
Over het golfkarakter van het dispersieproces (1)

Kees Maas

In dit artikel maak ik aannemelijk dat dispersie niet een parabolisch (diffusie-achtig) proces is, zoals gewoonlijk wordt aangenomen, maar een hyperbolisch (golf-achtig) proces. Daartoe introduceer ik een subtiele maar cruciale variant op de wet van Fick, de grondslag van de klassieke dispersietheorie. Deze aanpassing verhelpt een vreemde tekortkoming van het bestaande dispersiemodel, namelijk dat er deeltjes tegen de stroom in bewegen. Verder toon ik met een gedachten-experiment aan dat de wet van Fick—ook nog in de aangepaste vorm—een interne tegenstrijdigheid bevat. Het negeren van deze strijdigheid is er de oorzaak van dat in het klassieke dispersiemodel sommige deeltjes sneller dan een lichtflits uit het zicht verdwijnen. Ik stel daarom een niet-Fickiaans dispersiemodel voor, dat beschouwd kan worden als een correctie op modellen die eerder door Scheidegger en door Strack werden beschreven. In dit verbeterde model beweegt een verontreiniging uitsluitend stroomafwaarts, met een eindige snelheid. Voor heterogene media met een niet al te sterk contrast in doorlatendheden voorspelt mijn theorie dat de snelheden van het eerste, het gemiddelde en het laatste deeltje van een dispergerend front zich verhouden als $v_{\sigma}v = v:v_{\omega}$. Experimenten met gesimuleerde kolomproeven bevestigen deze relatie. Volgens mijn model komt de spreiding van een verontreiniging trager op gang dan de klassieke theorie voorspelt. (Uit veldwaarnemingen is bekend dat het klassieke model in dit opzicht tekort schiet.)

Doorbraakkrommen die met het verbeterde model berekend worden, wijken alleen in de buurt van een bron van verontreiniging noemenswaardig af van doorbraakkrommen volgens het klassieke dispersiemodel. Het belang van de nieuwe dispersievergelijking ligt dan ook niet in een betere berekening van het verloop van de doorbraak, maar in het feit dat met het model een ruimtelijk begrensd gebied bepaald kan worden, waarbuiten gegarandeerd geen verontreiniging aanwezig is. Maar dat is het onderwerp van een vervolgartikel.

Over het golfkarakter van het dispersieproces

Zoals bekend, is dispersie het verschijnsel dat een vuile vlek in het water tijdens het transport groter wordt, terwijl de begrenzing vervaagt en de concentratie afneemt.

Er zijn verschillende manieren denkbaar om het begrip concentratie te definiëren. De dispersieliteratuur kent twee soorten: de *ruimtelijk gemiddelde* concentratie c_R en de *fluxgemiddelde* concentratie c_F . Dit onderscheid is ingevoerd door Kreft en Zuber (1978). Het is behulpzaam bij het ontwikkelen van een consistente dispersietheorie, en het is essentieel

Kees Maas is werkzaam bij:

Kiwa Onderzoek en Advies, Postbus 1072, 3430 BB Nieuwegein, (030) 60 69 547, kmaas@kiwaoa.nl
en bij Sectie Hydrologie en Ecologie, Technische Universiteit Delft

bij het interpreteren van dispersieproeven. Voor een nadere uitleg over de twee soorten concentratie beschouw ik de grondwaterstroombuis die in figuur 1 getekend is.

De grond in de stroombuis is heterogeen, waardoor de snelheid van de waterdeeltjes van punt tot punt varieert. Alle waterdeeltjes zijn voorzien van een label ℓ_i , dat de waarde 0 of 1 heeft. 0 Betekent: schoon, en 1 betekent: vuil. Het vuile deel van het water zal ik later ook wel aanduiden als *solute*. Afgezien van het label is het vuile deel niet van het schone deel te onderscheiden. In de doorsnede S bevinden zich op een gegeven moment N waterdeeltjes. Ik definieer de ruimtelijk gemiddelde concentratie c_R door

$$c_R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \ell_i \quad (1)$$

Deze definitie komt intuïtief overeen met het gebruikelijke begrip concentratie. Echter: als ik direct achter S een bekeerglas plaats en het uitstromende water opvang, dan heeft mijn watermonster in het algemeen niet de concentratie c_R . Immers: per tijdseenheid stromen er meer snelle dan langzame deeltjes door S. Als de snelle deeltjes vuiler zijn dan de langzame (wat best kan voorkomen), dan zal de concentratie in het bekeerglas hoger zijn dan c_R . Als de snelle deeltjes schoner zijn dan de langzame (wat ook best kan voorkomen) dan zal de concentratie in het bekeerglas lager zijn dan c_R . Om de concentratie in het bekeerglas te vinden moet ik dus de deeltjes wegen overeenkomstig hun snelheid:

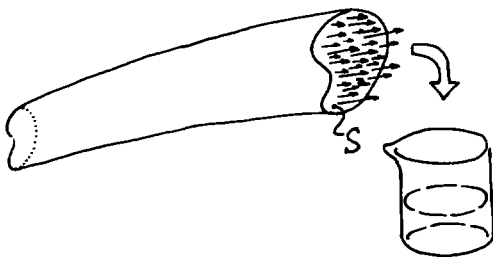
$$c_F = \frac{1}{Nv} \sum_{i=1}^{i=N} \ell_i v_i \quad (2)$$

Hierin is v_i de snelheid van de individuele deeltjes die zich in de doorsnede S bevinden, en v is de gemiddelde snelheid van alle deeltjes in de doorsnede S. c_F is de fluxgemiddelde concentratie.

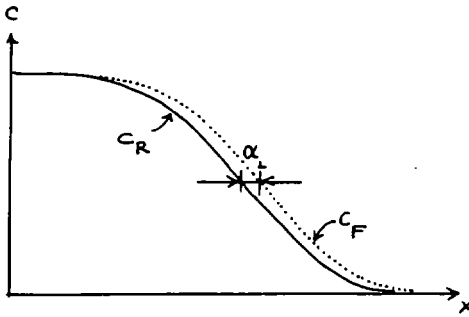
Met behulp van deze twee concentraties is het gemakkelijk om een massabalans op te stellen voor een 'plakje stroombuis' ter breedte dx :

$$\frac{\partial c_R}{\partial t} = -v \frac{\partial c_F}{\partial x} \quad (3)$$

De coördinaat x wordt gemeten langs de lengte-as van de buis; t is de tijd.



Figuur 1: Stroombuis en bekeerglas



Figuur 2: c_R -profiel versus c_F -profiel (principeschets: geen meting)

In 1991, toen ik in het kader van het VEWIN-onderzoek een half jaar te gast was aan de Universiteit van Minnesota, deed Jogesh Panda (student van Otto Strack) een groot aantal computergesimuleerde kolomproeven, waarvan ik later de resultaten heb kunnen gebruiken voor mijn proefschrift (Maas, 1994). In een gesimuleerde kolom is het gemakkelijk om zowel c_R als c_F te 'monitoren'. Het bleek dat op enige afstand van de injectiebron de concentratieprofielen¹ van c_R en c_F sprekend op elkaar lijken; ze zijn alleen een stukje ten opzichte van elkaar verschoven in de lengterichting van de kolom (figuur 2).

Ik noem de verschuiving in de lengterichting α_L (de reden van deze naamkeuze wordt later vanzelf duidelijk) en postuleer het volgende *empirische* model:

$$c_F(x + \alpha_L) = c_R(x) \quad (4)$$

Het linkerlid van deze vergelijking ontwikkel ik in een Taylor-reeks en ik bewaar alleen de eerste twee termen:

$$c_F + \alpha_L \frac{dc_F}{dx} = c_R \quad (5)$$

Dit mag natuurlijk alleen als α_L klein is ten opzichte van de spreiding van de solute, dus niet te dicht bij de bron. Vergelijking 5 is een subtiele variant op de *wet van Fick*. Krefit en Zuber (1978) waren de eersten die de wet van Fick voor poreuze media in termen van c_R en c_F formuleerden. Zij presenteren deze wet echter in een iets andere vorm²:

$$c_F = c_R - \alpha_L \frac{dc_R}{dx} \quad (6)$$

Hierin is α_L de zogenaamde longitudinale dispersiecoëfficiënt. Krefit en Zuber kwamen op dit resultaat door eerst aan te nemen dat de dispersievergelijking klopt, en vervolgens terug te

¹ grafieken van c versus x voor vaste t .

² Krefit en Zuber gebruiken andere notaties. Uitdrukking (6) is te vinden in Parker en Van Genuchten (1984), formule 11.

redeneren hoe de wet van Fick er dan uit moet zien. Een alternatieve manier zou kunnen zijn om uit te gaan van

$$c_F(x) = c_R(x - \alpha_L) \quad (7)$$

en het rechterlid te vervangen door de eerste twee termen van zijn Taylor-reeks, wat ook vergelijking 6 oplevert. (Hieruit blijkt *en passant* dat de profielen van c_R en c_F inderdaad over een afstand gelijk aan de longitudinale dispersiecoëfficiënt α_L ten opzichte van elkaar verschoven zijn, zoals figuur 2 suggereert). Vergelijking 7, die tot vergelijking 6 leidt, betekent precies hetzelfde als vergelijking 4, die tot vergelijking 5 leidt. Op het eerste gezicht hebben de twee varianten van de wet van Fick dus evenveel bestaansrecht. Maar ze kunnen niet tegelijk waar zijn. Welke van de twee is nu de goede? Ik wil aannemelijk maken dat mijn variant (vergelijking 5) de voorkeur verdient boven die van Kreft en Zuber (vergelijking 6).

Kreft en Zuber noemen c_F terecht de fluxgemiddelde concentratie, maar de definitie van c_F (vergelijking 2) laat nog een tweede interpretatie toe. Stel dat alle deeltjes dezelfde massa m_i bezitten (dat mag, want ze waren alleen aan hun labels ℓ_i te onderscheiden). Dan is c_F te schrijven als

$$c_F = \frac{\sum \ell_i m_i v_i}{\sum m_i v_i} \quad (8)$$

Hieruit blijkt dat c_F tevens opgevat kan worden als de *relatieve impuls* (momentum) van de 'solute', want $m_i v_i$ is de impuls van een waterdeeltje. Volgens de gangbare variant van de wet van Fick (vergelijking 6) hangt dispersie af van de gradiënt van de ruimtelijk gemiddelde concentratie van de solute; volgens mijn variant hangt dispersie af van de gradiënt van de relatieve impuls van de solute. Het laatste lijkt me logischer, want de relatieve impuls is een directe maat voor de energie van de dispergerende solute. Onderzoekers van de vakgroep Waterbeheer, Milieu- en Gezondheidstechniek van de TU Delft werken momenteel aan een degelijke onderbouwing van deze veronderstelling.

Een tweede reden om mijn variant te prefereren boven die van Kreft en Zuber, is dat hij een realistischer dispersiemodel oplevert. Dat wil ik nu aantonen. Samen met de massabalans (vergelijking 3) levert vergelijking 5 de volgende dispersievergelijking op:

$$\alpha_L \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

(Ik heb de subscripts van c achterwege gelaten, omdat deze vergelijking zowel voor c_F als voor c_R opgaat). Vergelijking 9 is een centraal resultaat van dit artikel. Deze nieuwe dispersievergelijking moet vergeleken worden met de klassieke convectie-dispersievergelijking (Engelse afkorting: CDE) die er als volgt uitziet:

$$\alpha_L v \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

Vergelijking 10 is te vinden door de massabalans (vergelijking 3) te combineren met vergelijking 6. De CDE heeft een *parabolisch* (diffusie-achtig) karakter, waardoor er altijd deeltjes tegen de stroom in bewegen. Dat is in werkelijkheid niet mogelijk. Vergelijking 9 heeft daarentegen een *hyperbolisch* (golfachtig) karakter en sluit de opwaartse stroming van deeltjes af. Voor insiders: vergelijking 9 heeft twee *karakteristieken*, x en t , waarlangs zich discontinuïteiten kunnen voortplanten. In concreto betekent dit dat het front van verontreiniging zich onmiddellijk oneindig ver van de bron verwijderd, terwijl de staart in de bron blijft hangen. Dit model verhelpt dus een tekortkoming van de CDE (namelijk dat er deeltjes tegen de stroom in bewegen), maar het is nog niet perfect (want er zijn nog steeds deeltjes met een oneindig hoge snelheid). In de volgende paragraaf wil ik bezien of er nog verdere verbeteringen mogelijk zijn. Overigens moet ik opmerken dat oplossingen van vergelijking 8 in de praktijk niet sterk afwijken van oplossingen van vergelijking 9, behalve dicht bij de bron van de verontreiniging.

Over de noodzaak om een tijdsafhankelijke term aan de wet van Fick toe te voegen

Ik voer nu een gedachtenexperiment uit, om aan te tonen dat de wet van Fick (in beide varianten) een interne tegenstrijdigheid bevat. Daarvoor moet ik eerst het begrip dispersie nauwkeuriger definiëren. Ik kies voor de volgende formulering:

Dispersie is het verschijnsel dat c_R van c_F verschilt.

Deze definitie is consistent met meer gangbare definities, die gebruik maken van een zogenaamde dispersieve flux. Dat begrip is voor dit verhaal echter niet nodig³.

Stelt u zich een oneindig lange kolom voor, gevuld met een heterogeen poreus medium. De dimensies van de heterogeniteiten zijn klein ten opzichte van de diameter van de kolom, zo dat de kolom 'op een afstandje beschouwd' homogeen is. Het medium is verzadigd met water dat in de lengterichting van de kolom stroomt met eenparige snelheid v . Ik ga nu labels ℓ_i uitdelen: over de hele lengte van de kolom geef ik $\ell_i = 1$ (vuil) aan alle deeltjes die sneller stromen dan v ; alle andere deeltjes krijgen $\ell_i = 0$ (schoon). Dan is duidelijk c_F groter dan c_R . Per definitie is er dus dispersie. Maar de gradiënt van zowel c_F als c_R is nul, want daar heb ik bij het uitdelen van de labels voor gezorgd. Volgens beide varianten van de wet van Fick (vergelijkingen 5 en 6) is in die situatie c_F gelijk aan c_R , dus er is per definitie geen dispersie. Er kan niet tegelijkertijd wel en geen dispersie zijn, dus de wet van Fick is intern tegenstrijdig.

Wat valt hier aan te doen? Verschillende onderzoekers hebben voorgesteld om de wet van Fick uit te breiden met een tijdsafhankelijke term (Hassanizadeh, 1996). Het simpelste model, dat toch realistisch is, lijkt me het volgende: Ik beschouw een volume-elementje, een 'plakje' ter breedte dx van mijn denkbeeldige kolom. Terwijl dit elementje zich met snelheid v stroomafwaarts beweegt, komen de vuile deeltjes in een gebied terecht met een andere snelheidsverdeling. Omdat alleen de snelste deeltjes vuil waren, is het aannemelijk dat na verloop van tijd meer vuile deeltjes in tragere gebieden terecht zijn gekomen dan in nog snellere gebieden. Daardoor neemt c_F af, terwijl c_R gelijk blijft. c_F heeft dus de neiging om

³ Het begrip dispersieve flux is zinvol voor beschouwingen in twee of drie dimensies. In een 1-D beschouwing komt de dispersieve flux overeen met $v(c_F - c_R)$, dus als c_F gelijk is aan c_R is de dispersieve flux nul.

tot c_R te naderen. Het eenvoudigst denkbare model voor dit proces is een eerste orde benadering:

$$c_F - c_R = -\frac{\beta D(c_F - c_R)}{v \frac{D}{Dt}} \quad (11)$$

Hierin is β een systeemconstante, die de snelheid regelt waarmee c_F tot c_R nadert. Vergelijking 11 is een variant op een model dat eerder door Otto Strack werd voorgesteld (Strack, 1992)⁴. Of dit model toereikend is, hangt af van de structuur van de heterogeniteiten. Als de variatie in doorlatendheden groot is, is het waarschijnlijk dat er een hogere orde benadering nodig is, maar ik houd het even op vergelijking 11. Toevoeging van deze term aan mijn variant op de wet van Fick (vergelijking 5) geeft:

$$c_F - c_R = -\alpha_L \frac{\partial c_F}{\partial x} - \frac{\beta D(c_F - c_R)}{v \frac{D}{Dt}} \quad (12)$$

Samen met de massabalans (vergelijking 3) levert dit het volgende dispersiemodel op:

$$\beta v \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + (\alpha_L + 2\beta) \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} + \frac{\beta \partial^2 c}{v \partial t^2} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

(De subscripten van c kunnen weer achterwege blijven, omdat de vergelijking voor zowel c_R als c_F opgaat). Dit is een tweede centraal resultaat van dit artikel⁵. Vergelijking 13 lijkt veel op vergelijkingen die eerder werden voorgesteld door Scheidegger⁶ en door Strack (Scheidegger, 1960; Strack, 1992). Het is een hyperbolische vergelijking met de volgende karakteristieke richtingen:

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_L}{2\beta} \right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha_L}{2\beta} \right)^2 - 1} \right\} v \quad (14)$$

Het front van verontreiniging plant zich daarom voort met snelheid

$$v_a = \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_L}{2\beta} + \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha_L}{2\beta} \right)^2 - 1} \right) \right\} v \quad (15)$$

⁴ In Strack's model komt in het rechterlid niet de totale, maar de partiële afgeleide naar t voor.

⁵ Vergelijking 13 is een zogenaamde *telegraafvergelijking*. Door de substitutie

$$\tau = 2 \frac{x + vt}{\alpha_L + 2\beta}, \quad u = 2 \frac{x - vt}{\sqrt{\alpha_L^2 + 2\alpha_L\beta}}$$

gaat hij over in

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 c}{\partial u^2} + \frac{\partial c}{\partial \tau} = 0$$

welke vergelijking de voortplanting van een signaal door een telegraafkabel beschrijft.

⁶ Scheidegger beschouwt de solute als een troep wandelende dronkelappen, die hun geheugen nog niet helemaal kwijt zijn. Zijn model berust dus niet direct op de fysica, maar Hassanizadeh (1996) heeft teruggeredeneerd welke differentiaalvergelijking bij het model van Scheidegger zou horen.

terwijl de staart zich voortplant met snelheid

$$v_{\omega} = \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_L}{2\beta}\right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha_L}{2\beta}\right)^2 - 1} \right\} v \quad (16)$$

zodat

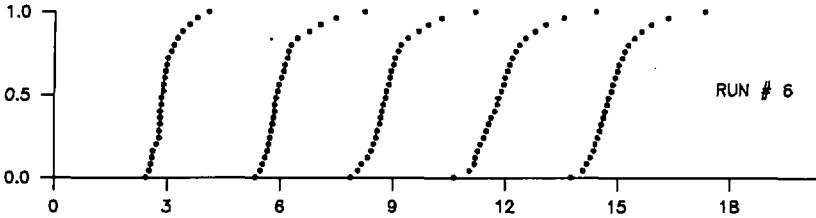
$$v_{\alpha} v_{\omega} = v^2 \quad (17)$$

De subscripts α en ω duiden op respectievelijk het eerste en het laatste deeltje. De gemiddelde snelheid van de deeltjes is v . Op vergelijking 17 kom ik in de volgende paragraaf terug, als ik mijn theorie experimenteel ga toetsen. Volgens dit model hebben het front en de staart van de verontreiniging beide een *eindige* snelheid, terwijl de staart nu niet meer in de bron blijft hangen, maar zich altijd *stroomafwaarts* beweegt. Tenzij β nul is, maar uit mijn experiment met de denkbeeldige kolom bleek dat onmogelijk te zijn. (Bij de modellen van Scheidegger en Strack hebben het front en de staart eveneens een eindige snelheid, maar de staart beweegt zich bij Scheidegger alleen stroomafwaarts als $\alpha_L < \beta$, terwijl hij bij Strack onder alle omstandigheden tegen de stroom in beweegt (Hassanizadeh, 1996)). Oplossingen van vergelijking 13 wijken weer alleen in de buurt van de bron duidelijk af van oplossingen van de CDE, dus voor het modelleren van de doorbraak van een verontreiniging heeft dit artikel waarschijnlijk geen verstrekkende gevolgen. Het belang van het nieuwe model voor de praktijk is dat er een begrensd gebied mee berekend kan worden, waarbuiten gegarandeerd geen verontreiniging voorkomt. Dat zal ik in een tweede artikel verder uitwerken. Daarnaast is het van *wetenschappelijk* belang dat de nieuwe theorie—in tegenstelling tot de klassieke dispersietheorie—intern consistent is en—eveneens in tegenstelling tot de klassieke dispersietheorie—een realistisch gedrag van het front en de staart van een verontreiniging oplevert. Er is nog een ander opzicht waarin het nieuwe model zich realistischer gedraagt. Daar zal ik straks op ingaan, maar eerst wil ik de plausibiliteit van het model experimenteel ondersteunen.

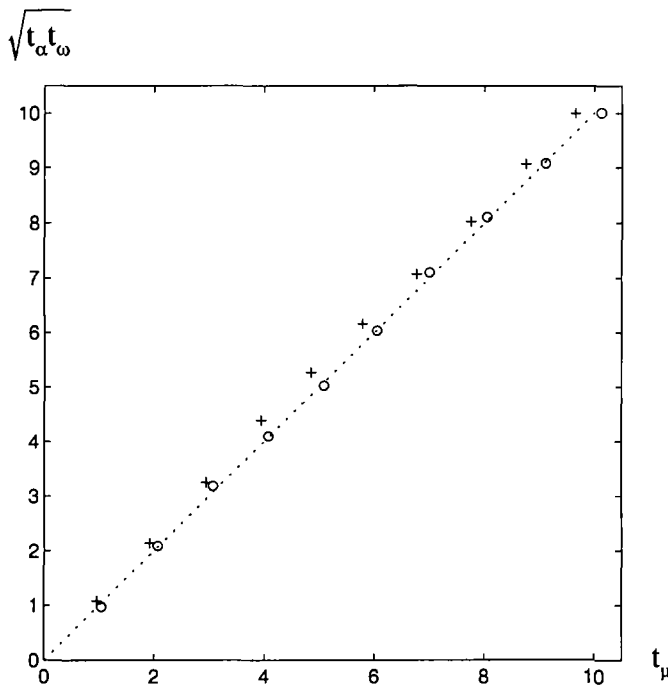
Experimentele ondersteuning

Het is extreem moeilijk om in een fysisch model de aankomsttijden van het snelste en het langzaamste deeltje van een dispergerend front te meten. Welhaast de enige mogelijkheid om mijn theorie experimenteel te toetsen is met computergesimuleerde kolomproeven. In mijn proefschrift (Maas, 1994) heb ik de eerder genoemde proeven van Jogesh Panda met gesimuleerde kolommen uitvoerig gedocumenteerd. Om de rekentijd binnen de perken te houden waren de kolommen tweedimensionaal. Ze bevatten een homogeen achtergrondmateriaal, waarin volgens een random verdeelmethode cirkelvormige heterogeniteiten waren aangebracht. De heterogeniteiten besloegen 75% van de kolom. Hun gemiddelde doorlatendheid was gelijk aan het geometrische gemiddelde van het achtergrondmateriaal. Hun individuele doorlatendheden werden ad random gekozen uit een log-normale verdeling, met een standaardafwijking in de orde van de gemiddelde doorlatendheid. Er zijn met deze configuratie 15 runs gemaakt, waarbij op regelmatige afstanden van de bron doorbraak-krommen gemeten werden. Figuur 3 geeft daarvan een typisch voorbeeld. Op de horizontale as staat de doorbraaktijd, die volgens een beschreven methode geschaald en dimensieloos

gemaakt is. De runs werden uitgevoerd met 1000 deeltjes die gelijktijdig werden losgelaten. De grafieken geven maar 26 deeltjes weer, omdat ze anders dichtlopen. Er zijn doorbraakkrommen gemeten in tien equidistante dwarsdoorsneden. Om de overzichtelijkheid te bewaren geeft figuur 3 er maar vijf weer, maar ik maak straks van alle tien gebruik.



Figuur 3: Doorbraakkrommen, gemeten tijdens een gesimuleerde kolomproef



Figuur 4: Toetsing van de relatie $t_{\mu} = \sqrt{t_{\alpha} t_{\omega}}$. Langs de horizontale as zijn de gemiddelde doorbraaktijden t_{μ} uitgezet, die gemeten zijn in tien equidistante dwarsdoorsneden van de gesimuleerde kolom. De bijbehorende waarden van $\sqrt{t_{\alpha} t_{\omega}}$ zijn uitgezet langs de verticale as. (t_{α} is de gemeten doorbraaktijd van het eerste deeltje, terwijl t_{β} de gemeten doorbraaktijd van het laatste deeltje voorstelt.) Volgens de theorie zouden de meetresultaten op de stippellijn moeten uitkomen. De metingen zijn voor alle vijftien runs uitgevoerd; de figuur geeft het slechtste resultaat (run 9, +) en het beste resultaat (run 15, o) weer.

Uit vergelijking 17 is rechtstreeks af te leiden dat

$$t_{\mu} = \sqrt{t_{\alpha} t_{\omega}} \quad (18)$$

waarin t_{μ} de gemiddelde doorbraaktijd is, terwijl t_{α} en t_{ω} de doorbraaktijden zijn van de deeltjes die respectievelijk het eerst en het laatst aankwamen. Figuur 4 geeft in grafische vorm de gemeten relatie weer tussen t_{μ} en $\sqrt{t_{\alpha} t_{\omega}}$. De rondjes geven het beste resultaat weer dat tijdens de 15 runs verkregen werd; de kruisjes geven het slechtste resultaat weer. Theoretisch zouden de meetwaarden op de stippellijn terecht moeten komen. Naar mijn smaak liggen ze daar voldoende dicht bij om vertrouwen te wekken in de theorie⁷.

We hebben overigens ook vijf runs uitgevoerd met een veel hoger contrast in de doorlatheden van de heterogeniteiten. De doorbraakkrommen van die runs vertoonden lange staarten, die niet meer met vergelijking 13 verklaard kunnen worden. In zulke gevallen is de eerste-orde-benadering van de tijdsafhankelijke term, die ik aan de wet van Fick toevoegde (vergelijking 11), duidelijk ontoereikend. Maar dat doet geen afbreuk aan de stelling dat het dispersieproces een golfkarakter heeft.

Het gedrag van de dispersiviteit α_L nabij de bron

Uit laboratoriumproeven en veldwaarnemingen is gebleken dat de klassieke dispersie-theorie tekortschiet in de beschrijving van de beginfase van de dispersie. Als de solute na een zeer kortdurende lozing met de stroom mee gevoerd wordt, neemt de doorbraakkromme min of meer de vorm van een Gausskromme aan. De variantie (σ^2) van deze verdeling zou theoretisch lineair moeten toenemen met de afgelegde weg, volgens

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha_L x}{v^2} \quad (19)$$

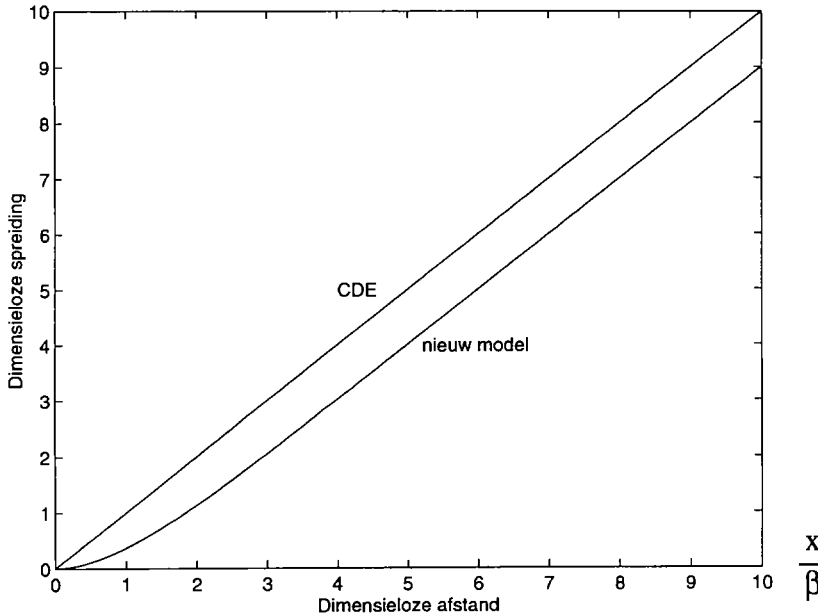
maar de werkelijke verspreiding van de solute komt trager op gang dan de CDE voorspelt. De heersende opvatting is dat α_L eigenlijk tijdsafhankelijk is, maar daarmee wordt de dispersiviteit gediskwalificeerd als mediumconstante. Mijn model voorspelt inderdaad een tragere toename van de verspreiding in de beginfase, terwijl α_L (en β) van meet af aan een vaste waarde hebben. Uit vergelijking 13 is af te leiden dat

$$\sigma_F^2 = \frac{2\alpha_L x}{v^2} - \frac{2\alpha_L \beta}{v^2} \left(1 - e^{-\frac{x}{\beta}}\right) \quad (20)$$

Deze uitdrukking geldt voor de fluxgemiddelde concentratie. Figuur 5 geeft een beeld van het gedrag van σ_F^2 (vergelijking 20) versus σ^2 (vergelijking 19).

⁷ Het is echter geen sluitend bewijs. Het model van Scheidegger geeft vergelijkbaar goede resultaten. De proeven zijn niet geschikt om tussen de nieuwe theorie en Scheidegger te discrimineren, doordat de waarde van de breuk $\alpha_L/2\beta$ zeer klein bleek te zijn. Om een definitief experimenteel onderscheid te kunnen maken zijn nieuwe proeven nodig, met een medium waarvoor de genoemde breuk duidelijk groter is.

$$\frac{\sigma^2 v^2}{2\alpha_L \beta}$$



Figuur 5: Verloop van de verspreiding (variantie) van de solute na een zeer kortdurende lozing, volgens de klassieke theorie (CDE) en volgens het nieuwe model. De verticale as geeft de dimensieloze variantie aan; langs de horizontale as staat de dimensieloze afstand vanaf de bron. Deze figuur laat zien dat volgens het nieuwe model de verspreiding van de solute trager op gang komt dan volgens de klassieke theorie.

Uit vergelijking 20 is op te maken dat $d\sigma_F^2/dx$ aanvankelijk nul is. De verspreiding van de ruimtelijk gemiddelde concentratie c_R vertoont een vergelijkbaar beeld, maar de uitdrukking voor σ_R^2 is gecompliceerder.

Conclusie

In dit artikel heb ik aannemelijk gemaakt dat dispersie geen diffusie-achtig proces is, maar een golfachtig proces. Een subtiële aanpassing van de wet van Fick speelt daarin een cruciale rol. Ik heb een nieuwe dispersievergelijking afgeleid, die een eindige verplaatsings-snelheid van het front en de staart van een verontreiniging oplevert, en geen tegenstroomse verplaatsing van deeltjes toestaat. In tegenstelling tot de klassieke theorie kan met dit nieuwe model een ruimtelijk afgebakend gebied bepaald worden, waarbuiten geen verontreiniging voorkomt. (Dit komt in een volgend artikel aan de orde.) Numerieke kolomproeven ondersteunen de golftheorie, maar het bewijsmateriaal is nog niet toereikend om een onderscheid te maken met een model dat eerder door Scheidegger is voorgesteld. (Scheideggers model is overigens niet op fysische overwegingen gebaseerd, en het laat on-

der bepaalde voorwaarden tegenstroomse verplaatsing van deeltjes toe, wat minder realistisch is.) Het nieuwe model lijkt een verklaring op te leveren voor de schijnbare toename van de dispersiviteit nabij de bron, die tijdens laboratorium- en veldproeven is geconstateerd onder toepassing van de klassieke dispersietheorie.

Nawoord

De gesimuleerde kolomproeven, die essentieel waren voor de ondersteuning van de theorie, werden ontworpen door prof. Otto D.L. Strack, in het kader van een gezamenlijk onderzoek van VEWIN en de Universiteit van Minnesota. Van Amerikaanse zijde werd dit project gesteund door de Legislative Commission on Minnesota Resources (LCMR), met geld uit het Minnesota Future Resources Fund. Ik ben veel dank verschuldigd aan Jogesh Panda, die voor de proeven zelfs zijn nachtrust opofferde.

Literatuur

- Hassanizadeh, S.M. (1996)** On the transient non-Fickian dispersion theory; in: *Transport in Porous Media*, jrg 23, nr 1, pag 107–124.
- Kreft, A. en A. Zuber (1978)** On the physical meaning of the dispersion equation and its solutions for different initial and boundary conditions; in: *Chem. Eng. Sci.*, jrg 33, pag 1471–1480.
- Maas, C. (1994)** On Convolutional Processes and Dispersive Groundwater Flow, proefschrift, Technische Universiteit Delft.
- Parker, J.C. en M. Th. van Genuchten (1984)** Flux-averaged concentrations in continuum approaches to solute transport; in: *Water Resources Research*, jrg 20, nr 7, pag 866–872.
- Scheidtger, A.E. (1960)** *The Physics of Flow through Porous Media*, University of Toronto Press, Toronto.
- Strack, O.D.L. (1992)** A mathematical model for dispersion with a moving front in groundwater; in: *Water Resources Research*, jrg 28, nr 11, pag 2973–2980.