
Een opmerkelijk stromingspatroon?

G.A. Bruggeman
E.J.M. Veling

De stroming in een gedeeltelijk afgesloten watervoerend pakket naar een put blijkt voor bepaalde parameterwaarden een opmerkelijk gedrag te vertonen. Aangetoond kan worden voor welke parameterwaarden dit gedrag zeker optreedt.

1 Inleiding

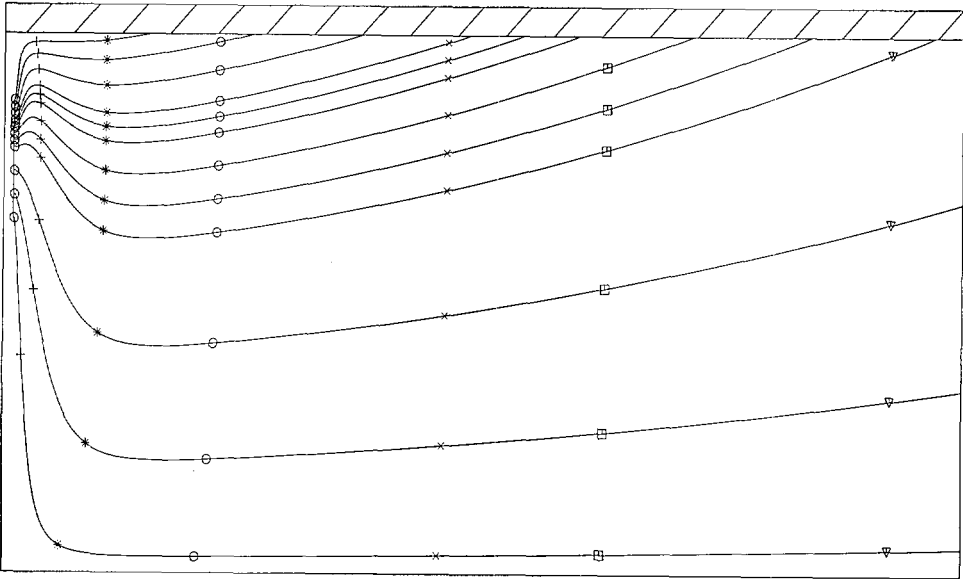
Lang geleden (1984) liet op het RIVM (net na de naamsverandering van RID naar RIVM, toen nog in Leidschendam) de te vroeg overleden hydroloog Harry Snelting de anderen de resultaten zien van een stromingsberekening met behulp van het programma FLOP3 (zie Hydrologische Hoofdafdeling (1980)) die hem onwaarschijnlijk voorkwamen. Het betrof de stroming naar een put van een waterdeeltje dat op het maaiveld ver weg van de put de reis was gestart in een gedeeltelijk afgesloten watervoerend pakket, waarbij de doorlatende laag onder het maaiveld lag. Het programma FLOP3 was een stroombanenprogramma bedoeld voor dit soort pakketten met putten met onvolkomen filters en gebaseerd op formules ontwikkeld door Bruggeman die later gepubliceerd zijn in zijn overzichtswerk (Bruggeman (1999, formule 532.06)). In dat geval lag het filter vrij hoog in het pakket en waterdeeltjes die boven in het filter werden ingevangen, vertoonden een baan met een onverwachte golf, zie Fig. 1. Was het een numeriek artefact of was het de fysische werkelijkheid? Het heeft de gemoederen enige tijd beziggehouden totdat een precieze analyse van het gedrag van de stroomfunctie ons duidelijk maakte dat voor bepaalde parametercombinaties dit gedrag echt kon optreden. Dit betekent dat water dat op grote afstand van een winning infiltreert vlakbij de winning in de buurt van het maaiveld kan komen. Deze kennis kan wellicht nuttig zijn voor de interpretatie van in het veld gemeten waterkwaliteitsverschillen. In deze notitie zal het probleem worden beschreven met de nadere analytische uitwerking.

2 Het wiskundige model

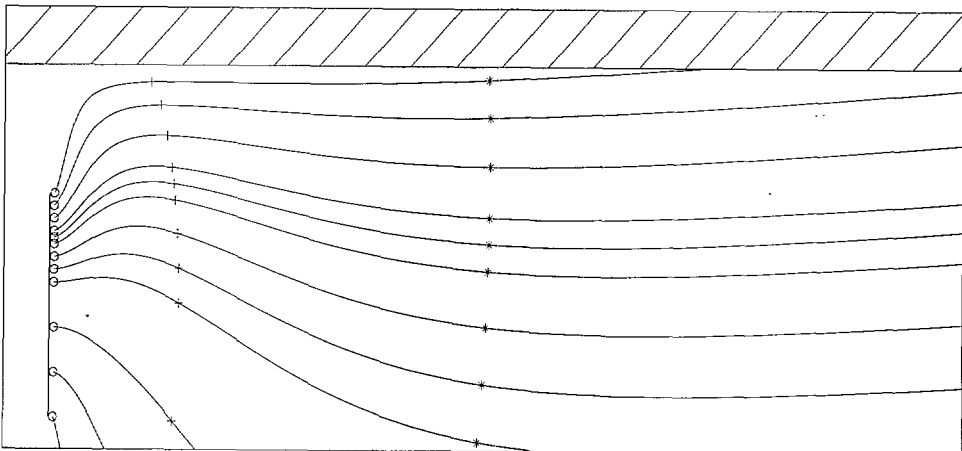
Eerst zullen wij in wiskundige termen het stromingsprobleem beschrijven met de bijbehorende analytische oplossing

G.A. Bruggeman is bereikbaar op Carrer Sant Caloma de Farnes 6, Urb. Treumal, Calonge (Gerona), Spanje, e-mail: gijnsbrug@filnet.es; E.J.M. Veling is werkzaam bij Technische Universiteit Delft, Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen, Sectie Hydrologie en Ecologie, Postbus 5048, NL-2600 GA Delft, e-mail ed.veling@citg.tudelft.nl.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, \quad 0 < z < D, \quad (1)$$



Figuur 1: Voorbeeld van het vreemde stromingspatroon naar de put toe. De vierde, vijfde en zesde stroombaan van boven vertonen het duidelijkste het vreemde gedrag. Horizontaal staat de radiële afstand tot de put afgebeeld; verticaal de hoogte van de aquifer van boven afgedekt door een aquitard. De aquifer is van onderen ondoorlatend. Parameterwaarden $k = 25$ m/d, $c = 450$ d, $D = 80$ m, $\alpha = 18,75$ m, $l = 17,5$ m. De horizontale as is 6.25 keer verkleind ten opzichte van de verticale as.



Figuur 2: Detailbeeld van het stromingsbeeld in Figuur 1. Aan de voorwaarde (17) wordt royaal voldaan. De horizontale as is 5 keer verkleind ten opzichte van de verticale as.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, 0) = \frac{\phi(r, 0)}{kc}, \quad r > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, D) = 0, \quad r > 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi kl}, \quad a - l/2 < z < a + l/2, \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq z < a - l/2, \quad \& \quad a + l/2 < z \leq D.$$

waarbij (r, z) [L] de plaatscoördinaten zijn, met z omlaag gericht, ϕ [L] de zakking, D [L] de dikte van de aquifer, k [LT⁻¹] de permeabiliteit, c [T] de hydraulische weerstand, a [L] de hoogte van het centrum van het filter ten opzichte van de bovenkant van de aquifer, l [L] de lengte van het filter en Q [L³T⁻¹] het onttrekkingsdebiet van de put met het onvolkomen filter. Eerst zal de analytische oplossing worden gegeven van (1), (2) en (3)

$$\phi(r, z) = \frac{2Q}{\pi kl} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \frac{\sin\left(\frac{\alpha_n l}{2D}\right) \cos\left(\frac{\alpha_n (D-a)}{D}\right)}{1 + \frac{D/(kc)}{\alpha_n^2 + (D/(kc))^2}} K_0\left(\frac{\alpha_n r}{2D}\right) \cos\left(\frac{\alpha_n (D-z)}{D}\right), \quad (4)$$

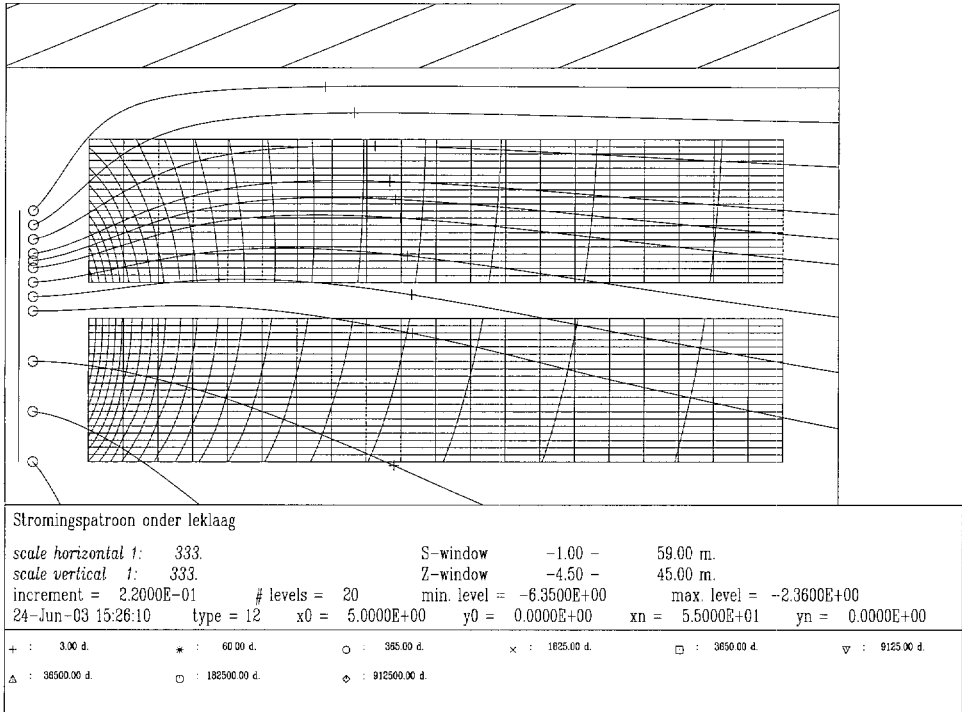
waarbij α_n , $n=0, \dots, \infty$ de wortels zijn van de transcendente vergelijking $\alpha \tan \alpha = D/(kc)$. Deze analytische oplossing is gebruikt in het programma FLOP3. De figuren met de stroombanen voor dit artikel zijn geproduceerd met behulp van een ander, veel uitgebreider programma, namelijk FLOP3N. Dit programma berekent eveneens 3-dimensionaal (dus ook zonder de Dupuit-aanname) het stijghoogtebeeld in N -gekoppelde aquifers. Er wordt geen onderscheid gemaakt tussen aquifers en aquitards. Dit programma is gebaseerd op formules gegeven in Maas (1987). Voor een nadere beschrijving zie Veling (1993). Voor de toepassing hier geldt $N=2$, en wordt de afdekkende aquitard voorgesteld door een dunne laag, waardoor de bovenrandvoorwaarde (2) wordt gesimuleerd.

Om nu aan te tonen dat het geobserveerde gedrag aanwezig kan zijn, is het voldoende aan te tonen dat er voor bepaalde parameter combinaties de verticale snelheidscomponent van de stroming naar de put toe op de hoogte van het centrum van het filter naar boven is gericht, dus negatief. Daartoe dient dan de volgende expressie te worden geanalyseerd:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, a) = -\frac{2Q}{\pi kl D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\alpha_n l}{2D}\right) \cos\left(\frac{\alpha_n (D-a)}{D}\right)}{1 + \frac{D/(kc)}{\alpha_n^2 + (D/(kc))^2}} K_0\left(\frac{\alpha_n r}{2D}\right) \sin\left(\frac{\alpha_n (D-a)}{D}\right). \quad (5)$$

Deze reeks convergeert langzaam; bovendien vertonen de termen een grillig tekengedrag ten gevolge van de onderlinge verhoudingen tussen α_n , l en a . Dat betekent dat om het

teken van (5) te kunnen bepalen er veel termen moeten worden betrokken bij een af-schatting. Dit is een onmogelijk wiskundig probleem. Niettemin is het mogelijk langs een andere approximerende weg tot een oplossing te komen.



Figuur 3: Uifvergroot beeld van Figuur 1. Bovenste gedeelte van een onvolkomen filter en 12 stroombanen die worden ingevangen. In twee rechthoeken zijn de stijghoogte contourlijnen getekend. De parameterwaarden zijn: $c = 450$ d voor de aquitard ($D = 4.5$ m, $k = 0.01$ m/d) en $D = 80$ m, $k = 25$ m/d voor de aquifer.

3 Approximerend probleem

Gezien de ervaring dat het vreemde stromingsgedrag alleen dan optreedt indien het filter hoog in de aquifer is gelegen, ligt het voor de hand het pakket naar beneden toe onbegrensd te nemen. Bovendien kunnen wij in een dergelijk geval het filter approximeren met een puntonttrekking. Dat betekent dat wij te maken krijgen met het volgende wiskundige probleem. De betekenis van de symbolen is hetzelfde als voor het eerdere probleem ((1), (2) en (3)).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, \quad 0 < z < \infty, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, 0) = \frac{\phi(r, 0)}{kc}, \quad r > 0, \quad (7)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -\frac{Q}{4\pi k}, \quad \rho = \sqrt{r^2 + (z-a)^2},$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad z \neq a, \quad (8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, z) = 0, \quad 0 < z < \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(r, z) = 0, \quad 0 < r < \infty.$$

Het voordeel van deze aanpak is dat de oplossing te formuleren is in een expressie die nu enige analyse toelaat. De oplossing van (6), (7) en (8) wordt gegeven door, zie Bruggeman (1999, formule 522.24)

$$\phi(r, z) = \frac{Q}{4\pi k} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} + 2 \int_0^\infty \frac{k c \alpha}{1 + k c \alpha} J_0(r\alpha) e^{-(z+a)\alpha} d\alpha \right] \quad (9)$$

$$= \frac{Q}{4\pi k} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} - 2 \int_0^\infty \frac{1}{1 + k c \alpha} J_0(r\alpha) e^{-(z+a)\alpha} d\alpha \right]. \quad (10)$$

De laatste relatie is gebaseerd op (zie Abramowitz en Stegun (1964, 29.3.55))

$$\int_0^\infty J_0(r\alpha) e^{-(z+a)\alpha} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} \quad (11)$$

4 Afschattingen

Wij dienen dus nu aan te tonen dat er waarden voor r , a , k en c zijn zodanig dat $\partial \phi / \partial z(r, a) < 0$, want in dat geval zal een stroombaan ter hoogte van de put omhoog lopen en later worden ingevangen door de put, dus een golfpatroon vertonen. De snelheidscomponent dient negatief te zijn daar z naar beneden is gericht. De verticale snelheidscomponent is evenredig met

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, z) = -\frac{Q}{4\pi k} \left[\frac{z-a}{\left(\sqrt{r^2 + (z-a)^2}\right)^3} + \frac{z+a}{\left(\sqrt{r^2 + (z+a)^2}\right)^3} - 2 \int_0^\infty \frac{\alpha}{1 + k c \alpha} J_0(r\alpha) e^{-(z+a)\alpha} d\alpha \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{Q}{4\pi k} \left[\frac{z-a}{\left(\sqrt{r^2+(z-a)^2}\right)^3} + \frac{z+a}{\left(\sqrt{r^2+(z+a)^2}\right)^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{kc} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}} - \int_0^\infty \frac{1}{1+k\alpha} J_0(r\alpha) e^{-(z+a)\alpha} d\alpha \right\} \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

De tweede relatie in (12) is gebaseerd op (11). Als wij nu (12) evalueren op de hoogte van de put, dus voor $z = a$, dan ontstaat er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, a) &= -\frac{Q}{4\pi k} \left[\frac{2a}{\left(\sqrt{r^2+(2a)^2}\right)^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{kc} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+(2a)^2}} - \int_0^\infty \frac{1}{1+k\alpha} J_0(r\alpha) e^{-(2a)\alpha} d\alpha \right\} \right].
\end{aligned} \tag{13}$$

In Appendix A zullen wij bewijzen dat de integraal in deze expressie positief is, zodat (13) kan worden afgeschat tot

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, a) < -\frac{Q}{4\pi k} \left[\frac{2a}{\left(\sqrt{r^2+(2a)^2}\right)^3} - \frac{2}{kc} \frac{1}{\sqrt{r^2+(2a)^2}} \right]. \tag{14}$$

Ons doel is bereikt indien

$$\frac{2a}{\left(\sqrt{r^2+(2a)^2}\right)^3} - \frac{2}{kc} \frac{1}{\sqrt{r^2+(2a)^2}} > 0, \tag{15}$$

omdat dan $\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, a) < 0$. Voorwaarde (15) is equivalent met

$$r^2 < a(kc - 4a), \tag{16}$$

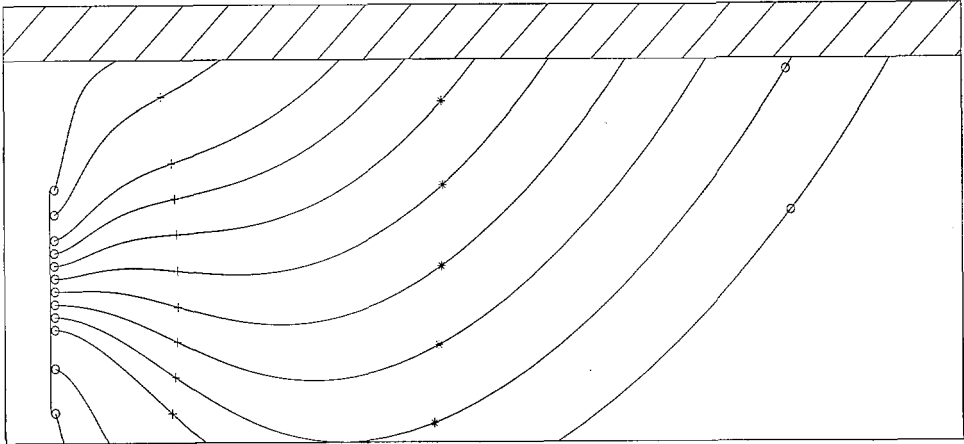
en hieraan kan alleen maar worden voldaan als geldt

$$kc > 4a. \tag{17}$$

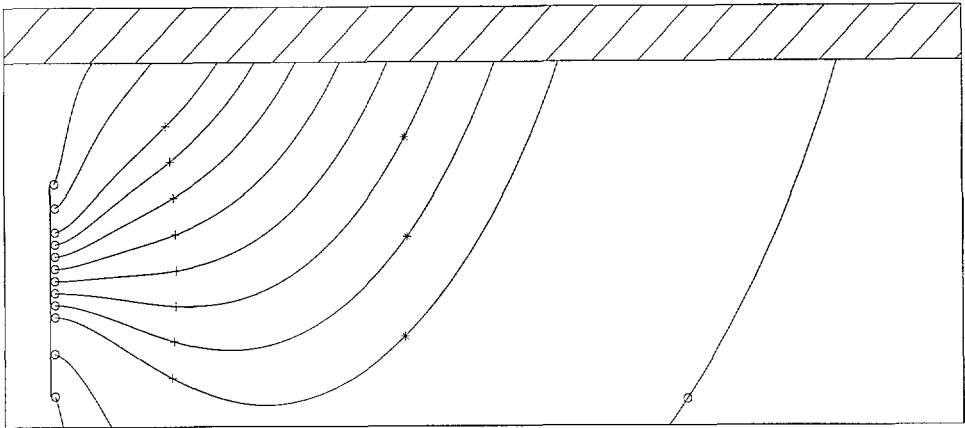
Met eis (17) hebben wij dus een voldoende voorwaarde in handen waarbij het geconstateerde stromingsprobleem inderdaad optreedt.

In het gepresenteerde voorbeeld geldt voor de parameters: $k = 25$ m/d, $c = 450$ d, $a \approx 16.75$ m, zodat dus royaal voldaan is aan (17). In figuren 4 en 5 laten wij het stromingsbeeld zien voor respectievelijk de situaties met $k = 25$ m/d, $c = 6.67$ d, $a \approx 16.75$

m, en $k = 25$ m/d, $c = 2$ d, $a \approx 16.75$ m. Voor het eerste geval van deze twee is voldaan aan (17); voor het tweede geval is hier niet aan voldaan, zoals ook in de figuren is te zien (in figuur 5 is er ter hoogte van de halve lengte van het filter geen opwaartse stroming). Daar (17) een voldoende voorwaarde is betekent dat in gevallen waar $kc \leq 4a$ nog niet dat het verschijnsel afwezig is. De eis (17) kan dus iets worden verbeterd door de integraal in (13) numeriek te berekenen.



Figuur 4: Parameterwaarden $k = 25$ m/d, $c = 6.67$ d, $a = 18.75$ m. Aan de voorwaarde (17) wordt voldaan, zoals nog net te zien is aan het stromingsgedrag. De horizontale as is 5 keer verkleind ten opzichte van de verticale as.



Figuur 5: Parameterwaarden $k = 25$ m/d, $c = 2$ d, $a = 18.75$ m. Aan de voorwaarde (17) wordt niet voldaan. De horizontale as is 5 keer verkleind ten opzichte van de verticale as.

Op de bijeenkomst op 16 december 2003 van het Ernst Genootschap (een gezelschap dat zich verdiept in de analytische aspecten van hydrologische modellen) werd uitgebreid gediscussieerd over deze voorwaarde. Kick Hemker merkte op dat het verschijnsel (lokale maximum) dus altijd zou moeten optreden indien de toplaag volledig is afgesloten ($c = \infty$) hetgeen numeriek ter plaatse werd aangetoond door Mark Bakker met behulp van zijn

analytische elementen stroombanenprogramma. De bijbehorende wiskundige analyse wordt bovendien dan ook een stuk eenvoudiger omdat men dan te maken heeft met een put en een spiegelpot en dus met een simpele potentiaalfunctie. Het essentiële verschil is nu echter dat de stroombanen in dit geval van $c = \infty$ geen lokaal minimum vertonen omdat het water onttrokken wordt aan het pakket terwijl in de situatie waarin c eindig is het water wordt geleverd door de bovenliggende slecht doorlatende laag.

5 Lijnonttrekking

Het ligt voor de hand te onderzoeken of het verschijnsel ook optreedt indien de putonttrekking wordt vervangen door een oneindig lange lijnonttrekking. Ook dit geval hebben wij uitgewerkt en wij volstaan hier met het geven van de resultaten. De overeenkomstige zakking wordt (zie Bruggeman (1999, formule 337.21)) gegeven door

$$\phi(x, z) = \frac{q}{4\pi k} \left[\log \left(\frac{x^2 + (z+a)^2}{x^2 + (z-a)^2} \right) + 4 \int_0^\infty \frac{kc}{1+kc\alpha} e^{-(z+a)\alpha} \cos(x\alpha) d\alpha \right],$$

waarbij q [$L^2 T^{-1}$] de onttrekking is per lengteeenheid. Weer ter hoogte van $z = a$ geldt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, a) &= -\frac{q}{\pi k} \left[\frac{a}{x^2 + 4a^2} - \int_0^\infty \frac{1}{1+kc\alpha} e^{-2a\alpha} \cos(x\alpha) d\alpha \right] \\ &= -\frac{q}{\pi k} \left[\frac{a}{x^2 + 4a^2} - \frac{1}{kc} \int_0^\infty \frac{2a+t}{(2a+t)^2 + x^2} e^{-t/(kc)} dt \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Om een omhoog gerichte verticale stromingscomponent te verkrijgen dienen de twee termen in (18) tussen de haken samen een positief resultaat te geven voor een bepaalde relatie van x , k , c en a . In Appendix B zullen wij de volgende voldoende voorwaarde afleiden

$$kc > 2a/y_0, \quad y_0 = 0.610057\dots, \quad (19)$$

met y_0 de oplossing van $ye^y E_1(y) = 1/2$,

en met $E_1(y) = \int_y^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$, de exponentiele integraal.

Numeriek geeft dat de voorwaarde

$$kc > (3.278377\dots)a,$$

dus, vergeleken met (17) is er eerder aan voldaan.

Appendix A

In deze Appendix zullen wij aantonen dat de integraal in (13) inderdaad positief is.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+kc\alpha} J_0(r\alpha) e^{-(2a)\alpha} d\alpha = [s = 1/(kc)] \\
 &= s \int_0^{\infty} \frac{1}{s+\alpha} J_0(r\alpha) e^{-(2a)\alpha} d\alpha = s \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt \right) J_0(r\alpha) e^{-(2a)\alpha} d\alpha \\
 &= s \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} dt \right) J_0(r\alpha) e^{-(2a+t)\alpha} d\alpha = s \int_0^{\infty} e^{-st} dt \left(\int_0^{\infty} J_0(r\alpha) e^{-(2a+t)\alpha} d\alpha \right) \\
 &= s \int_0^{\infty} e^{-st} dt \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2a+t)^2}} > 0.
 \end{aligned}$$

Appendix B

Om aan te tonen dat $\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, a)$ negatief kan worden schatten wij de volgende expressie af

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, a) &= -\frac{q}{\pi k} \left[\frac{a}{x^2 + 4a^2} - \frac{1}{kc} \int_0^{\infty} \frac{2a+t}{(2a+t)^2 + x^2} e^{-t/(kc)} dt \right] \\
 &< -\frac{q}{\pi k} \left[\frac{a}{x^2 + 4a^2} - \frac{1}{kc} \int_0^{\infty} \frac{2a+t}{(2a+t)^2} e^{-t/(kc)} dt \right] \\
 &= -\frac{q}{\pi k} \left[\frac{a}{x^2 + 4a^2} - \frac{1}{kc} e^{2a/(kc)} E_1\left(\frac{2a}{kc}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Hieruit valt af te leiden dat als

$$x^2 < \frac{a}{\frac{1}{kc} e^{2a/(kc)} E_1\left(\frac{2a}{kc}\right)} - 4a^2, \quad (20)$$

dat dan $\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, a)$ negatief is. Aan (20) kan alleen maar worden voldaan als het rechterlid van (20) positief is, dus

$$\frac{2a}{kc} e^{2a/(kc)} E_1\left(\frac{2a}{kc}\right) < 1/2. \quad (21)$$

De functie $f(y) = ye^y E_1(y)$ is monotoon stijgend, dus als $y = 2a/(kc) < y_0$, met $y_0 e^{y_0} E_1(y_0) = 1/2$, dan wordt aan (21) voldaan en is voorwaarde (19) afgeleid.

Referenties

- Abramowitz, M. en I.A. Stegun (1964) (red)** *Handbook of Mathematical Functions*; National Bureau of Standards, Washington, D.C.
- Bruggeman, G. A. (1999)** *Analytical Solutions of Geohydrological Problem*; Developments in Water Science, nr. 46, Elsevier, Amsterdam.
- Hydrologische Hoofdafdeling, Rekencentrum (1980)** Overzicht van de operationele modellen en computer programma's in gebruik bij de HyH-RID; Technisch Rapport, Rijksinstituut voor Drinkwatervoorziening, Leidschendam.
- Maas, C. (1987)** Groundwater Flow to a Well in a Layered Porous Medium 1. Steady Flow; in: *Water Resources Research* 23(8), pag 1675–1681.
- Veling, E.J.M. (1993)** FLOP-grondwaterstroming, nu ook in drie dimensies; in: *H₂O* 26(1), 15–22.