
Kwelvensters onder gebouwen en in het vrije veld

Kees Maas

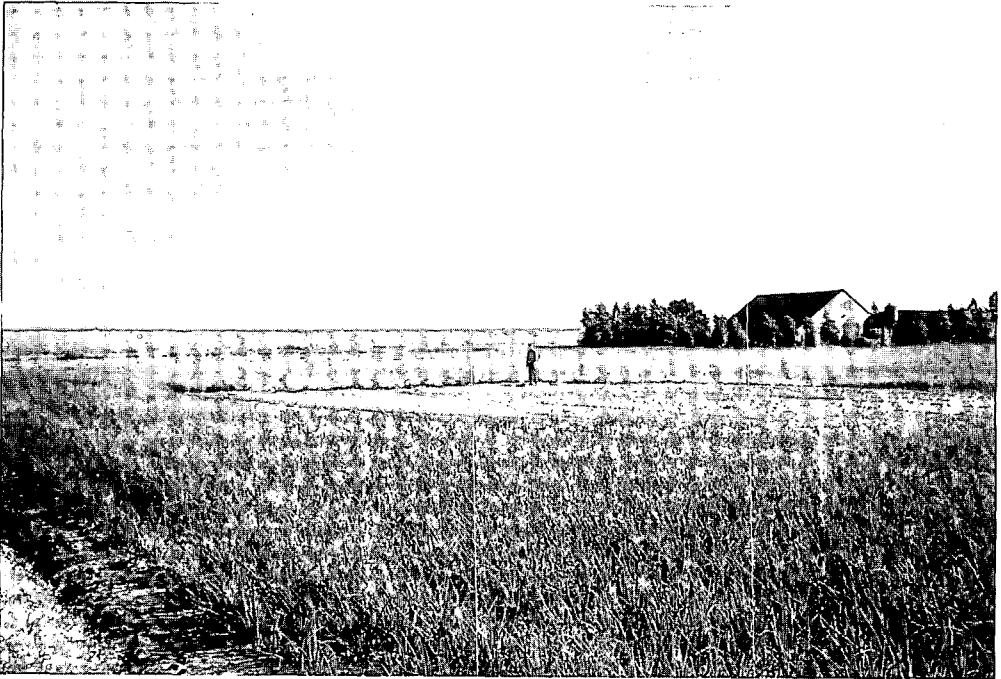
Inleiding

In Stromingen 6/4 beschreven *Anton Poot en Paul Schot* de vorm en de dynamiek van een neerslaglens in een vlak perceel tussen evenwijdige waterlopen in een kwelgebied. De vorm van de lens blijkt sterk af te hangen van de ruimtelijke verdeling van de grondwateraanvulling. Als de aanvulling gelijkmatig over een perceel verspreid is, heeft de lens een vrijwel parabolisch verloop. Dit is gewoonlijk het geval in cultuurgebieden die goed ontwaterd zijn. Minder goed ontwaterd land en vochtige natuurgebieden kennen vaak plekken waar in natte tijden de grondwaterspiegel tot aan het maaiveld stijgt, zodat overtollige neerslag oppervlakkig afstroomt in plaats van in de bodem weg te zijgen. Op zulke plaatsen, die dus een geringere grondwateraanvulling kennen, is de lens dunner. Onder bepaalde hydrologische verhoudingen kan het diepere grondwater er zelfs dagzomen, om *kwelvensters* te vormen. Natuurbeheerders spreken dan van *kwel aan maaiveld*. Ze zijn er dol op, omdat dieper grondwater kansen biedt aan vegetatietypen die zeldzaam geworden zijn. Boeren zijn er minder blij mee. Uit mijn eigen loopbaan herinner ik me de grote kale plekken in het vlakke Zeeuwse bouwland, die het gevolg zijn van optrekkend zout grondwater (figuur 1). Ze liggen op slecht ontwaterde plaatsen nabij de kust, waar de kwelflux groot en de grondwateraanvulling klein is.

Onder gebouwen ontbreekt de grondwateraanvulling geheel. Als de grondwaterspiegel hoog genoeg staat, treedt er zelfs het hele jaar door verdamping op. (Ongetwijfeld kent u de muffige grondwaterlucht van kelders, of oude kerken met natuurstenen vloeren). In kwelgebieden zijn gebouwen dus bij uitstek plaatsen waar kwelvensters voorkomen. Omdat het diepere grondwater van nature schadelijke stoffen kan bevatten, zoals radon of arsenicum, is dit verschijnsel van belang uit een oogpunt van volksgezondheid. Schadelijke stoffen komen natuurlijk ook voor in pluimen van vuilstortplaatsen. Men kan in deze een onderscheid maken tussen primaire contaminatie, waarbij de schadelijke stoffen rechtstreeks van het stort afkomstig zijn, en secundaire contaminatie, in welk geval de pluim schadelijke bodembestanddelen mobiliseert, die onder schone condities met het grondwater in evenwicht verkeerden. Op die manier kunnen zelfs onschuldig ogende stortplaatsen alsnog in een milieuramp verkeren. Woningen die benedenstrooms van een vuilstortplaats in een kwelgebied liggen kan men dus maar beter scherp in de gaten houden!

Niet alleen woningen van mensen trouwens; ook de woningen van dieren zijn kwetsbaar voor vervuiling via het grondwater. Ik werd daar onlangs bij bepaald toen een voormalige varkenshouder mij om advies vroeg. In 1977 was hij een varkensfokkerij begonnen in de

Kees Maas is werkzaam bij Kiwa en de TU Delft, e-mail kees.maas@kiwa.nl.



Figuur 1: Zout kwelvenster nabij Ouwerkerk, Schouwen-Duiveland (foto 5 augustus 2001).



Figuur 2: Uittredend percolaat, circa 40 jaar nadat het stort volgens officiële bronnen gesloten werd (foto 15 april 2001).

nabijheid van een afgewerkte gemeentelijke vuilnisbelt, waar huisvuil en industrieel afval begraven liggen. De stortplaats ligt tegen de dijk van een rivier met een gestuwd peil, die permanent water verliest aan de omgeving; een hydrologische situering dus, die een optimale verspreiding van percolaat waarborgt (figuur 2). Zowel de gemeente als de provincie verzekeren echter dat er geen risico voor de omgeving bestaat.

Met de varkensfokkerij ging het van meet af aan mis. Ondanks een intensieve veterinaire begeleiding lukte het de varkenshouder niet om zijn dieren gezond te houden. Een veterinaire patholoog, die jarenlang tevergeefs naar een ziekteverwekker gezocht had, concludeerde tenslotte dat er sprake moest zijn van een "intoxicatie uit het milieu". (Veel later zou een toxicoloog van de Universiteit Utrecht vaststellen dat de varkens door inademing blootgesteld waren geweest aan arsinehoudende dampen uit het grondwater.) Wegens de geruststellende houding van de overheid had de varkenshouder nog niet eerder serieus aan een verband tussen zijn problemen en de stortplaats gedacht, maar nu begon hij toch te vermoeden dat het stort minder veilig was dan de verantwoordelijke instanties voorgaven. Hij deed een beroep op zijn rechtsbijstandsverzekering. De verzekeraar legde begripvol uit



POLIS RECHTSBIJSTANDVERZEKERING

verzekeringnemer:

Betreft: **WIJZIGING VERZEKERING**

Polisnummer **0001043B618**

De maatschappij verzekert op grond van de door haar ontvangen aanvraag, die geacht wordt met deze polis een geheel uit te maken, op de hieronder genoemde voorwaarden, de nader omschreven risico's.

ingangsdatum	eerstkomende premieervaldag	einddatum verzekering	verzekerd op algemene voorwaarden	premie per JAAR (excl. kosten en assurantiebel.)	premie (incl. kosten en assurantiebel.)
26-02-1985	07-06-1985	06-06-1985	model 63-1	f 359,00	f 385,47

De verzekering wordt per einddatum telkens verlengd voor 12 maanden. Tot de eerstkomende premieervaldag wordt in rekening gebracht:

premie f	1,40	poliskosten f	8,00	assur.bel. f	0,66	TOTAAL f	10,06
----------	------	---------------	------	--------------	------	----------	-------

DE VERZEKERING GELDT VOOR DE VOLGENDE RUBRIEK

VII-A RECHTSBIJSTAND VOOR AGRARIERS

CLAUSULES.

14 IN AFWIJKING VAN HET BEPAALDE IN DE ALGEMENE VOORWAARDEN VERSTREKT DE STICHTING GEEN ADVIEZEN OP JURIDISCH AGRARISCH TERREIN. VERZEKERDE KAN ZICH HIERVOOR WENDEN TOT DE JURIDISCHE DIENST VAN ZIJN STANDSORGANISATIE.

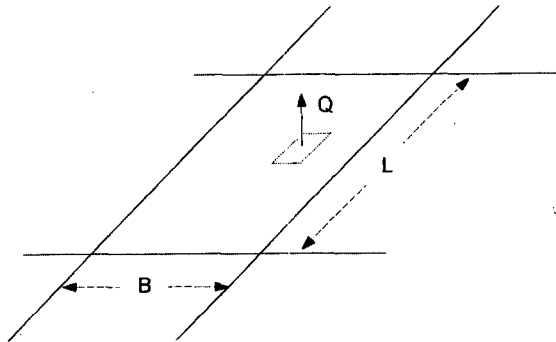
Figuur 3: In plaats van zijn beroep op rechtsbijstand te honoreren, knoeide de verzekeraar zodanig met de polis van de varkenshouder, dat zijn probleem van verzekering werd uitgesloten. Zoals u ziet moest voor deze dienst ook nog betaald worden.

dat zijn aanvraag bij gebrek aan gegevens nog niet ontvankelijk was, en hechtte in allerijl een clausule aan zijn polis, die zijn probleem van verzekering uitsloot (figuur 3). Toen door de tegenvallende resultaten de bank zijn interesse in het bedrijf verloor, werd de boer uiteindelijk in 1987 gedwongen om de onderneming op te geven. De zaak zou u vast en zeker boeien, maar Stromingen is niet het geschikte medium om er verder op in te gaan.

Vraagstelling

Ik wil in dit artikel wel ingaan op één van de hydrologische vragen die mij bezighielden. Het percolaat van de vuilnisbelt verspreidt zich via een watervoerend pakket, dat afgedekt wordt door een enkele meters dikke, minder goed doorlatende laag. De advocaat van de gemeente voert aan dat door de aanwezigheid van deze laag het percolaat de varkensstal niet bereikt kan hebben. Zij wordt in haar mening gesteund door een adviesbureau, dat uit metingen afgeleid heeft dat het ondiepe grondwater nabij de stal niet omhoog, maar omlaag stroomt. In dit artikel behandel ik de vraag *op welke manier dieper grondwater desondanks de stal bereikt kan hebben*. Met name ben ik nieuwsgierig waarom een kleinere varkensstal op een naburig bedrijf, dat zelfs nog wat dichter bij het stort ligt, geen problemen had (een saillant detail dat de advocaat van de gemeente tot nu toe ontgaan is). Mijn onderzoek leidde tot een criterium dat aangeeft onder welke hydrologische verhoudingen kwelwater het maaiveld (c.q. de stal) bereiken kan. De resultaten zijn overdraagbaar op kwelvensters in het vrije veld. Voor het geval dat de stal precies midden op het perceel staat, heb ik een gesloten wiskundige uitdrukking kunnen vinden. De resultaten voor een aantal andere posities van de stal geef ik in de vorm van grafiekenbundels.

Rekenschema



Figuur 4: Rekenschema

Mijn rekenschema (figuur 4) stelt een rechthoekig perceel voor, dat begrensd wordt door sloten die zowel regenwater als kwelwater afvangen. De afvoer van regen- en kwelwater verdeel ik gelijkmatig over de sloten. Ik neem aan dat de kwel van grote diepte komt, dat de neerslag (of liever: de grondwateraanvulling) gelijkmatig over het perceel verdeeld is, en dat in de situatie zonder stal de stroomlijnen midden onder de sloten vertikaal omhoog

lopen. Ter plaatse van de stal vindt geen aanvulling van het grondwater uit neerslag plaats, terwijl er wel verdamping is. *Relatief* is er dus een onttrekking, ter grootte

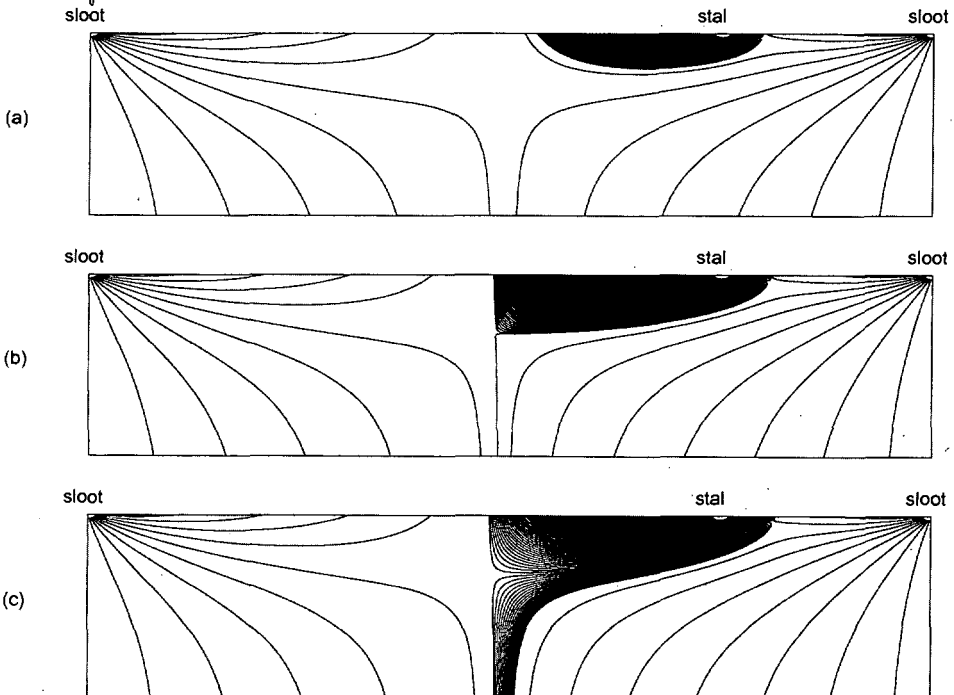
$$Q = A(N + E) \tag{1}$$

waarin

Q	=	relatieve onttrekking (m^3/d)
A	=	vloeroppervlakte van de stal (m^2)
N	=	grondwateraanvulling (neerslag minus verdamping) (m/d)
E	=	verdamping in de stal (m/d)

Ik neem aan dat de afmetingen van de stal klein zijn ten opzichte van de afmetingen van het perceel, zodat de onttrekking tot een puntbron geschematiseerd mag worden. Tenslotte veronderstel ik dat de onttrekking zo klein is dat hij de afvoer naar de sloten niet noemenswaardig beïnvloedt.

is dit een directe veronderstelling?
 Ik denk dat daar waar level ee probleem vormt meestal sprake is van ee intensief slotenrebel en dat de stal juist vaak een significant deel van (in ieder geval) de breedte in beslag neemt.



Figuur 5: (a) Onttrekking door de stal kleiner dan de kritieke waarde, (b) Onttrekking gelijk aan de kritieke waarde (c) Onttrekking groter dan de kritieke waarde. Merk op dat het diepere grondwater, hat door de stal wordt aangetrokken, niet loodrecht onder de stal vandaan komt, maar van het perceelsmidden.

De wiskundige beschrijving van het stromingspatroon dat door deze configuratie van winnings- en infiltratiemiddelen wordt opgewekt stel ik uit tot de appendix. Figuur 5 geeft drie grafisch uitgewerkte voorbeelden van het stromingspatroon in een dwarsdoorsnede die over de stal loopt. In figuur 5a is de onttrekking Q te klein om kwelwater aan te trekken; in figuur 5c is hij daarvoor groot genoeg. Er bestaat een waarde van Q – de kritieke waarde Q_k – waarbij nog juist geen kwelwater aangetrokken wordt (figuur 5b). In dit artikel presenter ik voor een aantal gevallen het verband tussen de kritieke onttrekking Q_k en diverse hydrologische en geometrische parameters.

Geval 1: Stal precies midden op een rechthoekig perceel

Het is me alleen gelukt om een gesloten wiskundige uitdrukking te vinden - en dan nog een benaderende uitdrukking - voor het geval dat de stal precies midden op het perceel staat:

$$Q_k \approx \frac{8}{27} \frac{1}{\pi} \frac{N}{(1 + K/N)^2} \left(\frac{BL^2 + LB^2}{L^2 + B^2} \right)^2 \quad (2)$$

Hierin is

Q_k	=	kritiek debiet (m ³ /d) = debiet waarbij nog juist geen diep grondwater wordt aangetrokken
B	=	breedte van het perceel (m)
L	=	lengte van het perceel (m)
K	=	kwelflux (m/d)

Als Q groter is dan Q_k , dan trekt de stal diep grondwater aan. De uitdrukking is nauwkeuriger naarmate de verhouding K/N groter is. Als er geen kwel is ($K/N = 0$) wordt Q_k met 39% onderschat; bij $K/N = 1$ is de onderschatting nog 7,5%; voor $K/N = 2$ nog 3,4%.

Op grond van (1) kan ik een kritieke grootte A_k van de stal definiëren door:

$$Q_k = A_k(N + E) \quad (1')$$

Dit ingevuld in (2) levert

$$A_k \approx \frac{8}{27} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + K/N)^2} \frac{1}{(1 + E/N)} \left(\frac{BL^2 + LB^2}{L^2 + B^2} \right)^2 \quad (3)$$

Er bestaat dus een kritieke staloppervlakte: de stal trekt alleen diep grondwater aan als zijn oppervlakte groter is dan A_k . Het is wel aardig om op te merken dat de laatste term in het rechterlid van (3) tot B^2 nadert als $L \rightarrow B$ (dus als het perceel vierkant is) én als $L \rightarrow \infty$ (dus als het perceel zeer langgerekt is). Voor rechthoekige percelen is de term wat groter dan B^2 . De term $8/(27\pi)$ is iets kleiner dan 0,1. Als we in aanmerking nemen dat het reken-schema toch al een benadering is van de werkelijkheid, dan kunnen we (3) gevoeglijk vereenvoudigen tot

$$A_k \approx 0,1 \frac{1}{(1 + K / N)^2} \frac{1}{(1 + E / N)} B^2 \quad (4)$$

Hierin is

A_k	=	kritieke oppervlakte van de stal (m^2)
K	=	kwelintensiteit (m/d)
N	=	grondwateraanvulling (m/d)
E	=	verdamping in de stal (m/d)
B	=	kleinste afmeting van het perceel (m)

De vroegere varkensstal van mijn cliënt staat midden tussen twee sloten, met $B \approx 125$ m. Gegeven de hydrologische situatie (die ik om redenen van privacy niet in detail uit de doeken doe) is het heel aannemelijk om te veronderstellen dat de kwelintensiteit K ter plaatse in de orde van de grondwateraanvulling N ligt. (Vanzelfsprekend ontbreken onder de gegeven omstandigheden de financiële middelen om dit door veldonderzoek te onderbouwen.) Met verdampingswaarden binnen een stal heb ik geen ervaring, maar omdat de stal 's winters verwarmd wordt, lijkt het me niet onredelijk om aan te nemen dat de verdamping E , gemiddeld over een jaar beschouwd, groter is dan de verdamping in het vrije veld. Ik schat hem in de orde van de grondwateraanvulling N . De kritieke staloppervlakte komt hiermee op circa $200 m^2$. Met zijn afmetingen van $30 \times 50 = 1500 m^2$ komt de varkensstal hier ruimschoots overheen, zelfs als men de waarden van K en E binnen de grenzen van de redelijkheid varieert. Men moet er dus van uitgaan dat hij diep grondwater aangetrokken heeft.

De kleinere stal, waarover ik in de inleiding sprak, (dat is dus de stal die geen problemen kende), had een oppervlakte van $10 \times 20 = 200 m^2$, wat volgens (4) juist de kritieke oppervlakte is. Hij stond overigens niet midden op het perceel, maar op ca 1/4. Zoals we in de volgende paragraaf zullen zien is de kritieke staloppervlakte op die plaats duidelijk groter dan wat ik met formule (4) bereken. Ik kom daarom in de volgende paragraaf nog een keer op de kleine stal terug.

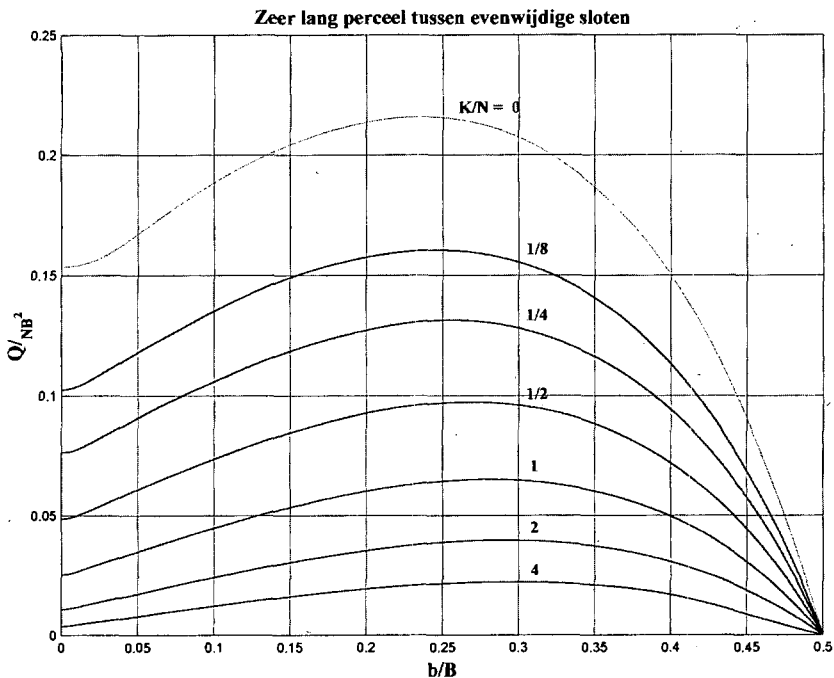
Geval 2: Stal op een zeer langgerekt perceel

In het meer algemene geval, wanneer de stal niet precies in het midden van het perceel staat, lukt het me niet om een formule te vinden in de trant van (2). Voor een aantal situaties bleek het wel mogelijk om het kritieke debiet iteratief te bepalen, namelijk voor het geval van een zeer langgerekt perceel, en voor het geval van een vierkant perceel met de stal ergens op een middellijn. Figuur 6 geeft het resultaat voor het geval van een zeer langgerekt perceel, met de stal op een willekeurige afstand b (m) uit de middellijn. Langs de horizontale as staat de *dimensieloze* afstand b/B ; langs de verticale as staat het *dimensieloze* kritieke debiet $Q_k/(NB)^2$. De verschillende krommen gelden voor verschillende verhoudingen tussen de kwelintensiteit K en de grondwateraanvulling N . Ik heb met een stippellijn het verloop van het kritieke debiet aangegeven voor het geval dat $K = 0$. Dit is een grensgeval; er is nog wel een stroomlijn die van zeer grote diepte komt, maar die voert regenwater aan dat ter plaatse geïnfilteerd is.

De grafiek laat zien dat de kritieke waarde van Q in het midden van het perceel ($b/B = 0$) een lokaal minimum kent. (De waarden van Q_k in het perceelsmidden komen overeen

met de waarden die met formule (2) gevonden worden, behoudens de afwijkingen die door wiskundige vereenvoudigingen tijdens het afleiden van (2) geïntroduceerd zijn). Midden in het perceel komt dus relatief gemakkelijk diep grondwater aan het oppervlak. Er treedt een maximum van Q_k op ter plaatse van $b/B = 0,25$. De kleinere stal staat dus op een plaats waar het diepe grondwater naar verhouding minder gemakkelijk aangetrokken wordt. Voor $N/K = 1$ is het kritieke debiet Q_k hier bijna drie keer zo groot als midden in het perceel, zodat de kritieke staloppervlakte ter plaatse van de kleinere stal uitkomt op ca 600 m^2 . Het is dus verklaarbaar dat de kleinere stal, met zijn oppervlakte van 200 m^2 , geen problemen kende.

Ik had het gevonden verloop van Q_k niet bij voorbaat verwacht. Het vergt ook enig inleavingsvermogen om te begrijpen hoe het komt, dat er midden in het perceel zo'n geprononceerd minimum optreedt. Ik heb een paar pogingen gedaan om er in woorden een verklaring voor te geven, zonder tot een begrijpelijk verhaal te komen. U moet daarom maar van me aannemen dat het wiskundig is in te zien.

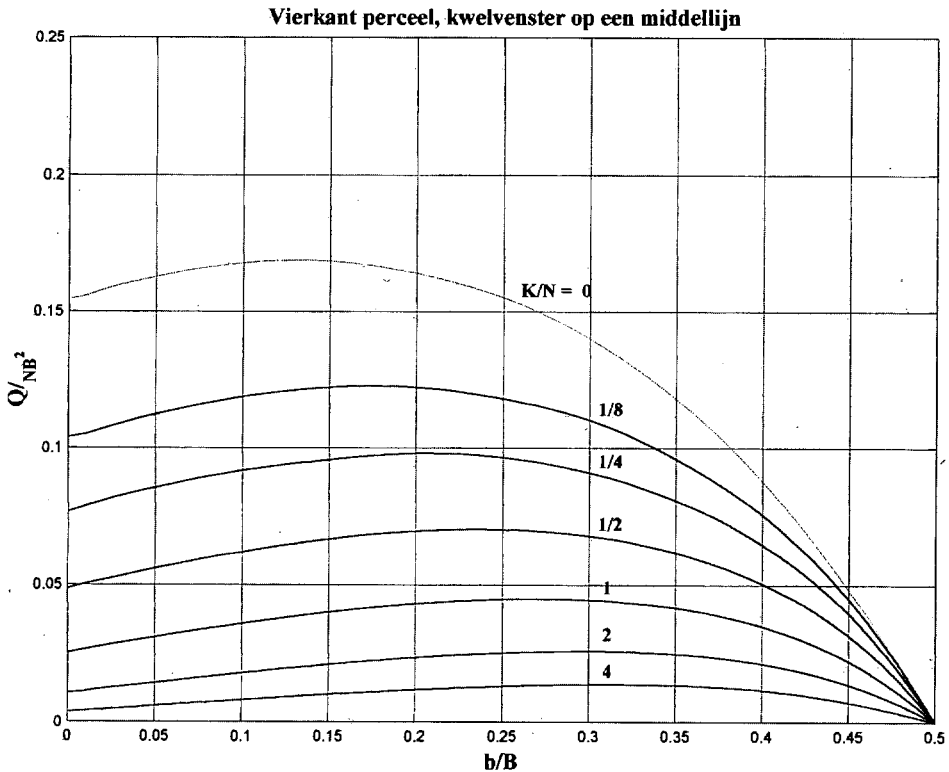


Figuur 6: Kritiek debiet als functie van de plaats van de stal, in het geval van een zeer langgerekt perceel. Q_k = kritiek debiet; N = grondwateraanvulling uit neerstag; K = kwelfflux; B = breedte van het perceel; b = afstand van de puntbron tot het midden van het perceel.

Geval 3: Vierkant perceel, stal op een middellijn

Figuur 7 geeft de (dimensieloze) kritieke onttrekking voor een stal die op een middellijn van een vierkant perceel staat.

Terwijl formule (2) zowel voor vierkante als voor zeer langgerekte percelen opgaat, blijkt er tussen deze twee perceelsvormen wél een duidelijk verschil op te treden als de stal niet meer precies in het midden van het perceel staat. De maxima van Q_k treden nog steeds ruwweg op $b/B \approx 0,25$ op, maar ze zijn in het vierkante perceel (figuur 7) duidelijk lager dan in het zeer langgerekte perceel (figuur 6).



Figuur 7: Kritiek debiet als functie van de plaats van de stal, in het geval van een vierkant perceel met de stal op een middellijn. Q_k = kritiek debiet; N = grondwateraanvulling uit neerslag; K = kwelflux; B = breedte van het perceel; b = afstand van de stal tot het midden van het perceel.

Kwelvensters in het vrije veld

Tot hier toe sloeg mijn theorie op kwelvensters onder een stal. De conclusies gelden natuurlijk ook voor andere gebouwen, zoals woningen. Om de theorie te betrekken op kwelvensters in het vrije veld, moet u zich realiseren dat Q_k staat voor de *plaatselijke afname van de grondwateraanvulling*. Zoals ik in mijn inleiding al aangaf, kan in het vrije veld de grondwateraanvulling plaatselijk klein zijn als gevolg van een slechte afwatering, waardoor in natte tijden het overvloedige regenwater niet kan infiltreren en oppervlakkig afstroomt. Natuurbeheerders helpen dat proces vaak nog een handje door ondiepe greppels te graven. Zo'n ondersteunende maatregel is het meest effectief in het centrum van een perceel. Formule (2) is in principe bruikbaar om in regionale modelstudies te bepalen of waterhuishoudkundige maatregelen of ingrepen in het grondwaterregime leiden tot het ontstaan of verdwijnen van kwelvensters in het vrije veld, maar het regionale model moet dan wel geschikt zijn om de lokale toe- of afname Q van de grondwateraanvulling te voorspellen.

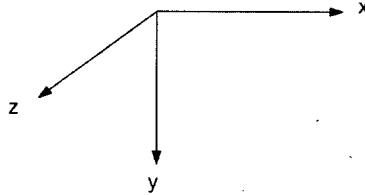
Uit de figuren 7 en 8 blijkt dat ook langs sloten relatief gemakkelijk kwelvensters kunnen optreden; althans is daar de waarde van Q_k relatief laag. Dit geldt vooral voor gebouwen. In het vrije veld treedt van nature langs de sloten gewoonlijk geen reductie van de grondwateraanvulling op, zodat men hier geen natuurlijke kwelvensters moet verwachten. Dat langs sloten in kwelgebieden desondanks vaak basenminnende vegetatietypen voorkomen, is mijns inziens te danken aan het feit dat de neerslaglens daar erg dun is, zodat het kwelwater de wortelzone bereiken kan.

Anisotropie

Ik ben stilzwijgend uitgegaan van een isotrope opbouw van de ondergrond. In kwelgebieden is dit bij uitstek niet het geval. In Stromingen 5/1 gaf *Mark Bakker* een helder overzicht van de regels die toegepast kunnen worden om een formule die afgeleid is voor een homogeen medium om te bouwen tot een formule die ook geldig is onder anisotrope condities. In mijn geval komt het erop neer dat de horizontale afstanden L en B vermenigvuldigd moeten worden met $\sqrt{k_h / k_v}$ en de bronterm Q_k met k_h / k_v , waarin k_h en k_v de horizontale en verticale specifieke doorlatendheden zijn. Als ik deze regels toepas op formule (2), dan blijken k_h en k_v uit het resultaat weg te vallen. Formules (2), (3) en (4) gelden dus ook voor anisotrope ondergrond.

Appendix

Deze appendix geeft een verantwoording van de resultaten die ik in de hoofdtekst van dit artikel presenteerde. Het rekenschema heb ik al toegelicht. Figuur A1 geeft mijn assenstelsel weer.



Figuur A1: Assenstelsel

Mijn model bevat drie verschillende *analytische elementen*: stroming van grote diepte naar een stelsel van evenwijdige drains, stroming naar een puntbron in een driedimensionale ruimte, en (vertikale) uniforme stroming. Ik leid eerst uitdrukkingen af voor de componenten van het specifieke debiet dat door deze elementen opgewekt wordt; daarna werk ik de drie gevallen uit waarvoor ik in de hoofdtekst de resultaten presenteerde.

Het complexe potentiaalpatroon voor stroming van grote diepte naar twee evenwijdige sloten is in de handboeken te vinden (bijvoorbeeld *Bruggeman 356.01*). Voor de sloten die in de lengterichting van het perceel lopen geldt

$$\Omega_1 = \frac{2Q_1}{\pi} \ln \cos \frac{\pi(x+iy)}{B} \quad (\text{A1})$$

waarin

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \text{complexe potentiaal (m}^2/\text{d)} \\ Q_1 &= \text{debiet per strekkende meter sloot (m}^2/\text{d)} \\ B &= \text{breedte van het perceel (m)} \end{aligned}$$

Het specifieke debiet is hieruit af te leiden volgens de relatie

$$q_x - i q_y = - \frac{d\Omega_1}{d(x+iy)} \quad (\text{A2})$$

hetgeen leidt tot

$$q_x - i q_y = \frac{2Q_1}{B} \tan \frac{\pi(x+iy)}{B} \quad (\text{A3})$$

zodat

$$\begin{aligned} q_x^1 &= \frac{2Q_1}{B} \Re\left\{\tan \frac{\pi(x+iy)}{B}\right\} \\ q_y^1 &= -\frac{2Q_1}{B} \Im\left\{\tan \frac{\pi(x+iy)}{B}\right\} \\ q_z^1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Voor de sloten die dwars op de percelen lopen vind ik op analoge wijze

$$\begin{aligned} q_x^2 &= 0 \\ q_y^2 &= -\frac{2Q_2}{L} \Im\left\{\tan \frac{\pi(z+iy)}{L}\right\} \\ q_z^2 &= \frac{2Q_2}{L} \Re\left\{\tan \frac{\pi(z+iy)}{L}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

waarin

$$L = \text{lengte van het perceel (m)}$$

De sloten vangen de grondwateraanvulling en de kwel af. Als ik de afvoer gelijkmatig over de sloten verdeel, geldt

$$Q_1 = Q_2 = (N + K) \frac{BL}{2B + 2L} \quad (\text{A6})$$

met

$$\begin{aligned} N &= \text{grondwateraanvulling (m/d)} \\ K &= \text{kwelflux (m/d)} \end{aligned}$$

De onttrekking door de stal (of meer algemeen: door het kwelvenster) schematiseer ik tot een puntbron in een driedimensionale halfruimte. De componenten van het specifieke debiet, opgewekt door een puntbron, zijn:

$$q_x^3 = \frac{Q_3}{2\pi} \frac{b-x}{r^3} \quad q_y^3 = -\frac{Q_3}{2\pi} \frac{y}{r^3} \quad q_z^3 = \frac{Q_3}{2\pi} \frac{\ell-z}{r^3} \quad (\text{A7})$$

met

$$r = \sqrt{(b-x)^2 + y^2 + (\ell-z)^2} \quad (\text{A8})$$

Hierin is

$$\begin{aligned} Q_3 &= \text{debiet van de puntbron (m}^3\text{/d)} \\ b &= \text{x-coördinaat van de puntbron (m)} \\ \ell &= \text{z-coördinaat van de puntbron (m)} \end{aligned}$$

De grondwateraanvulling zorgt tenslotte voor

$$q_x^4 = 0 \quad q_y^4 = N \quad q_z^4 = 0 \quad (\text{A9})$$

waarin

$$N = \text{grondwateraanvulling (m/d)}$$

Geval 1: Puntbron precies in het midden van het perceel

Als de puntbron precies in het centrum van het perceel staat, dan is er recht onder de bron een stroomlijn die zuiver vertikaal loopt. Bij kleine waarden van Q_3 treden langs deze stroomlijn twee stagnatiepunten op. Het bovenste stagnatiepunt scheidt het regenwater dat naar de bron stroomt van het regenwater dat naar de sloten stroomt. Het onderste stagnatiepunt scheidt het regenwater dat naar de sloten stroomt van het diepere kwelwater, dat eveneens naar de sloten stroomt. Als ik Q_3 opvoer, schuiven de stagnatiepunten omhoog, terwijl hun onderlinge afstand kleiner wordt. Er bestaat een *kritieke* waarde van Q_3 waarbij de stagnatiepunten samenvallen. Op dat moment trekt de puntbron nog juist geen kwelwater aan. Als ik Q_3 nog verder opvoer, wijken de stagnatiepunten in horizontale zin uiteen, en tussen de stagnatiepunten door stroomt kwelwater omhoog naar de puntbron. Ik ben geïnteresseerd in de kritieke waarde van Q_3 .

De voorwaarden voor het optreden van stagnatiepunten zijn

$$\sum q_x = 0 \quad \sum q_y = 0 \quad \sum q_z = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 4) \quad (\text{A10})$$

Betrokken op de stroombaan langs $x = 0$, $z = 0$ levert dit

$$-\frac{2Q_1}{B} \tanh \frac{\pi y}{B} - \frac{2Q_2}{L} \tanh \frac{\pi y}{L} - \frac{Q_3}{2\pi y^2} + N = 0 \quad (\text{A11})$$

Omdat het kritieke stagnatiepunt naar verwachting dicht onder het maaiveld ligt (dwz dat de waarde van y klein zal zijn) kan ik stellen dat

$$\tanh \frac{\pi y}{B} \approx \frac{\pi y}{B} \quad \tanh \frac{\pi y}{L} \approx \frac{\pi y}{L} \quad (\text{A12})$$

(Deze benadering is de oorzaak van de afwijkingen waarvan ik in de hoofdtekst melding maakte.) Hiermee gaat (A11) over in

$$\left(\frac{2\pi Q_1}{B^2} + \frac{2\pi Q_2}{L^2}\right)y + \frac{Q_3}{2\pi y^2} - N = 0 \quad (\text{A13})$$

In het traject $y > 0$ (dwz: beneden maaiveld) heeft deze vergelijking twee, één of geen wortels. Ik ben geïnteresseerd in het geval dat er één wortel is. Er is één wortel als de afgeleide van (A13) naar y nul is:

$$\left(\frac{2\pi Q_1}{B^2} + \frac{2\pi Q_2}{L^2}\right) - \frac{Q_3}{\pi y^3} = 0 \quad (\text{A14})$$

Dit levert me een uitdrukking op voor y ; dat is de diepteligging van het kritieke stagnatiepunt. Als ik die invul in (A13), vind ik de kritieke waarde van Q_3 waarvoor er juist één stagnatiepunt is. Rekening houdend met (A6) luidt het resultaat

$$Q_{3k} \approx \frac{8}{27} \frac{1}{\pi} \frac{N}{(1+K/N)^2} \left(\frac{BL^2 + LB^2}{L^2 + B^2} \right)^2 \quad (\text{A15})$$

Dit is formule (2) in de hoofdtekst.

Dimensie-analyse

Voor het algemene geval van een puntbron op een willekeurige plaats lukt deze aanpak niet meer, omdat ik dan niet meer van tevoren de stroombaan ken waarlangs het kritieke stagnatiepunt zal optreden. Bovendien wordt het moment van doorbraak dan niet meer gekenmerkt door het samenvallen van twee stagnatiepunten, waardoor de truc niet meer opgaat die ik gebruikte om van (A13) op (A14) te komen. Ik kan wel eenvoudig in MATLAB het stromingspatroon visualiseren, op basis van (A4) t/m (A9). (De figuren 5a t/m c in de hoofdtekst gaven daarvan al voorbeelden). In principe kan ik dan voor elke locatie van de puntbron proberenderwijs de waarde van Q_3 vinden, waarvoor nog juist geen doorbraak van diep grondwater optreedt, namelijk door Q_3 te variëren totdat ik een waarde vind waarbij ik nog juist geen stroomlijn van grote diepte naar de bron zie lopen. Dit is evenwel een bewerkelijk proces dat zich niet laat automatiseren. Om het aantal gevallen dat ik moet doorrekenen tot een minimum te beperken, voer ik eerst een dimensie-analyse uit. De modelparameters zijn Q_3 , N , K , b , ℓ , B en L , waarin b en ℓ de coördinaten van de puntbron zijn. Ik ben geïnteresseerd in Q_3 als functie van de overige parameters:

$$Q_3 = f\{N, K, b, \ell, B, L\} \quad (\text{A16})$$

Het is natuurlijk ondoenlijk om zes parameters te variëren. (Als ik voor iedere parameter slechts tien verschillende waarden zou kiezen, zou het aantal door te rekenen combinaties al een miljoen bedragen. Iedere combinatie kost me ca 5 minuten. Bij een werkdag van 8 uur en een werkjaar van 220 dagen zou de hele exercitie bijna 50 jaar vergen). Door over te gaan op dimensieloze parametergroepen kan ik het aantal parameters met twee verminderen. (Dit volgt uit de Π -stelling, zie bijvoorbeeld *Maas, 1995*). Tabel A1 geeft de dimensietabel.

Tabel A1: Dimensietabel

	[L]	[T]
Q_3	3	-1
N	-1	1
K	-1	1
b	-1	0
ℓ	-1	0
B	-1	0
L	-1	0

De keuze van de dimensieloze groepen is altijd enigszins arbitrair, maar de volgende liggen voor de hand:

$$\frac{Q_3}{NB^2}, \frac{K}{N}, \frac{b}{B}, \frac{\ell}{L}, \frac{B}{L} \quad (\text{A17})$$

De dimensieloze groep $Q_3/(NB^2)$ is dus te schrijven als een functie van de andere groepen:

$$\frac{Q_3}{NB^2} = F\left\{\frac{K}{N}, \frac{b}{B}, \frac{\ell}{L}, \frac{B}{L}\right\} \quad (\text{A18})$$

Maar ook vier parametergroepen is nog erg veel van het goede. Als ik straks mijn resultaten in de vorm van grafieken wil presenteren, dan moet ik me beperken tot gevallen waarin $Q_3/(NB^2)$ afhangt van hooguit twee dimensieloze parameters. Ik kies twee gevallen, die naar mijn idee gezamenlijk toch wel een goed beeld geven van het gedrag van kwelvensters, namelijk:

- een zeer langgerekt perceel, $L \rightarrow \infty$;
- een vierkant perceel met de puntbron op een middellijn, $L = B$, $\ell = 0$.

In deze gevallen vereenvoudigt (A18) tot

$$\frac{Q_3}{NB^2} = F\left\{\frac{K}{N}, \frac{b}{B}\right\} \quad (\text{A19})$$

Geval 2: Zeer langgerekt perceel

Als het perceel zeer langgerekt is treedt er in een dwarsdoorsnede die precies over de puntbron loopt geen stroming in z -richting op, zodat ik de componenten q_z^i buiten beschouwing kan laten. (A6) gaat over in

$$Q_1 = Q_2 = 0,5(N + K)B \quad (\text{A20})$$

In dimensieloze vorm zijn de stelsels (A4) t/m (A9) voor dit geval te schrijven als

$$\begin{aligned} \frac{q_x^1}{N} &= \left(1 + \frac{K}{N}\right) \Re\left\{\tan \frac{\pi(x + iy)}{B}\right\} \\ \frac{q_y^1}{N} &= -\left(1 + \frac{K}{N}\right) \Im\left\{\tan \frac{\pi(x + iy)}{B}\right\} \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

$$\frac{q_x^3}{N} = \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{NB^2} \frac{b/B - x/B}{(r/B)^3} \quad (\text{A22})$$

$$\frac{q_y^3}{N} = -\frac{1}{2\pi} \frac{Q}{NB^2} \frac{y/B}{(r/B)^3} \quad (\text{A23})$$

De volgende MATLAB-M-file visualiseert het stromingspatroon:

```
function LangPerceel(Xp,KoverN,Q)
% function LangPerceel(Xp,KoverN,Q)
% Deze functie dient om uit te zoeken bij welk debiet een puntbron in een
% zeer langgerekt perceel in een kwelgebied diep grondwater aantrekt.
% Xp = dimensieloze plaats van de puntbron = b/B
% b = dimensiedragende plaats van de puntbron
% B = breedte van het perceel
% KoverN = verhouding tussen kwelflux en grondwateraanvulling = K/N
% K = kwelflux
% N = grondwateraanvulling
% Q = dimensieloos debiet van de puntbron = debiet/(NB^2)

% Grid (dimensieloos). NB: I.t.t. de tekst kies ik y positief omhoog, omdat de
% matlab-functie streamline daarop rekent.
x = -.5:.0025:.5;
y = -1:.0025:0;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
R = sqrt((Xp-X).^2 + Y.^2);
Z = X + i*Y;
R = sqrt((Xp-X).^2 + Y.^2);

% Specifieke debieten (dimensieloos), zie (A21) t/m A(23)
q1x = (1+KoverN)*real(tan(pi*(X+i*Y)));
q1y = -(1+KoverN)*imag(tan(pi*(X+i*Y)));
q3x = Q/(2*pi)*(Xp-X)./R.^3;
q3y = -Q/(2*pi)*Y./R.^3;
q4y = -1;

% Plaatje
alpha = (-1:.1:0)*(pi/2);
beta = (-1:.01:1)*pi;
s1x = min(x) + .01*cos(alpha);
s1y = max(y) + .01*sin(alpha);
s2x = max(x) - .01*cos(alpha);
s2y = max(y) + .01*sin(alpha);
s3x = Xp + .01*cos(beta);
s3y = -.01*sin(beta);
close all
streamline(X,Y,-(q1x+q3x),-(q1y+q3y+q4y),[s1x s2x s3x],[s1y s2y s3y],...
[.05 50000])
axis([min(x) max(x) min(y) max(y)])
```

Op basis van deze M-file heb ik de figuren 5 en 6 uit de hoofdttekst geprepareerd. De vector *beta* (onder het kopje % Plaatje) bepaalt hoeveel stroomlijnen naar de puntbron getekend worden. Hoe meer stroomlijnen, hoe nauwkeuriger het kritieke debiet van de puntbron vastgesteld kan worden. De nauwkeurigheid blijft echter betrekkelijk laag, doordat de precisie waarmee de stroomlijnen getekend worden afhangt van de fijnheid van het grid en van de stapgrootte in de functie *streamline*.

Geval 3: Vierkant perceel, puntbron op een middellijn

In het geval dat $L = B$ gaat (A6) over in

$$Q_1 = Q_2 = 0,25(N + K)B \quad (\text{A24})$$

In de M-file LangPerceel moeten dus de specifieke debieten $q1x$ en $q1y$ gehalveerd worden, terwijl de volgende vergelijking moet worden toegevoegd:

$$\frac{q_y}{N} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{K}{N}\right) \Im \left\{ \tan \frac{\pi(iy)}{B} \right\} \quad (\text{A25})$$

Dit is de bijdrage van de dwarssloten aan het specifieke debiet. Langs de middellijn leveren de dwarssloten geen bijdrage in z -richting, zodat $q_z/N = 0$. De aanpassingen in de M-file treden op in de passage onder het kopje % Specifieke debieten. De nieuwe passage luidt:

```
% Specifieke debieten (dimensieloos), zie (A19) t/m A(21)
q1x = .5*(1+KoverN)*real(tan(pi*(X+i*Y)));
q1y = -.5*(1+KoverN)*imag(tan(pi*(X+i*Y)));
q2y = -.5*(1+KoverN)*imag(tan(pi*(i*Y)));
q3x = Q/(2*pi)*(Xp-X)/R.^3;
q3y = -Q/(2*pi)*Y./R.^3;
q4y = -1;
```

Voorts moet het argument van de functie *streamline* aangepast worden:

```
streamline(X,Y,-(q1x+q3x),-(q1y+q2y+q3y+q4y),[s1x s2x s3x],[s1y s2y s3y],...
[.05 50000])
```

Met de aldus aangepaste M-file is figuur 7 in de hoofdtekst samengesteld.

Literatuur

- Bakker, Mark (1999)** Reactie op vuistregels 30 en 33, in: *Stromingen*, jrg 5, nr 1, pag 77–78.
- Bruggeman, G.A. (1999)** Analytical Solutions of Geohydrological Problems, Elsevier, 959 pag.
- Maas, Kees (1995)** Afhankelijkheid van parameters in grondwatermodellen, in: *Stromingen*, jrg 1, nr 2, pag 5–18.
- Poot, Anton en Paul Schot (2000)** Neerslaglenzen, vorm en dynamiek, in: *Stromingen*, jrg 6, nr 4, pag 13–26.

