
Drainageweerstand en voedingsweerstand van een freatische aquifer

Kees Maas¹

Inleiding

Het stromingspatroon van grondwater in een dwarsdoorsnede van een aquifer die door evenwijdige sloten gedraineerd wordt, is een klassiek onderwerp van studie van met name Nederlandse agrohydrologen. De bekendste onderzoekers op dit gebied waren wel Hooghoudt en Ernst. De laatste promoveerde ook op dit onderwerp (Ernst, 1962). Er valt waarschijnlijk weinig meer aan de kennis op dit gebied toe te voegen, maar toch blijkt steeds weer dat praktiserende grondwaterhydrologen zich weinig rekenschap geven van de details van het stromingspatroon in een freatische aquifer. Misschien worden ze door de beschikbaarheid van kant en klare modelcodes verleid om modelconcepten voor de werkelijkheid aan te zien? Ik heb in dit tijdschrift al eens betoogd dat consequent toepassen van een modelconcept als de ‘river’ in Modflow ertoe kan leiden dat de intreeweerstand van een rivier soms negatief gekozen moet worden (Maas, 2003). Daar is niets mis mee; een modelparameter is geen zuiver fysische parameter (zo die al bestaan). Het is een mengelmoes van echte bodemeigenschappen en rekentechnische compromissen. Daardoor is het niet verrassend dat de numerieke waarden die modelparameters moeten aannemen om de grondwaterstijghoogte goed te krijgen soms behoorlijk afwijken van wat je fysisch wellicht zou verwachten. Niettemin leidde mijn verhaal tot scepsis van modelbouwers, die volhielden dat een negatieve intreeweerstand onzin is. Toen ik onlangs het proefschrift van Ernst weer eens openploeg, realiseerde ik me dat hij het fenomeen al lang geleden had opgemerkt. Als weerstand tegen stroming naar open leidingen stelt hij de volgende vergelijking voor:

$$w_r = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{4D}{\pi B} \quad (1)$$

Hierin is k de doorlatendheid van de aquifer, D is de dikte ervan, en B is de breedte van de watergang, die zeer ondiep is verondersteld. Deze vergelijking is algemeen bekend onder cultuurtechnici; hij komt in een wat andere notatie voor in het Cultuurtechnisch Vademecum (2000). Het is duidelijk dat w_r negatief is als $4D < \pi B$.

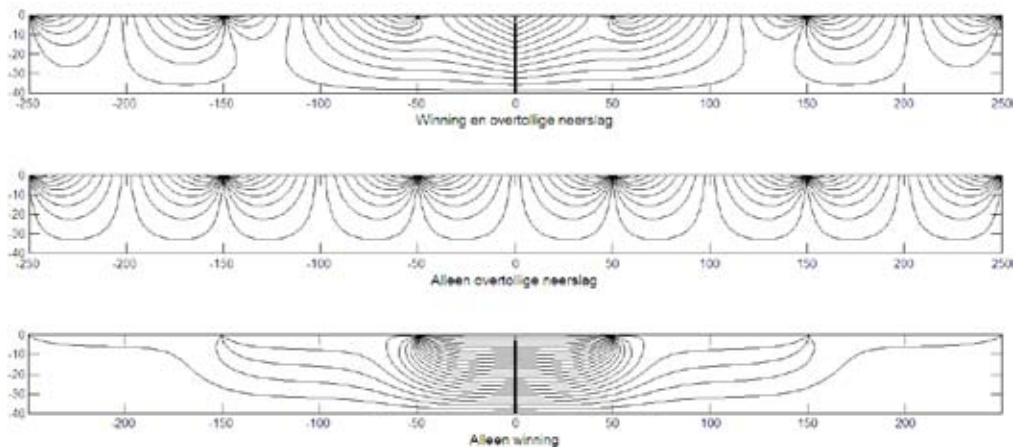
Er waren nog meer verrassingen. Zo luidt stelling IX bij het proefschrift:

‘Wegens de voortgaande verbranding van grote hoeveelheden steenkolen en olie afkomstig uit fossiele voorraden en de waargenomen toeneming van het CO₂-gehalte van de atmo-

¹ Kiwa Water Research en TU Delft Sectie Waterhuishouding

sfeer, moet het huidige onderzoek naar de invloed hiervan op klimaat, zeespiegelrijzing en plantengroei van groot belang worden geacht’.

In 1962! Maar ik raadpleegde Ernst omdat er onlangs in H₂O een artikel verscheen over de invloed van een slecht doorlatend laagje bovenin een freatische aquifer op de stroming en de stijghoogte van grondwater (Van der Gaast e.a., 2008). Ik was het niet eens met twee beweringen die in dat artikel gedaan werden. De eerste is dat door aanwezigheid van zo’n laagje de invloed van een grondwaterwinning op de grondwaterspiegel kleiner zou zijn dan de invloed die de winning heeft op de wat diepere stijghoogte in dezelfde aquifer. De tweede was dat zo’n laagje invloed zou hebben op de spreidingslengte. Om mijn punt duidelijk te maken heb ik in een reactie in H₂O de plaatjes gepresenteerd die hier als figuur 1 zijn afgebeeld (Maas e.a., 2008). De afbeelding toont een verticale doorsnede over een freatische aquifer die gedraineerd wordt door sloten. Er is ook een grondwaterwinning. De bovenste deelfiguur laat het stromingspatroon ten gevolge van neerslag en winning zien. De andere twee deelfiguren geven apart het aandeel van de neerslag en het aandeel van de winning weer. Mijn berekening houdt geen rekening met een eventueel weerstandbiedend laagje bovenin de aquifer, maar het is op grond van deze plaatjes toch wel aannemelijk dat neerslag wel, en winning nauwelijks of geen hinder zou ondervinden van zo’n laagje. Omdat de stroomlijnen in het onderste plaatje voornamelijk horizontaal lopen, is de drukverdeling hydrostatisch, met uitzondering van de directe omgeving van de sloten. Dat zou ook zo zijn als er bovenin de aquifer een weerstandbiedend laagje zou voorkomen. De consequentie is dat de verlaging ten gevolge van de winning over de hele diepte van de aquifer dezelfde is, behalve vlakbij de sloten. De verlaging van de grondwaterspiegel is dus even groot als de verlaging van de stijghoogte op wat grotere diepte. Om aan te tonen dat zo’n laagje ook geen invloed



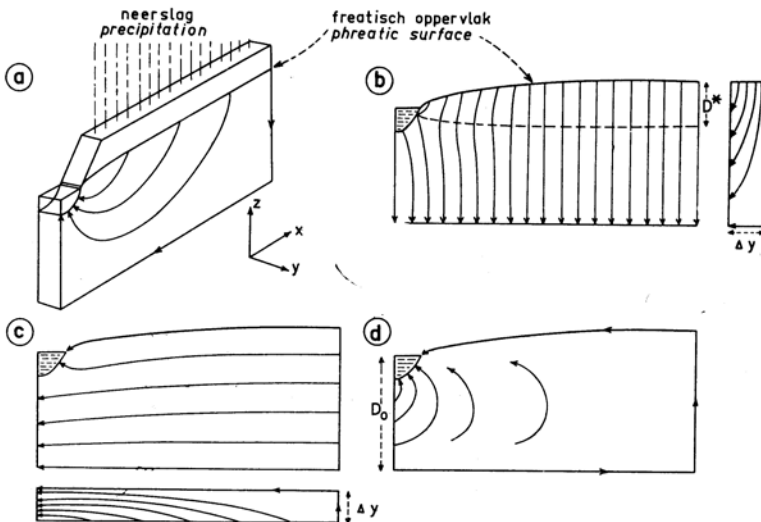
Figuur 1: Het bovenste plaatje toont een verticale doorsnede van een freatische aquifer die door evenwijdige waterlopen gedraineerd wordt. Het stromingspatroon is het resultaat van ‘overtollige’ neerslag en grondwaterwinning. Dit patroon is op te splitsen in een deel dat toe te schrijven is aan de overtollige neerslag (middelste plaatje) en een deel dat toe te schrijven is aan de winning. Op deze manier is in te zien dat een eventueel weerstandslaagje bovenin de aquifer wel invloed zal hebben op de opbolling van de grondwaterspiegel ten gevolge van neerslag, maar dat het de stroming van grondwater naar de winning nauwelijks zal hinderen.

heeft op de spreidingslengte moet ik eerst uitleggen wat het begrip spreidingslengte inhoudt in een situatie met discrete watergangen.

Mijn artikel leunt zwaar op het proefschrift van Ernst. Wat ik er zelf aan toevoeg is een formule om de spreidingslengte en de zogenaamde voedingsweerstand te schatten van een freatische aquifer die gedraineerd wordt door evenwijdige sloten. Wat mogelijk ook nieuw is, is mijn constatering dat de stationaire invloed van een grondwaterwinning niet volledig vast ligt als het debiet, het doorlaatvermogen en de spreidingslengte bekend zijn. De ligging van de winning ten opzichte van de watergangen speelt ook een belangrijke rol. Niet onlogisch, maar toch... Voor de volledigheid geef ik ook aan op welke wijze anisotropie doorwerkt in de formule van Ernst. Ten slotte zij opgemerkt dat dit artikel in zekere zin een vervolg is op Maas (2002), waarin formules gepresenteerd werden voor de drainageweerstand en de voedingsweerstand in het 'Hollandse profiel'.

Het verloop van de stijghoogte in een freatische aquifer die gedraineerd wordt door evenwijdige waterlopen.

Figuur 2 komt rechtstreeks uit het proefschrift van Ernst, waarin het figuur 7 is. Ik neem hem op omdat Ernst er een schitterende redenering mee opbouwt. Deelfiguur 2a geeft het stromingspatroon dat geanalyseerd moet worden. Het gaat om een half perceel met een stationaire neerslag die afgevangen wordt door een tamelijke ondiepe sloot. Als agrohydroloog spreekt Ernst in zijn tekst vaak over 'overtollige' neerslag, waterleidingshydrologen noemden dat vroeger juist 'nuttige' neerslag.



Figuur 2: (figuur 7 in het proefschrift van Ernst). Ontbinding van het stromingspatroon in deelpatronen.

Ernst ontleedt het stromingspatroon in drie delen, maar niet op een voor de hand liggende manier. Deelfiguur 2b geeft het deelpatroon dat kan worden toegeschreven aan de neerslag. De stroomlijnen lopen verticaal, maar op de basis van de aquifer is

de stroomsnelheid nul. Dat bereikt Ernst door over de hele hoogte van de aquifer gelijkmatig verdeeld water uit te laten stromen, loodrecht op het vlak van tekening. De stippellijn geeft het referentieniveau van de stijghoogte aan; dat is ongeveer het slootniveau. Het is onmiddellijk duidelijk dat de stijghoogte die boven dit referentieniveau opgebouwd wordt niet afhangt van de verticale weerstand van het deel van de aquifer dat beneden de stippellijn ligt. In deelfiguur 2c wordt het water dat loodrecht op het vlak van tekening aan de aquifer onttrokken was, volgens dezelfde weg weer in de aquifer teruggebracht, zodat er netto geen stroming loodrecht op het vlak van tekening is. Het toegevoegde water stroomt horizontaal af over de linkerrand van de figuur. Op de waterscheiding, rechts, is de snelheid dus nul. Op dit onderdeel van het stromingspatroon is de formule van Hooghoudt toepasbaar. Tenslotte wordt in deelfiguur 2d het water dat over de linkerrand de aquifer uitstroomde er op dezelfde rand weer in teruggevoerd, waarna het via kromme stroombanen naar de sloot loopt. Ernst berekent nu de maximale opbolling Δh ten gevolge van de overtollige neerslag N als volgt:

$$\frac{\Delta h}{N} = \frac{D^*}{k} + \frac{l^2}{8kD} + l w_r \quad (2)$$

De eerste term rechts is de verticale weerstand die bij het laagje boven de stippellijn in deelfiguur 2b hoort. D^* is de hoogte van het freatische vlak boven het slootpeil, k is de doorlatendheid, kD is het doorlaatvermogen en l is de afstand tussen de sloten. De eerste term rechts klopt niet helemaal, want de aanname was dat de verticale flux lineair afneemt met de diepte. Bovendien varieert de dikte van het laagje boven de stippellijn in deelfiguur 2b over de breedte van het perceel dat door de sloten begrensd wordt. De tweede term komt uit de formule van Hooghoudt, die zoals gezegd toepasbaar is op het stromingsgeval dat in deelfiguur 2c getekend is. Deze aanpak is toelaatbaar als de sloten smal zijn ten opzichte van de slootafstanden, dus als slootbreedte $B = l$. De laatste term in vergelijking (2) bevat de 'radiale' weerstand, die ik al presenteerde als vergelijking (1). Omdat de ondergrond zelden of nooit homogeen is en de numerieke waarde van de radiale weerstand in werkelijkheid erg afhangt van lokale omstandigheden, zal w_r in de praktijk door meting (of door modelkalibratie) vastgesteld moeten worden. Vergelijking (1) geeft echter een eerste indicatie. De uitdrukking laat bovendien zien voor welke parameters de radiale weerstand het meest gevoelig is.

Ernst merkt op dat uitdrukking (2) ook opgaat voor willekeurig gelaagde systemen, met dien verstande dat dan voor w_r andere uitdrukkingen gezocht moeten worden dan (1). Verder verwacht hij dat de eerste term rechts doorgaans verwaarloosbaar zal zijn ten opzichte van de andere termen. Het is echter duidelijk dat de verticale weerstand onder invloed van neerslag en verdamping een verticale stijghoogtegradiënt opwekt, zodat peilfilters van enige lengte in het algemeen niet precies de freatische grondwaterstand weergeven, zeker als ze wat dieper staan. Dat wordt nog erger als de verticale weerstand wat voorstelt. In die gevallen moeten stijghoogtewaarnemingen gecorrigeerd worden om de ligging van het freatische vlak vast te stellen. Van der Gaast e.a. wijzen daar terecht op.

Drainageweerstand

In regionale grondwatermodellen is meestal niet de maximale, maar de gemiddelde opbolling van de grondwaterspiegel van belang. Daarvan uitgaande is een drainageweerstand te definiëren als:

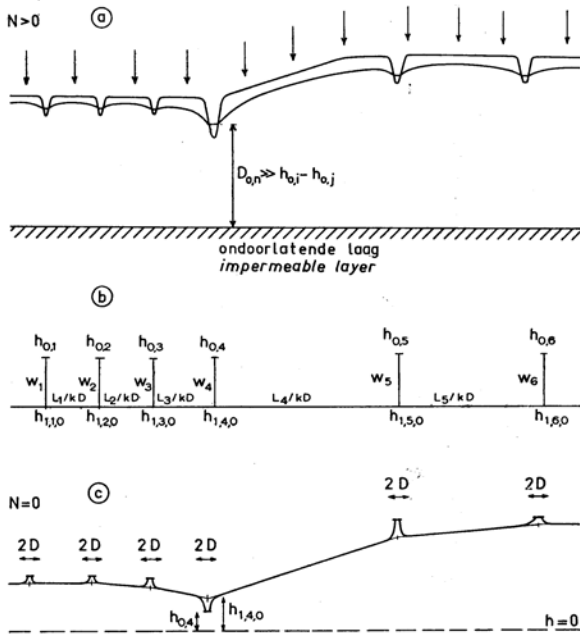
$$c_d = \frac{D^*}{k} + \frac{l^2}{12kD} + l w_r \quad (3)$$

De gemiddelde opbolling tussen de sloten is Nc_d . Als freatische peilbuizen gebruikt worden om een grondwatermodel te kalibreren, moeten de meetwaarden niet alleen gecorrigeerd worden voor de eerste term rechts, maar er zal ook een vertaling moeten plaatsvinden van de lokale stijghoogte naar de gemiddelde stijghoogte die door het model berekend wordt. Tot slot is het rekenschema van Ernst ook maar een schematische benadering van een werkelijkheid die in geometrisch opzicht meestal veel ingewikkelder is. En er is nog iets, waar ik straks op kom. Om bruikbaar te zijn voor het kalibreren van een numeriek model dat geen afzonderlijke sloten onderscheidt, vergt iedere freatische buis feitelijk een apart lokaal onderzoek.

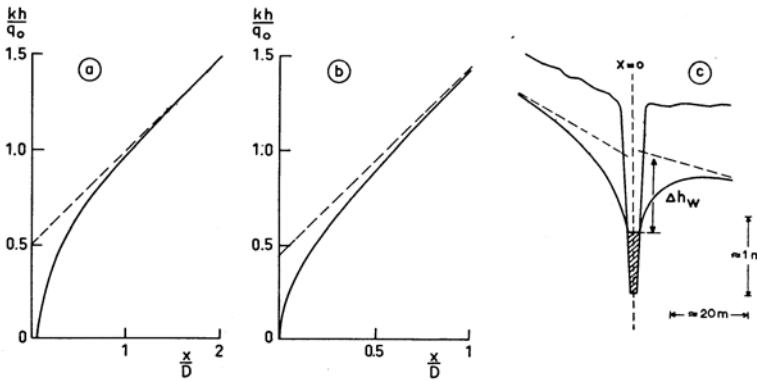
Voedingsweerstand

Het begrip voedingsweerstand komt in het proefschrift niet expliciet voor, maar Ernst zit er zo dicht tegenaan dat het voor de hand ligt om er op basis van zijn theorie een uitdrukking voor af te leiden. *Met voedingsweerstand bedoel ik een denkbeeldige ruimtelijk gelijkmatig gespreide weerstand, waarmee de gevolgen van peilverschillen of grondwaterwinning voor de grondwaterstand berekend kunnen worden zonder met de afzonderlijke sloten rekening te hoeven houden.* Die vereenvoudiging wordt vaak toegepast in regionale grondwatermodellen. Het denkbeeldige laagje staat onder water, en het waterpeil is gelijk aan het slootpeil. Ik stel me in deze paragraaf de vraag hoe zo'n denkbeeldig 'c-laagje' afhangt van de parameters die we tot nu toe zijn tegengekomen. (Wie geen zin heeft in de wiskunde kan direct doorgaan naar het resultaat, vergelijking (12)).

Als agrohydroloog beschouwt Ernst peilverschillen; geen grondwaterwinning. Om de stroming tussen gebieden met verscheidene peilen te berekenen, stelt hij een schematisatie voor die is weergegeven in figuur 3. Dat is figuur 6 van zijn proefschrift. Deelfiguur 3a is een schematische weergave van de werkelijkheid, die vervangen wordt door het rekenschema van deelfiguur 3b, door Ernst een dradenschema genoemd. Het is op te vatten als een elektrisch analogon dat samengesteld is uit stroomdraden. Deelfiguur 3c geeft het freatische vlak weer als er geen neerslag zou zijn. Tussen de knooppunten in is het verloop grotendeels lineair, maar nabij de sloten trechtert het vlak naar de slootpeilen toe. De stijghoogte die ter plaatse van de sloten met het dradenschema berekend kan worden, is de hoogte die verkregen zou worden door het lineaire deel van het freatische vlak te extrapoleren. In figuur 4, dat is figuur 5 uit het proefschrift, werkt Ernst dit in meer detail uit. Uit deelfiguur 4c blijkt dat het extrapoleren geen uniek resultaat hoeft op te leveren. Het gaat mis als de toestroming naar de sloot niet symmetrisch is, maar volgens Ernst wordt er maar een kleine fout gemaakt als men toch met één waarde rekent voor de stijghoogte onder de sloot. Numerieke modellen kunnen niet met twee waarden op één punt overweg. Voor analytische modellen zou zoiets geen probleem zijn.



Figuur 3: (figuur 6 van Ernst). Vervanging van een stijghoogteprobleem (boven) door een 'draadmodel' (midden). De onderste deelfiguur geeft het verloop van de stijghoogte als er geen aanvulling uit neerslag is.



Figuur 4: (figuur 5 van Ernst). De rekenstijghoogte recht onder de sloot is de hoogte die gevonden wordt door het recht verlopende deel van het freatische vlak naar de plaats van de sloot te extrapoleren (stippellijnen).

De stijghoogte die ter plaatse van de sloten berekend wordt, is dus een rekenstijghoogte. Hij is niet met een peilbuis te verifiëren. Peilbuizen die bedoeld zijn om een grondwatermodel te kalibreren, moeten minstens op een afstand $1,5D\sqrt{k_h/k_v}$ uit de slootkant staan. (D is de pakketdikte; k_h en k_v zijn de horizontale en verticale doorlatendheid).

Op grond van deelfiguur 4c is in te zien dat in het geval van een brede watergang de extrapolatie weleens een rekenstijghoogte kan opleveren die lager uitkomt dan het slootpeil. Om in dat geval toch afvoer te krijgen, moet de slootweerstand negatief gekozen worden. Dit zit ingebakken in vergelijking (1). Maar ik beperk me in dit artikel tot smalle sloten ($B = l$), waarvoor negatieve waarden onwaarschijnlijk zijn.

Door te verlangen dat de som van de stromen naar een knooppunt toe nul is, komt Ernst op de volgende differentievergelijking uit, die Modflow-adepten zal aanspreken:

$$\frac{kD}{L_{n-1}}(h_{n-1} - h_n) + \frac{kD}{L_n}(h_{n+1} - h_n) + \frac{1}{w_{r,n}}(p_n - h_n) = 0 \quad (4)$$

Hierin is n het rangnummer van het beschouwde knooppunt, h is de rekenstijghoogte in de aquifer, recht onder de sloten, p is het slootpeil, kD is het doorlaatvermogen en L is de slootafstand. Om een analytische uitdrukking te vinden voor de voedingsweerstand beperk ik me tot het geval dat de slootafstanden gelijk zijn aan l , dat alle sloten dezelfde radiale weerstand w_r hebben en dat het peil nul is:

$$\frac{1}{w_a}(h_{n-1} - 2h_n + h_{n+1}) - \frac{1}{w_r}h_n = 0 \quad (5)$$

waarin w_a de weerstand van de aquifer tussen twee sloten is:

$$w_a = \frac{l}{kD} \quad (6)$$

Differentievergelijking (5) heeft twee oplossingen:

$$h_{n+1}^1 = h_n e^{1/\lambda} \quad (7)$$

$$h_{n+1}^2 = h_n e^{-1/\lambda}$$

waarin λ gegeven wordt door:

$$\lambda = \frac{l}{\operatorname{acosh}\left(1 + \frac{w_a}{2w_r}\right)} \quad (8)$$

Dat dit klopt, is te controleren door (7) en (8) in te vullen in (5)². Als het rekenschema met discrete sloten vervangen wordt door een rekenschema met een denkbeeldig c-laagje

² De algemene oplossing bestaat uit de som van h^1 en h^2 . Om een particuliere oplossing te vinden, dat wil zeggen een formule die op een specifiek probleem van toepassing is, moeten nog twee randvoorwaarden opgegeven worden, bijvoorbeeld de stijghoogten van twee verschillende plaatsen. Voor mijn redenering is het echter niet nodig om zo specifiek te worden.

dat onder water staat, dan wordt de differentievergelijking vervangen door een differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{h}{\lambda^2} = 0 \quad (9)$$

waarin λ de spreidingslengte is. Net als de differentievergelijking heeft deze differentiaalvergelijking twee oplossingen:

$${}^1 h(x) = {}^1 h(x_n) e^{(x-x_n)/\lambda} \quad (10)$$

$${}^2 h(x) = {}^2 h(x_n) e^{-(x-x_n)/\lambda}$$

waarin x_n de locatie van de n^e sloot is. (Dat dit klopt is te controleren door in te vullen in). Bij gevolg is

$${}^1 h(x_{n+1}) = {}^1 h(x_n) e^{1/\lambda} \quad (11)$$

$${}^2 h(x_{n+1}) = {}^2 h(x_n) e^{-1/\lambda}$$

Dat is hetzelfde als (7). Ter plaatse van de sloten kan met (9) dus precies dezelfde stijghoogte gevonden worden als met (5), mits de spreidingslengte λ aan de oorspronkelijke parameters gerelateerd wordt volgens uitdrukking (8). Onder die voorwaarde is het schema met een gelijkmatig uitgesmeerde voedingsweerstand equivalent aan het schema met discrete sloten. Maar dat geldt alleen ten aanzien van de stijghoogten ter plaatse van de sloten. Over de stijghoogte tussen de sloten levert (5) geen informatie, maar we weten al dat we lineair moeten interpoleren. Met (9) kan tussen de sloten in wél een stijghoogteverloop berekend worden, maar dat loopt krom, dus dat is niet correct. Ook daarvoor moet worden gecorrigeerd als men een grondwatermodel dat geen rekening houdt met afzonderlijke sloten aan grondwaterstandswaarnemingen wil kalibreren. Zoals we straks zullen zien kan de afwijking soms aanzienlijk zijn. Recapitulerend: onder de sloten is, met een grondwatermodel dat geen rekening houdt met afzonderlijke sloten, de stijghoogte goed te krijgen, maar op die plaats heeft hij geen fysische betekenis. En tussen de sloten in klopt het niet goed...

Omdat de spreidingslengte gedefinieerd is als $\lambda = \sqrt{kDc}$, is nu een voedingsweerstand te definiëren door $c_v = kD/\lambda^2$, zodat:

$$c_v = \frac{1 w_a}{\text{acosh}^2\left(1 + \frac{w_a}{2w_r}\right)} \quad (12)$$

waarin dus w_a gegeven wordt door (6) en w_r door vergelijking (1). Dit is de weerstand van het denkbeeldige c -laagje, dus de betrekking die ik zocht. De verticale weerstand van het deel van de aquifer boven de stippellijn in deelfiguur 2b komt er niet aan te pas. Of men nu het dradenschema of de voedingsweerstand hanteert, de invloed van bijvoor-

beeld een grondwaterwinning op het freatische vlak hangt niet af van een eventueel weerstandslaagje ‘bovenin het profiel’. De spreidingslengte, die door (8) gegeven wordt, hangt evenmin af van zo’n laagje.

Het verschil tussen de drainageweerstand en de voedingsweerstand

Er blijkt een merkwaardige limiet te bestaan, volgens welke:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{acosh}^2(1+1/2x)} - x = \frac{1}{12} \quad (13)$$

Toegepast op (12) vind ik na uitwerken:

$$c_v = \frac{1}{12} |w_a + |w_r \quad (14)$$

Op grond van (6) is (1) dan te schrijven als:

$$c_v = \frac{1}{12} \frac{|^2}{kD} + |w_r \quad (15)$$

Vergelijken we dit resultaat met de uitdrukking voor de drainageweerstand (3), dan blijkt dat in de limiet het verschil tussen voedingsweerstand en drainageweerstand juist de verticale weerstand is van het deel van de aquifer dat zich in deelfiguur 2b boven de stippellijn bevindt. De limiet wordt overigens snel genaderd: voorwaarde voor toepassing van (15) is dat $w_r > 0,2w_a$. De fout is dan kleiner dan 5%. Omdat we sowieso uitgingen van smalle sloten, zal daaraan meestal wel voldaan zijn, maar voor de zekerheid kan toch beter met (12) gerekend worden.

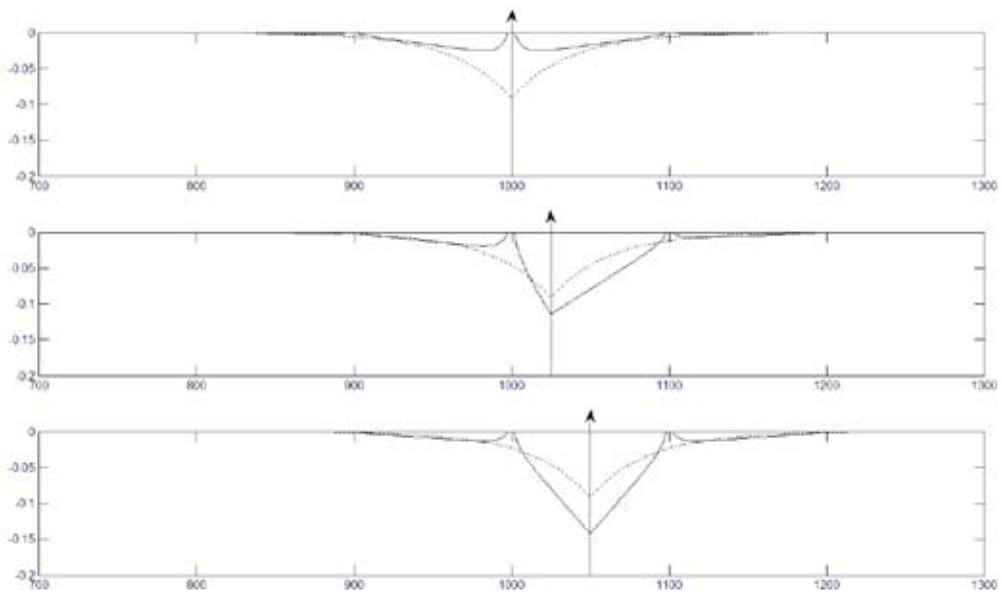
Wat als er gelijktijdig overtollige neerslag is en een peilverschil?

Het is nu duidelijk dat in een grondwatermodel dat geen afzonderlijke sloten in rekening brengt de neerslag anders behandeld moet worden dan ingrepen in de (grond)waterhuishouding, zoals peilverschillen of grondwaterwinning. In een grondwatermodel wil men natuurlijk in één keer het gecombineerde effect kunnen uitrekenen. Dat is trouwens ook wat er in een peilbuis waargenomen wordt. Hoe hiermee om te gaan als een numeriek model geen afzonderlijke sloten onderscheidt? De simpelste optie lijkt me om het slootpeil te verhogen met Nc_d , de grondwateraanvulling N vervolgens weg te laten en verder alleen met de voedingsweerstand te rekenen. Voor een niet-stationair model is een alternatief om de waarnemingen te corrigeren voor neerslag en verdamping, waarvoor tijdreeksanalyse een geschikte techniek is (www.menyanthes.nl). Daarna kan met de voedingsweerstand gewerkt worden zonder het slootpeil aan te passen.

Grondwaterwinning

Een nadeel van het concept voedingsweerstand is dat bij de overgang van differentievergelijking (4) op differentiaalvergelijking (9), dus bij de overgang van afzonderlijke sloten naar een gelijkmatig gespreide voedingsweerstand, informatie verloren gaat over de ligging van de sloten. Voor de verlagings maakt het natuurlijk uit of een winning pal langs een sloot staat of midden tussen de sloten in. Dat komt uiteindelijk niet meer

terug in een model dat de sloten vervangt door een voedingsweerstand. Figuur 5 geeft een willekeurig voorbeeld van een winning met een oneindig lang puttenscherm dat evenwijdig aan de sloten is opgesteld. Het filter reikt over de hele hoogte van de aquifer en de instroming is gelijkmatig over de hoogte (wat nabij een sloot weliswaar niet geheel realistisch is). De verlaging van het freatische vlak is exact opgelost voor drie gevallen: puttenscherm recht onder de sloot, puttenscherm op een kwart en puttenscherm midden tussen de sloten. Dit is de getrokken lijn in de figuur. Als het concept voedingsweerstand wordt gehanteerd, is de verlagingskegel in alle gevallen dezelfde. Dit is de gestippelde lijn. In het laatste geval wordt de werkelijke verlaging overschat als het puttenscherm dichtbij een sloot staat, en onderschat als het puttenscherm midden in het perceel staat. In dit voorbeeld zijn de 'fouten' aanzienlijk. Toch is in alle drie de gevallen de verlaging die recht onder de sloten berekend wordt gelijk aan de verlaging die met het dradenschema van Ernst gevonden zou worden. Hoe het uitpakt als het slotenpatroon minder regelmatig is en er sprake is van een enkele of slechts een paar putten, weet ik niet,



Figuur 5: Verlaging ten gevolge van een puttenscherm dat over de hele hoogte van een freatische aquifer reikt, onder de aanname van gelijkmatige instroming over de hoogte van het filter. In de bovenste figuur staat de winning recht onder een sloot; in de middelste staat hij op een kwart en in de onderste figuur staat hij midden tussen de sloten in. De getrokken lijn toont het exacte verloop van het freatische vlak, waarbij rekening gehouden is met de afzonderlijke sloten en een tweedimensionaal stromingspatroon; de stippellijn geeft de oplossing die verkregen wordt als de sloten vervangen worden door een gelijkmatig verdeelde 'voedingsweerstand'. Het blijkt dat het concept 'voedingsweerstand' gemakkelijk tot een verkeerde indruk kan leiden van de verlaging ten gevolge van een grondwaterwinning. Dit is een willekeurig voorbeeld, waarvoor de pakketdikte 20 meter is; de doorlatendheid 10 m/d, de slootafstand 100 m, de slootbreedte 4 m en de onttrekking 1 m³/m/d. Voor veel toepassingen zal het nodig zijn om de uitkomsten van een model dat met een voedingsweerstand rekent terug te vertalen naar de situatie met afzonderlijke sloten.

maar van dit resultaat gaat toch wel een waarschuwingssignaal uit. In elk geval is het nodig om grondwaterstandswaarnemingen, die gebruikt worden om een model zonder afzonderlijke sloten te kalibreren, voor dit fenomeen te corrigeren. Als men geïnteresseerd is in de invloed van de winning op het freatische vlak is het bovendien nodig om de uitkomsten terug te vertalen naar de situatie met sloten.

Anisotropie

Als de aquifer anisotroop is, dan moet in alle vergelijkingen de doorlatendheid k vervangen worden door $\sqrt{k_h k_v}$, waarin k_h en k_v de horizontale, respectievelijk verticale doorlatendheid zijn. Daarnaast moeten alle verticale maten vermenigvuldigd worden met $\sqrt{k_h / k_v}$ (zie bijvoorbeeld Bakker, 1999). Vergelijking (3) gaat daarmee over in

$$c_d = \frac{D^*}{k_v} + \frac{l^2}{12k_h D} + l w_r \quad (16)$$

In feite kan de eerste term rechts beter worden vervangen door de verticale weerstand van het deel van de aquifer dat in deelfiguur 2b boven de stippelijntje uitkomt. De uitdrukking voor de radiale weerstand w_r van vergelijking (3), gaat over in

$$w_r = \frac{1}{\pi \sqrt{k_h k_v}} \ln \frac{4D\sqrt{k_h}}{\pi B\sqrt{k_v}} \quad (17)$$

Vergelijking (16) komt niet voor in de laatste versie van het Cultuurtechnisch Vademecum, maar wel in de voorlaatste (Werkgroep Herziening Cultuurtechnisch Vademecum, 1992), in een wat andere formulering.

Discussie

In dit artikel heb ik de afleiding van de drainageformule van Ernst aangehaald, omdat Ernst zo'n fraaie analyse geeft van het stromingspatroon in een freatische aquifer die gedraineerd wordt door evenwijdige watergangen. Uit die analyse volgt overtuigend dat een eventueel weerstands laagje helemaal bovenin een aquifer weerstand biedt tegen infiltrerende overtollige neerslag, terwijl het de stroming van een hoger naar een lager peilgebied of naar een grondwaterwinning nauwelijks hindert. De weerstand tegen infiltratie van overtollige neerslag wordt drainageweerstand genoemd.

Voortbordurend op Ernst heb ik een uitdrukking afgeleid voor de voedingsweerstand. Dat is een denkbeeldige gelijkmatig over het oppervlak van de aquifer verdeelde weerstand, die op de plaatsen van de sloten dezelfde rekenstijghoogten oplevert als een 'dradenmodel' dat met afzonderlijke sloten rekening houdt. Doordat de verticale weerstand van het bovenste deel van de aquifer in de afleiding geen rol speelt, is de voedingsweerstand altijd kleiner dan de drainageweerstand. Voor ingrepen in de (grond) waterhuishouding moet met de voedingsweerstand gerekend worden; niet met de drainageweerstand.

In de praktijk zal de numerieke waarde van de voedingsweerstand vaak niet veel afwijken van de numerieke waarde van de drainageweerstand. Verschillen treden op als 1)

de verticale weerstand van het allerbovenste deel van de aquifer aanzienlijk is en 2) de sloten breed zijn. Als het verschil tussen de drainageweerstand en de voedingsweerstand niet verwaarloosbaar is, moeten neerslag en ingrepen dus apart worden behandeld. Een werkbaar recept is om de overtollige neerslag te verschalen met een factor c_d/c_v en verder met de voedingsweerstand te werken. Voor een niet-stationair model kan men overwegen om de peilbuiswaarnemingen te corrigeren voor de invloed van neerslag en verdamping, waarna verder kan worden gewerkt zonder neerslag en verdamping en met alleen de voedingsweerstand. Tijdreeksanalyse is een geschikte techniek om de waarnemingen voor neerslag en verdamping te corrigeren. Een bijkomend voordeel van een tijdreeksanalyse is dat hij een controle oplevert op de bruikbaarheid van de waarnemingen. Als het niet lukt om daarvan een fatsoenlijk tijdreeksmodel te maken, dan is de buis ongeschikt om een grondwatermodel te kalibreren.

De stijghoogten die een grondwatermodel oplevert zijn rekenstijghoogten, die niet in een peilbuis te meten zijn. Peilbuiswaarnemingen behoeven een vertaalslag voordat ze gebruikt kunnen worden om een grondwatermodel te kalibreren. Het komt erop neer dat van de omgeving van iedere peilbuis een detailmodel gemaakt moet worden dat rekening houdt met alle details die het grondwatermodel verwaarloost.

Ik heb aan de hand van een rekenvoorbeeld laten zien dat het concept 'voedingsweerstand' gemakkelijk een verkeerde indruk kan wekken van de invloed van een grondwaterwinning, als terugvertaling van de rekenstijghoogten naar werkelijke stijghoogten achterwege blijft.

Al met al is het een hoop gedoe. Het lijkt het me een elegant alternatief om voor de toplaag van een grondwatermodel gebruik te maken van een analytische code, zoals Tim^{ML} (<http://bakkerhydro.org>), die van meet af aan met alle sloten rekening houdt en daarom geen beroep hoeft te doen op denkbeeldige drainage- en voedingsweerstand. De uitkomsten kunnen dan direct worden vergeleken met peilbuiswaarnemingen.

Referenties

- Bakker, M. (1999)** *Reactie op vuistregels 30 en 33; in: Stromingen 5/1, pag 77-78.*
- Cultuurtechnisch Vademecum (2000)** *Elsevier en Vereniging voor Landinrichting.*
- van der Gaast, J., H. Vroom en H. Massop (2008)** *Oorzaak en gevolg van numerieke verdroging; in: H₂O, nummer 5 2008, pag 51-56.*
- Maas, K. (2002)** *Weerstanden in het Hollandse Profiel; in: Stromingen 8/3, pag 5-15.*
- Maas, K. (2003)** *Ondiepe waterlopen in Modflow; in: Stromingen 9/3, pag 37-45.*
- Maas, K., J. von Asmuth en H. Runhaar (2008)** *Kanttekeningen bij 'Oorzaak en gevolg van numerieke verdroging'; in: H₂O, nummer 9 2008, pag 22-24.*
- Werkgroep Herziening Cultuurtechnisch Vademecum (1992)** *Cultuurtechnisch Vademecum, Vereniging voor Landinrichting.*

Appendix

Verantwoording van limiet

De limiet luidde:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{acosh}^2(1+1/2x)} - x = \frac{1}{12} \quad (18)$$

Noem

$$\operatorname{acosh}^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = z \quad (19)$$

waarin $\varepsilon = 1/x$, dan:

$$\operatorname{acosh}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sqrt{z} \quad (20)$$

of:

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} = \cosh \sqrt{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{24} + \dots \quad (21)$$

Verwaarloos machten van z groter dan 2, dan:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{24} \quad (22)$$

of:

$$z^2 + 12z - 12\varepsilon = 0 \quad (23)$$

zodat:

$$z_{1,2} = \frac{-12 \pm 12\sqrt{1 + \varepsilon/3}}{2} \quad (24)$$

Omdat z klein moet zijn, komt alleen de wortel met het + teken in aanmerking:

$$z = \frac{-12 + 12\sqrt{1 + \varepsilon/3}}{2} = \frac{-12 + 12(1 + \varepsilon/6 - \varepsilon^2/72 + \dots)}{2} \approx \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{12} \quad (25)$$

Dit in (19) geeft:

$$\frac{1}{\operatorname{acosh}^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)} \approx \frac{1}{\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{12}\right)} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{12} \quad (26)$$

zodat:

$$\frac{1}{\operatorname{acosh}^2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{12} - \frac{1}{\varepsilon} \quad (27)$$

of:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{acosh}^2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{1}{12} \quad (28)$$

Met dank aan Ed Veling, TU Delft.