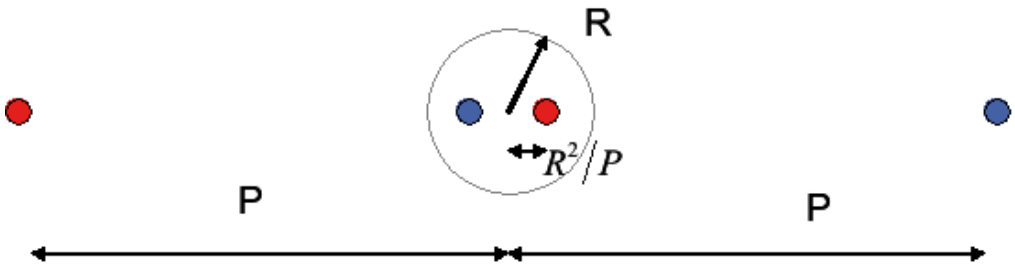
In figuur 4 is het stroomlijnen- en stijghoogtepatroon van dit voorbeeld gepresenteerd. De figuur geeft een compleet stromingspatroon te zien. Omdat het interval waarmee de

stroomlijnen worden gegenereerd bekend is kan door het tellen van de stroomlijnen het recirculerende debiet tussen 2 putten of de hoeveelheid drainage/infiltratie van het meer globaal worden berekend. Een kleiner interval tussen de stroomlijnen resulteert in een nauwkeurigere bepaling van het debiet. Bij het voorbeeld is het stroomfunctieinterval op $40 \text{ m}^3/\text{dag}$ gekozen. We zien dat 10 stroomlijnen het meer in- en ook weer uitstromen, wat overeenkomt met $400 \text{ m}^3/\text{dag}$. Deze hoeveelheid komt overeen met het theoretische debiet van $4 \cdot q_0 \cdot R = 400 \text{ m}^3/\text{dag}$.



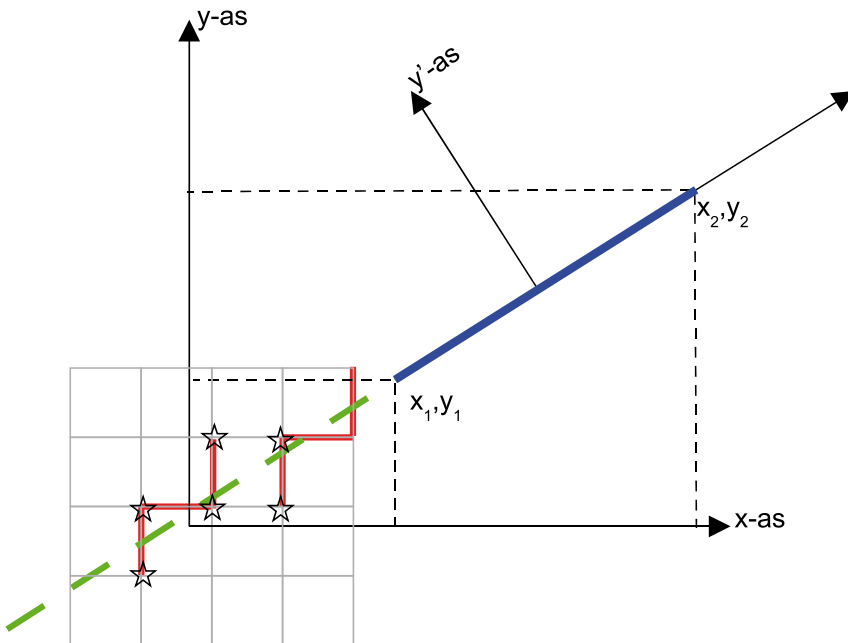
Figuur 4: Isohypsen en iso-psi-lijnen van een cirkelvormig meer in een uniforme grondwaterstroming, gemodelleerd met putten en spiegelputten, de netto onttrekking van het meer is 0

Een cirkelvormig meer in een uniforme stroming kan worden gemodelleerd met 4 putten. De uniforme stroming kan worden gemodelleerd door een onttrekkingsput en een infiltratieput op grote afstand ($2P$) van elkaar te plaatsen en een groot debiet te kiezen. De uniforme stroming tussen de putten bedraagt dan $q = Q/\pi P$. Het meer met een straal van R precies midden tussen de putten kan worden gemodelleerd door 2 spiegelputten te kiezen, tegengesteld aan het teken van de putten van de uniforme stroming op een afstand R^2/P uit elkaar. Hoe verder de putten van de uniforme stroming van elkaar staan (en hoe groter het debiet) hoe dichter de putten in het meer bij elkaar komen te staan. In het meer ontstaat een zogenaamde dipool (zie figuur 4).



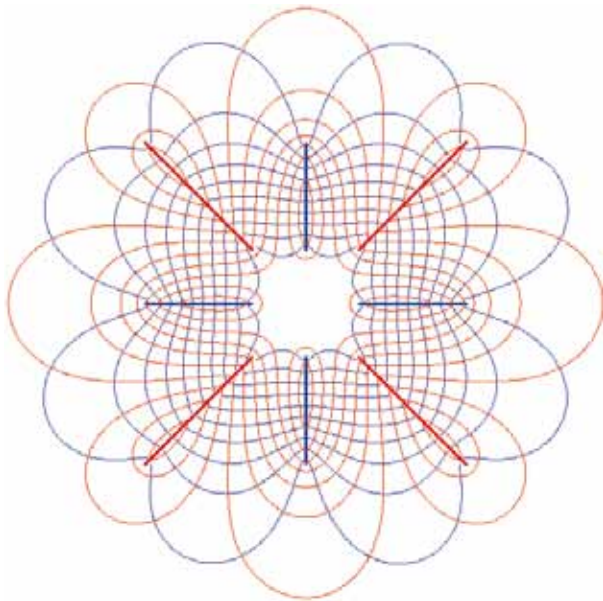
Iso-psi lijnen voor linesinks

Uit het voorgaande blijkt dat complete stromingspatronen voor putten op een relatief eenvoudige wijze kunnen worden berekend. Het principe van slim contouren kan bijvoorbeeld ook worden gebruikt voor linesinks. Een linesink is niets anders dan een lijnstuk geïntegreerde onttrekkingsput. Ook bij linesinks treedt het verschijnsel van meerwaardigheid van de stroomfunctie op, alhoewel de methode hier wat ingewikkelder is. Bij linesinks kan de positie en de oriëntatie van de meerwaardigheidsvlag worden gestuurd door het assenstelsel aan te passen aan de ligging van de linesink. Bij een willekeurig georiënteerde linesink kies ik een nieuw assenstelsel waarbij oorsprong in het midden van de linesink ligt, het assenstelsel wordt vervolgens geroteerd waarbij de x-as evenwijdig met de linesink ligt. De meerwaardigheidsvlaggen liggen nu in het verlengde van de linesink zoals aangegeven in figuur 5.



Figuur 5: Positie van de meerwaardigheidsvlag bij linesinks

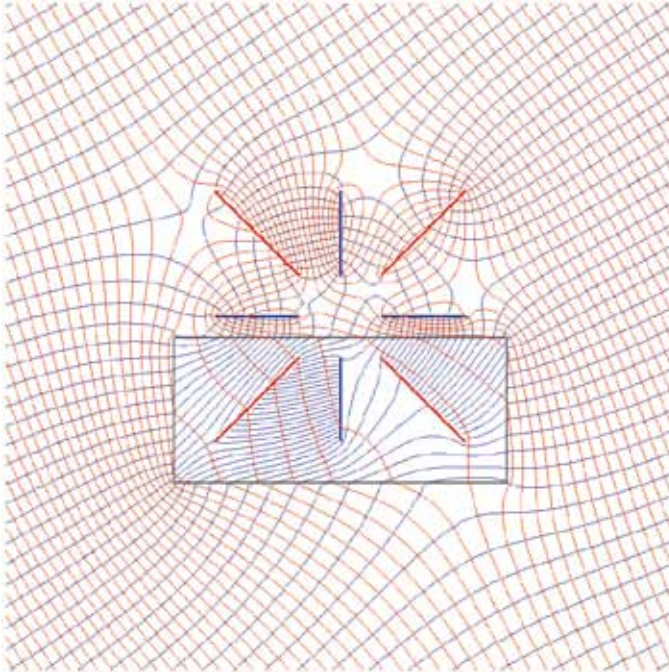
De meerwaardigheidsvlag is in figuur 5 de schuine lijn die de gridcellen doorsnijdt. Bij elke doorsnijding van die lijn kan de positie van de meerwaardigheid worden bepaald (sterretjes in figuur 5). Door een administratie van de doorsneden gridcellen met overeenkomstige sprongen bij te houden kan bij het contouren van de stroomfunctie een continu stroomlijnenpatroon worden gegenereerd. Ter illustratie van de werking van deze methode heb ik acht linesinks gekozen als spaken in een wiel, met afwisselend een infiltratie- en ontrekkingsdebiet. In figuur 6 is voor dit voorbeeld het stroomlijnenpatroon weergegeven.



Figuur 6: Isohypsen en iso-psi-lijnen voor 8 line-sinks

Iso-psi lijnen voor doublets

Bij de techniek van analytische elementen kunnen gebieden met een andere doorlatendheid worden gemodelleerd met zogenaamde line-doublets. Met deze line-doublets kunnen potentiaalsprongen worden gemodelleerd. Een line-doublet kan worden gemaakt door een dipool te integreren over een lijnstuk. De orientatie van de dipool wordt daarbij loodrecht op het lijnstuk gekozen. Op deze manier kan een line-doublet worden gemaakt met een lineair verlopende potentiaalsprong. Door het vervolgens aaneenrijgen van doublets kan een gebied met een andere doorlatendheid worden onderscheiden. Het bijzondere van een line-doublet is dat deze geen water onttrekt of infiltreert. Dit element heeft dan ook geen meerwaardigheidsvlag. In figuur 7 is een voorbeeld gepresenteerd van line-sinks in combinatie met een inhomogeniteit. De doorlatendheid binnen de inhomogeniteit is een factor 10 groter dan in het overig deel van het watervoerend pakket. De inhomogeniteit is gemodelleerd met 46 lineair verlopende line-doublets.



Figuur 7: Isohypsens en iso-psi-lijnen voor line-sinks in combinatie met een inhomogeniteit

Conclusies

Het genereren van complete stroomlijnpatronen op basis van de stroomfunctie is zonder meer mogelijk.

Een continu stromingspatroon kan worden gegenereerd door het administreren van de locaties en de grootte van de meerwaardigheidssprongen. In dit verhaal heb ik volstaan met stromingspatronen van putten en linesinks in combinatie met doublets en een uniforme stroming. Maar deze techniek kan natuurlijk ook worden toegepast op andere analytische elementen.

Hoewel het toekennen van verblijftijden aan de op deze wijze berekende stroomlijnen niet mogelijk is, geeft de beschreven methode naar mijn idee een aardig inzicht in het stromingspatroon. De methode is dus meer ter lering en vermaak dan praktisch toepasbaar.