

---

# Verrassende uitkomsten in stromingen

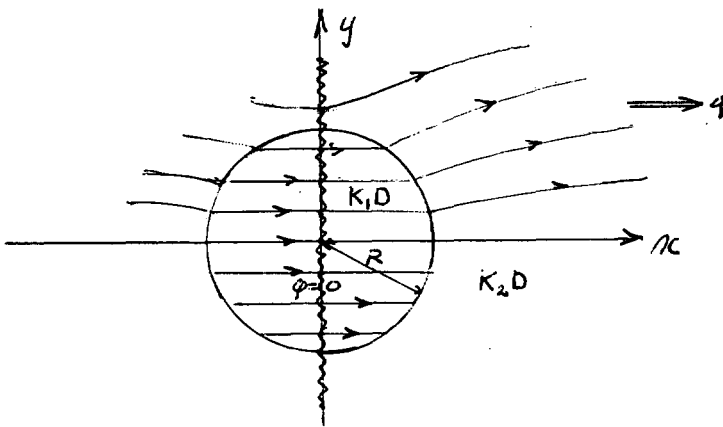
## Deel 2

G.A. Bruggeman

---

*De wiskundige theorie van de grondwaterstroming biedt nu en dan uitkomsten die opvallen door hun eenvoud of anderszins door hun bijzonder structuur, of ook wel omdat ze lijken te spotten met ons hydrologische gevoel. In een aantal artikelen wil ik er een paar aan de orde stellen die ik in de loop der jaren op het spoor kwam. Dit keer onverwachte uitkomsten in grond met bepaalde heterogeniteiten.*

In een volkomen afgesloten watervoerend pakket met een uniforme stroming bevindt zich een cirkelcilindervormige heterogeniteit in de vorm van een grondlichaam met een doorla-  
tendheid die verschilt van die van de omliggende grond, bijvoorbeeld een cirkelvormige vijver, die gedempt is met ander materiaal (zie figuur 1).



Figuur 1

Deze heterogeniteit vormt een obstakel voor de aanwezige uniforme stroming, en de vraag is: hoe veranderen de stroomlijnen buiten en binnen de cilinder ten gevolge hiervan. Een eenvoudige methode om dit vraagstuk op te lossen is overgang op poolcoördinaten  $r$  en  $\theta$  en toepassing van scheiding van variabelen. Stellen we de zakking van het grondwater in het binnengebied  $\phi_1$  en in het buitengebied  $\phi_2$ , dan worden de partiële differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} = 0 \quad (i=1,2) \quad (1)$$

We veronderstellen  $\varphi_i = F_i(r)G_i(\theta)$ , waarbij  $F_i$  en  $G_i$  respectievelijk functies zijn van  $r$  alleen en  $\theta$  alleen. Invullen in de differentiaalvergelijking geeft

$$G_i \frac{d^2 F_i}{dr^2} + \frac{G_i}{r} \frac{dF_i}{dr} + \frac{F_i}{r^2} \frac{d^2 G_i}{d\theta^2} = 0$$

waaruit

$$\frac{r^2}{F_i} \frac{d^2 F_i}{dr^2} + \frac{r}{F_i} \frac{dF_i}{dr} = -\frac{1}{G_i} \frac{d^2 G_i}{d\theta^2} \quad (i = 1, 2)$$

Omdat het linkerlid van deze vergelijking alleen afhankelijk is van  $r$  en het rechterlid alleen van  $\theta$ , moeten beiden gelijk zijn aan een constante, bijvoorbeeld  $\alpha_i^2$ . Er ontstaan dan twee gewone differentiaalvergelijkingen, respectievelijk voor  $r$  en voor  $\theta$ , namelijk:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 F_i}{dr^2} + r \frac{dF_i}{dr} - \alpha_i^2 F_i &= 0 \\ \frac{d^2 G_i}{d\theta^2} + \alpha_i^2 G_i &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

met als algemene oplossingen:

$$\begin{aligned} F_i(r) &= A_i r^{\alpha_i} + B_i r^{-\alpha_i} \\ G_i(\theta) &= C_i \sin(\alpha_i \theta) + D_i \cos(\alpha_i \theta) \end{aligned}$$

Daarmee wordt

$$\varphi_i(r, \theta) = \{A_i r^{\alpha_i} + B_i r^{-\alpha_i}\} \{C_i \sin(\alpha_i \theta) + D_i \cos(\alpha_i \theta)\} \quad (3)$$

Hierin zijn  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  en  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) nog willekeurige constanten welke moeten worden opgelost uit de randvoorwaarden en uit de continuïteitsvoorwaarden ter plaatse van de cilinderomtrek.

Het probleem is symmetrisch ten opzichte van de  $x$ -as, zodat de grondwatersnelheden loodrecht op die as gelijk zijn aan nul:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(x, 0) = 0$$

of in poolcoördinaten:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta}(r, \pi) = 0$$

Deze randvoorwaarde toegepast op de algemene oplossing voor  $\varphi_i$ , zoals aangegeven in (3), geeft direct dat  $C_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ) en  $\alpha_i = n$ , een geheel getal.

De  $y$ -as is een lijn van gelijke zakkings, zowel voor  $r < R$  als voor  $r > R$ ; we kiezen deze als

nulllijn voor  $\varphi_i$ , zodat  $\varphi_i(r, \pm \frac{\pi}{2}) = 0$  en dus  $\alpha_i = 1, 3, 5, \dots$

In het binnengebied ( $r \leq R$ ) geldt dat voor  $r = 0$   $\varphi_1 = 0$  is en dus  $B_1 = 0$ , zodat met  $A_1 D_1 = A$  het zakkingsverloop binnen de cilinder kan worden weergegeven door

$$\varphi_1(r, \theta) = Ar^n \cos(n\theta) \quad (r \leq R) \quad (4)$$

Voor het buitengebied ( $r \geq R$ ) geldt dat op grote afstand ( $r \rightarrow \infty$ ) nog ongestoorde uniforme stroming plaats vindt:

$$\varphi_2(r, \theta) = \left( \frac{q}{K_2 D} r + \frac{B}{r} \right) \cos \theta \quad (r \geq R) \quad (5)$$

De constanten A, B en n uit (4) en (5) kunnen worden opgelost uit de continuïteitsvoorwaarden ter plaatse van de cilinderomtrek:

$$\begin{aligned} \varphi_1(R, \theta) &= \varphi_2(R, \theta) \\ K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(R, \theta) &= K_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(R, \theta) \end{aligned}$$

De eerste continuïteitsvoorwaarde geeft

$$AR^n \cos(n\theta) = \left( \frac{qR}{K_2 D} + \frac{B}{R} \right) \cos \theta$$

Hieruit volgt direct dat  $n = 1$ , omdat A en B onafhankelijk moeten zijn van  $q$ .

De tweede voorwaarde geeft

$$K_1 A \cos \theta = K_2 \left( \frac{q}{K_2 D} - \frac{B}{R^2} \right) \cos \theta$$

zodat de beide vergelijkingen in A en B worden:

$$\begin{aligned} RA - \frac{1}{R} B &= \frac{qR}{K_2 D} \\ K_1 A + \frac{K_2}{R^2} B &= \frac{q}{D} \quad \text{waaruit} \quad A = \frac{2q}{(K_1 + K_2)D} \quad \text{en} \quad B = \frac{qR^2}{D} \left( \frac{2}{K_1 + K_2} - \frac{1}{K_2} \right) \end{aligned}$$

De oplossingen worden dus in poolcoördinaten

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta) &= \frac{2q}{(K_1 + K_2)D} r \cos \theta \\ \varphi_2(r, \theta) &= \frac{q}{D} \left\{ \frac{r}{K_2} + \frac{R^2}{r} \left( \frac{2}{K_1 + K_2} - \frac{1}{K_2} \right) \right\} \cos \theta \end{aligned} \quad (6)$$

en in Cartesische coördinaten:

$$\varphi_1(x,y) = \frac{2q}{(K_1 + K_2)D} x$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{q}{K_2 D} x + \frac{qR^2}{D} \left( \frac{2}{K_1 + K_2} - \frac{1}{K_2} \right) \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

Binnen de cirkel blijkt dus zuiver uniforme stroming op te treden met eenzelfde debiet  $q$ , maar voor een gemiddelde  $K$ -waarde! Toch wel een verrassende uitkomst.

Bijzondere gevallen:

1<sup>e</sup>  $K_1 = K_2 = K$

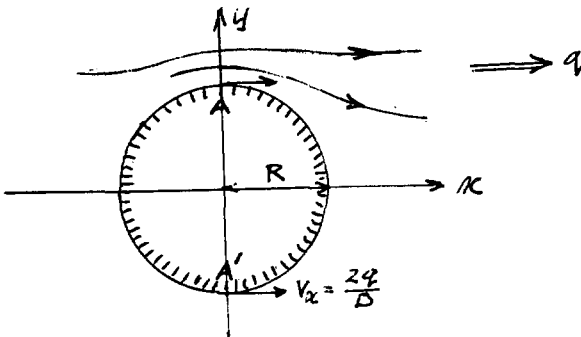
In dit geval is er geen heterogeniteit en ondervindt de uniforme stroming geen verstoring, wat ook na invulling in (6) en (7) blijkt:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{q}{KD} r \cos \theta = \frac{q}{KD} x$$

2<sup>e</sup>  $K_1 = 0$

Dit geeft een voor water ondoordringbare cirkelcilinder in een uniforme stroming (zie figuur 2); de stroming buiten de cilinder wordt na invulling van  $K_1 = 0$  in (7) weergegeven door:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{qx}{K_2 D} \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (8)$$



Figuur 2

De grondwatersnelheden in  $x$ - en  $y$ -richting worden:

$$v_x = K_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{q}{D} \left[ 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} - \frac{2R^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$v_y = K_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -\frac{q}{D} \frac{2R^2 xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ter plaatse van de punten A en A' met coördinaten respectievelijk  $(0, R)$  en  $(0, -R)$  (zie figuur 2) worden de verticale snelheden nul en de horizontale snelheden gelijk aan

$$v_x = \frac{2q}{D}$$

dus gelijk aan tweemaal de grootte van de uniforme stroming, onafhankelijk van de straal van de cilinder! Een waterdichte damwand met een straal van vele meters geeft dus aan de uiterste randen eenzelfde beeld te zien als een kleiprop van enkele tientallen centimeters, namelijk verdubbeling van de stroomsterkte van de uniforme stroming. Dit verzin je toch niet zelf!

3<sup>e</sup>  $K_1 = \infty$

Dit geeft een open cirkelvormige vijver in uniforme stroming (zie figuur 3) waarvan het zakkingsverloop volgt uit formule (7) door daarin  $K_1 = \infty$  te substitueren:

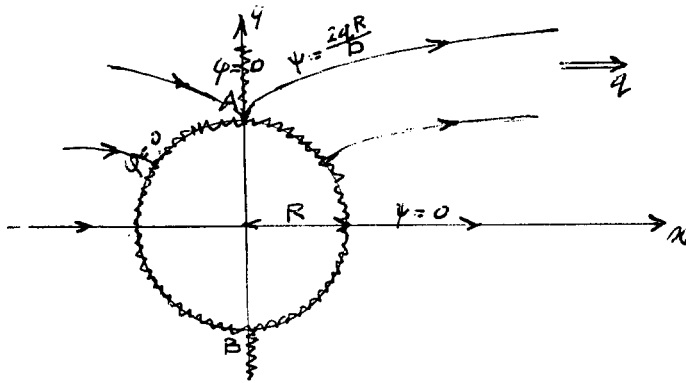
$$\phi_2(x, y) = \frac{qx}{K_2 D} \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (9)$$

De potentiaalfunctie  $\phi_2 = K_2 \phi_2$  is het reële deel van de complexe potentiaalfunctie  $\Omega$  :

$$\Omega_2 = \frac{q}{D} \left( z - \frac{R^2}{z} \right)$$

wat met  $z = x + iy$  gemakkelijk is te verifiëren. Met  $\Omega_2 = \phi_2 + i\Psi_2$  wordt de formule voor de stroomfunctie:

$$\Psi_2 = \frac{qy}{D} \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (10)$$



Figuur 3

Het is interessant om te weten welke hoeveelheid water door de vijver stroomt; deze kan worden bepaald met behulp van de uiterste stroomlijnen welke nog de vijver bereiken. Dat zijn de stroomlijnen  $\Psi_A$  en  $\Psi_B$  door de punten A en B (zie figuur 3). De waarden volgen uit formule (10) met  $x_A = 0, y_A = R$  en  $x_B = 0, y_B = -R$ :

$$\Psi_A = \frac{2qR}{D}$$

$$\Psi_B = -\frac{2qR}{D}$$

Het verschil van deze twee waarden, vermenigvuldigd met de diepte van de vijver (pakkedikte  $D$ ) geeft de totale doorstroming  $Q$ :

$$Q = 4qR$$

Er stroomt dus altijd tweemaal zoveel water door de vijver als door eenzelfde doorsnede in het geval zonder vijver!

De waarde van  $\Psi_A$  ingevuld in formule (10) geeft de vergelijking voor de uiterste stroomlijn  $\Psi_A$ , namelijk:

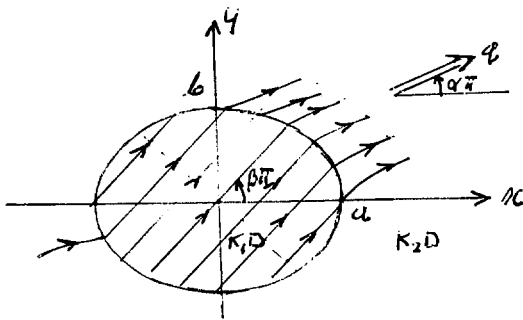
$$x^2 = \frac{R^2 y}{2R - y} - y^2 \tag{11}$$

De uitkomst is onafhankelijk van  $q$  of  $KD$ ! Achteraf gezien logisch, want er is maar één exact vierkantennet mogelijk. Voor de oplossing van dit vraagstuk heb je geen verstand nodig van geohydrologie; je moet alleen goed een vierkantennet kunnen tekenen!

Dit vraagstuk heeft ook nog een praktisch milieutintje: een vervuiling buiten de uiterste stroomlijnen, met als horizontale asymptoten  $y = \pm 2R$ , zal de vijver niet bereiken (een beetje ruim inschatten, vanwege eventuele transversale dispersie).

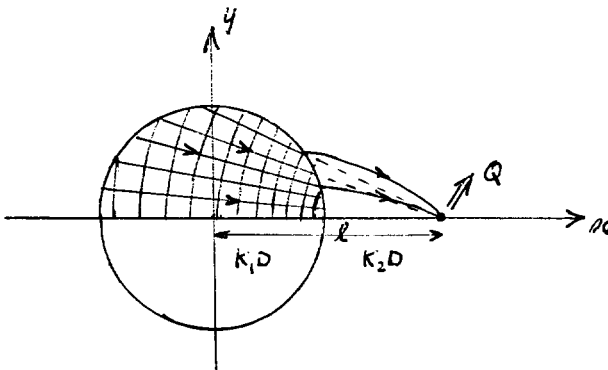
De driedimensionale tegenhanger van dit vraagstuk, een bol in driedimensionale uniforme stroming, geeft voor een dichte bol een snelheid van het grondwater aan de uiterste rand van de bol die *anderhalf maal zo groot* is als die van de uniforme stroming, terwijl voor een open bol (zonder grond maar met water) geldt dat er *driemaal* zoveel water door de bol stroomt als door eenzelfde doorsnede in het geval zonder bol.

Ook voor een ellipsvormige discontinuïteit in een uniforme stroming geldt dat de stroming binnen de elliptische cilinder zuiver uniform is (zie figuur 4), wat aangetoond is door Obdam en Veling (1987).



Figuur 4

Een onttrekkingsput met een debiet  $Q$  in de buurt van een cirkelvormige heterogeniteit geeft het stromingsbeeld te zien dat is weergegeven in figuur 5.

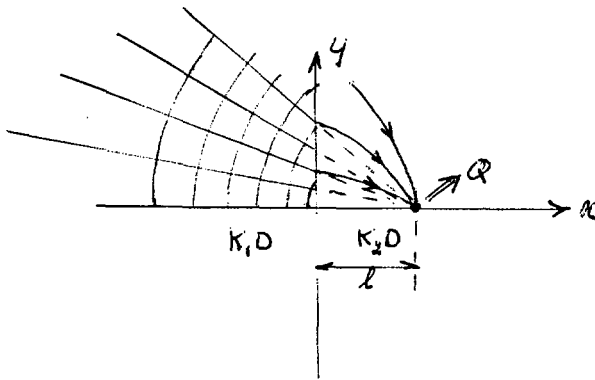


Figuur 5

De zakking binnen een cirkelcilinder kan worden weergegeven door

$$\varphi(x,y) = c - \frac{Q}{2\pi(K_1D + K_2D)} \ln[(x-l)^2 + y^2]$$

met  $c$  een constante vanwege het quasi-stationaire karakter van de stroming. Het zakingsverloop binnen de cirkel blijkt dus zuiver radiaal te zijn in de richting van de put, veroorzaakt door hetzelfde debiet  $Q$ , maar voor een gemiddelde doorlatendheid, onafhankelijke van de grootte van de straal van de cirkel! Hetzelfde geldt dus ook voor het geval, weergegeven in figuur 6, waarbij het gedeelte links van de  $y$ -as met een afwijkende  $K$ -waarde kan worden opgevat als een ontaarde cirkel met oneindig grote straal. Hier geldt ook voor de linkerhelft:



Figuur 6

$$\varphi(x,y) = c - \frac{Q}{2\pi(K_1D + K_2D)} \ln[(x-l)^2 + y^2]$$

De linkerhelft van het watervoerende pakket trekt zich eigenlijk nauwelijks iets aan van de rechterhelft (behalve dan die gemiddelde  $K$ -waarde) en vertoont zuivere radiale stroming naar de pompput tot aan de scheidingslijn; vanaf daar moet de rechterhelft zich maar aanpassen! Je zou nu denken dat een onttrekkingsput in de nabijheid van een ellipsvormige heterogeniteit ook binnen de ellips zuiver radiale stroming zou veroorzaken. Maar dat is niet zo, zodat blijkbaar ieder geval op zichzelf staat en apart moet worden berekend.

Volgende keer een verrassende uitkomst bij de berekening van een zoet/zout grensvlak.

## Literatuur

Obdam, A.N.M. en E.J.M. Veling (1987) Elliptical inhomogeneities in groundwater flow – an analytical description; in: *Journal of Hydrology*; vol 95, pag 87–96.