
Ondiepe waterlopen in Modflow

Kees Maas

Inleiding

In regionale Modflow-modellen worden watervoerende lagen gewoonlijk maar één rekencel dik gemaakt. De al dan niet uitgesproken veronderstelling van de modelbouwers is dat dat wel mag, omdat binnen een aquifer de waterdruk vrijwel hydrostatisch is, zodat de stijghoogte in verticale zin toch niet of nauwelijks varieert. Nabij ondiepe waterlopen gaat deze 'aannname van Dupuit' natuurlijk niet meer op. De stijghoogte die een regionaal grondwatermodel uitrekent klopt daar dus niet (in die zin dat hij niet rechtstreeks te verifiëren is met een peilbuis). Om de afwijking te compenseren wordt aan cellen met waterlopen (river cells) een *riverbed conductance* toegekend, die het mogelijk moet maken om toch de juiste toestroming van grondwater naar de waterloop te berekenen (*McDonald en Harbaugh, 1988, hfdst 6*). De *riverbed conductance* is gedefinieerd door de betrekking

$$QRIV = CRIV(HRIV - h_{ij}) \quad (1)$$

waarin

QRIV	=	hoeveelheid water die de river cell per tijdseenheid verliest aan de aquifer	[m ³ /d]
CRIV	=	riverbed conductance	[d/m ²]
HRIV	=	peil van de waterloop ter plaatse van de river cell	[m]
h_{ij}	=	de stijghoogte in de river cell die het model uitrekent (dat is dus niet werkelijke stijghoogte op die plek)	[m]

(Ik hoop dat u mij de archaïsche notatie niet kwalijk neemt, maar QRIV, CRIV, HRIV en h_{ij} zijn nu eenmaal de namen die in de handleiding van Modflow gebruikt worden). Grondwatermodelbouwers zien de *riverbed conductance* gewoonlijk als iets dat te maken heeft met een weerstandslaagje op de bodem van de waterloop (en de Modflow-handleiding geeft daar ook wel aanleiding toe) maar als de stijghoogte h_{ij} geen glasheldere fysische betekenis heeft moet je natuurlijk ook voorzichtig zijn met de fysische interpretatie van de *riverbed conductance*, die immers per definitie (1) van h_{ij} afhangt. Zoals ik straks zal laten zien kan deze definitie aanleiding geven tot negatieve waarden van de *riverbed conductance*, en dat laat zich moeilijk rijmen met het idee van een weerstandslaagje.

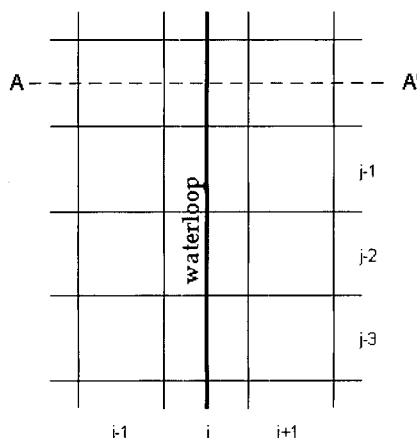
Kees Maas is werkzaam bij TUD en Kiwa Water Research. Postadres: Kiwa NV, Postbus 1072, 3430 BB Nieuwegein, tel: (030) 60 69 547, e-mail: kees.maas@kiwa.nl.

Rekentechnisch en fysisch gezien is er overigens met een negatieve riverbed conductance niets mis. Het model produceert daarmee weliswaar een toestroming van grondwater naar de waterloop terwijl de *berekende* stijghoogte in de river cell *lager* is dan het open water peil, maar de *werkelijke* stijghoogte ter plaatse van de river cell zal in zulke gevallen toch steeds *hoger* zijn dan het open water peil. Een negatieve riverbed conductance levert dus geen principieel bezwaar op tegen het gebruik van de river package. Het concept kent wel een andere beperking, die fundamenteeler van aard is. De river package houdt er namelijk geen rekening mee dat een waterloop invloed heeft op het effectieve doorlaatvermogen van een river cell, en dat leidt tot inconsequenties ten aanzien van de stijghoogte die ter plaatse van de river cell berekend wordt. Dat zal ik straks ook laten zien. Ook al zijn de gevolgen doorgaans niet fataal, het gebrek is gemakkelijk te verhelpen door het doorlaatvermogen van de river cell aan te passen. Aanpassing van het doorlaatvermogen heeft als bijkomend voordeel dat de riverbed conductance niet meer negatief kan worden.

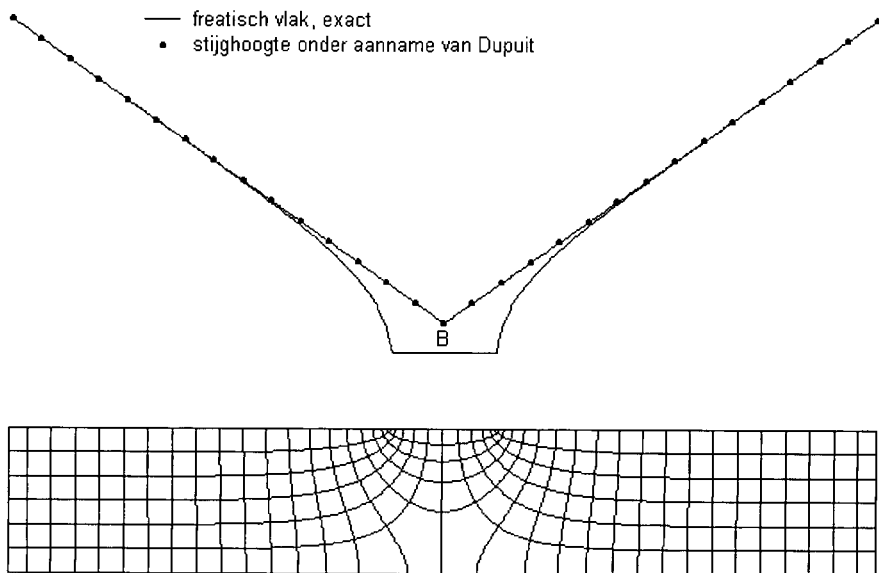
De numerieke waarde van de riverbed conductance is vast te stellen door modelkalibratie, maar hij is ook van tevoren in te schatten op grond van de afmetingen van de waterloop. In dit artikel presenteer ik daarvoor een analytische uitdrukking. Ik lever ook een formule voor het doorlaatvermogen van de river cell. Ik beperk me evenwel tot ondiepe waterlopen die smaller zijn dan de breedte van de modelcellen, en ik houd geen rekening met een eventueel slecht doorlatend laagje op de bodem van de waterloop. De afleiding van de formules laat ik achterwege, want de redactie van dit tijdschrift heeft een hekel aan wiskunde. Wie er wel in geïnteresseerd is kan natuurlijk altijd bij mij terecht. (Mijn e-mail-adres staat op de eerste pagina van dit artikel.)

Een negatieve river conductance?

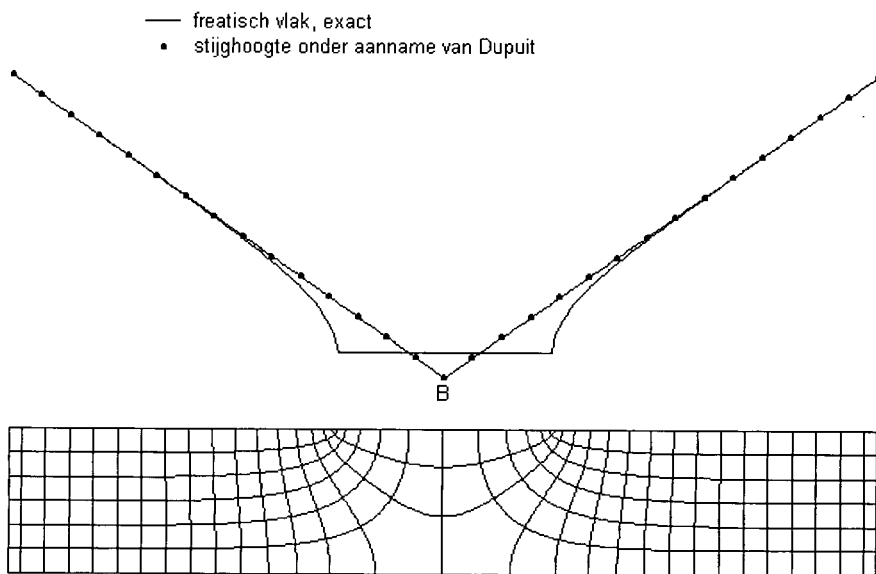
Waterlopen die smaller zijn dan de modelcellen worden gewoonlijk ingebracht als lijnvormige elementen die de middelpunten van cellen verbinden. Figuur 1 geeft daarvan een voorbeeld. Het is voor het doel van dit artikel voldoende om een rechte waterloop in een homogene aquifer te beschouwen, die water afvoert of eventueel verliest, zonder dat er



Figuur 1: Deel van een Modflow-netwerk met een waterloop. De grijze cellen zijn river cells.



Figuur 2: Stromingspatroon, freatisch vlak en stijghoogte onder de aanname van Dupuit langs raai AA', figuur 1, voor een relatief smalle waterloop.



Figuur 3: Stromingspatroon, freatisch vlak en stijghoogte onder de aanname van Dupuit langs raai AA', figuur 1, voor een relatief brede waterloop. Let op de hoogteligging van punt B.

neerslag optreedt. Figuur 2, onderste plaatje, geeft het tweedimensionale stromingspatroon in een verticale doorsnede langs de raai AA' van figuur 1, voor het geval dat de waterloop van links en rechts evenveel water draineert. Het freatische vlak verloopt dan volgens de getrokken lijn in het bovenste plaatje van figuur 2. Op enige afstand van de waterloop (zeg meer dan tweemaal de dikte van de watervoerende laag) gaat de aanname van Dupuit op. Daar zal een regionaal model het freatische vlak correct kunnen simuleren. Dichter naar de waterloop toe beginnen er afwijkingen op te treden tussen model en werkelijkheid. De aanname van Dupuit zorgt ervoor dat de modeluitkomst volgens de rechte stippellijnen verloopt. De stippellijn van links ontmoet die van rechts in het punt B. In dit voorbeeld ligt B hoger dan het peil van de waterloop, wat inhoudt dat er - nog steeds volgens het model - ter plaatse van de waterloop een overdruk heerst. Dit lijkt misschien vanzelfsprekend, maar het is gemakkelijk in te zien dat de hoogteligging van punt B afhangt van de breedte van de waterloop. De breedte van de waterloop heeft immers geen invloed op de helling van de stippellijnen, dus B zal lager liggen naarmate de waterloop breder is. In figuur 3 heb ik de waterloop zo breed gemaakt, dat punt B zelfs *lager* uitkomt dan het niveau van de waterloop. Een correcte simulatie van het freatische vlak op enige afstand van de waterloop (waar de aanname van Dupuit opgaat) vereist in dat geval dat de riverbed conductance *negatief* gekozen wordt. Tenzij het doorlaatvermogen van de river cell vergroot wordt, en dat is precies wat ik in dit artikel voorstel. Een groter doorlaatvermogen van de river cell leidt namelijk tot een hogere ligging van punt B (zonder de stijghoogten in de overige knooppunten van het numerieke model aan te tasten) en het is altijd mogelijk om het doorlaatvermogen zo groot te kiezen dat punt B alsnog boven het peil van de waterloop uitkomt. Dat mijn voorstel meer behelst dan alleen maar een cosmetische ingreep wil ik in de volgende paragraaf duidelijk maken.

Aanpassing van de k-waarde van de river cell

Het is intussen niet vanzelfsprekend dat in figuur 2 de stippellijn van links die van rechts in punt B ontmoet. In feite is het aantoonbaar dat dat alleen het geval is als er van links evenveel grondwater toestroomt als van rechts. In alle andere gevallen sluiten de stippellijnen niet op elkaar aan. Om dit aannemelijk te maken heb ik in figuur 4 een ander stromingsgeval afgebeeld, waarin de waterloop fluxneutraal is: netto wint of verliest hij geen grondwater, maar er stroomt wel grondwater doorheen. Wegens de anti-symmetrie moet de stijghoogte ter plaatse van de river cell exact gelijk zijn aan het open waterpeil, zodat - in dit speciale geval - de grootte van de riverbed conductance er niet toe doet. Volgens het concept van de river package is er in dit geval geen enkele wisselwerking tussen de waterloop en de aquifer, maar in werkelijkheid treedt die weldegelijk op: doordat het open water minder weerstand tegen de stroming van grondwater biedt zal namelijk een onevenredig groot deel van het grondwater niet via de aquifer maar via de waterloop stromen. Effectief is het alsof de river cell beter doorlaat dan de overige cellen. De stippellijnen links en rechts lopen evenwijdig, maar in plaats van elkaar in het midden van de waterloop te ontmoeten verspringen ze ten opzichte van elkaar met een bedrag waarvan de grootte analytisch bepaald kan worden. Het wordt gegeven door

$$\Delta h_{ij} = \frac{4q}{\pi k} \ln \cosh \frac{\pi B}{4H} \quad (2)$$

waarin

Δh_{ij}	=	grootte van de sprong in stijghoogte ter plaatse van de river cell	[m]
q	=	specifiek debiet	[m ² /d]
k	=	doorlatendheid van de aquifer	[m/d]
B	=	breedte van de waterloop	[m]
H	=	dikte van de aquifer	[m]

Omdat Modflow niet met sprongen in de stijghoogte overweg kan stel ik voor om Δh_{ij} over de river cell te verspreiden, door de doorlatendheid van de river cell te vergroten. Laten we zeggen dat de potentiaalsprong over de river cell Δh bedraagt. De grootte van Δh is af te leiden uit de wet van Darcy:

$$q = kH \frac{\Delta h}{b} \quad (3)$$

waarin

Δh	=	potentiaalverval over de river cell, als deze doorlatendheid k heeft	[m]
b	=	breedte van de river cell, loodrecht op de waterloop gemeten	[m]

Door de doorlatendheid met een bedrag dk te vergroten wordt de potentiaalsprong kleiner. Om het gat bij B te sluiten moet ik ervoor zorgen dat ik Δh verminder met Δh_{ij} . De wet van Darcy levert dan

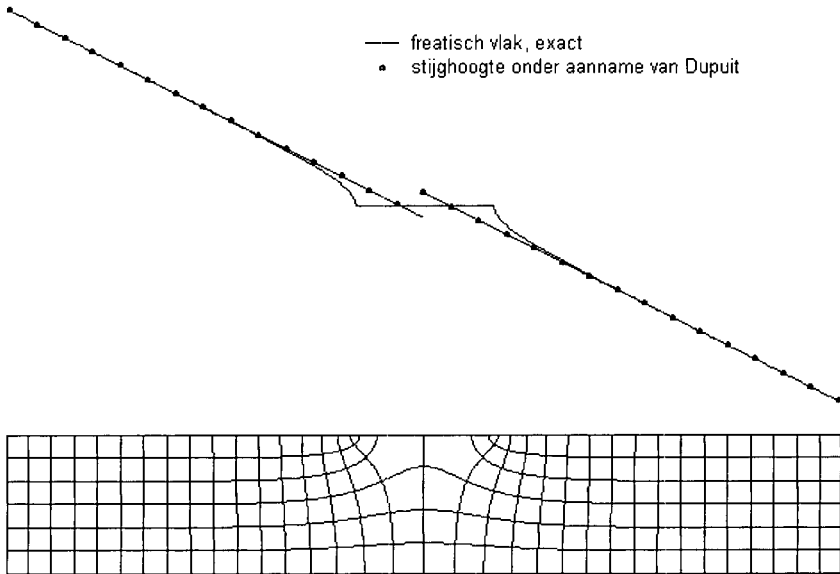
$$q = (k + dk)H \frac{\Delta h - \Delta h_{ij}}{b} \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt

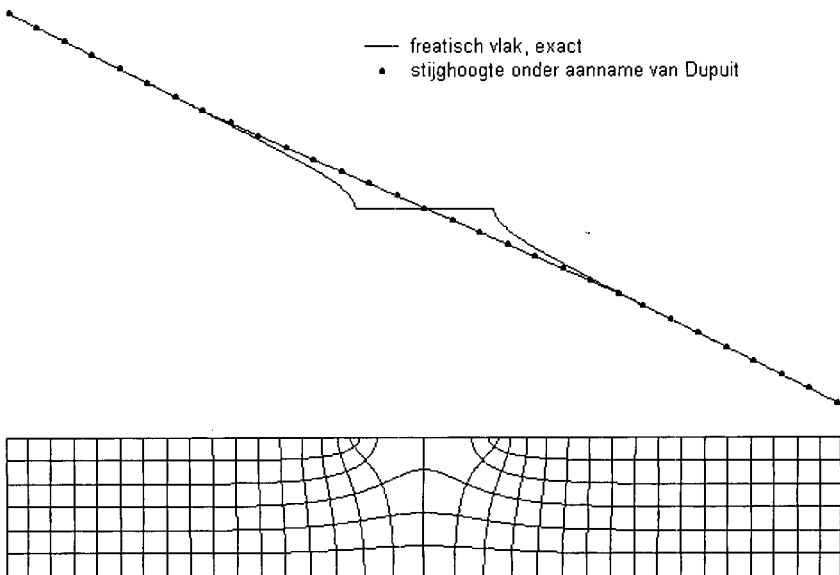
$$\frac{k + dk}{k} = \frac{1}{1 - \Delta h_{ij}/\Delta h} = \text{fac} \quad (5)$$

Dit is de factor waarmee de k -waarde van de river cell vermenigvuldigd moet worden om de sprong Δh_{ij} uit figuur 4 over de river cell uit te smeren. Invullen van (2) en (3) in (5) geeft

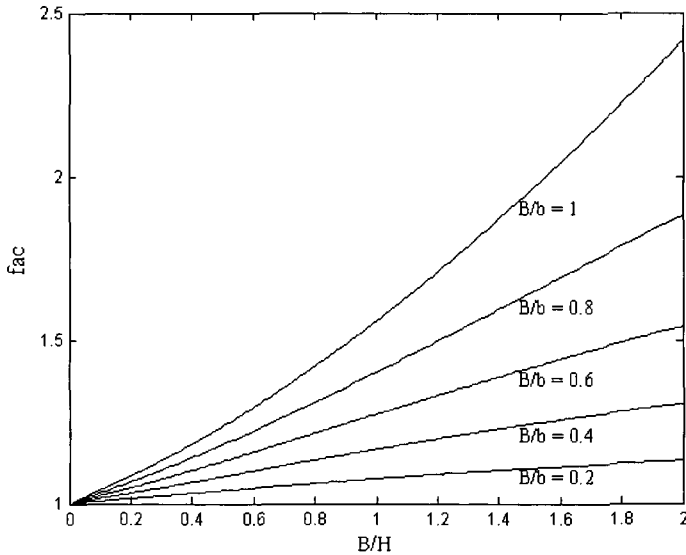
$$\text{fac} = \frac{\frac{\pi B}{4H}}{\frac{\pi B}{4H} - \frac{B}{b} \ln \cosh \frac{\pi B}{4H}} \quad (6)$$



Figuur 4: Stromingspatroon, freatisch vlak en stijghoogte onder de aanname van Dupuit langs raai AA', figuur 1, in het geval van een fluxneutrale waterloop (dat is een waterloop die netto draineert noch infiltrteert).



Figuur 5: Dit is hetzelfde stromingspatroon als in figuur 4 met hetzelfde exacte verloop van het freatisch vlak. De sprong in de stijghoogte volgens de aanname van Dupuit, die in figuur 4 te zien is, is nu uitgesmeerd over de river cell met behulp van formule (6). (In dit voorbeeld is de breedte van de river cell gelijk gekozen aan driemaal de dikte van de watervoerende laag).



Figuur 6: Grafische voorstelling van formule (6). fac = factor waarmee de doorlatendheid van de river cell vermenigvuldigd moet worden. B = breedte van de waterloop, H = dikte van de aquifer, b = breedte van de river cell.

Figuur 6 is een grafische voorstelling van deze formule.

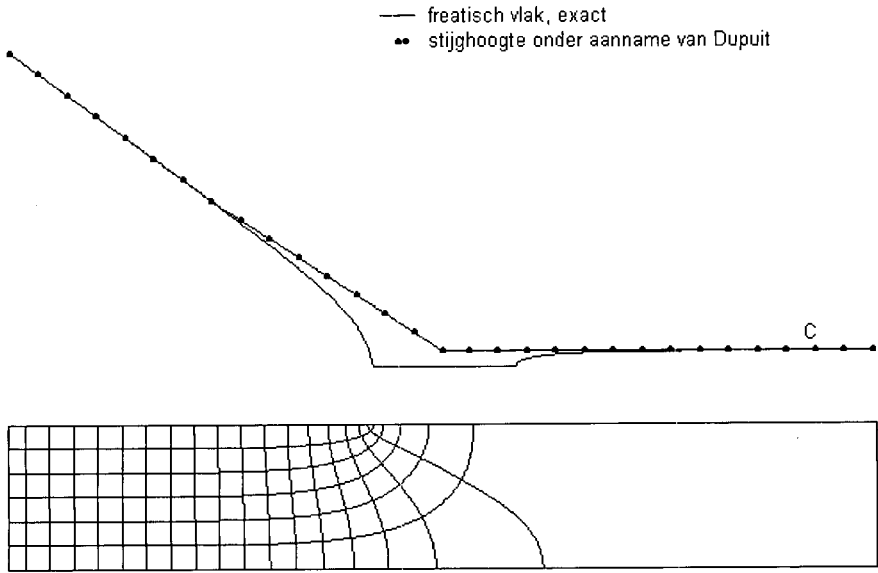
Een formule voor de riverbed conductance

Nu ik me verzekerd heb van een eenduidige uitkomst voor de stijghoogte in de river cell ben ik benieuwd naar de fysische betekenis van de riverbed conductance. Om die te achterhalen beschouw ik nog weer een ander stromingsgeval, namelijk het geval dat ik in figuur 7 heb weergegeven. De grondwaterstroming komt nu alleen van links, en de waterloop vangt al het grondwater af. Desondanks komt het freatische vlak rechts van de waterloop boven het open waterpeil uit. Op enige afstand van de waterloop (zeg in punt C) wordt stijghoogte gegeven door

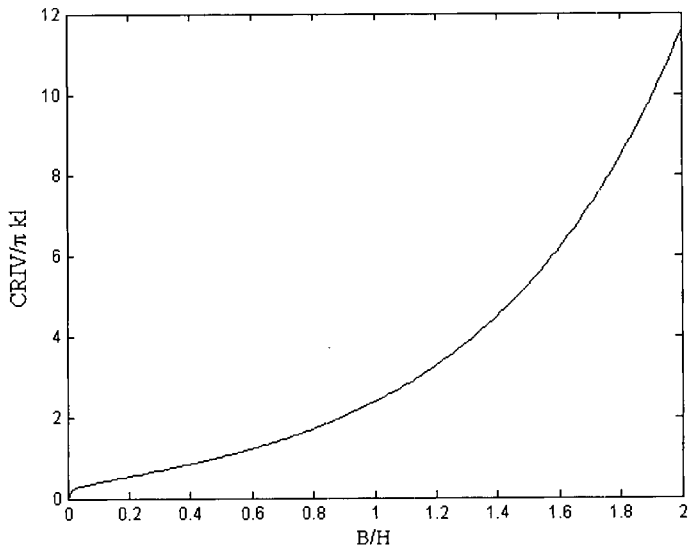
$$h_C = HRIV + \frac{QRIV}{\pi k \ell} a \cosh \coth \frac{\pi B}{2H} \quad (7)$$

Hierin is

h_C	=	stijghoogte in punt C, figuur 7	[m]
ℓ	=	lengte van de river cell, gerekend langs de waterloop	[m]



Figuur 7: In dit geval komt de stroming alleen van links, en al het grondwater wordt afgevangen door de waterloop. Het freatische vlak rechts van de waterloop komt boven het open waterpeil uit. De doorlatendheid van de river cell is verhoogd overeenkomstig (6), maar dat heeft geen invloed op de rechter stippellijn, doordat er (in het numerieke model) rechts van de waterloop geen grondwater stroomt. De rechter stippellijn loopt dus horizontaal.



Figuur 8: (Dimensieloze) riverbed conductance volgens formule (8). B = breedte van de waterloop, H = dikte van de aquifer, k = doorlatendheid van de aquifer, ℓ = lengte van de river cell, gemeten in de richting van de waterloop.

De stippellijn van rechts moet horizontaal lopen, want in het numerieke model mag er vanuit de river cell geen water naar rechts stromen. De stijghoogte h_v die het model in de river cell uitrekent moet dus gelijk zijn aan h_c , uitdrukking (7). Substitutie in de definitie van riverbed conductance, vergelijking (1), geeft

$$CRIV = \frac{\pi k \ell}{\operatorname{acosh} \coth \frac{\pi B}{2H}} \quad (8)$$

Figuur 8 geeft hiervan een grafische voorstelling.

Anisotropie

Als de horizontale doorlatendheid van de aquifer niet gelijk is aan de verticale (wat meestal het geval is) dan behoeven de formules de volgende aanpassingen: k moet vervangen worden door $\sqrt{k_h k_v}$ en alle horizontale maten - op ℓ na - moeten vermenigvuldigd worden met $\sqrt{k_h k_v}$, waarbij $k_{h,v}$ = horizontale, resp. verticale doorlatendheid van de aquifer (m/d).

Conclusie

Het concept van de riverbed conductance dat door de makers van Modflow gehanteerd wordt is niet geheel toereikend om de interactie van ondiepe waterlopen met een aquifer te simuleren. Zonder de code aan te passen kan de interactie op een correctere manier gemodelleerd worden door de doorlatendheid van de river cellen te verhogen volgens formule (6). Daarna is de riverbed conductance te berekenen met formule (7).

Literatuur

McDonald, G.M. en A.W. Harbaugh (1988) Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey, Chapter A1: A Modular Three-Dimensional Finite-Difference Ground-Water Flow Model, U.S. Department of the Interior.

De formules in dit artikel zijn bewerkingen van formule 342.01 in **Bruggeman, G.A. (1999)** Analytical Solutions of Geohydrological Problems, Elsevier.