

DE WARMTE-OVERDRACHT VAN EEN GAS MET VIBRATIERELAKSATIE NAAR DE SCHOKBUISACHTERWAND

(With Summary in English)

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR
IN DE TECHNISCHE WETENSCHAPPEN AAN DE
TECHNISCHE HOGESCHOOL TE EINDHOVEN OP
GEZAG VAN DE RECTOR MAGNIFICUS PROF. DR. IR.
A.A.TH.M. VAN TRIER, VOOR EEN COMMISSIE UIT
DE SENAAT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP
DINSDAG 21 SEPTEMBER 1971 DES NAMIDDAGS OM
4 UUR.

DOOR

PETER HUBERT MARIA JONGEN

GEBOREN TE SCHAESBERG

DIT PROEFSCHRIFT IS GOEDGEKEURD DOOR DE PROMOTOR

PROF.DR.IR. G. VOSSERS

	pag.
1 INLEIDING	7
2 DE VERGELIJKINGEN	
2.1 Beschrijving van de schokreflektie	10
2.2 De basisvergelijkingen	11
2.3 De randvoorwaarden	17
3 OPLOSSING VAN DE VERGELIJKINGEN	
3.1 Uitgangspunten	20
3.2 De nulde-orde oplossing	21
3.3 De eerste-orde oplossing voor de grenslaag- verstoringen	24
3.4 De eerste-orde buitenoplossing voor de vi- bratierelaksatie	30
3.5 De eerste-orde grenslaagoplossing voor vi- bratierelaksatie	39
4 DE TRANSPORTKOEFFICIËNTEN	
4.1 De relaxatietijden	42
4.2 De warmtegeleidingskoefficiënten	46
5 DE NUMERIEKE OPLOSSINGSMETHODE	
5.1 Inleiding	51
5.2 De differentieschema's	52
5.3 Onderzoek van de differentieschema's	56
5.4 De differentievergelijking voor de grenslaag	58
6 DE BEREKENINGEN	
6.1 De berekende grootheden; frozen-toestand	61
6.2 De grenslaag invloed	62
6.3 De invloed van de vibratierelaksatie	64

7 HET EKSPERIMENT	pag.
7.1 Inleiding	72
7.2 De schokbuis	72
7.3 De opnemers	74
7.4 De meetresultaten	81
8 KONKLUSIES	93
SAMENVATTING	95
SUMMARY	97
APPENDIX I	99
APPENDIX II	102
APPENDIX III	103
SYMBOLENLIJST	108
REFERENTIES	112
CURRICULUM VITAE	115

INLEIDING

De laatste jaren is er betrekkelijk veel aandacht besteed aan de reflectie van een vlakke schokgolf tegen een stilstaande wand, in het bijzonder de achterwand van een schokbuis. De interesse gaat hierbij enerzijds uit naar de bestudering van het reflectieproces op moleculaire schaal, anderzijds naar de toestand van het gas tussen gereflekteerde schokgolf en achterwand. In het nu volgende zullen we ons tot dit laatste beperken. Het gebied tussen gereflekteerde schokgolf en wand, in schokbuisterminologie gebied 5, kan men in het algemeen karakteriseren als een stilstaand gas met een hogere druk, temperatuur en dichtheid dan in de oorspronkelijke toestand. De snelle overgang naar deze condities maakt gebied 5 geschikt voor de bestudering van verschillende chemische en fysische niet-evenwichtverschijnselen. Een met konstante snelheid voortbewegende schokgolf in een ideaal gas die reflecteert tegen een adiabatische wand resulteert in een gereflekteerde schokgolf die eveneens met konstante snelheid beweegt. De uniforme toestand in gebied 5 kan dan berekend worden met de standaard schokrelaties zoals die in handboeken gegeven worden (zie b.v. Gaydon and Hurlle (Ref.1)). Wanneer er echter niet-evenwichtverschijnselen een rol gaan spelen zullen er afwijkingen geïntroduceerd worden ten opzichte van het boven beschreven "ideale" reflectieproces. Deze niet-evenwichtverschijnselen zijn b.v. warmtegeleiding aan een reële achterwand, vibratie- dissociatie- en ionisatie-relaxatie achter heengaannde en gereflekteerde schokgolf.

Er is al veel aandacht besteed aan de warmteoverdracht van gebied 5 naar de achterwand ten gevolge van konvektie en geleiding in het bijzonder voor eenatomige gassen. Door de invloed van deze warmteoverdracht te bestuderen is het mogelijk gebleken om zowel informatie te verkrijgen over de warmtegeleidingscoëfficiënten van eenatomige gassen als over de thermische akkomodatietoëfficiënten van het gas aan de wand. Zo onderzochten Sturtevant en Slachmuylders (Ref.2) de invloed van de warmteoverdracht aan de wand op de gereflekteerde schoksnellheid, terwijl Fay en Kemp (Ref.3), Perron en Fujimura (Ref.4), Collins en Menar (Ref.5), Matula (Ref.6) en Lauver (Ref.7) de warm-

tegeleidingscoëfficiënt relateerden aan de gemeten warmteoverdracht aan de schokbuisachterwand. Enkele onderzoekers hebben aandacht besteed aan de invloed van relaxatie op de toestand achter de gereflekteerde schokgolf. Baganoff (Ref.8) gebruikte een speciaal gekonstrueerde snelle drukopnemer om het drukverloop aan de achterwand te registreren en zo een indruk te krijgen van de vibratierelaxatietijd van CO_2 achter de heengaande schokgolf. Johannesen e.a. (Ref.9) vonden een numerieke oplossing voor het stromingsveld in gebied 5 voor vibratierelaxatie in CO_2 en gebruikten eigen interferometeropnamen om het dichtheidsveld in 5 te vergelijken met hun voorspellingen. Tevens vergeleken zij het berekende drukverloop aan de achterwand met de metingen van Baganoff. De redelijke overeenstemming van theorie en eksperiment geeft een rechtvaardiging om gebied 5 te gebruiken voor relaxatietijdsmetingen. Presley en Hanson (Ref.10) berekenden met behulp van rekenintensieve komputerprogramma's het reflectieproces via de karakteristiekenmethode. Een bezwaar dat men tegen de berekeningen van Johannesen en Presley kan aanvoeren is dat voor de berekeningen van toestand 5 veel komputertijd vereist is. Dit bezwaar werd eveneens door Hanson (Ref. 11) gevoeld, die het drukverloop aan de wand analytisch bepaalde voor een chemisch relaxerend gas. Deze berekeningen zijn ook bruikbaar voor vibratierelaxatie. Als gevolg van de gedane aannamen is de oplossing slechts geldig voor tijden die van dezelfde orde van grootte zijn als de relaxatietijd achter de heengaande schokgolf. Voor tijden die korresponderen met de relaxatietijd in gebied 5 is de overeenstemming met de eksakte berekeningen van Ref. 10 minder goed.

Bij de bovenstaande onderzoeken die betrekking hebben op het schokreflectieproces in een relaxerend gas, is de warmteoverdracht aan de schokbuisachterwand buiten beschouwing gelaten. Weliswaar wordt de invloed van de warmteoverdracht op het drukverloop aan de wand door Baganoff (Ref.8) afgeschat voor verschillende polyatomaire gasen maar dit gebeurt op grond van de resultaten die verkregen zijn voor een eenatomig gas (Ref.2). Bij het onderhavige onderzoek is nu op de eerste plaats gezocht naar een model dat de warmteoverdracht aan de wand beschrijft in een gas met vibratierelaxatie. De warmteoverdracht is bestudeerd in de niet-evenwichtsituatie op een tijd-

schaal die overeenkomt met de relaxatietijd τ'_S in gebied 5. De warmteoverdracht tengevolge van konvektie en geleiding naar de achterwand wordt, evenals voor eenatomige gassen (Ref.3) beschreven met het z.g.thermische grenslaagmodel. Het gas aan de wand wordt gekoeld in een in de tijd groeiende grenslaag ten gevolge waarvan de dichtheid plaatselijk sterk toeneemt en expansiegolven in gebied 5 geïntroduceerd worden. Aan het gas-wand kontaktoppervlak wordt de energieoverdracht beschreven met twee verschillende akkomodatiecoëfficiënten. De ene coëfficiënt behoort bij de energie-uitwisseling tussen rotatie- en translatievrijheidsgraden van de gasmolekulen enerzijds en de wand anderzijds, de ander behoort bij de energie-uitwisseling tussen vibratievrijheidsgraden en wand. Het model is uitgewerkt voor de situatie waarbij het aandeel van de vibratieënergie in de inwendige energie klein is, zodat het mogelijk is een linearisatieprocedure toe te passen. Hierbij is de "frozen" toestand, waarbij de vibratielerelaxatie nog geen rol speelt, zowel binnen als buiten de grenslaag als nulde-orde oplossing genomen. De oplossingen in en buiten de grenslaag zijn afzonderlijk bepaald; de grenslaagoplossing is via numerieke weg verkregen terwijl de buitenoplossing analytisch bepaald kon worden. Het model is getest aan de hand van een aantal experimenten voor CO_2 en N_2 . De experimenten waren van tweeërlei aard. Aan de schokbuisachterwand werden druk- en temperatuurmetingen gedaan die vergeleken zijn met de theoretische waarden. Via deze vergelijking van theorie en experiment kan een uitspraak gedaan worden over de waarde van de thermische akkomodatiecoëfficiënt voor de vibratieënergie aan de wand. De coëfficiënt is namelijk in het model als onbekende parameter opgevat.

2.1. Beschrijving van de schokgolfreflektie

Voordat we ingaan op de gasdynamische vergelijkingen die het schokgolfreflektieproces beschrijven zullen we aan de hand van onderstaand x' - t' diagram nagaan welke processen hierbij een rol spelen.

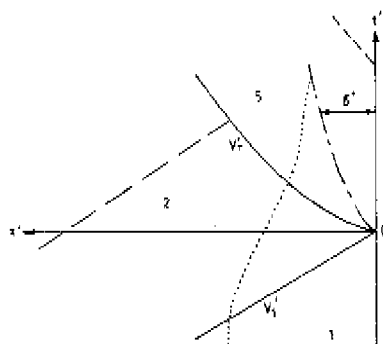


Fig. 2.1 x' - t' diagram van de gereflekteerde schokgolf.

In de Fig. 2.1. komt de koördinaat x' overeen met de afstand vanaf de schokhuisachterwand terwijl de t' -koördinaat correspondeert met de tijd verlopen na het schokreflektie-tijdstip. De heengaande schokgolf beweegt met een konstante snelheid V_1' in de richting van de wand. Hierbij gaat de toestand van het testgas door de schokpassage over in een toestand 2 die vlak achter de schokgolf beschreven kan worden met de standaard schokrelaties. De hierbij toe te passen soortelijke warmtes behoren bij de zowel in gebied 1 als in gebied 2 volledig aangeslagen translatie- en rotatievrijheidsgraden. De vibratievrijheidsgraden worden minder snel aangeslagen in de niet-uniforme relaxatiezone van gebied 2, die weergegeven is met een gebroken lijn in Fig. 2.1. De relaxatiezone komt overeen met de relaxatietijd τ_2' in gebied 2. De baan van een deeltje, dat zich in gebied 2 voortbeweegt met snelheid u_2' is schematisch aangegeven met een stippellijn. De gereflekteerde schokgolf loopt met een niet-konstante snelheid V_r' in de relaxatie-

zone van gebied 2. In deze schokgolf worden de rotatie- en translatievrijheidsgraden weer volledig aangeslagen terwijl de vibratievrijheidsgraden gedurende de relaxatietijd τ'_5 in gebied 5 aangeslagen worden. Naast de vibratiere Relaxatie in gebied 5 zal aan de achterwand een ander niet-evenwichtsverschijnsel een rol gaan spelen. Tengevolge van warmtetransport door konvektie en geleiding naar de achterwand zal het gas ter plaatse afgekoeld worden in een in de tijd groeiende grenslaag ter dikte δ' . Door de temperatuurafname hierin zal de dichtheid sterk toenemen waardoor de thermische grenslaag expansiegolven in gebied 5 induceert. Zoals reeds in de inleiding vermeld is ligt het aksent bij het onderzoek op de warmteoverdracht aan de achterwand in de relaxatiezone.

2.2. De basisvergelijkingen

De toestand achter de gereflekterde schokgolf in de relaxatiezone wordt beschreven met de 3ën-dimensionale Navier-Stokes vergelijkingen.

De druk p' , dichtheid ρ' en enthalpie h' voldoen aan de drie vergelijkingen van massa-, impuls- en energiebehoud:

$$\frac{d\rho'}{dt'} + \rho' \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \quad (2.2-1)$$

$$\rho' \frac{du'}{dt'} + \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'} (4/3 \mu' + \mu'_B) \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (2.2-2)$$

$$\rho' \frac{dh'}{dt'} - \frac{dp'}{dt'} = - \frac{\partial q'}{\partial x'} + (4/3 \mu' + \mu'_B) \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 \quad (2.2-3)$$

Hierin zijn:

$$h' = c_p T' + e'_v$$

T' = translatie- en rotatietemperatuur

e'_v = vibratieënergie per massa-eenheid

c_p = soortelijke warmte bij konstante druk en konstante vibratie-energie (vibratie"frozen")

q' = totale energiestroom ten gevolge van geleiding

μ' = dynamische viscositeit

μ'_B = bulk-viscositeit

Verder wordt de toestandsvergelijking voor een ideaal gas aangenomen; $p' = \rho'RT'$, waarbij R de gaskonstante van het betreffende gas is. Bij lokaal evenwicht tussen de translatie- rotatie- en vibratieënergie is het mogelijk om de vibratieënergie rechtstreeks te relateren aan de translatietemperatuur en kan men bovendien de warmtefluks q' via fenomenologische betrekkingen koppelen aan de temperatuurgradiënt $\frac{\partial T'}{\partial x}$. In het beschouwde gebied heerst echter alleen evenwicht tussen rotatie- en translatieënergie, maar niet tussen deze beide energievormen en de vibratieënergie. Het stelsel vergelijkingen moet dus op een andere manier compleet gemaakt worden. Daartoe wordt het transport van de vibratieënergie afzonderlijk beschouwd. De verandering van de vibratie-energie binnen een volumeëlement V van het gas wordt gegeven door de relatie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V e'_v \rho' dt = - \iint_F e'_v \rho' (\underline{v}' \cdot \underline{n}) df + \iiint_V \Phi' dt - \iint_F (\underline{q}'_v \cdot \underline{n}) df \quad (2.2-4)$$

De drie termen in het rechterlid van deze vergelijking beschrijven achtereenvolgens de volgende processen die bijdragen tot de inwendige energieverandering:

1. konvektief transport van vibratieënergie door het gesloten oppervlak F dat V omsluit. $\underline{v}'$ en $\underline{n}$ zijn respectievelijk de snelheidsvector van het medium ter plaatse en de normaalvector op het oppervlak F . df is het integratie-oppervlakteëlementje en dV het integratievolumeëlementje.
2. toevoer van energie via translatie- en rotatievrijheidsgraden van de molekulen. Φ is de per tijdseenheid en per massaeenheid toegevoerde hoeveelheid energie.
3. transport van vibratieënergie tengevolge van geleiding door het oppervlak F . $\underline{q}'_v$ is de energiefluks.

Door de integraalstelling van Gauss toe te passen op de oppervlakteintegralen (2.2-4) waardoor deze overgaan in volumeintegralen, wordt de volgende differentiaalformulering voor de transportvergelijking van de vibratieënergie verkregen:

$$\rho' \frac{de'_v}{dt} = \rho' \Phi - \frac{\partial q'_v}{\partial x} \quad (2.2-5)$$

De energievergelijking voor de translatie- rotatieënergie wordt verkregen door (2.2-5) in mindering te brengen op de energievergelijking (2.2-3):

$$\rho' c_p \frac{dT'}{dt'} - \frac{dp'}{dt'} = \frac{\partial}{\partial x} q'_{tr} + (4/3 \mu' + \mu_B) \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 - \Phi \quad (2.2-6)$$

De totale energiestroom q' is dus gesplitst in een rotatie+translatie-aandeel q'_{tr} en een vibratie aandeel q'_v . De vergelijkingen zijn niet oplosbaar zolang de bronterm Φ , de energiestroom q'_{tr} en de energiestroom q'_v niet gerelateerd zijn aan de overige fysische grootheden. Het is in principe mogelijk om deze veelal empirische relaties ook via statistische mechanica of via het formalisme van de thermodynamica af te leiden. De relaties die in het model aangenomen zijn, zijn de volgende:

$$\Phi = \frac{e'_v - e'_v}{\tau'} \quad (2.2-7)$$

$$q'_{tr} = - \lambda' \frac{\partial T'}{\partial x} \quad (2.2-8)$$

$$q'_v = - \kappa' \frac{\partial e'_v}{\partial x} \quad (2.2-9)$$

De grootheden e'_v , τ' , λ' en κ' zijn respectievelijk de evenwicht-vibratieënergie bij de translatietemperatuur T' , de relaxatietijd (die een functie is van p' en T') en de warmtegeleidingscoëfficiënten van rotatie + translatie- en van vibratieënergie. Bij de toepassing voor de verschillende gassen (N_2 , CO_2) zal nader worden ingegaan op de achtergronden die tot deze relaties hebben geleid. (hfst.4)

De vergelijkingen (2.2-1,2,5,6) worden dimensieloos gemaakt om mogelijke verschillende ordes van grootte van de diverse termen duidelijker tot uitdrukking te laten komen. Daartoe werden de volgende referentiegrootheden uit gebied 5 in de frozen toestand genomen: de geluidssnelheid a'_{5f} , de relaxatietijd τ'_{5f} , de druk p'_{5f} , dichtheid ρ'_{5f} en temperatuur T'_{5f} . Met behulp van deze grootheden worden de volgende dimensieloze variabelen gedefinieerd:

$$T = T' / T'_{5f} \quad \rho = \rho' / \rho'_{5f} \quad p = p' / p'_{5f}$$

$$u = u' / u'_{5f} \quad \epsilon = \epsilon' / \tau'_{5f} \quad x = x' / (u'_{5f} \tau'_{5f})$$

$$e_v = e'_v / (c_p T'_{5f})$$

De dimensioneloze transportcoëfficiënten zijn:

$$\lambda = \lambda' / \lambda'_{5f} \quad \kappa = \kappa' c_p / \lambda'_{5f} \quad \mu = (4/3 \mu' + \mu'_B) / \mu'_{5f} \quad \tau = \tau' / \tau'_{5f}$$

terwijl eveneens gebruik gemaakt zal worden van de dimensioneloze coördinaat:

$$\eta = \int_0^x \rho(\tilde{x}, t') d\tilde{x}$$

De dimensioneloze vergelijkingen voor behoud van massa, impuls, translatie-rotatieënergie en vibratieënergie waarin de dichtheid met behulp van de toestandsgelijking geëlimineerd is, worden dan:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{T}{p} \quad (2.2-10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{Pr}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p\mu}{T} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (2.2-11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{RT}{c_p} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\rho \lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \gamma \frac{Pr}{R} \frac{R}{c_p} \rho \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-12)$$

$$\frac{\partial e_v}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho \kappa}{T} \frac{\partial e_v}{\partial \eta} \right) + \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-13)$$

Vergelijking (2.2-10) is geldig omdat ter plaatse $x' = 0$ de snelheid u' aan de wand steeds gelijk aan nul is. In bovenstaande vergelijkingen zijn de dimensioneloze getallen $\tilde{R}$ en Pr gedefinieerd als:

$$\tilde{R} = \lambda_{5f}^2 \tau_{5f}' / K_{5f} \quad K_{5f} = \lambda_{5f}' / \rho_{5f}' c_p \quad Pr = \mu_{5f}' c_p / \lambda_{5f}'$$

De grootte-orde van het getal van Prandtl Pr is voor de meeste gassen 1. Omdat verder de grootte-orde van $\tilde{R}$ een belangrijke rol zal spelen zullen we deze grootte-orde afschatten aan de hand van een numeriek voorbeeld, alle waarden of relaties in SI-eenheden.

$$\hat{R} = \frac{a_{5f}^{'2} \tau_{5f}^{'p} \tau_{5f}^{'c} p}{\lambda_{5f}^{'}} \approx \frac{p_{5f}^{'c} p_{5f}^{'}}{\lambda_{5f}^{'}} \quad (2.2-14)$$

Beperken we ons tot stikstof dan volgt uit de publikatie van Appleton (Ref. 12) dat de relaxatietijd gegeven kan worden door de betrekking:

$$\tau_{5f}^{'p} = 10^{(102 T^{'-1/3} - 6,24)} \text{ (Nm}^{-2}\text{s)}$$

Verder is c_p voor stikstof van de grootte-orde 10^3 zodat men voor $\hat{R}$ vindt:

$$\lambda_{5f}^{'} \hat{R} \approx 10^{(102 T^{'-1/3} - 3,24)}$$

Zoals zal blijken zijn de kondities waarbij de vibratierelaxatie in gebied 5 bestudeerd wordt zodanig dat $T_5^{'}$ maximaal 4000 K is. Omdat bij een dergelijke temperatuur $\lambda_{5f}^{'} \approx 0,1$ geldt voor $\hat{R}$:

$$\hat{R} > 10^3$$

Vanwege de grote waarden van $\hat{R}$ is bij de aanpak van het stelsel vergelijkingen de grenslaagbenadering toegepast zoals dit reeds eerder gedaan is door van Dijke (Ref.13) en Traugott (Ref.14) voor het Rayleigh probleem en door Goldworthy (Ref.15) en Sturtevant en Schlammoylders (Ref.2) voor de schokreflektie in een eenatomig gas. Zoals zal blijken, blijft de warmtegeleiding in gebied 5 slechts beperkt tot een relatief klein gebied aan de wand, de thermische grenslaag, waardoor de vergelijkingen (2.2-10 t/m 13) zowel binnen als buiten deze grenslaag vereenvoudigd kunnen worden.

Voor $\hat{R} \rightarrow \infty$ (andere termen konstant verondersteld) zal het stelsel (2.2-10 t/m 13) reduceren tot de Eulerse vergelijkingen waarbij viskositeit en warmtegeleiding verwaarloosd worden. Omdat $1/\hat{R} < 10^{-3}$ en termen van de grootte-orde 10^{-3} of kleiner in het vervolg verwaarloosd worden kunnen we het stelsel (2.2-10 t/m 13) vereenvoudigen tot:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{T}{p} \quad (2.2-15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (2.2-16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{RT}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-17)$$

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-18)$$

De oplossing, die door dit stelsel bepaald wordt, wordt de buiten-oplossing genoemd. Dicht bij de wand in de temperatuurgrenslaag kan bovenstaand stelsel de oplossing niet bepalen omdat hier de warmtegeleiding per definitie een belangrijke rol zal spelen. Uit vgl. (2.2-12) blijkt dat de term $1/R \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{p\lambda}{T} \frac{T}{\partial \eta}$, dus de warmtegeleiding, meespeelt in het gebied waar $\eta = O(R^{-1/2})$. In dit geval is de warmtegeleidingsterm namelijk van dezelfde orde van grootte als de overige termen. Daarom wordt de oplossing in de temperatuurgrenslaag beschreven met een coördinaat ψ die daar ter plaatse van de orde 1 is: $\psi = R^{1/2} \eta$. De grenslaagvergelijkingen worden dan, uitgaande van de vergelijkingen (2.2-10 t/m 13):

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{1}{R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{T}{p} \quad (2.2-19)$$

$$1/\gamma \frac{\partial p}{\partial \psi} = - \frac{1}{R} \left(R^{1/2} \frac{\partial u}{\partial t} - R^{1/2} Pr \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{p}{T} u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \right) \quad (2.2-20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{RT}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{p\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial \psi} + \gamma Pr \frac{R}{c_p} p \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-21)$$

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{p\kappa}{T} \frac{\partial e_v}{\partial \psi} \right) + \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-22)$$

Uit (2.2-19) volgt dat de snelheidsvariatie u een grootte-orde $R^{-1/2}$ kleiner is dan de overige grootheden waardoor bij verwaarlozing van de grootte-orde $R^{-1/2}$ de termen die de snelheid u bevatten in vgl. (2.2-20 en 21) wegvallen. Het stelsel vergelijkingen vereenvoudigt dan voor de temperatuurgrenslaag tot:

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{1}{R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{T}{p} \quad (2.2-23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = 0 \quad (2.2-24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{RT}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{p\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) - \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-25)$$

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{p\kappa}{T} \frac{\partial e_v}{\partial \psi} \right) + \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (2.2-26)$$

Dit stelsel laat zien dat de drukgradiënten in de temperatuurgrenslaag verwaarloosbaar zijn en dat de snelheid u die door de grenslaag in gebied 5 geïnduceerd wordt, in grootte-orde overeenkomt met $\hat{R}^{-\frac{1}{2}}$. Konkluderend blijkt dus dat het oorspronkelijke algemeen stelsel vergelijkingen in gebied 5 vereenvoudigd kan worden tot één stelsel dat geldig is binnen de temperatuurgrenslaag en een ander dat daarbuiten geldig is. Dezelfde aanpak vindt men terug in het grenslaagprobleem van de vlakke plaat in een parallelle stroming. In dit geval blijken de viskeuze effecten beperkt te blijven tot een kleine laag, waardoor het verschijnsel ter plaatse met andere vergelijkingen beschreven wordt dan daarbuiten. Evenals bij de viskeuze grenslaag moet ook hier de buitenoplossing voor de "buiten coördinaat" naar nul ($\eta \rightarrow 0$) overeenkomen met de grenslaagoplossing voor de grenslaagcoördinaat naar oneindig ($\psi \rightarrow \infty$).

2.3. De randvoorwaarden

Beschouwen we gebied 5 (Fig.2.1) dan zien we dat dit begrensd wordt door de gereflekterde schokgolf en door de achterwand. De voorwaarden die aan het schokfront van toepassing zijn, zijn duidelijk. Hier gelden de standaardschokrelaties voor de dichtheid-, druk- en temperatuursprong met soortelijke warmtes behorend bij de aan beide kanten van het schokfront volledig aangeslagen translatie- en rotatievrijheidsgraden. De vibratieënergie verandert niet over het schokfront. De plaats waar deze schokrelaties in het x' - t' vlak toegepast dienen te worden ligt echter niet op voorhand vast omdat de variabele schok-snelheid V'_x mede bepaald wordt door de oplossing in gebied 5. Naast de voorwaarde aan de wand dat de snelheid u' ter plaatse gelijk aan nul moet zijn moeten de randvoorwaarden voor de translatie-rotatie-temperatuur T' en de vibratieënergie e'_v nog gedefinieerd worden. Hier-

toe wordt een akkomodatatiecoëfficiënt α_t voor de translatie-rotatie-temperatuur en een akkomodatatiecoëfficiënt voor de vibratieënergie ingevoerd.

$$\alpha_t = \frac{E_{t,i} - E_{t,r}}{E_{t,i} - E_{t,w}} \quad \alpha_v = \frac{E_{v,i} - E_{v,r}}{E_{v,i} - E_{v,w}}$$

E is de energiestroom, met index i naar de wand toe, met index r van de wand af. De index w geeft de energiestroom aan waarbij de deeltjes een energietoestand hebben die behoort bij de evenwichtstoestand met de wandtemperatuur T'_w . Verder hebben de indices t en v betrekking op respectievelijk de translatie-rotatieënergie en de vibratieënergie. Met behulp van de Maxwell-Knudsen theorie komt Kennard (Ref.16), uitgaande van bovenstaande definitie van α_t , tot de volgende relatie aan de wand:

$$\left[\Gamma'_t \frac{\partial T'_t}{\partial x'_t} \right]_{x=+0} - T'_t \left[\right]_{x=+0} = +0 - T'_w \quad (2.3-1)$$

waarbij de temperatuursprongafstand gegeven wordt door:

$$\Gamma'_t = (2\pi\gamma)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\lambda'_t}{c_p \rho' a'_t} \frac{2 - \alpha_t}{\alpha_t}$$

Hierbij is γ de verhouding van de soortelijke warmtes bij konstante druk en konstant volume.

Op dezelfde wijze kan afgeleid worden dat voor de vibratieënergie de volgende relatie geldig is:

$$\left[\Gamma'_v \frac{\partial e'_v}{\partial x'_v} \right]_{x=+0} = e'_v \left[\right]_{x=+0} = e'_v(T'_w) \quad (2.3-2)$$

waarbij de vibratieënergiesprongafstand gedefinieerd is als:

$$\Gamma'_v = (\pi\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \frac{\kappa'_v}{\rho' u'_v} \frac{2 - \alpha_v}{\alpha_v}$$

De relaties (2.3-1) en (2.3-2), die randvoorwaarden voor de grenslaagvergelijkingen zijn, worden in de grenslaag-koördinaat en in dimensioneloze vorm:

$$(2\pi\gamma)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{2-\alpha_t}{\alpha_t} \frac{\lambda}{T} \left(\frac{T}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial T}{\partial \Psi} \right]_{x=+0} - T \Big|_{x=+0} - T_w \quad (2.3-3)$$

$$(\pi\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \frac{2-\alpha_v}{\alpha_v} \frac{\kappa}{T} \left(\frac{T}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial e_v}{\partial \Psi} \right]_{x=+0} = e_v \Big|_{x=+0} - e_v^*(T_w) \quad (2.3-4)$$

De wandtemperatuur T'_w zal tengevolge van de energiestroom naar de wand toe groter zijn dan de oorspronkelijke temperatuur T'_1 voor reflectie. De verhouding van het contactgeleidingsvermogen van wand en gas, is echter zo groot ($> 10^4$) dat de temperatuuroename $T'_w - T'_1$ relatief klein ($< 1\%$) ten opzichte van het temperatuurverschil $T'_5 - T'_1$ zal zijn. Daarom kan men bij de bepaling van de warmtestroomdichtheid, die qua orde van grootte evenredig met $T'_5 - T'_w$ is, de wand als isotherm ($T'_w = T'_1$) beschouwd worden.

OPLOSSING VAN DE VERGELIJKINGEN

3.1. Uitgangspunten

De oplossingsmethode voor de afzonderlijke stelsels vergelijkingen voor thermische grenslaag en het gebied daarbuiten is gebaseerd op twee uitgangspunten. Allereerst is er aangenomen dat de invloed van de thermische grenslaag op de buitenoplossing relatief klein is, terwijl daarnaast de invloed van de vibratielerelaxatie op zowel de buitenoplossing als grenslaagoplossing eveneens klein verondersteld is.

Wanneer men in eerste instantie de verandering van de vibratie-energie buiten beschouwing laat, dus de toestand in gebied 5 met de bijbehorende thermische grenslaag als "frozen" beschouwt, worden de vergelijkingen (2.2-15 t/m 18) en (2.2-23 t/m 26) sterk vereenvoudigd. De gereduceerde vergelijkingen zijn identiek aan de vergelijkingen die de toestand in gebied 5 beschrijven voor een eenatomig gas. Het uitgangspunt bij de hierbij behorende oplossingsmethode zoals die b.v. gegeven wordt door Goldsworthy (Ref. 15) is, dat de koppeling tussen grenslaag- en buitenoplossing in eerste instantie als eenzijdig beschouwd kan worden. De buitenoplossing is dan onafhankelijk van de thermische grenslaag terwijl de grenslaagoplossing onder meer bepaald wordt door deze buitenoplossing. Deze gedachtengang is ook hier geoorloofd omdat de grootte-orde van $\tilde{R}^{\frac{1}{2}}$ groter is dan 1, zodat bij verwaarlozing van $\tilde{R}^{-\frac{1}{2}}$ vanwege vgl. (2.2-23) de snelheid u in de grenslaag gelijk aan nul verondersteld kan worden. Omdat bovendien aan de buitenkant van de grenslaag de temperatuurgradiënt nul is, zal de buitenoplossing in nulde-orde overeenkomen met de toestand achter een schokgolf die tegen een adiabatische wand gereflekteerd is. De nulde-orde grenslaagoplossing wordt dan gevonden uit de grenslaagvergelijkingen met aan de buitenkant ($\eta \rightarrow \infty$) de nulde-orde buitenoplossing als randvoorwaarde. De eerste-orde buitenoplossing ten gevolge van de terugkoppeling tussen grenslaag en het gebied daarbuiten vindt men door de snelheid u als randvoorwaarde ter plaatse $\eta = 0$ toe te passen. Deze u wordt via vgl. (2.2-23) gevonden uit de nulde-orde grenslaagoplossing. Met de eerste-orde buitenoplossing kan dan de eerste-orde grenslaagoplossing weer gevonden worden.

In deze studie zijn, naast de eerste-orde grenslaageffekten, de vibratielerelaxatieëffekten eveneens in rekening gebracht. Hierbij is aangenomen dat deze effecten relatief klein zijn zodat met betrekking tot de relaxatieïnvloeden gelineariseerd kan worden ten opzichte van de frozen toestand. Omdat beide effecten, te weten de terugkoppeling grenslaag-buitengebied en vibratielerelaxatie, samen optreden en voor beide effecten gelineariseerd is, wordt de werkelijke toestand beschreven met de som van de nulde-orde "frozen" oplossing, de eerste-orde oplossing voor grenslaagverstoringen en de eerste-orde oplossing voor relaxatieverstoringen. De eerste-orde oplossingen worden beiden beschouwd omdat het niet mogelijk is een algemeen geldige uitspraak te doen over de grootte-orde van de onderlinge verhouding van deze oplossingen.

3.2. De nulde-orde oplossingen

Buiten de thermische grenslaag wordt de oplossing bepaald door het stelsel vergelijkingen (2.2-15 t/m 18) waarbij de bronterm $(e_v^* - e_v)/\tau$ buiten beschouwing wordt gelaten:

$$\frac{\partial u_o}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{T_o}{p_o} \quad (3.2-1)$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_o}{\partial \eta} = 0 \quad (3.2-2)$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial t} - \frac{KT_o}{c_p p_o} \frac{\partial p_o}{\partial t} = 0 \quad (3.2-3)$$

De grootheden in gebied 5 in de frozen toestand voldoen aan dit stelsel vergelijkingen. De dimensieloze grootheden hebben dus in nulde-orde de volgende waarden: $u_o = 0$ en $T_o = p_o = 1$

De snelheid van de gereflekteerde schokgolf die bij de frozen toestand hoort is de snelheid die berekend wordt via de standaard schokrelaties voor konstante $\gamma = c_p/c_v$. De nulde-orde schokgolfbaan in het $\eta - t$ vlak is dus een rechte.

In de buurt van de wand geldt het stelsel grenslaagvergelijkingen (2.2-23 t/m 26) dat voor de nulde-orde oplossing reduceert tot:

$$\frac{\partial p_0}{\partial \psi} = 0 \quad (3.2-4)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau} - \frac{RT_0}{c_p p_0} \frac{\partial p_0}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{p_0 \lambda_0}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial \psi} \quad (3.2-5)$$

Uit de eerste van deze twee laatste vergelijkingen blijkt dat de drukvariatie in eerste orde over de grenslaag nul is. Omdat verder buiten de grenslaag de druk ook konstant is en gelijk aan de frozen waarde $p_0 = 1$ kan men de laatste vergelijking voor de temperatuur vereenvoudigen tot de eenvoudige diffusievergelijking:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \psi} \phi(T_0) \frac{\partial T_0}{\partial \psi} \quad (3.2-6)$$

waarbij $\phi(T) = \lambda(T)/T$

De randvoorwaarde aan de buitenkant van de temperatuurgrenslaag voor $\psi \rightarrow \infty$ is de voorwaarde dat de nulde-orde buitenoplossing voor $\eta \rightarrow 0$ overeenkomt met de grenslaagoplossing voor $\psi \rightarrow \infty$:

$$\psi \rightarrow \infty : T_0 = 1 \quad (3.2-7)$$

De randvoorwaarde aan de achterwand kan men vinden via vgl.(2.3-3). Hiertoe is enige informatie over de akkomodatiekoefficiënt α_t noodzakelijk. We stellen voorop dat geen eksakte waarden van α_t voor de verschillende meeratomige gassen bekend zijn. Het blijkt echter wel mogelijk om de grootte-orde van α_t af te schatten. We beperken ons hierbij tot N_2 en CO_2 . De volgende eksperimentele gegevens zijn bekend:

- 1) Kennard (Ref.16) geeft voor de totale akkomodatie koefficiënt voor de thermische energie de waarden 0,68 en 0,52 van respektievelijk N_2 en CO_2 aan Flatina bij kamertemperatuur.
- 2) Voor dezelfde temperatuur geeft Hobson in het boek van Flood (Ref. 17) de waarde 0,8 voor deze akkomodatiekoeffiënt van N_2 aan glas.

Omdat bij kamertemperatuur de vibratieënergie niet of nauwelijks aan het energietransport deelneemt en omdat voor eenatomige gassen van

vergelijkbaar molekuulgewicht met uitsluitend translatieënergie de akkomodatiekoefficiënt $\pm 0,5$ is, is er aangenomen dat α_t voor zowel CO_2 als N_2 in orde van grootte gelijk is aan 0,5. Waarschijnlijk ligt deze waarde voor de schokbuisachterwand nog dichterbij 1 omdat bij akkomodatiekoefficiënt-bepalingen gewerkt wordt met goed schoongemaakte wanden om reproduceerbare metingen te verrichten. Uit deze metingen blijkt dat voor wanden die geen speciale reinigings-procedure ondergaan hebben, zoals de schokbuisachterwand, de akkomodatiekoefficiënt groter zal zijn. Men kan dus aannemen dat $(2 - \alpha_t)/\alpha_t$ in de randvoorwaarde van de orde 1 is. Omdat er verder termen van de grootte-orde $\hat{R}^{-1}$ in de nulde-orde oplossing verwaarloosd worden reduceert (2.3-3) tot:

$$\Psi = 0 : T_0 = T_w \quad (3.2-8)$$

De beginvoorwaarde voor de diffusievergelijking is niet zonder meer duidelijk. De reden hiervoor is de minder goede beschrijving van de temperatuurgrenslaag door het stelsel voor kleine waarden van t . Voor kleine tijden is de grenslaagafmeting, gemeten in de coördinaat η , bijzonder klein. Omdat daar ter plaatse $\hat{R}$ eveneens klein is zal voor eindige Ψ in de transformatie $\Psi = \hat{R}^{1/2} \eta$ de waarde van η corresponderen met een punt buiten de grenslaag, waar de condities overeenkomen met de buitenoplossing. Dus voor $t \rightarrow \tau'_{sf}$ nemen we als beginvoorwaarde:

$$t = 0 \quad \Psi > 0 : T' = \tau'_{sf} + T_0 = 1 \quad (3.2-9)$$

Vanwege de randvoorwaarden (3.2-7, 8) en deze beginvoorwaarde is het mogelijk om vergelijking (3.2-6) te schrijven in de gelijkvormigheidscoördinaat $z = \Psi/\sqrt{t}$. Hierdoor gaat de partiële differentiaalvergelijking over in de gewone differentiaalvergelijking:

$$\frac{1}{2} z \frac{dT_0}{dz} + \frac{d}{dz} \phi(T_0) \frac{dT_0}{dz} = 0 \quad (3.2-10)$$

$$z = 0 : T_0 = T_w$$

$$z \rightarrow \infty : T \rightarrow 1$$

Wanneer ϕ temperatuuronafhankelijk is is de oplossing van (3.2-10) bekend (zie b.v. Carlslaw en Jaeger (Ref.22)). Bij een zwakke temperatuurafhankelijkheid van ϕ is het mogelijk via een linearisatieprocedure een analytische oplossing te verkrijgen (zie b.v. Fizdon (Ref. 19)). Er is echter gekozen voor een algemener toepasbare oplossingsmethode, namelijk de numerieke. Hierbij werd gebruik gemaakt van een beschikbare standaard integratieprocedure (Runge-Kutta methode) voor een tweede-orde differentiaalvergelijking. Het is hierbij noodzakelijk dat de startwaarden voor de integratie (aan de wand) van temperatuur en temperatuurgradiënt bekend zijn. Omdat in ons geval de temperaturen ter plaatse $z = 0$ en $z = \infty$ gegeven zijn is er gebruik gemaakt van de zogenaamde "shooting technique". Hierbij wordt de gradiënt dT_0/dz op $z = 0$ voorgeschreven en iteratief veranderd totdat T_0 op $z = \infty$ de daar voorgeschreven waarde 1 heeft.

Het is mogelijk om uit de verkregen oplossing voor de temperatuur grenslaag de warmtestroomdichtheid te bepalen. In het algemeen wordt de warmtestroomdichtheid aan de wand gegeven door de volgende relatie:

$$\begin{aligned} H' &= -\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_S' a_S' \left[\frac{\phi(T_w)}{R} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \\ &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_S' a_S' \phi(T_w) (\hat{Re})^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0} \end{aligned} \quad (3.2-11)$$

Voor de nulde-orde warmtestroomdichtheid levert dit:

$$H'_0 = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_S' a_S' \phi(T_w) (\hat{Re})^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial T_0}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (3.2-12)$$

De druk aan de achterwand is in nulde-orde benadering gelijk aan de frozen waarde p_{SF}' .

3.3. De eerste-orde oplossing voor de grenslaagverstoringen

Door in het stelsel vergelijkingen (2.2-15) t/m 18) voor druk, temperatuur en snelheid respectievelijk als variabelen aan te nemen: $p = p_0 + \hat{p}$, $T = T_0 + \hat{T}$ en $u = \hat{u}$ krijgt men voor de eerste-

ordeverstoringen $\tilde{p}$, $\tilde{T}$ en $\tilde{u}$ de volgende vergelijkingen voor de buitenoplossing:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \quad (3.3-1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.3-2)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0 \quad (3.3-3)$$

Door $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}$ met behulp van (3.3-3) te elimineren in (3.3-1) en (3.3-1) vervolgens bij (3.3-2) op te tellen, respectievelijk in mindering te brengen krijgt men de volgende akoestische vergelijkingen:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.3-4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \beta} = 0 \quad (3.3-5)$$

Hierbij zijn $\partial \alpha$ en $\partial \beta$ de differentiaal in de karakteristieke richtingen $\frac{d\eta}{dt} = 1$ en $\frac{d\eta}{dt} = -1$.

De lijnen $\eta = t + C^+$ en $\eta = -t + C^-$ (C^+ en C^- zijn integratiekonstanten) worden respectievelijk plus- en minkarakteristieken genoemd. Zoals uit de bovenstaande vergelijkingen (3.3-4, 5) blijkt is de grootte $\tilde{u} + \tilde{p}/\gamma$ konstant langs de pluskarakteristieken en de grootte $\tilde{u} - \tilde{p}/\gamma$ konstant langs de minkarakteristieken. Er geldt dus langs een plus- en minkarakteristiek:

$$\tilde{u} + \tilde{p}/\gamma = \Gamma^+ \quad (3.2-6)$$

$$\tilde{u} - \tilde{p}/\gamma = \Gamma^- \quad (3.2-7)$$

De waarden van Γ^+ en Γ^- kunnen van karakteristiek tot karakteristiek verschillen. Zoals bekend kan men in de akoestische benadering elke verstoring $\tilde{u}$ en $\tilde{p}$ in het veld opgebouwd denken uit enkelvoudige verstoringen u^+ en p^+ die op de pluskarakteristiek konstant zijn en verstoringen u^- en p^- die dat op de minkarakteristiek zijn. Dit kan men aantonen met behulp van de vergelijkingen (3.3-6) en (3.3-7)

$$\tilde{u} = \frac{\Gamma^+}{2} + \frac{\Gamma^-}{2} = u^+ + u^- \quad (3.3-8)$$

$$\tilde{p} = \gamma \frac{\Gamma^+}{2} - \gamma \frac{\Gamma^-}{2} = p^+ + p^- \quad (3.3-9)$$

Hieruit volgen tevens de akoestische relaties voor de eenvoudige golven:

$$p^+ = \frac{\gamma}{2} \Gamma^+ = \gamma u^+ \quad p^- = -\gamma \frac{\Gamma^-}{2} = -\gamma u^- \quad (3.3-10)$$

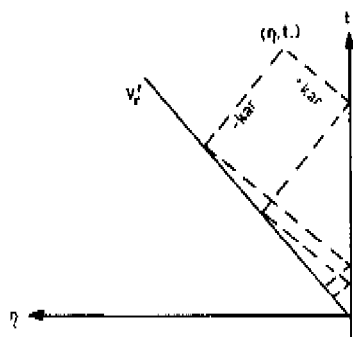


Fig. 3.1 Karakteristieken achter de gereflekteerde schokgolf.

Zoals in Fig. 3.1. is aangegeven in het η - t vlak kan men de verstoringen in $\tilde{u}$ en $\tilde{p}$ in een willekeurig punt in gebied 5 bepalen via de karakteristieken die bij dit punt horen als de randvoorwaarden aan de wand en aan de gereflekteerde schokgolf bekend zijn. De randvoorwaarden aan de schokgolf voor de eerste-orde verstoringen moeten toegepast worden op de nulde-orde schokbaan, dus de schokbaan die overeenkomt met de frozen snelheid V_r' . Een eenvoudige akoestische verstoring die langs een pluskarakteristiek loopt zal aan de schokgolf gereflekteerd worden omdat in gebied 2 de stroming supersoon is ten opzichte van de schokgolf. De voorwaarden ter plaatse van de schokgolf volgen uit de schokrelaties voor de frozen gereflekteerde schokgolf. Zoals in appendix 1 afgeleid is bestaat er een verband tussen de snelheidsverstoring $\tilde{u}$ en de drukverstoring $\tilde{p}$ aan de schokgolf. Daar ter plaatse vindt

men dan met behulp van de akoestische relaties het verband tussen p^+ en p^- :

$$p^- = E p^+ \quad (3.3-10)$$

waarbij

$$E = \frac{A-1}{A+1} ; \quad A = \frac{2M_{rf}^2}{M_{rf}^2 + 1} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_{rf}^2}{2\gamma M_{rf}^2 - \gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

M_{rf} is het Machgetal van de stroming vóór de schokgolf ten opzichte van deze schokgolf en betrokken op de geluidssnelheid a'_{2f} ter plaatse. E heeft maximaal de waarde 0,06 voor $M_1 \rightarrow \infty$.

In de toepassing van het model is de maximale waarde van het Machgetal M_1 van de heengaande schokgolf 6, zodat E maximaal 0,04 is. De gereflekteerde drukverstoring p^+ is dus een grootte orde kleiner dan p^- . Als konsekwentie van de gevolgde linearisatieprocedures worden deze gereflekteerde golven verwaarloosd. Dit houdt in dat verstoringen p^- en u^- langs de minkarakteristieken nul zijn.

De randvoorwaarde aan de wand is dat de snelheid $\tilde{u}$ daar gelijk moet zijn aan de snelheid $\tilde{u}_g(t)$ aan de rand van de temperatuurgrenslaag. Deze zal uit de eerste-orde grenslaagvergelijkingen volgen. Voor de eerste-orde buitenoplossing krijgt men dan de voorwaarde:

$$\eta = 0: \quad \tilde{u} = \tilde{u}_g(t) = u^+ + u^- = \frac{1}{\gamma} (p^+ - p^-) \quad (3.3-11)$$

Omdat $p^- = 0$ geldt de volgende relatie aan de wand:

$$\eta = 0: \quad \tilde{p} = p^+ = \gamma \tilde{u}_g(t) \quad (3.3-12)$$

In een willekeurig punt (η_0, t_0) zal de druk dan gegeven worden door:

$$\tilde{p} = \gamma u_g(t_0 - \eta_0) \quad (3.3-13)$$

Zoals zal blijken is de temperatuurvariatie ten gevolge van de geïnduceerde snelheid u'_g ter plaatse van $\eta = 0$ van belang voor de grenslaagoplossing. De temperatuurvariatie volgt uit de energievergelijking (3.3-3):

$$\eta = 0: \hat{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \hat{p} = (\gamma-1) u_{\delta}(t) \quad (3.3-14)$$

De eerste-orde grenslaagvergelijkingen worden gevonden uit de oorspronkelijke grenslaagvergelijkingen (2.2-23 t/m 25):

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} = \hat{R}^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{T_o}{p_o} \quad (3.3-15)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \psi} = 0 \quad (3.3-16)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_o}{p_o} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \phi(T_o) \frac{\partial \hat{T}}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T_o} \gamma \frac{\partial T_o}{\partial \psi} \right) + \hat{p} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\phi(T_o) \frac{\partial T_o}{\partial \psi} \right) \quad (3.3-17)$$

Zoals uit (3.3-15) blijkt volgt de snelheid $\hat{u}$ direkt uit de nulde-orde grenslaagoplossing:

$$\hat{u} = \hat{R}^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\psi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_o}{p_o} \right) d\hat{\psi} \quad (3.3-18)$$

Door gebruik te maken van de differentiaalvergelijking (3.2-6) die de nulde-orde oplossing bepaalt en van het feit dat $p_o = 1$ kan (3.3-18) herschreven worden tot:

$$\hat{u} = \hat{R}^{-\frac{1}{2}} \left(\phi(T_o) \frac{\partial T_o}{\partial \psi} - \phi(T_w) \frac{\partial T_o}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=0} \quad (3.3-19)$$

Voor de snelheid $\hat{u}_{\delta}(t)$ aan de rand van de grenslaag vindt men dan:

$$u_{\delta}(t) = - \hat{R}^{-\frac{1}{2}} \left[\phi(T_w) \frac{\partial T_o}{\partial \psi} \right] \Big|_{\psi=0} = - \hat{R}^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\phi(T_w)}{\sqrt{t}} \frac{\partial T_o}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} \quad (3.3-20)$$

Evenals Sturtevant (Ref.2) vinden we dus dat de geïnduceerde snelheid rechtsevenredig is met de nulde-orde warmtestroomdichtheid.

Vergelijking (3.3-16) laat zien dat ook in de eerste-orde benadering de drukgradiënten geen rol spelen. In vgl. (3.3-17) is dit reeds toegepast.

Bij de temperatuurvergelijking (3.3-17) moeten nog rand- en beginvoorwaarden gedefinieerd worden. De eerste-orde randvoorwaarde aan de wand volgt uit (2.3-3):

$$(2\pi\gamma)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\lambda}{T} \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{t}{c} \left(\frac{T_w}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial T_o}{\partial \Psi} = \tilde{\gamma} \quad (3.3-21)$$

Omdat T_w van de orde 10^{-1} is en we ons beperken tot verstoringen van de orde $R^{-\frac{1}{2}}$ wordt ook hier de temperatuursprong aan de wand verwaarloosd, dus:

$$\Psi = 0; \quad \tilde{T} = 0 \quad (3.3-22)$$

De voorwaarde voor $\Psi \rightarrow \infty$ komt overeen met de eerste-orde buitenoplossing voor $n=0$. Vergelijking (3.3-14) geeft dan:

$$\Psi \rightarrow \infty: \quad \tilde{T} = (\gamma-1) u_\delta(t) \quad (3.3-23)$$

Evenals bij de nulde-orde oplossing is de beginvoorwaarde ook hier niet zonder meer duidelijk. Op dezelfde gronden als daar wordt hier aangenomen dat de beginvoorwaarde korrespondeert met de randvoorwaarde voor kleine t . Uit (3.3-20) blijkt dat u_δ voor $t \rightarrow 0$ naar oneindig toe gaat zodat we via (3.3-23) krijgen:

$$t \rightarrow 0 \quad \Psi > 0; \quad \tilde{T} \rightarrow \infty$$

Overgang op de gelijkvormigheidscoördinaat $z = \Psi/\sqrt{t}$ geeft voor de vergelijking (3.3-17):

$$t \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\gamma-1}{\gamma} T_o \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) = \left(\frac{1}{2} z + 2 \frac{\partial T_o}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \phi(T_o) \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tilde{T} + \tilde{p} \frac{\partial}{\partial z} \phi(T_o) \frac{\partial T_o}{\partial z} \quad (3.3-24)$$

$$z = 0: \quad \tilde{T} = 0$$

$$z \rightarrow \infty: \quad T = (\gamma-1) u_\delta(t)$$

De drukvariatie $\tilde{p}$ in de grenslaag is gelijk aan de drukvariatie buiten

de grenslaag. Deze wordt gegeven door (3.3-12) voor $\eta_0 = 0$. Definieren we nu $Q = R^{\frac{1}{2}} \phi(T_0) (\partial T_0 / \partial z)_{z=0}$ dan is de snelheid $\tilde{u}_0$ aan de wand van de grenslaag $\tilde{u}_0 = -Q/\sqrt{t}$ (zie 3.3-20).

Wanneer men nu stelt dat de oplossing $\tilde{T}$ en de drukvariatie $\tilde{p}$ gegeven worden door respectievelijk $\tilde{T} = T^*/\sqrt{t}$ en $\tilde{p} = p^*/\sqrt{t}$ waarbij T^* en p^* slechts een functie van z zijn, dan is $\tilde{T}$ de oplossing van (3.2-24) als T^* voldoet aan:

$$\left(\frac{1}{2}z + 2 \frac{\partial \phi(T_0)}{\partial z} \right) \frac{\partial T^*}{\partial z} + \phi(T_0) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} T^* + p^* \frac{\partial}{\partial z} \phi(T_0) \frac{\partial T_0}{\partial z} = (T^* - \frac{\gamma-1}{\gamma} T_0 p^*) \quad (3.3-25)$$

$$z = 0: T^* = 0$$

$$z \rightarrow \infty: T^* = -(\gamma-1)Q$$

Hierbij is $p^* = -\gamma Q$. Evenals de nulde-orde oplossing is de eerste orde oplossing T^* numeriek bepaald uit (3.3-25).

Uit de algemene vergelijking voor de warmtestroomdichtheid aan de wand (3.2-11) kan nu de eerste-orde warmtestroomdichtheid ten gevolge van de grenslaaginval bepalend worden.

$$\tilde{u} = \tilde{u}'/H' = t^{-\frac{1}{2}} \left(p^* + \frac{\partial T^*}{\partial z} \left/ \frac{\partial T_0}{\partial z} \right. \right) \Big|_{z=0} \quad (3.3-26)$$

3.4. De eerste-orde buitenoplossing voor vibratielerelaxatie

Bij deze eerste-orde oplossing worden de door de nulde-orde grenslaagoplossing geïnduceerde verstoringen (die in de voorafgaande paragraaf behandeld zijn) verder buiten beschouwing gelaten. Ten gevolge van de vibratielerelaxatie in gebied 2, achter de heengaande schokgolf, zal de oplossing in gebied 5 mede bepaald worden door verstoringen in 2 ten opzichte van de oorspronkelijke frozen toestand.

Om de verstoringen in de verschillende gebieden te onderscheiden wordt de volgende afspraak gemaakt. De grootheden zonder indexcijfer hebben betrekking op gebied 5, de grootheden met indexcijfer 1 en 2 hebben betrekking op gebied 1 voor de heengaande schok-

golf en op gebied 2 achter deze schokgolf. Verder zijn de grootheden die niet voorzien zijn van een aksent met de frozen waarde dimensieloos gemaakt.

De basis van de eerste-orde buitenoplossing in het algemene stelsel (2.2-15) t/m (2.2-18). Dit stelsel geeft voor de snelheidsverstoring $\hat{u}$, de temperatuurverstoring $\hat{T}$ en de drukverstoring $\hat{p}$ de volgende vereenvoudigde vergelijkingen:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} \quad (3.4-1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.4-2)$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = - \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (3.4-3)$$

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (3.4-4)$$

In de eerste vergelijking (3.4-1) wordt de temperatuurvariatie $\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}$ weer geëlimineerd met behulp van de vergelijking (3.4-3). De som en het verschil van de twee vergelijkingen (3.4-1) en (3.4-2) geven dan samen met de vergelijking (3.4-4) de volgende twee vergelijkingen:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \alpha} = - \frac{\partial e_v}{\partial t} \quad (3.4-5)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \beta} = \frac{\partial e_v}{\partial t} \quad (3.4-6)$$

Hierbij zijn de α en β weer de differentiaal in de karakteristieke richtingen $\frac{d\eta}{dt} = 1$ en $\frac{d\eta}{dt} = -1$. Vanwege de bronterm $(\partial e_v / \partial t)$ in de bovenstaande vergelijkingen zullen de enkelvoudige verstoringen u^+ , p^+ , u^- en p^- , in tegenstelling met de eerste-orde grenslaagverstoringen niet konstant blijven langs de karakteristieken.

De verdere aanpak van de vergelijkingen (3.4-5,6) is in hoofdlijn gebaseerd op de berekeningen van de verstoringen achter de heengaan- de schokgolf in een schokbuis tengevolge van de grenslagen aan de zijwanden, die uitgevoerd werden door Mirels (Ref. 18). Bij de een-

dimensionale beschrijving van deze laatste grenslaagverstoringen komt Mirels namelijk tot dezelfde inhomogene akoestische vergelijkingen als (3.4-5,6) met in plaats van een bronterm tengevolge van vibratiere Relaxatie een massabronterm tengevolge van de zijwandgrenslagen. Zoals uit Ref. 18 blijkt kunnen de verstoringen $\tilde{u}$ en $\tilde{p}$ die door (3.4-5) en (3.4-6) bepaald worden, samengesteld gedacht worden uit enkelvoudige verstoringen

$$\tilde{u} = u^+ + u^- \quad (3.4-7)$$

$$\tilde{p} = p^+ + p^- \quad (3.4-8)$$

waarbij de akoestische relaties gelden: $u^+ = \frac{P^+}{Y}$; $u^- = -\frac{P^-}{Y}$

De volgende relaties gelden voor veranderingen van de enkelvoudige verstoringen in de karakteristieke richtingen:

$$\frac{\partial u^+}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\partial e_v}{\partial t}; \quad \frac{\partial p^+}{\partial \alpha} = -\frac{Y}{2} \frac{\partial e_v}{\partial t}; \quad \frac{\partial u^-}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial e_v}{\partial t}; \quad \frac{\partial p^-}{\partial \beta} = -\frac{Y}{2} \frac{\partial e_v}{\partial t} \quad (3.4-9)$$

Omgekeerd blijkt dat wanneer bovengenoemde eigenschappen van de enkelvoudige verstoringen gelden $\tilde{u}$ en $\tilde{p}$ aan de vergelijkingen (3.4-5 en 6) voldoen. Voordat bovenstaande relaties voor $\tilde{u}$ en $\tilde{p}$ toegepast kunnen worden om deze verstoringen te berekenen moeten zowel de vibratieënergie e_v in gebied 5 als functie van η en t als de randvoorwaarden bekend zijn. De vibratieënergie wordt nader bepaald door vergelijking (3.4-4). Hierbij wordt in deze benadering e_v^* bij de frozen temperatuur T'_{5f} en de relaxatietijd bij de frozen temperatuur en druk T'_{5f} en p'_{5f} genomen. De algemene oplossing is dan:

$$e_v = e_v^* - (e_v^* - e_{vr}) \exp \frac{(t_r - t)}{\tau} \quad (3.4-10)$$

$$\text{Hieruit volgt: } \frac{\partial e_v}{\partial t} = \frac{e_v^* - e_{vr}}{\tau} \exp \frac{(t_r - t)}{\tau} \quad (3.4-11)$$

e_{vr} is de vibratieënergie, afhankelijk van η , die het deeltje heeft op het tijdstip t_r als het aangeslagen wordt door de gereflekteerde

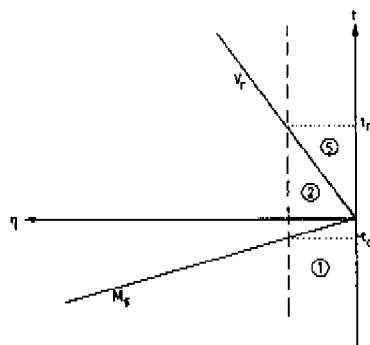


Fig. 3.2 Schokreflektie in η - t diagram; de gebroken lijn geeft een deeltjesbaan weer.

schokgolf. De situatie is geschetst in het η - t diagram in Fig. 3.2. De η -afhankelijkheid van $(\partial e_v / \partial t)$ komt tot uitdrukking in t_r . t_r is gerelateerd aan η via de dimensieloze schoksnelsheid $V_r = V_r' / a_{sf}'$ volgens de relatie $\eta = t_r V_r$.

De randvoorwaarden kunnen gesplitst worden in die aan de wand en die aan de gereflekteerde schokgolf. De randvoorwaarde aan de wand is in dit geval de snelheid u_δ die volgt uit de eerste-orde grenslaagoplossing voor vibratiorelaksatie. Omdat hierbij de eerste-orde grenslaagverstorenngen van $O(R^{-1/2})$ buiten beschouwing zijn gelaten zal blijken dat in dit geval $u_\delta = 0$. Dit betekent dat voor de enkelvoudige verstorenngen aan de wand:

$$\tilde{u} = u^+ + u^- = \frac{p^+}{\gamma} - \frac{p^-}{\gamma} = 0$$

$$\text{dus:} \quad \eta = 0: \quad u^+ = -u^- \quad p^+ = p^- \quad (3.4-12)$$

De voorwaarden aan de gereflekteerde schokgolf zijn minder eenvoudig. De randvoorwaarden van de eerste-orde verstorenngen moeten toegepast worden aan de nulde-orde, dus de "frozen" schokgolfbaan. We merken allereerst op dat aan de schokgolf niet alleen de verstorenngen $\tilde{p}_1$, $\tilde{u}_1$ en $\tilde{u}$ van gebied 5 een rol spelen maar ook verstorenngen in gebied 2; $\tilde{p}_2$, $\tilde{a}_2$ en $\tilde{u}_2$. Deze laatste zijn verstorenngen

tengevolge van de vibratierelaksatie ten opzichte van de oorspronkelijke frozen toestand in gebied 2. Zoals uit (3.4-11) blijkt moet verder de vibratieënergie e_{v2r} aan de schokgolf bekend zijn bij de bepaling van de verstoringen in gebied 5. Deze is ter plaatse gelijk aan e_{v2r} de vibratieënergie in gebied 2. Met behulp van de schokrelaties is het mogelijk om de verstoringen $\tilde{u}$, $\tilde{p}$ in gebied 5 en $\tilde{p}_2$, $\tilde{T}_2$ en $\tilde{u}_2$ aan elkaar te relateren. Via de akoestische relaties kan men dan een verband afleiden tussen $\tilde{p}^-$, $\tilde{p}^+$ en $\tilde{u}_2$, $\tilde{T}_2$, $\tilde{p}_2$. In appendix 1 is dit verband afgeleid:

$$\tilde{p}_5^- = E \tilde{p}_5^+ + D$$

Hierbij is E de reflektiekoefficiënt die reeds in de vorige paragraaf gegeven werd (3.3-10) en D is de getransmitteerde verstoring uit gebied 2:

$$D = \frac{\tilde{p}_2}{A+1} + \left(\frac{A\gamma}{A+1} \tilde{u}_2 - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{A}{A+1} \frac{M_{rf}^2 - 1}{M_{rf}} \cdot a_2 \right) \frac{a_2'}{a_{5f}} \frac{2t}{2t}$$

Hierbij is A gegeven in relatie (3.3-10). Omdat, zoals in de vorige paragraaf reeds vermeld is, |E| maximaal 6% is en de gereflekteerde bijdrage in $\tilde{p}_5^-$ dus een grootte orde kleiner dan de beschouwde verstoringen wordt deze gereflekteerde bijdrage verwaarloosd. Er geldt dus ter plaatse van de gereflekteerde schokgolf:

$$\eta = V_{rf} t; \tilde{p}^- = D \quad (3.4-13)$$

Uit de randvoorwaarden aan de schokgolf volgt dat de grootheden e_{v2r} , $\tilde{p}_{2r}$, $\tilde{u}_{2r}$ en $\tilde{a}_{2r}$ ter plaatse van de schokgolf bekend moeten zijn. Hiertoe moet dit relaxatie gebied in gebied 2 geanalyseerd worden. De vibratierelaksatie-effecten in gebied 2 zijn kleiner dan in gebied 5 omdat de evenwichtvibratieënergie kleiner is en bovendien de relaxatietijd in gebied 2 groter is dan in gebied 5. Linearisatie van de vibratierelaksatie-effecten in gebied 5 rechtvaardigt dan ook de linearisatie van deze effecten in gebied 2. De vibratierelaksatievergelijking in gebied 2 komt overeen met (3.4-4) maar nu met de evenwichtvibratieënergie e_{v2}^* bij de frozen

temperatuur T'_{2f} en relaxatietijd τ_2 bij de temperatuur T'_{2f} en druk p'_{5f} . Voor de vibratieënergie kan men derhalve opschrijven:

$$e_{v2} = (e_{v1}^* - e_{v2}^*) \exp\left(\frac{-t_0 - t}{\tau_2}\right) + e_{v2}^* \quad (3.4-14)$$

Hierbij is $-t_0$ het tijdstip waarop de heengaande schokgolf het betreffende deeltje passeert (zie Fig. 3.2) en e_{v1}^* is de evenwichtvibratieënergie bij de begintemperatuur T'_1 . De vibratieënergie aan de gereflekteerde schokgolf is nu:

$$e_{v2r} = (e_{v1}^* - e_{v2}^*) \exp\left(\frac{-t_0 - t_r}{\tau_2}\right) + e_{v2}^* \quad (3.4-15)$$

Omdat de afgelegde afstand van de heengaande schokgolf gedurende de tijd t_0 gelijk is aan de som van de afgelegde afstand van het deeltje gedurende de tijd $t_r + t_0$ en die van de gereflekteerde schokgolf gedurende t_r geldt er:

$$t_r + t_0 = (V'_1 + V'_r) t_r / \bar{u}'_{2f} \quad (3.4-16)$$

Hierbij zijn V'_1 en V'_r de absolute waarden van heengaande en gereflekteerde schokgolfsnelheden en $\bar{u}'_{2f}$ is de frozen deeltjessnelheid in gebied 2 ten opzichte van de gereflekteerde schokgolf. ($\bar{u}'_2 = u'_2 + V'_r$). Definieren we in gebied 2 een nieuwe relaxatietijd

$$\tau_2^* = \frac{\bar{u}'_{2f}}{V'_1 + V'_r} \tau_2$$

dan wordt de vibratieënergie aan de gereflekteerde schokgolf:

$$e_{v2r} = (e_{v1}^* - e_{v2}^*) \exp\left(-\frac{t_r}{\tau_2^*}\right) + e_{v2}^* \quad (3.4-17)$$

Substitutie van e_{v1} in (3.4-11) geeft dan de verandering van de vibratieënergie als functie van t en η . De η afhankelijkheid zit in t_r : $\eta = t_r V'_r$.

De verstoringen $\tilde{a}_{2r}$, $\tilde{u}_{2r}$ en $\tilde{p}_{2r}$ aan de schokgolf worden op de nu

volgende manier gevonden. Er kan aangetoond worden dat de verandering van de temperatuur T_2 evenredig is met de verandering van de vibratieënergie achter de heengaande schokgolf (appendiks 11). Dan geldt er voor T_{2r} (appendiks 11):

$$T_{2r} = - (T'_{5f}/T'_{2f}) \frac{1 - \gamma \tilde{u}_{2f}^2}{1 - \tilde{u}_{2f}^2} (e_{v2}^* - e_{v1}^*) (1 - \exp(-t_r/\tau_2^*)) \quad (3.4-18)$$

Waarbij de evenwichtvibratieënergies beiden betrokken zijn op $c_p T'_{5f}$. Verder gelden er in de, ten opzichte van de heengaande schokgolf, stationaire relaxatiezone in gebied 2 de volgende behoudswetten van impuls en massa:

$$\begin{aligned} \rho_2' u_2' &= \text{konstant} \\ \rho_2' + \rho_2' \tilde{u}_2'^2 &= \text{konstant} \end{aligned} \quad (3.4-19)$$

Waarbij $\tilde{u}_2$ de relatieve mediumsnelheid ten opzichte van de heengaande schokgolf in gebied 2 is ($\tilde{u}_2 = v_1 - u_2$). Combinatie van beiden met de toestandsvergelijking $p_2' = R \rho_2' T_2'$ geeft dan:

$$\frac{RT_2'}{\tilde{u}_2'^2} + \tilde{u}_2' = \text{konstant} \quad (3.4-20)$$

Uit deze laatste relatie volgt voor de snelheidsvariatie $\tilde{u}_2 \approx -\tilde{u}_2$

ter plaatse van de gereflekteerde schokgolf:

$$\tilde{u}_{2r} \approx (\tilde{u}_{2f} \tilde{x}_{2r}) / (\gamma \tilde{u}_{2f}^2 - T_{2f}) \quad (3.4-21)$$

Uit de betrekking $a_{2f}^2 = \gamma R T'_{2f}$ kan men nu de volgende uitdrukking voor de verstoring in de geluidssnelheid vinden:

$$\tilde{a}_{2r} = \frac{1}{2} \tilde{x}_{2r} \quad (3.4-22)$$

ten slotte volgt uit (3.4-19) het verband tussen $\tilde{p}_2$ aan de schokgolf en $\tilde{u}_2$:

$$\tilde{p}_{2r} = -\gamma \rho_1 v_1 \tilde{u}_{2r} = +\gamma \rho_1 v_1 \tilde{u}_{2r} \quad (3.4-23)$$

waarbij de dichtheid ρ_1' , en de schoksnelheid V_1' betrokken zijn op respectievelijk ρ_2' en a_{2r}' .

De drukverstoring in een willekeurig punt wordt nu op de volgende manier bepaald. De relaties (3.4-9) voor p^+ en p^- geven voor het drukverschil tussen twee punten van een plus- of minkarakteristiek met respectievelijk coördinaten η_1 en η_2 :

$$\tilde{p}_5^+ (\eta_2) - \tilde{p}_5^+ (\eta_1) = -\frac{\gamma}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial e_v}{\partial t} d(\frac{\eta}{\beta}) = +\frac{\gamma}{2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial e_v}{\partial t} d\eta \quad (3.4-24)$$

waarbij de integratie uitgevoerd wordt langs de plus- of minkarakteristiek door beide punten. De uitdrukking voor $(\partial e_v / \partial t)$ als functie van η en t volgt uit (3.4-11) waarbij voor e_{v2} de uitdrukking voor e_{v2r} in relatie (3.4-17) genomen dient te worden. Uitwerking van de integratie langs de pluskarakteristiek $\eta = t + \hat{\eta} - \xi$ of langs de minkarakteristiek $\eta = -t + \hat{\eta} + \xi$ geeft voor het verband tussen de enkelvoudige verstoringen $\tilde{p}_5^+$ of $\tilde{p}_5^-$ in twee punten op de karakteristiek met coördinaten η_2 en η_1 de volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_5^+ (\eta_2) - \tilde{p}_5^+ (\eta_1) &= -\frac{\gamma}{2} \left(+ \frac{(e_{v2}^* - e_{v1}^*)}{1 + v} v_r \exp \left(\frac{1 + v_r}{v_r} \eta \pm \frac{\hat{\eta}}{r} - \frac{\xi}{r} \right) \right) \Bigg]_{\eta_1}^{\eta_2} \\ &- \frac{\gamma}{2} \left(+ \frac{(e_{v2}^* - e_{v1}^*)}{\tau_2^* + v_r \tau_2^*} v_r \exp \left(\frac{\tau_2^* - \tau + v_r \tau_2^*}{v_r \tau \tau_2^*} \pm \frac{\hat{\eta}}{r} - \frac{\xi}{r} \right) \right) \Bigg]_{\eta_1}^{\eta_2} \end{aligned} \quad (3.4-25)$$

Kortheidshalve schrijven we hiervoor:

$$\tilde{p}_5^+ (\eta_2) = \tilde{p}_5^+ (\eta_1) + I^+ \Bigg]_{\eta_1}^{\eta_2}$$

In Fig. 3.3 is nu aangegeven hoe de verstoring $\tilde{p}$ in een punt $(\hat{\eta}_0, \tau_0)$ samengesteld is.

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\eta_0, t_0) = & D(\eta_3, t_3) + I^+ \Big|_{\eta_3}^{\eta_0} + D(\eta_2, t_2) + I^+ \Big|_{\eta_2}^{\eta_1} \\ & + I^- \Big|_{\eta_1}^{\eta_0} \end{aligned} \quad (3.4-26)$$

waarbij het volgende verband tussen de coördinaten bestaat:

$$\eta_1 = 0 \quad t_1 = t_0 - \eta_0 \quad \eta_2 = t_1 / (1 - 1/v_r)$$

$$t_2 = t_1 / (v_r + 1) \quad \eta_3 = (\eta_1 + t_1) / (1 + 1/v_r) \quad t_3 = (\eta_1 + t_1) / (v_r + 1)$$

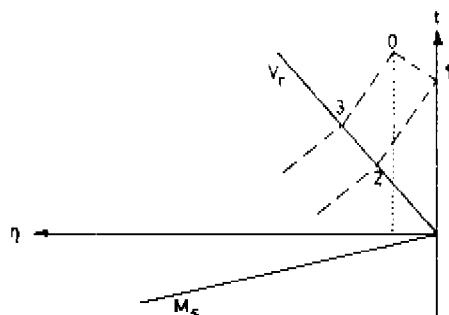


Fig. 3.3 η - t diagram ----- karakteristieken deeltjesbaan.

Uit vgl. (3.4-3) blijkt verder dat er voor de temperatuurvariatie langs een deeltjesbaan de volgende relatie geldt:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\eta_0, t_0) = & \tilde{T}(\eta_0, t_r) + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\tilde{p}_5(\eta_0, t) - \tilde{p}_5(\eta_0, t_r)) \\ & - e_v(\eta_0, t_r) + e_v(\eta_0, t) \end{aligned} \quad (3.4-27)$$

De drukverstoringen ter plaatse η_0 op de tijdstippen t en t_r kunnen bepaald worden met (3.4-25). Het verschil in vibratie-energie op beide tijdstippen, $e_v(\eta_0, t) - e_v(\eta_0, t_r)$, wordt bepaald met formule (3.4-10) waarbij e_{vr} gegeven is door (3.4-17). De temperatuurvariatie $\tilde{T}_{5r} = \tilde{T}(\eta_0, t_r)$ aan de schokgolf in

gebied 5 is via de schokrelaties gekoppeld aan de variatie $\hat{T}_{2r}$ voor de gereflekteerde schokgolf en aan de drukvariaties $\hat{p}_r$ achter en $\hat{p}_{2r}$ voor de schokgolf:

$$\hat{T}_{5r} = C \hat{T}_{2r} + B \hat{p}_r + F \hat{p}_{2r} \quad (3.4-28)$$

De konstanten C, B en F zijn gegeven in appendix 1.

De berekeningen van $\hat{p}$ en $\hat{T}$ in gebied 5 zijn om praktische redenen met behulp van een computerprogramma uitgevoerd. Zoals uit het volgende zal blijken zijn deze druk- en temperatuurvariaties aan de wand van belang voor de bepaling van de grenslaagoplossing voor de vibratierelaksatieverstorenngen.

3.5. De eerste-orde grenslaagoplossing voor vibratierelaksatie

De eerste-orde grenslaagvergelijkingen voor de vibratierelaksatie volgen uit het stelsel (2.2-23 t/m 26). Wanneer de termen van grootte-orde R^{-1} buiten beschouwing gelaten worden, voldoen de verstorenngen in snelheid $\hat{u}$, druk $\hat{p}$ en temperatuur $\hat{T}$ aan:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \psi} = 0 \quad (3.5-1)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \psi} = 0 \quad (3.5-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tau} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_o}{p_o} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \phi(T_o) \frac{\partial \hat{T}}{\partial \psi} + \frac{\gamma}{p} \frac{\partial}{\partial \psi} \phi(T_o) \frac{\partial T_o}{\partial \psi} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \phi(T_o)}{\partial T} \hat{T} \frac{\partial T_o}{\partial \psi} \right) - \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \end{aligned} \quad (3.5-3)$$

$$\frac{\partial e_v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \psi} \phi_v(T_o) \frac{\partial e_v}{\partial \psi} - \frac{e_v^* - e_v}{\tau} \quad (3.5-4)$$

Hierbij is $\phi_v(T) = \kappa(T)/T_o$

De randvoorwaarde voor de temperatuurvariatie $\hat{T}$ volgt uit de vergelijking (2.3-3). Evenals bij de verstorenngen ten gevolge van geïnduceerde grenslaagsnelheden wordt de randvoorwaarde hier:

$$\psi = 0 : \hat{T} = 0 \quad (3.5-5)$$

Aan de buitenkant van de grenslaag ($\Psi \rightarrow \infty$) moet de temperatuur-
variatie overeenkomen met de temperatuurvariatie van de buiten-
oplossing voor $\eta = 0$:

$$\eta = \infty: \quad \tilde{T} = \tilde{T}_\eta = 0 \quad (3.5-6)$$

Omdat over de grootte-orde van de thermische akkomodatiecoëfficiënt
van de vibratieënergie α_v geen gegevens bekend zijn, is deze
akkomodatiecoëfficiënt als onbekende parameter beschouwd. De rand-
voorwaarde voor e_v in de eerste-orde oplossing is dan dezelfde
als de algemene voorwaarde (2.3-4):

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\kappa}{T} \left[\frac{2 - \alpha_v}{\alpha_v} \left(\frac{T}{\Psi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial e_v}{\partial \Psi} \right]_{\Psi=0} = e_v - e_v^* (T_w) \quad (3.5-7)$$

Voor $\Psi \rightarrow \infty$ komt e_v weer overeen met e_v zoals die uit de buiten-
oplossing volgt:

$$\Psi \rightarrow \infty: \quad e_v \rightarrow e_{v\eta=0} \quad (3.5-8)$$

De beginvoorwaarden voor bovenstaand stelselvergelijking zijn
uiteraard die voorwaarden die met de "frozen"toestand corres-
ponderen:

$$t = 0 \quad \Psi \rightarrow 0: \quad \tilde{T} = 0 \quad e_v = 0 \quad (3.5-9)$$

In de gelijkvormigheidskoördinaat van de nulde-orde oplossing:
 $z = \Psi/\sqrt{t}$ worden de grenslaagvergelijkingen met begin- en rand-
voorwaarden:

$$t \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\gamma-1}{\gamma} T_0 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \frac{e_v^* - e_v}{t} \right) = \left(\frac{1}{2} z + 2 \frac{\partial \phi(T_0)}{\partial z} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \\ + \phi(T_0) \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tilde{T} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi(T_0) \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \quad (3.5-10)$$

$$t \left(\frac{\partial e_v}{\partial t} - \frac{e_v^* - e_v}{t} \right) = \left(\frac{1}{2} z + \frac{\partial \phi(T_0)}{\partial z} \right) \frac{\partial e_v}{\partial z} + \phi(T_0) \frac{\partial^2 e_v}{\partial z^2} \quad (3.5-11)$$

$$z = 0 : \quad \hat{T} = 0 \quad \frac{\partial e_v}{\partial z} = -\sqrt{t} f(\alpha_v)(e_v^* - e_v) \quad (3.5-12)$$

$$z = \infty : \quad \hat{T} = \hat{T}_\infty \quad e_v = e_{v_\infty} = 0$$

$$t = 0 : \quad e_v = 0 \quad \hat{T} = 0 \quad (3.5-13)$$

Hierbij is $f(\alpha_v) = \alpha_v / (2 - \alpha_v)^{1/2} (R/T)^{1/2}$. De oplossing van het bovenstaand stelsel met rand- en beginvoorwaarden (3.5-9 t/m 13) is numeriek bepaald. Hiertoe zijn de vergelijkingen gediskretiseerd. Deze diskretisatie is beschreven in hoofdstuk 5 waarin de numerieke oplossingsmethode gegeven is. Met behulp van de numeriek gevonden grenslaagstructuur is het dan mogelijk om de warmtestroomdichtheid aan de achterwand te berekenen. Uit de algemene vergelijking voor de warmtestroomdichtheid (3.2-11) volgt nu voor deze eerste-orde warmtestroomdichtheid die bepaald wordt door de vibratierelaksatie:

$$\hat{H} - \hat{H}'/H'_0 = \left(\tilde{p} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) \Bigg|_{z=0} \quad (3.5-14)$$

DE TRANSPORTKOEFFICIENTEN

4.1. De relaxatietijden

Zoals uit het voorafgaande blijkt is in het schokreflektiemodel aangenomen dat de energie-overdracht tussen enerzijds de rotatie- en translatievrijheidsgraden en anderzijds de vibratievrijheidsgraden, beschreven kan worden met de Bethe-Teller vergelijking:

$$\frac{\partial e'_v}{\partial T} = \frac{e'_v - e'^*_v}{\tau'_v} (T) \quad (4.1-1)$$

Hierbij is τ'_v uitsluitend een functie van de translatietemperatuur. Vergelijking (4.1-1) kan langs theoretische weg afgeleid worden (Ref. 29) onder een aantal beperkende voorwaarden waaraan voor reële meeratomige gassen zoals N_2 en CO_2 niet altijd voldaan is. Empirisch blijkt echter dat de relatie een groter geldigheidsgebied heeft dan men op grond van deze voorwaarden zou verwachten.

Voor stikstof zijn reeds veel experimenten met betrekking tot de vibratiere Relaxatie verricht. In het temperatuurgebied van 2000 K tot 5000 K bestaan betrouwbare metingen van de relaxatietijd τ'_v van dit gas die redelijk goed met elkaar in overeenstemming zijn. (Refs. 30, 31, 32). Bij deze metingen, in schokbuizen, wordt de relaxatietijd uitgaande van relatie (4.1-1) gemeten over de relaxatiezone achter de heengaande schokgolf. Appleton (Ref. 12) heeft schokbuisexperimenten verricht in N_2 waarbij speciaal de geldigheid van (4.1-1) nagegaan werd. Hiertoe werd het verloop van τ'_v in de relaxatiezone gemeten. In deze zone verloopt naast de temperatuur ook de momentane waarde van de vibratieënergie zodat het mogelijk is om na te gaan of de relaxatietijd inderdaad niet van deze energie afhankelijk is. De metingen werden uitgevoerd in het temperatuurgebied van 3000 K tot 9000 K. Appleton komt aan de hand van deze metingen tot de konklusie dat de Bethe-Teller vergelijking in het temperatuurgebied van 3000 K tot 5000 K voor stikstof goed voldoet. In dit temperatuurgebied kan de relaxatietijd gegeven worden met de empirische relatie van Millikan en White (Ref. 30):

$$\log_{10} (p'\tau') = 102 T' - \frac{1}{3} - 6,24 \quad (4.1-2)$$

Hierbij zijn de eenheden van druk, temperatuur en relaxatietijd respectievelijk Nm^{-2} , K en s. Boven de 5000 K blijkt de relaxatietijd niet alleen een functie van de temperatuur te zijn maar ook van de mate van niet-evenwicht ($e'_v - e_v^*$). Blijkbaar beginnen hier de anharmonische effecten, die bij de Bethe-Teller vergelijking uitgesloten worden, een rol te spelen. Bij de toepassing van ons model hebben we ons beperkt tot temperaturen tot 5000 K zodat (4.1-2) zowel in als buiten de temperatuurgrenslaag gebruikt kon worden.

Alhoewel er gedurende de afgelopen jaren betrekkelijk veel aandacht is besteed aan de vibratiere Relaxatie in CO_2 , blijkt het toch moeilijk om een korrekte beschrijving te geven van het relaxatieproces. Dit is niet op de laatste plaats te wijten aan de komplekse trillingsvorm van CO_2 . Het CO_2 -molekuul heeft drie verschillende vibratie "modes". Deze drie zijn symmetrische "stretching mode" ($\nu_1 = 4053 \text{ s}^{-1}$), de tweemaal ontwaarde "bending mode" ($\nu_2 = 2016 \text{ s}^{-1}$) en de asymmetrische "stretching mode" ($\nu_3 = 7189 \text{ s}^{-1}$). In Fig. 4.1 zijn de energieniveaus die behoren bij deze trillingsvormen en die een rol spelen bij het energieuitwisselingsproces tussen translatie- en vibratievrijheidsgraden schematisch weergegeven.

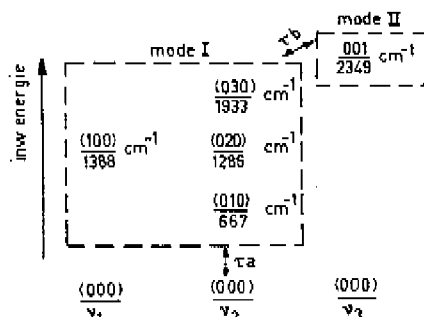


Fig. 4.1 *Energieniveaus van het CO_2 molekuul.*

De notaties in deze Fig. 4.1. zijn overgenomen uit de publikatie van Taylor en Bitterman (Ref. 33). In deze publikatie wordt een goed overzicht gegeven van de resultaten van onderzoeken betreffende het vibratielerelaksatieproces. Zowel eksperimenteel als theoretisch blijken diverse auteurs tot verschillende konklusies te komen die zelfs in tegenspraak met elkaar zijn.

Twee van de meest recente publikaties over het interaksieproces van twee CO_2 molekulen zijn die van Herzfeld (Ref. 34) en Mariott (Ref. 35). Uit beiden blijkt dat er een zeer snelle uitwisseling van energie optreedt tussen zowel de ν_2 niveaus onderling als tussen de ν_2 en ν_1 "modes". Op grond hiervan kan men bij het vibratielerelaksatiemodel er vanuit gaan dat de vibratieënergieniveaus van het CO_2 molekuul in de twee "modes" (I en II) ondergebracht worden zoals in Fig. 4.1. is aangegeven. Binnen deze twee "modes" heerst er evenwicht met twee verschillende inwendige temperaturen T'_I en T'_{II} . Verder blijkt dat de ν_2 "mode" vrijwel uitsluitend energie uitwisselt met de overige vibratie "modes" en niet met de translatievrijheidsgraden. Over de snelheid waarmee de energie-uitwisseling tussen I en II plaats heeft bestaan er verschillende konklusies. Uit Ref. 35 blijkt dat het energie-uitwisselingsproces snel verloopt terwijl in Ref. 34 het tegendeel gekonkludeerd wordt. Op grond van de theoretische resultaten kan men echter in ieder geval besluiten tot het volgende vibratielerelaksatiemodel:

$$\begin{aligned} \frac{de'_v}{dt'} &= \frac{d(e'_{\nu_1} + e'_{\nu_2})}{dt'} = \frac{e'^*_{\nu_1}(T'_I) - e'_{\nu_1}}{\tau'_a} \\ \frac{de'_{II}}{dt'} &= \frac{e'^*_{II}(T'_{II}) - e'_{II}}{\tau'_b} \end{aligned} \quad (4.1-3)$$

waarbij men echter geen uitspraak kan doen over de onderlinge verhouding van τ'_a en τ'_b . In principe is het mogelijk om bovenstaand model eksperimenteel te verifiëren en de bijbehorende relaksatietijden te bepalen. Het blijkt echter niet doenlijk om via de eksperimentele resultaten bij hoge temperaturen, voornamelijk verkregen via schokbuiseksperimenten, uitsluitend te geven over bovenstaand model. Dit is niet op de laatste plaats te wijten aan het feit dat er in de schokbuis sterk

afgeleide grootheden van het relaxatieproces, voornamelijk dichtheidvariatiës, gemeten kunnen worden. Omdat de energie behorende bij de v_3 "mode" slechts een gering deel uitmaakt van de totale vibratieënergie, zal het effect van de tweede relaxatievergelijking moeilijk te registreren zijn, speciaal wanneer $\tau'_b \approx \tau'_a$. Indien e'_{II} verwaarloosd wordt in (4.1-3) reduceert dit model tot:

$$\frac{de'_v}{dt'} = \frac{e'^{*}_v(\tau') - e'_v}{\tau'} \quad (4.1-4)$$

Van de schokbuisexperimenten in dit verband zijn die van Johannessen e.a. (Ref. 36) en Simpson (Ref. 37) het zorgvuldigst verricht. Hierbij wordt het dichtheidsverloop achter de heengaande schokgolf gemeten en aan de hand hiervan de relaxatietijd τ' in de vgl. (4.1-4) bepaald. Er wordt dus uitgegaan van de Bathe-Teller vergelijking. Tevens is speciaal onderzocht of de relaxatietijd inderdaad slechts een functie van de translatietemperatuur is. Globaal blijken de relaxatietijden met elkaar in overeenstemming te zijn. Johannessen e.a. (Ref. 36) komen echter tot de konklusie dat de Bathe-Teller vergelijking niet helemaal voldoet omdat de relaxatietijd afhankelijk blijkt te zijn van $e'^{*}_v - e'_v$, terwijl Simpson e.a. (Ref. 37) door een nauwkeuriger analyse van hun metingen aantonen dat dit niet het geval is.

Uit beide publikaties blijkt tevens dat de v_3 "mode" geen registreerbaar langere relaxatietijd heeft dan de overige "modes". Omdat de metingen en analyse in Ref. 37 het nauwkeurigst zijn gebeurd, hebben we op grond van deze metingen besloten het model (4.1-4) te gebruiken, waarbij de relaxatietijd τ' gegeven wordt door de relatie:

$$p'\tau' = (T'/273) \phi(T')/\phi_0 \quad (4.1-5)$$

waarbij T' de absolute temperatuur in K is, $\phi_0 = 25 \text{ (N}^{-1} \text{s}^{-1} \text{m}^2)$ en

$$\Phi(T') = (T'/959) \exp \{2,02 - 2,48(T'/959)^{-\frac{1}{3}}\} (1 - \exp(-959/T')) \quad (4.1-6)$$

4.2. De warmtegeleidingscoëfficiënten

In hfst. 2 is het energietransport in de temperatuurgrenslaag, tengevolge van geleiding gerelateerd aan de lokale gradiënten van translatie- (rotatie-) temperatuur en van vibratieënergie. Er is geponcerd dat het transport van translatie- en rotatie-energie evenredig is met de translatietemperatuurgradiënt en dat van vibratieënergie met de vibratieënergiegradiënt. De evenredigheidskonstanten zijn respektievelijk de warmtegeleidingscoëfficiënten λ' en κ' . Omdat het moeilijk blijkt de twee verschillende energiestromen afzonderlijk te bemeten bestaan er geen empirische relaties waarmee het bovenstaande zonder meer aangetoond kan worden. Daarom is men zowel bij het aantonen van het bovenstaande als bij het vinden van uitdrukkingen voor de transportcoëfficiënten aangewezen op theoretische beschouwingen.

Het blijkt mogelijk (zie appendiks III) aan te tonen dat de aangegeven relaties voor het warmtegeleidingstransport in de thermische grenslaag geldig zijn. Hierbij is evenals bij het trachten te vinden van uitdrukkingen voor de warmtegeleidingscoëfficiënten gebruik gemaakt van de kinetische gastheorie voor meeratomige gassen van Wang-Chang en Uhlenbeck (Ref. 24).

De eerste suggesties betreffende het energietransport in meeratomige gassen zijn gedaan door Eucken (Ref. 47). Een verbetering van de z.g. Euckenrelaties treft men aan bij Chapman en Cowling (Ref. 48). Hierbij wordt aangenomen dat het translatieënergie-transport beschreven kan worden op dezelfde manier als voor de eenatomige gassen en dat het transport van inwendige energie plaats heeft via diffusie. Deze laatste aanname houdt in feite in dat de interactie tussen inwendige- en translatieënergie verwaarloosd wordt. De z.g. gemodificeerde Euckenrelaties geven dan voor het totale energietransport q' :

$$q' = - \lambda'_t \frac{\partial T'_t}{\partial x'_t} - \lambda'_i \frac{\partial T'_i}{\partial x'_t} \quad (4.2-1)$$

$$\text{waarbij:} \quad \lambda'_t = 5/2 \, c'_t \mu' \text{ en } \lambda'_i = c'_i \rho' D' \quad (4.2-2)$$

De grootheden c'_t , μ'_i, c'_i en D' zijn respectievelijk de soortelijke warmte van de translatieënergie, de viscositeit, de soortelijke warmte van de inwendige energie en de zelf-diffusiecoëfficiënt. T'_t en T'_i zijn de translatie- en inwendige temperatuur. Omdat, speciaal voor de rotatievrijheidsgraden, de interactie tussen translatie- en interne vrijheidsgraden niet verwaarloosbaar is, zijn door Mason en Monchick (Ref.27) de uitdrukkingen voor het energietransport verder ontwikkeld. Hierbij is als basis de formele kinetische theorie van Wang-Chang en Uhlenbeck genomen. Via deze theorie kan men tot uitdrukkingen komen voor de diverse transportcoëfficiënten waarin complexe botsingsintegralen met onbekende botsingsdoorsneden voorkomen. De transportcoëfficiënten worden vervolgens aan elkaar gerelateerd waarbij de termen met inelastische botsingsdoorsnede systematisch meegenomen worden. Als eerste benadering, met verwaarlozing van de inelastische botsingen, komt men dan tot bovenstaande gemodificeerde Eucken-relaties. Als tweede benadering komen Mason en Monchick tot uitdrukkingen waarin onder meer de relaxatietijd voorkomt. Past men de resultaten toe op een gas met rotatieënergie dan vindt men voor de energiestroomdichtheid q' tengevolge van geleiding:

$$q' = - (\lambda'_t + \lambda'_r) \frac{\partial T'}{\partial x'} \quad (4.2-3)$$

De coëfficiënten λ'_t voor translatie- en λ'_r voor rotatieënergie worden gegeven door de relaties:

$$\lambda'_t = 5/2 \, \mu' c'_t \left(1 - \frac{c'_r}{c'_t} \frac{5/2 \, \mu' - \rho' \mu'}{2 \rho' \tau'_r} \right) \quad (4.2-4)$$

$$\lambda'_r = \rho' D' c'_r \left(1 + \frac{5/2 \, \mu' - \rho' D'}{2 \rho' \tau'_r} \right) \quad (4.2-5)$$

c'_r is de soortelijke warmte voor rotatieënergie. τ'_r is de relaxatietijd van deze energie. Een konsekwente toepassing van de

aanpak van Mason en Monchick voor een hypotetisch gas met uitsluitend vibratieënergie levert als eerste benadering de gemiddificeerde Euckenrelaties:

$$q' = - \lambda'_t \frac{\partial T'}{\partial x} + \lambda'_v \frac{\partial T'_v}{\partial x} \quad (4.2-6)$$

$$\lambda'_t = 5/2 \mu' c'_t \quad \lambda'_v = \lambda' D' c'_{vib} \quad (4.2-7)$$

c'_{vib} is de soortelijke warmte voor vibratieënergie. Wanneer men voor een gas waarin beide inwendige energievormen naast elkaar voorkomen achtereenvolgens de theorie van Wang-Chang en Uhlenbeck en de benaderingen van Mason en Monchick toepast blijken de afzonderlijke effecten van rotatie- en vibratievrijheidsgraden op het warmtetransport zoals gegeven in (4.2-3) en (4.2-6) lineair gekombineerd te kunnen worden:

$$q' = - \lambda' \frac{\partial T'}{\partial x} - \kappa' \frac{\partial c'_v}{\partial x} \quad (4.2-8)$$

waarbij de transportcoëfficiënten λ' en κ' gegeven worden door de volgende relaties:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \mu' (c'_t f_t + c'_r f_r) \\ \kappa' &= \mu' f_v \\ f_t &= 5/2 (1 - (c'_r/c'_t) (5/2 v' - \rho' D')) / (2 p' \tau'_t) \\ f_r &= \rho' D' / \mu' (1 - (5/2 v' - \rho' D')) / (2 p' \tau'_r) \\ f_v &= \rho' D' / \mu' \end{aligned}$$

Via de gegevens over de gassen N_2 en CO_2 in Ref. 27 is het mogelijk om de f-waarden voor translatie, rotatie en vibratie te bepalen. De relaxatietijd τ'_r wordt hierbij uitgedrukt in het botsingsgetal Z_r voor de rotatieënergie. Z_r is ruwweg het aantal botsingen dat nodig is voor de uitwisseling van een rotatieënergiekwant. De volgende relatie tussen Z_r en τ'_r wordt gegeven in Ref. 27:

$$\mu' / \rho' \tau'_r = 4 / (\pi Z_r) \quad (4.2-9)$$

Voor N_2 zijn voor Z_r de berekende waarden genomen van Parker (Ref. 38) terwijl voor CO_2 de waarde van Z_r bepaald zijn door er van uit te gaan dat het gedrag van het CO_2 molecuul bij rotatie-uitwisseling analoog is aan dat van een twee-atomig molecuul (Ref. 27). De diffusiecoëfficiënt D' voor inwendige energie blijkt goed benaderd te kunnen worden met de gewone zelfdiffusiecoëfficiënt van het gas, zodat voor de bepaling van de f -waarden gebruik gemaakt kan worden van de relatie:

$$\rho' D' / \mu' = 6/5 A^* \quad (4.2-10)$$

De waarde van A^* die zwak temperatuurafhankelijk is en een functie is van de intermoleculaire krachten is getabelleerd in Ref. 39. Bij de bepaling van A^* is de Lennard-Jones (12-6) potentiaal aangenomen met voor N_2 en CO_2 als waarden voor de parameter ϵ_0/k respectievelijk 91,5 K en 213 K. De verkregen f -waarden of combinaties hiervan voor de gassen N_2 en CO_2 zijn als functie van de translatietermperatuur gegeven in de tabellen (4.1) en (4.2). In Ref. 27 is aangetoond dat wanneer de totale warmtestroom beschreven kan worden met één warmtegeleidingscoëfficiënt, die dan gedefinieerd is als

$$\lambda'_{tot} = \lambda'_t + \lambda'_r + \lambda'_v = \mu' (c'_t f_t + c'_r f_r + c'_{vib} f_{vib}), \quad (4.2-11)$$

T(K)	f_t	$f_{tr} = (c'_t f_t + c'_r f_r) / (c'_t + c'_r)$
200	1,80	1,81
300	2,16	2,07
400	2,21	2,10
600	2,27	2,15
800	2,30	2,16
1000	2,32	2,18
∞	2,42	2,26

Tabel 4.1: f -waarden voor N_2

deze λ'_{tot} goed overeenstemt met eksperimentele λ'_{tot} - waarden, indien de f-waarden in de Tabellen (4.1) en (4.2) toegepast worden. Op grond hiervan zijn deze f-waarden toegepast bij de berekening van de λ' -en κ' -waarden in de temperatuurgrenslaag. De waarden van u' die hierbij gebruikt zijn, zijn verkregen uit Ref. 40.

T(K)	f_{vib}	$f_{\text{tr}} = (c_t f_t + c_r f_r) / (c_t + c_r)$
200	1,32	1,79
400	1,31	1,88
600	1,31	1,91
800	1,32	1,90
1000	1,32	1,92
1200	1,32	1,94
∞	1,37	1,92

Tabel 4.2: f-waarden voor CO_2

5.1 Inleiding

Bij de toepassing van het beschreven model zijn de berekeningen uitgevoerd met behulp van de ELX-8 komputer van de T.N.E. Bij deze berekeningen kan onderscheid gemaakt worden tussen het berekenen van analitisch verkregen oplossingen en het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen. Onder de eerste katagorie berekening- en valt de bepaling van de eerste-orde buitenoplossing, zowel voor de vibratiereleksatie als voor de grenslaagverstoringen. De grenslaagoplossingen zijn daarentegen verkregen door de grenslaagvergelijkingen numeriek op te lossen. Deze vergelijkingen zijn de nulde-orde grenslaagvergelijkingen (3.2-10), de eerste-orde grenslaagvergelijking (3.3-25) voor de grenslaagverstoringen en de eerste-orde grenslaagvergelijkingen (3.5-10, -11) voor de vibratiereleksatieverstoringen. De vergelijkingen (3.2-10) en (3.3-25) zijn gewone differentiaalvergelijkingen die, zoals reeds vermeld is, opgelost zijn met behulp van beschikbare standaardintegratieprocedures. Het laatste stelsel vergelijkingen bestaat uit twee partiële differentiaalvergelijkingen. De oplossing hiervan is bepaald in een diskreet aantal vaste punten in het oplossingsgebied. Deze benaderde oplossing wordt verkregen uit de differentievergelijking die ontstaat door de afgeleiden in de differentiaalvergelijking te vervangen door differenties; de differentiaalvergelijking wordt gediskretiseerd.

Twee belangrijke facetten van een numerieke oplossingsmethode zijn de nauwkeurigheid en de rekentijd. De nauwkeurigheid van de oplossing en de rekentijd die de oplossing vergt, worden bepaald door de differenties waardoor de afgeleiden vervangen worden en door de stapgroottes die men kiest bij de diskretisatie. De oplossingsmethode die gekozen wordt moet een goed compromis inhouden tussen de veelal tegenstrijdige eisen van nauwkeurigheid en rekentijd.

Twee aspecten die rechtstreeks verband houden met de nauwkeurig-

heid en die voorwaarden zijn voor de bruikbaarheid van de differentievergelijking(en) zijn konvergentie en stabiliteit. Onder de konvergentie van de numerieke oplossing verstaat men het konvergeren van de oplossing van de differentievergelijking naar die van de differentiaalvergelijking met dezelfde randvoorwaarden indien de stapgrootte(s) in de diskretisatie naar nul gaat (gaan). Stabiliteit wordt in de literatuur niet op een eenduidige manier gedefinieerd. Een uitstekende beschrijving van het begrip stabiliteit en van de verschillende definities wordt gegeven door Forsythe and Wasov in Ref. 41. Wij zullen ons hier beperken tot de praktisch bruikbare definitie van stabiliteit die gegeven wordt door Köhne (Ref. 42); indien in een willekeurig punt in het oplossingsgebied een fout ϵ in de oplossing van het differentieschema wordt geïntroduceerd is het schema stabiel als de fout tengevolge van deze verstoring bij voortgezet rekenen $\leq \epsilon$ wordt. Wanneer een methode stabiel en konvergent is zal de volgende stap het onderzoek van de nauwkeurigheid zelf zijn. Deze nauwkeurigheid zal niet alleen afhankelijk zijn van het gekozen differentieschema maar ook van de combinatie van stapgrootte(s) en gedrag van de oplossing van de differentiaalvergelijking. In het nu volgende is aangegeven op grond waarvan de gekozen numerieke oplossingsmethode voor de grenslaagvergelijkingen verkozen is boven een tweetal andere, in eerste instantie voor de hand liggende, oplossingsmethoden. Bovendien is nagegaan welke stapgroottes binnen de gestelde nauwkeurigheid genomen dienen te worden.

5.2. De differentieschema's

De grenslaagvergelijkingen (3.5-10) en (3.5-11) zijn twee gekoppelde parabolische differentiaalvergelijkingen. Indien we de variabelen $\tilde{T}$ en e_v weergeven met de symbolen U' en V' en de plaats- en tijdscoördinaat respectievelijk x en t noemen dan zijn de vergelijkingen (3.5-10) en (3.5-11) te schrijven als:

$$A_1 U'_{xx} + B_1 U'_x + C_1 U' + D_1 U'_t + F_1 + V' = 0 \quad (5.2-1)$$

$$A_2 V'_{xx} + B_2 V'_x + C_2 V' + D_2 V'_t + F_2 = 0 \quad (5.2-2)$$

met rand- en beginvoorwaarden:

$$x = 0 \quad U' = 0 \quad V'_x = G_1 + H_1 V'$$

$$x = \infty \quad U' = I_1 \quad V' = I_2$$

de grootheden $A_{1,2}$ t/m $I_{1,2}$ zijn in het algemeen nog functies van x en t . De vergelijkingen zijn echter wel lineair. De koppeling tussen de beide vergelijkingen is eenzijdig. Vergelijking (5.2-2) is onafhankelijk van U' terwijl (5.2-1) echter wel afhankelijk is van de oplossing van (5.2-2). Beide vergelijkingen kunnen weergegeven worden in de meer algemene vorm:

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} = F(x, t, U', \frac{\partial U'}{\partial x}, \frac{\partial U'}{\partial t}) \quad (5.2-3)$$

Alvorens we ingaan op de diskretisatie enkele opmerkingen vooraf. De grenslaagvergelijkingen worden opgelost in het rechthoekig gebied $\bar{R}$ dat gedefinieerd wordt door de ongelijkheid:

$$0 < x < \delta, \quad 0 < t < t_{\max}$$

De randvoorwaarden op ∞ worden toegepast ter plaatse δ , waarbij δ een zodanige gekozen konstante is dat de oplossing voor grotere waarden van δ binnen voorgeschreven grenzen blijft. De benaderde oplossing $U_{i,j}$ en $V_{i,j}$ voor respectievelijk U' en V' wordt bepaald in de knooppunten van een rechthoekig netwerk in $\bar{R}$ die bepaald wordt door de coördinaten:

$$x = i h \quad (i = 0, 1, \dots, I.)$$

$$t = j k \quad (j = 0, 1, \dots, J.)$$

waarbij $h = \delta/I$ en $k = t_{\max}/J$.

Voor de differenties in de x -richting definiëren we twee operatoren μ en Δ :

$$\mu U_{i,j} = \frac{1}{2} (U_{i+\frac{1}{2},j} + U_{i-\frac{1}{2},j})$$

$$\Delta U_{i,j} = U_{i+\frac{1}{2},j} - U_{i-\frac{1}{2},j}$$

Met behulp van deze operatoren kunnen we nu de drie differentieschema's die in eerste instantie op (5.2-3) toegepast zijn, voor $x = ih$ en $t = jk$ als volgt weergeven:

1) Eksplisiet schema:

$$\frac{\Delta^2}{h^2} U_{i,j} = F(x, t, U_{i,j}, \frac{\mu \Delta}{h} U_{i,j}, (U_{i,j+1} - U_{i,j})/k)$$

2) Standaard impliciet schema:

$$\frac{\Delta^2}{h^2} U_{i,j} = F(x, t, U_{i,j}, \frac{\mu \Delta}{h} U_{i,j}, (U_{i,j} - U_{i,j-1})/k)$$

3) Crank Nicolsen (C.N.) schema:

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{h^2} (U_{i,j} + U_{i,j-1}) = F(x, t - \frac{1}{2}k, \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{i,j-1}), \frac{1}{2} \frac{\mu \Delta}{h} (U_{i,j} + U_{i,j-1}), (U_{i,j} - U_{i,j-1})/k)$$

De lokale afbreukfout met betrekking tot de oplossing U is voor eksplisiet, impliciet en C.N. schema achtereenvolgens $O(h^2 + k)$, $O(h^2 + k)$ en $O(h^2 + k^2)$. Indien in de randvoorwaarde ter plaatse $x = 0$ een afgeleide naar x voorkomt wordt deze benaderd met de tweede-orde voorwaartse differentie:

$$\frac{\partial U}{\partial x} /_{i,j} = \frac{4U_{1,j} - 3U_{0,j} - U_{2,j}}{2h} + O(h^2)$$

De afgeleiden zijn dus in het algemeen vervangen in de punten $x = jh$ en $t = (j+\lambda)k$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) op de volgende manier:

$$\frac{\partial U}{\partial t} /_{i,j+\lambda} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} + E_1$$

$$\frac{\partial U'}{\partial x} /_{i,j+\lambda} = \lambda \frac{\partial U'}{\partial x} /_{i,j+1} + (1-\lambda) \frac{\partial U'}{\partial x} /_{i,j} + E_2$$

$$\frac{\partial U'^2}{\partial x^2} /_{i,j+\lambda} = \lambda \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} /_{i,j+1} + (1-\lambda) \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} /_{i,j} + E_3$$

waarbij de gradiënten in de x-richting benaderd zijn door centrale differenties.

Hierbij zijn 3 verschillende waarden voor λ gekozen te weten $\lambda = 0$, $\frac{1}{2}$ en 1. De afbreekfouten E_1 , E_2 en E_3 zijn voor $\lambda = 0$ of 1 resp. $O(k)$, O , O en voor $\lambda = \frac{1}{2}$ alle drie $O(k^2)$

Hoewel de stabiliteit van de drie schema's in veel gevallen ook theoretisch kan worden nagegaan is volstaan met het testen van de stabiliteit aan de hand van een aantal berekeningen met deze schema's. Zoals uit de publikaties van Forsythe and Wasov (Ref.41) Amos (Ref.43) en Köhne (Ref. 42) blijkt kan men verwachten dat het eksplíciete schema meer stabiliteitsproblemen zal geven dan de overige twee schema's.

De konvergentie van het Crank-Nicolson en het standaard impliciet differentieschema wordt aangetoond in een tweetal artikelen van Douglas (Ref. 44) en Lees (Ref. 45), onder de voorwaarde dat de oplossing voldoende vaak differentieerbaar is en dat deze differentiaal begrensd zijn. Verder voldoet de functie $F(x,t,z,p,q)$ in (5.2-3) aan de gestelde voorwaarde:

$$0 < a_x \leq \frac{\partial F}{\partial q} \leq a^* \text{ voor } T > 0 \text{ (} a_x \text{ en } a^* \text{ zijn konstanten)}$$

Ofschoon de globale nauwkeurigheid niet uitsluitend door de lokale afbreekfout bepaald wordt hangen deze twee toch ten nauwste met elkaar samen. Het is daarom aan te bevelen om in verband met de nauwkeurigheid het differentie-schema te kiezen met de kleinste lokale afbreekfout. Bij overigens dezelfde stapgrootten h en k is het Crank-Nicolson schema, wat de nauwkeurigheid betreft dus te verkiezen boven de overige twee schema's.

Uit het bovenstaande blijkt dat men de beste resultaten kan verwachten bij het Crank-Nicolson differentieschema. Om echter de kwaliteit van de drie schema's goed tegen elkaar te kunnen afwegen is

het noodzakelijk om enkele berekeningen met de verschillende schema's uit te voeren.

5.3 Onderzoek van de differentieschema's

De drie schema's zijn getest aan de hand van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen die verkregen zijn door de grenslaagvergelijkingen te vereenvoudigen zodanig dat het mogelijk is een semi-analytische oplossing te verkrijgen waarmee de numerieke oplossing vergeleken kan worden. De vereenvoudigde vergelijkingen zijn:

$$t \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{e_v^*(z) - e_v}{\tau} \right) = \frac{1}{2} z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \phi(T_0) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (5.3-1)$$

$$t \left(\frac{\partial e_v}{\partial t} + \frac{e_v^*(z) - e_v}{\tau} \right) = \frac{1}{2} z \frac{\partial e_v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \phi(T_0) \frac{\partial e_v}{\partial z} \quad (5.3-2)$$

$$\text{randvw. } z = \infty: T = -e_v(t) = -e_{v5}^* (1 - \exp(-t/\tau))$$

$$z = 0: T = e_v = 0$$

$$\text{beginvw. } t = 0 \quad z > 0: T = e_v = 0$$

De lokale evenwichtsvibratieënergie $e_v^*(z)$ wordt evenredig verondersteld met de lokale nulde-orde temperatuur $T_0(z)$ ($e_v^*(z) = e_{v5}^*(z) T_0(z)$). τ wordt konstant genomen, T_0 is de numerieke oplossing van de nulde-orde grenslaagvergelijking (3.2-10):

$$\frac{1}{2} z \frac{\partial T_0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \phi(T_0) \frac{\partial T_0}{\partial z} = 0$$

$$z = 0: T_0 = 0$$

$$z = 1: T_0 = 1 \quad (5.3-3)$$

De oplossing van bovenstaand stelsel is:

$$e_v = -T = -e_{v5}^* T_0(z) (1 - \exp(-t/\tau)) \quad (5.3-4)$$

In het voorgaande is reeds opgemerkt dat er stabiliteitsmoeilikheden te verwachten zijn als men het eksplisiet differentieschema toepast. Inderdaad blijkt uit numerieke berekeningen van boven-

staand stelsel dat het ekspliecit differentieschema sterk instabiel is voor elke akseptabele combinatie van de stapgroottes h en k . Het ekspliecit differentieschema wordt daarom verder buiten beschouwing gelaten.

De diskretisatie van (5.3-1) en (5.3-2) geeft nu:

$$\begin{aligned} & (t - (1-\lambda)k) \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{k} + \frac{e_v^* - \lambda e_{v,i,j} - (1-\lambda) e_{v,i,j-1}}{\tau} \right) = \\ & = \left(\frac{1}{2} k j + \frac{\partial \phi(T_0)}{\partial z} \right) \frac{\mu \Delta}{h} (T_{i,j}^\lambda + (1-\lambda) T_{i,j-1}) + \\ & + \phi(T_0) \frac{\Delta^2}{h} (T_{i,j}^\lambda + (1-\lambda) T_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (5.3-5)$$

$$\begin{aligned} & (t - (1-\lambda)k) \left(\frac{e_{v,i,j} - e_{v,i,j-1}}{k} - \frac{e_v^* - \lambda e_{v,i,j} - (1-\lambda) e_{v,i,j-1}}{\tau} \right) = \\ & = \left(\frac{1}{2} k j + \frac{\partial \phi(T_0)}{\partial z} \right) \frac{\mu \Delta}{h} (e_{v,i,j}^\lambda + (1-\lambda) e_{v,i,j-1}) + \\ & + \phi(T_0) \frac{\Delta^2}{h} (e_{v,i,j}^\lambda - (1-\lambda) e_{v,i,j-1}) \end{aligned} \quad (5.3-6)$$

Voor $\lambda = 1$ is het differentieschema standaard impliciet en voor $\lambda = \frac{1}{2}$ komt het schema overeen met de Crank-Nicolson methode. De stabiliteit is getest op verschillende plaatsen door op de lijn $t = k$ een fout in $T_{i,1}$ te introduceren. Het bleek dat voor zowel $\lambda = 1$ als $\lambda = \frac{1}{2}$ deze fout niet toeneemt en zelfs kleiner wordt. Dit betekent dat beide schema's, volgens de in de inleiding gegeven definitie, stabiel zijn. Bij de berekeningen werd de numerieke integratie van (5.3-3) uitgevoerd met een nauwkeurigheid van 10^{-4} zodat vergelijking van (5.3-4) met de oplossingen van (5.3-1) en (5.3-2) slechts zin heeft voor afwijkingen groter dan 10^{-4} . De berekeningen werden uitgevoerd voor verschillende waarden van h en k voor zowel $\lambda = 1$ als $\lambda = \frac{1}{2}$. De resultaten van deze berekeningen zijn weergegeven voor $t = \tau$ in Tabel 1.1.

Voor de temperatuur T_5' is 7000 K genomen. In de Tabel is de maximale absolute fout, uitgedrukt in %, gegeven van e_v en T .

Uit deze tabel blijkt overduidelijk de winst die men in de nauw-

keurigheid bereikt bij dezelfde rekentijd als men $\lambda = \frac{1}{2}$ neemt. In de laatste kolom van de tabel is de maximale relatieve fout in de afgeleiden $(\partial e_v / \partial z)$ en $(\partial T / \partial z)$ in % vermeld. Dit is gedaan omdat deze afgeleiden de warmtestroomdichtheid naar de achterwand bepalen. Op basis van de verkregen gegevens in Tabel 1.1 is nu een keuze gemaakt voor het differentieschema met de waarden h en k . De eis die we aan de nauwkeurigheid stellen is dat de maximale fout in de afgeleiden ter plaatse van de wand $\leq 1\%$. Hieraan is zeker voldaan als men het Crank-Nicolson schema kiest met voor de stapgroottes de waarde 0,1.

methode	orde	k/τ	h	rekentijd (s)	fout in $e_{v,T}$ (%)	fout in $\frac{\partial e_v / \partial z}{\partial T / \partial z}$ (%) $z=0$
Stand impl	$k + h^2$	0,02	0,05	190	0,55	0,71
C.N.	$k^2 + h^2$	0,02	0,05	190	0,01	0,02
Stand impl	$k + h^2$	0,1	0,05	38	1,89	2,33
C.N.	$k^2 + h^2$	0,1	0,05	38	0,03	0,04
Stand impl	$k + h^2$	0,1	0,1	19	1,90	2,29
C.N.	$k^2 + h^2$	0,1	0,1	19	0,05	0,04

Tabel 1.1 Vergelijking van Standaard impleciete en Crank-Nicolson methode.

5.4 De differentievergelijkingen voor de grenslaag

Uitgaande van de in par. 5.3 beschreven opgedane ervaringen met de differentieschema's werd bij de diskretisatie van de grenslaagvergelijkingen (3.5-10) en (3.5-11) de Crank-Nicolson methode toegepast.

De differentiaalvergelijkingen gaan dan over in de volgende vergelijkingen:

$$a \hat{T}^n(z-h, t) + b \hat{T}^n(z, t) + c \hat{T}^n(z+h, t) = d \quad (5.4-1)$$

$$e e_v(z-h, t) + f e_v(z, t) + g e_v(z+h, t) = m \quad (5.4-2)$$

waarbij

$$z = ih \quad (i = 1, \dots, N-1)$$

$$e = \frac{\frac{1}{2}z + 2\partial\phi(T_0)/\partial z}{4h} - \frac{\phi(T_0)}{2h^2}$$

$$b = \frac{t-\frac{1}{2}k}{k} + \frac{\phi(T_0)}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\phi(T_0)}{\partial z^2}$$

$$c = - \frac{\frac{1}{2}z + 2\partial\phi(T_0)/\partial z}{4h} - \frac{\phi(T_0)}{2h^2}$$

$$d = (t-\frac{1}{2}k) \frac{\tilde{T}(z, t-k)}{k} + \frac{\gamma-1}{\gamma} T_0 \frac{\langle \tilde{p}(t) - \tilde{p}(t-k) \rangle}{k} \\ - \frac{e_v^* - \frac{1}{2}(e_v(t) + e_v(t-k))}{\tau} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial z} \langle \phi(T_0) \frac{\partial T_0}{\partial z} \rangle \\ - a T(z-h, t-k) - (b-(t-\frac{1}{2}k)/k) T(z, t-k) - c T(z+h, t-k)$$

$$o = \frac{\frac{1}{2}z + \partial\phi_v(T_0)/\partial z}{4h} - \frac{\phi_v(T_0)}{2h^2}$$

$$f = (t-\frac{1}{2}k) (1/k + 1/(2\tau)) + \frac{\phi_v(T_0)}{h^2}$$

$$g = - \frac{\frac{1}{2}z + \partial\phi_v(T_0)/\partial z}{4h} - \frac{\phi_v(T_0)}{2h^2}$$

$$m = (t-\frac{1}{2}k) \frac{e_v^*}{\tau} + \frac{e_v(z, t-k)}{h} - e_v(z-h, t-k) \\ - (f - (t-\frac{1}{2}k)/k) e_v(z, t-k) - g e_v(z+h, t-k)$$

De randvoorwaarden die volgen uit (3.5-12) en (3.5-13) worden:

$$z = 0: \tilde{\gamma} = 0 \\ - \frac{e_v(zh, t) + e_v(zh, t-k)}{4h} + \frac{e_v(h, t) + e_v(h, t-k)}{h} \\ - \frac{3(e_v(0, t) + e_v(0, t-k))}{4h} = - \sqrt{t} f(\alpha_v) e_v^*(0) - \frac{e_v(0, t) + e_v(0, t-k)}{2}$$

$$z = \delta: T = \Theta(t) \quad e_v = \Theta_v(t)$$

Hierbij zijn $\Theta(t)$ en $\Theta_v(t)$ de buitenoplossingen voor respectievelijk $\tilde{\gamma}$ en e_v voor $\eta \rightarrow 0$.

De twee stelselvergelijkingen (5.4-1) en (5.4-2) zijn beiden van de tridiagonale vorm. De elementen van de tridiagonale matrix be-

horend bij (5.4-2) zijn allen bekend wanneer de oplossing ten tijde $t - k$ bekend is. Dus e_v ten tijde t is impliciet bekend. e_v wordt bepaald met behulp van Gauss-eliminatie van de tri-diagonaalmatriks. Als de $\hat{T}$ ten tijde $t - k$ en e_v ten tijde t bekend zijn, zijn de elementen van de tri-diagonaalmatriks behorend bij (5.4-1) ook bekend zodat $\hat{T}$ ten tijde t weer gevonden kan worden door toepassing van Gauss-eliminatie op de $(N - 1) \times (N - 1)$ matriks.

6.1. De berekende grootheden ; frozen toestand

Via het gegeven model, de transportcoëfficiënten en de berekeningsmethode kan men nu diverse aspecten van de vibratierelaksatie berekenen. We zullen ons hier beperken tot het bepalen van een tweetal grootheden die sterk door de vibratierelaksatie beïnvloed worden. Omdat het onderzoek gestart is met de bedoeling om de invloed van de relaksatie op de warmtestroomdichtheid aan de wand te bestuderen, is het duidelijk dat deze grootheid allereerst bekend is. Omdat verder de druk aan de achterwand rechtstreeks samenhangt met de warmtestroomdichtheid en evenals de warmtestroomdichtheid rechtstreeks meetbaar is (zie hfst. 7) werd eveneens het drukverloop aan de achterwand berekend. De grootheden zijn bepaald voor verschillende Machgetallen waarbij de afhankelijkheid van de voor-
druk p' , verwerkt is in de presentatie van de resultaten. Omdat er in het model vanuit gegaan is dat het druk- en warmtestroomdichtheidsverloop na reflectie samengesteld is als de som van een drietal bijdragen, zijn deze laatste afzonderlijk gepresenteerd. De drie bijdragen zijn: de nulde-orde "frozen" bijdrage, de eerste-orde grenslaaginval en het eerste-orde vibratierelaksatieëffekt. Naast het druk- en warmtefluksverloop zijn voor zowel N_2 als CO_2 een temperatuur- en vibratieënergieprofiel van de temperatuurgrenslaag gegeven voor twee Machgetallen van de heengaande schokgolf.

De "frozen" toestand (nulde-orde oplossing) buiten de temperatuurgrenslaag wordt bepaald door de standaardschokrelaties waarbij voor γ de waarde 1.4 genomen dient te worden voor zowel N_2 als CO_2 . De toestand in de temperatuurgrenslaag wordt hierbij bepaald met behulp van het in 3.2 beschreven thermische grenslaagmodel. De warmtestroomdichtheid H'_0 wordt dan gegeven door relatie (3.2-12), waarbij de temperatuurgradiënt $\partial T_0 / \partial z$ onafhankelijk is van druk en tijd. De druk- en tijdafhangelijkheid van de frozen-warmtefluks wordt uitsluitend bepaald door de faktor $p'_{5x} / (\hat{R}t)^{\frac{1}{2}}$ in (3.1-12). Omdat de dimensieloze grootheid $\hat{R}$ evenredig is met de druk geldt er:

$$H_0 \sim (p'_{sf}/t')^{\frac{1}{2}} \sim (p'_1/t')^{\frac{1}{2}}$$

De grootheid $H_0(t'/p'_1)^{\frac{1}{2}}$ is dan uitsluitend een functie van de begintemperatuur T'_1 en het Machgetal M_s van de heengaande schokgolf. Deze grootheid is berekend als functie van M_s en in gra-

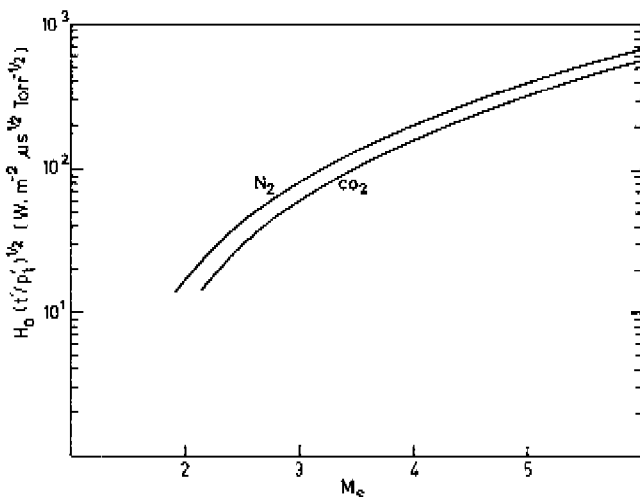


Fig. 6.1 Frozen-warmtestroomdichtheid aan de achterwand.

$$T'_1 = 300 \text{ K.}$$

tiek gebracht in Fig. 6.1. De begintemperatuur T_1 is 300 K. Als eenheid van druk is 1 Torr (= 133,32 N/m²) genomen, zoals bij het schokbuisonderzoek gebruikelijk is. Uit de figuur blijkt dat de warmtestroomdichtheden aan de wand voor N_2 en CO_2 globaal aan elkaar gelijk zijn.

6.2. De grenslaag invloed

De energiestroom naar de achterwand zal tengevolge van de gasafkoeling aan de wand expansiegolven in gebied 5 induceren. Hierdoor zal de druk aan de grenslaag en mede daardoor de warmtefluks lager zijn dan de oorspronkelijke waarde.

Bij de bestudering van de vibratierelaxatie-effecten is het belangrijk om de grootte, of in ieder geval de grootte-orde van

deze correctie te kennen. De drukvariatie aan de achterwand volgt uit de relaties (3.2-12), (3.3-14) en (3.3-20):

$$\tilde{p} = (\gamma-1) H_0' / (p_{5f}' a_{5f}') \quad (6.2-1)$$

Vanwege (6.1-1) geldt er dan:

$$\tilde{p} \sim (p_1' T')^{-\frac{1}{2}} \quad (6.2-2)$$

zodat $\tilde{p}(p_1' T')^{\frac{1}{2}}$ uitsluitend een functie van begintemperatuur en

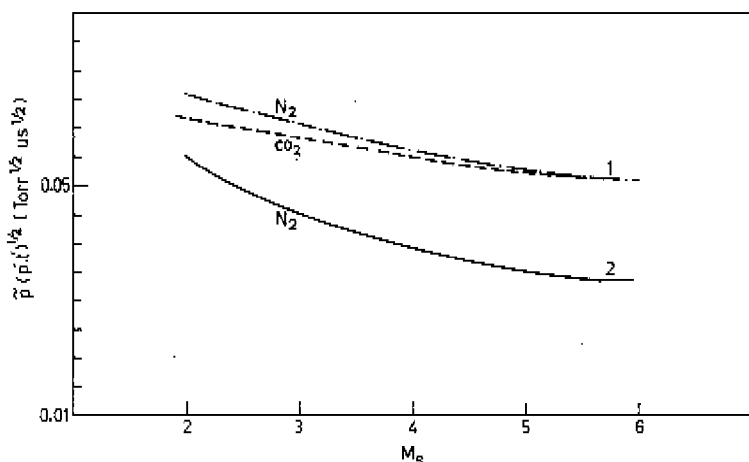


Fig. 6.2 Relatieve drukvariatie ten opzichte van de frozen-waarde aan de schokbuisachterwand ten gevolge van grenslaag-effecten. $T_1' = 300$ K, 1: eigen berekeningen, 2: Ref. 8.

Machgetal M_s is. Deze grootheid is in Fig. 6.2 gegeven als functie van M_s bij een begintemperatuur van 300 K. Uit de figuur blijkt b.v. dat voor zowel CO_2 als N_2 de drukvariatie bij een voordruk p_1 van 1 Torr een mikroseconde na reflectie 5 à 6% bedraagt voor Machgetallen tussen 2 en 6. Baganoff (Ref. 8) gebruikte voor de theoretische drukverstoring tengevolge van de grenslaagontwikkeling de vergelijking (55) van Goldworthy's publikatie (Ref. 15).

Deze relatie is eveneens in Fig. 6.2 grafisch weergegeven als functie van het Machgetal van de heengaande schokgolf. Vergelijking van de berekeningen voor N_2 en de relatie van Ref. 8 leert dat de drukverstoring 20 - 50% groter is dan door Saganoff aangenomen is. Dit blijkt tevens uit de experimenten in Ref. 8 waarbij voor $M_s = 6,12$ en een voordruk van 0,25 Torr zelfs afwijkingen tot 70% gemeten zijn.

De relatieve verandering $\tilde{H}$ van de warmtestroomdichtheid bestaat, zoals uit vgl. (3.3-26) blijkt uit de som van twee termen. Beide termen zijn omgekeerd evenredig met de wortel uit de voordruk en de tijd t' na reflectie. De grootte $\tilde{H}(p_1' t')^{\frac{1}{2}}$ is daarom uitsluitend afhankelijk van de begintemperatuur en het Machgetal van de heengaande schokgolf. De relatie tussen $\tilde{H}(p_1' t')^{\frac{1}{2}}$ en het Machgetal is voor een begintemperatuur van 300 K

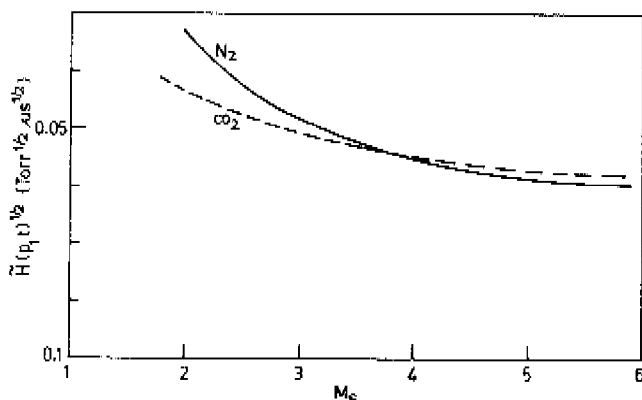


Fig. 6.3 Relatieve warmtestroomdichtheidsvariatie t.o.v. de frozen waarde aan de schokbuisachterwand ten gevolge van grenslaageffekten. $T_1' = 300$ K.

grafisch weergegeven in Fig. 6.3. Zoals te verwachten is, blijkt $\tilde{H}$ van dezelfde orde van grootte te zijn als $\tilde{p}$.

6.3. De invloed van de vibratielerelaxatie

Naast de thermische grenslaag zal de vibratielerelaxatie de druk en de warmtestroomdichtheid aan de achterwand beïnvloeden. De

warmtestroomdichtheid en drukverstoring zijn nu voor een drietal Machgetallen berekend voor zowel N_2 als CO_2 .

Het drukverloop is voor N_2 in Fig. 6.4. gegeven en voor CO_2 in

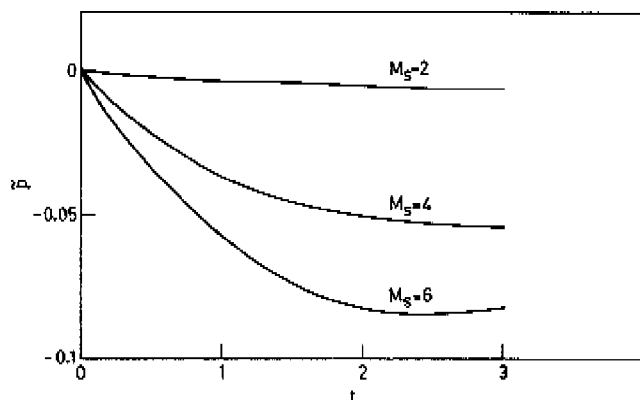


Fig. 6.4 Relatieve drukvariatie ten opzichte van de frozen-waarde aan de schokbuiseachterwand ten gevolge van vibratiere Relaxatie in N_2 . $T_1' = 300$ K.

Fig. 6.5. Uit Fig. 6.4. blijkt dat de drukvariatie voor N_2 negatief is op een tijdschaal die overeenkomt met τ'_{5f} . De tijdafgeleide van de druk op het tijdstip $t' = 0$ neemt af naarmate het Machgetal toeneemt. Dit is onder meer een gevolg van het groter wordend aandeel van de vibratieënergie in het relaxatieproces naarmate het Machgetal en dus de temperatuur in gebied 5 toeneemt. Voor $t' > 0$ neemt de druk verder af maar zal na verloop van tijd zoals uit Fig. 6.4 blijkt weer toe nemen. Zoals door Hanson (Ref.11) aangetoond wordt is dit een gevolg van de relaxatiezone achter de heengesane schokgolf waarin de gereflekteerde schokgolf terugloopt.

De invloed van de relaxatiezone in gebied 2 is nog duidelijker in het geval van CO_2 . Zoals uit Fig. 6.5 blijkt is de invloed voor $M_5 = 1,5$ zelfs zo groot dat de druk vanaf $t' = 0$ niet af maar toeneemt. Voor hogere Machgetallen gaan de relaxatietijden voor

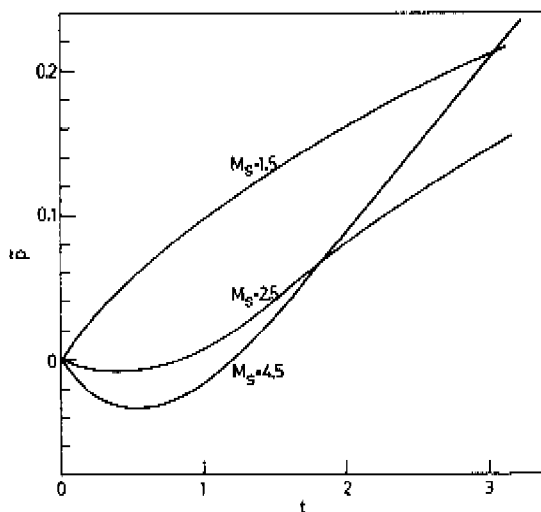


Fig. 6.5 Relatieve drukvariatie ten opzichte van de frozen-waarde aan de schokbuisachterswand ten gevolge van vibratielerelaksatie in CO_2 . $T_1 = 300 \text{ K}$.

en achter de gereflekterende schokgolf sterker afwijken waardoor de vibratielerelaksatie in gebied 5 zich in de druk kan manifesteren voordat de relaxatie in gebied 2 een rol gaat spelen. Men ziet dan ook dat $(\partial \tilde{p} / \partial t)_{t=0}$ voor $M_s = 2,5$ en $4,5$ evenals bij N_2 negatief is voor CO_2 . We merken verder op dat het berekende drukverloop in CO_2 voor verschillende Machgetallen in overeenstemming is met de konklusie van Johanessen e.a. (Ref. 9) dat $(\partial \tilde{p} / \partial t)_{t=0} > 0$ voor $M_s < 2$ en $(\partial \tilde{p} / \partial t)_{t=0} < 0$ voor $M_s > 2$.

De variatie in de warmtestroomdichtheid is voor een tweetal Machgetallen berekend voor N_2 en CO_2 en weergegeven in de Figuren 6.6 t/m 6.9. Omdat de warmtestroomdichtheid mede bepaald wordt door de akkomodatiecoëfficiënt voor vibratieënergie zijn de berekeningen voor verschillende waarden van α_v uitgevoerd om het effect van de akkomodatie na te gaan.

Afgezien van de afhankelijkheid van de akkomodatie van de vibratieënergie blijkt het verloop van de warmtestroomdichtheid

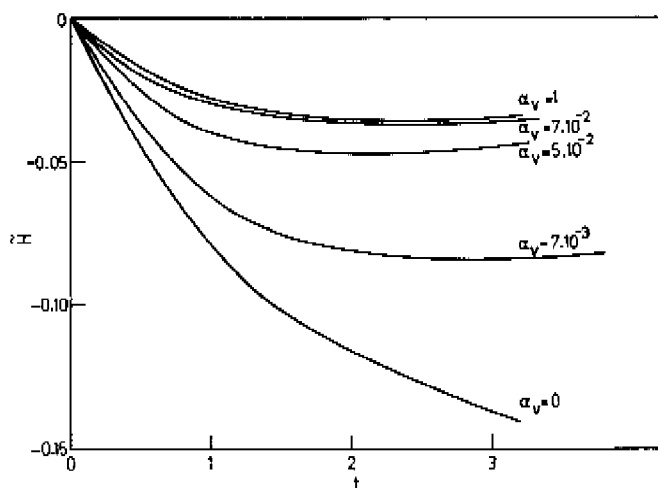


Fig. 6.6 Relatieve warmtestroomdichtheidsvariatie ten opzichte van de frozen-waarde ten gevolge van vibratielerelaxatie in N_2 . $T_1^* = 300$ K, $M_S = 4,0$.

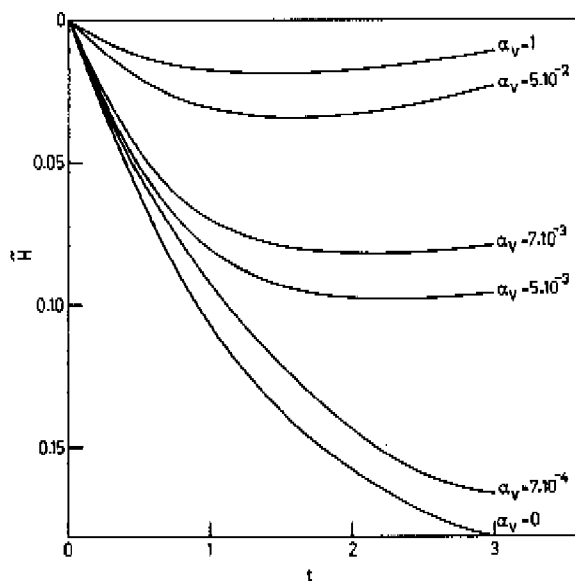


Fig. 6.7 Relatieve warmtestroomdichtheidsvariatie ten opzichte van de frozen-waarde ten gevolge van vibratielerelaxatie in N_2 . $T_1^* = 300$ K, $M_S = 6,0$.

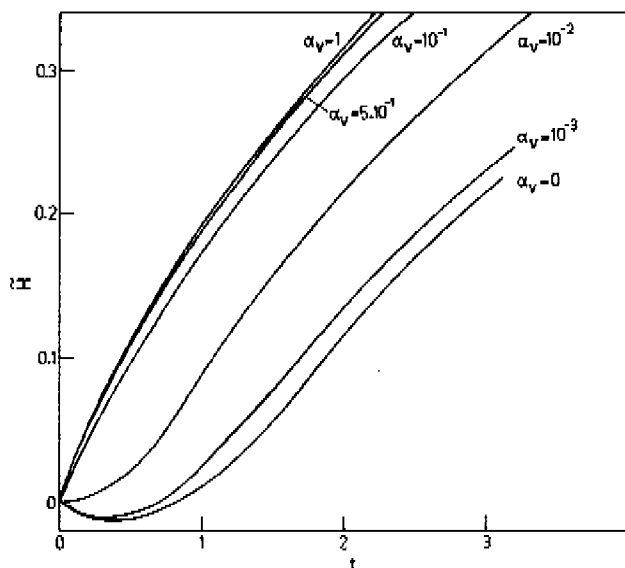


Fig. 6.8 Relatieve warmtestroomdichtheidsvariatie ten opzichte van de frozen-waarde ten gevolge van vibratielerelaxatie in CO_2 .

$$T_1^* = 300 \text{ K}, M_g = 1,5.$$

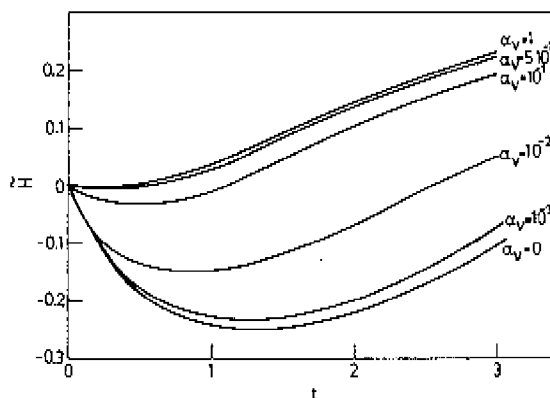


Fig. 6.9 Relatieve warmtestroomdichtheidsvariatie ten opzichte van de frozen waarde ten gevolge van vibratielerelaxatie in CO_2 .

$$T_1^* = 300 \text{ K}, M_g = 2,5.$$

globaal overeen te komen met het drukverloop. Dat het drukverloop een belangrijke rol speelt in het energie-overdrachtproces aan de wand is begrijpelijk als men bedenkt dat de druk rechtstreeks de dichtheid en dus de warmtecapaciteit van het gas aan de wand beïnvloedt en dat verder kompressie of expansie van de grenslaag de temperatuur toe of af doet nemen.

De akkomodatie van de vibratieënergie aan de wand blijkt het energietransport voor CO_2 en N_2 op dezelfde manier te beïnvloeden. Voor $\alpha_v = 1$ is het energietransport in alle gevallen duidelijk groter dan voor $\alpha_v = 0$. Dit is begrijpelijk omdat voor $\alpha_v = 0$ de vibratieënergie aan de wand geïsoleerd is terwijl er voor $\alpha_v = 1$ twee parallelen energiestromen aan de wand mogelijk zijn. Wanneer de vibratieënergie aan de wand geblokkeerd is zal deze energie alleen afgevoerd kunnen worden via de translatievrijheidsgraden dus via het vibratietranslatie relaxatieproces aan de wand. Omdat de relaxatietijd aan de wand bij kamertem-

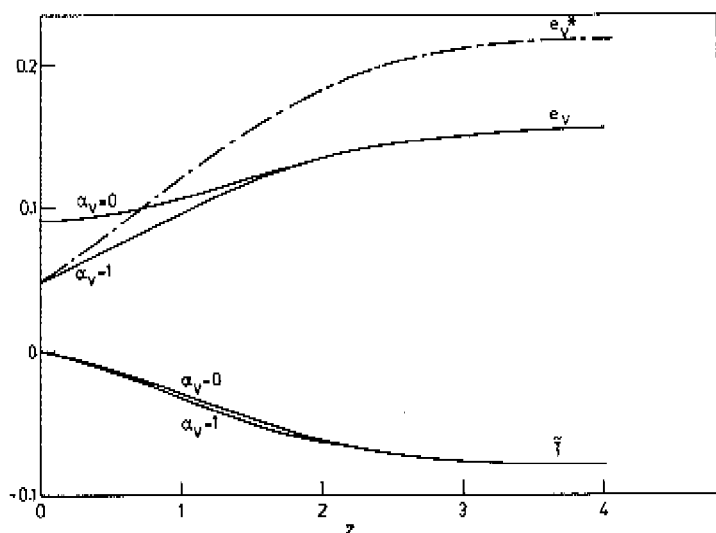


Fig. 6.10 Verloop van de vibratieënergie en relatieve temperatuurverandering, ten opzichte van de frozen-waarde ter plaatse, in de temperatuurgrenslaag op $t=1$ ($t' = \tau'_{sf}$) voor CO_2 . $T'_1 = 300$ K, $M_g = 2,5$.

temperatuur, vele malen groter is dan buiten de grenslaag in gebied 5, zal het relaxatieproces aan de wand, op de gekozen tijdschaal totaal geen rol spelen en zal er in het gas aan de wand vrijwel geen interactie tussen beide energiestromen zijn. Het effect van de akkomodatie wordt duidelijk geïllustreerd in de Figs. 6.10 en 6.11. Hier is voor CO_2 en N_2 de

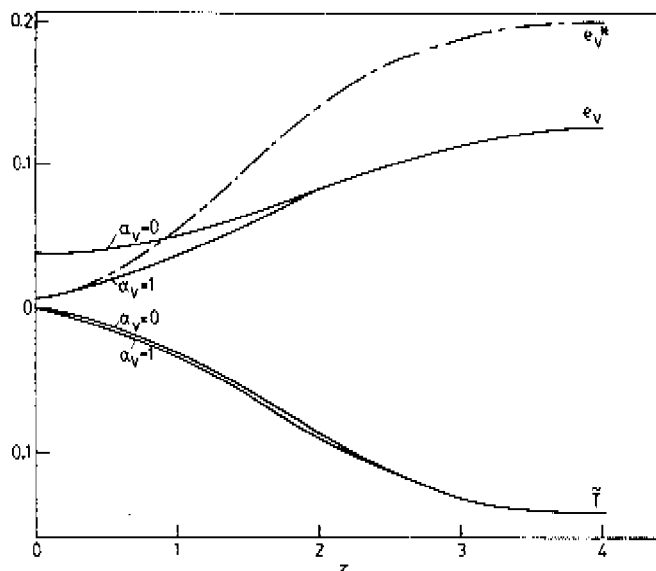


Fig. 6.11 Verloop van de vibratieënergie en relatieve temperatuurverandering, ten opzichte van de frozen-waarde ter plaatse, in de temperatuurgrenslaag op $t=1$ ($\tau' = \tau'_{5f}$) voor N_2 .
 $T_1' = 300 \text{ K}$, $M_0 = 0$.

situatie in de temperatuurgrenslaag gegeven voor twee verschillende Machgetallen op $t = 1$ met $\alpha_v = 0$ en $\alpha_v = 1$. Men ziet dat het effect van de akkomodatie van e_v op het translatietemperatuurverloop vrijwel nihil is. Dit is een gevolg van het feit dat daar waar de vibratieënergieën voor verschillende α_v 's gaan afwijken de relaxatietijden veel groter zijn dan τ'_{5f} . Duidelijk is te zien dat de mogelijkheid van vibratieënergie uitwisseling met de wand het verloop van

vibratieënergie in de grenslaag sterk beïnvloedt. Voor $\alpha_v = 0$ is de e_v aan de wand veel groter dan in het geval van $\alpha_v = 1$, waar de vibratieënergie snel afgevoerd wordt. Uit de figuren 6.5 t/m 6.8 blijkt dat de warmtestroomdichtheid slechts gevoelig is voor variaties in de α -waarden in een bepaald gebied. Voor N_2 wordt dit gebied bepaald door waarden van α_v in grootte-orde variërend tussen 10^{-3} en 10^{-4} voor $M_s = 4$ en tussen 10^{-2} en 10^{-3} voor $M_s = 6$. Voor CO_2 is de betreffende grootte-orde van α_v voor $M_s = 1,5$ en voor $M_s = 2,5$ in beide gevallen 10^{-2} . Dat er slechts een beperkt gebied is waarin de warmtefluks verandert bij variërend α_v blijkt uit de randvoorwaarde voor de vibratieënergie zoals die geformuleerd is in vgl. (3.5-12). Men ziet hierbij dat de randvoorwaarde afwijkt van de twee ekstreme voorwaarden $e_v^* = e_v^*(T_w)$ of $(\partial e_v / \partial z) = 0$ wanneer $\sqrt{t} f(\alpha_v) \approx 1$. Dus wanneer

$$\alpha_v \approx (T/\hat{R}t)^{\frac{1}{2}} \quad (6.3-1)$$

Zoals uit deze relatie blijkt zullen de betreffende α_v -waarden voor een bepaald gas uitsluitend een functie van begintemperatuur en Machgetal zijn.

HET EKSPERIMENT

7.1. Inleiding

Voor een verdere waardebeoordeling van het theoretisch model zijn een aantal schokbuisexperimenten verricht waarbij enkele grootheden, die betrekking hebben op de warmtestroomdichtheid in de niet-evenwicht grenslaag, gemeten zijn. Een belangrijke grootheid die informatie geeft over het model in zijn geheel is uiteraard de warmtestroomdichtheid aan de schokbuisachterwand. Deze warmtestroomdichtheid is indirect gemeten met behulp van een bij schokbuisexperimenten gebruikelijke opnemer; het temperatuurlaagje. De met deze opnemer gemeten temperatuur van het wandoppervlak kan via de warmte-diffusievergelijking voor een half-oneindig lichaam gerelateerd worden aan de warmtestroomdichtheid ter plaatse.

Een grootheid die sterk bepalend is voor het warmtetransport in de temperatuurgrenslaag is de druk. Omdat de drukgradiënten in de grenslaag verwaarloosbaar zijn geeft een rechtstreekse drukmeting aan de achterwand informatie over de druk in de gehele grenslaag. Deze drukmeting aan de achterwand gedurende een tijd die correspondeert met de relaxatietijd in gebied 5, is verricht met een speciaal voor dit doel gekonstrueerde drukopnemer die door Baganoff (Ref. 23) ontwikkeld is. In het nu volgende zullen de gebruikte opnemers in het kort beschreven worden waarna de experimentele resultaten aan de hand van theoretische berekeningen bediscussieerd worden. Hierbij moeten de experimenten niet zozeer als een verificatie maar als een illustratie van de theorie gezien worden. Bij een eksakte vergelijking tussen theorie en experiment zullen meer en nauwkeuriger metingen verricht moeten worden dan tot nu toe gebeurd is.

7.2. De schokbuis

De experimenten zijn verricht in een 8 meter-lange schokbuis

met een inwendige doorsnede van $10 \times 10 \text{ cm}^2$. Bij de metingen in N_2 is H_2 als drijfgas genomen terwijl de schokgolf in CO_2 gekreëerd werd met behulp van N_2 . De schoksnelheden van de heengaande schokgolf zijn gemeten met behulp van twee identieke piezo-elektrische drukopnemers (Kistler, type 6038) die op een afstand van 182 en 11 mm voor de schokbuisachterwand in de zijwand van de buis gemonteerd waren. De tijd, verlopen tussen het passeren van de schokgolf bij de beide drukopnemers is gemeten met een Syntrol en Donner tijdintervalmeter (type 7034). De triggerniveaus van de start en stop zijn op dezelfde waarde ingesteld. De begindruk van het testgas varieerde: bij de verschillende metingen tussen 10 en 40 Torr. Deze druk is gemeten met een geijkte Speedivac manometer (type c.g. 3).

Bij het meten van de vibratiereleksatieëffekten is het noodzakelijk om met zuivere gassen te werken. Vooral H_2O beïnvloedt de relaksatietijden sterk. Uit de overzichtpublicatie van Taylor en Bitterman (Ref. 35) blijkt dat H_2O vele malen effectiever is bij de translatie-vibratieënergie uitwisseling dan N_2 of CO_2 zodat het relaksatieproces in deze gassen sterk versneld wordt tengevolge van H_2O -verontreinigingen. Op grond van de kwantitatieve gegevens in (Ref. 35) kan men stellen dat bij waterkonsentraties kleiner dan 10 p.p.m. zuivere relaksatiemetingen verricht kunnen worden. In dat geval zal de relaksatietijd namelijk minder dan 1% afwijken van die in geheel zuiver gas. Er zijn twee mogelijke bronnen voor H_2O verontreiniging aanwezig. De eerste is het inleken en uitgassen van de schokbuis gedurende de tijd die verstrijkt tussen inlaten van testgas en het verrichten van experiment. Om de inlek en het uitgassen na te gaan werd de buis geëvacueerd tot een niveau van 10^{-6} tot 10^{-5} Torr met behulp van een oliediffusiepomp. Na 1 uur pompen bleek de druktoename in de buis na het afsluiten van de pomp minder dan $2 \cdot 10^{-5}$ Torr per minuut te bedragen. Op grond hiervan kan men aannemen dat bij de experimenten die veelal met een rusttijd van meer dan 1 uur geschieden (gedurende welke tijd continue gepompt werd) en waarbij tussen het inlaten van test-

gas en het schokreflektieproces minder dan 5 minuten verliep, de verontreiniging van het testgas ten gevolge van inlek en uitgassen van H_2O minder dan 10 p.p.m. bedraagt, bij een voordruk van 10 Torr of hoger. Er dient echter wel opgemerkt te worden dat men hiermee net aan de minimale eisen voldoet. Een beter uitgassen en evakueren van de beschikbare niet-roestvrij stalen schokbuis bleek echter niet haalbaar. Een tweede bron van water-verontreiniging is het testgas zelf. Het gas (zowel N_2 als CO_2) dat betrokken werd uit commerciële gascilinders werd daarom gedroogd met behulp van moleculairzeef type 5A. De waterkonsentratie bleek met behulp van de beschikbare dauwpuntsmeter niet meer meetbaar te zijn, wat betekent dat de H_2O konsentratie van het gas dat in de schokbuis gelaten wordt, minder dan 1 p.p.m. is.

7.3. De opnemers

De drukmetingen zijn verricht met de Baganoff-opnemer (Ref.23). Deze drukmeter heeft een bijzonder snelle stijgtijd ($< 1 \mu s$) en vertoont door zijn speciale konstruktie gedurende de meettijd nauwelijks eigenfrekwenties. Deze laatste eigenschap is in verband met het meten van relatief kleine drukvariaties minstens even belangrijk als de eerste. De opnemer bestaat uit een dun, kapaciteet drukgevoelig element dat bevestigd is tegen de voorkant van een cilinder van polycarbonaat. Deze cilinder met een diameter van $6 \cdot 10^{-2} m$ vormt plaatselijk de schokbuisachterwand. Het gevoelige element is een plaatskondensator die bestaat uit een laagje kondensatoren-plastik (20 μm dik) met aan beide kanten een dunne laag koperfolie. Het buitenste folie, dat geaard wordt, heeft de diameter van de cilinder, terwijl de laag tussen plastik en polycarbonaat slechts $10^{-2} m$ in diameter is. Dit laatste element kan op een elektrische spanning van enkele kilovolts gebracht worden. Om mechanische beschadiging van de opnemer in de buis te voorkomen is het buitenste geaarde folie afgeschermd met een dunne laag kondensatoren-plastik (20 μm). De via een precisie-voedingsapparaat verkregen hoogspanning waarmee gemeten is bedroeg 2,5 kV.

Veranderingen in de gasdruk aan de schokbuisachterwand veroorzaken variaties in de dikte van het diëlektrikum tussen de beide folie-elektroden, waarbij dan een evenredige elektrische spanningsvariatie tussen de elektroden opgewekt wordt. Deze spanningsvariatie wordt via een voorversterker naar de oscilloscoop (Tektronix 556) geleid. Het signaal dat op het oscilloscoopscherm verschijnt wordt gefotografeerd, waarna het verder verwerkt en geïnterpreteerd kan worden. De elektrische schakeling bij de drukmeting is geschetst in Fig. 7.1. Fig.7.2

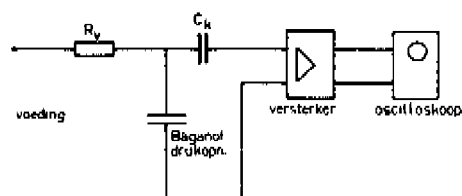


Fig. 7.1 Elektrische schakeling Baganoff-opnemer. C_k is een koppelkondensator, R_v is een voorschakelweerstand.

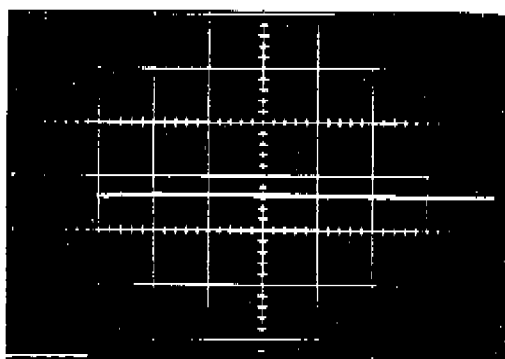


Fig. 7.2 Respons van Baganoff-opnemers op druksprong in Argon aan de achterwand, $p_1' = 510$ Torr, $M_g = 1,66$, tijdb. = 1 μ s/cm.

demonstreert de respons van de drukopnemer op een stapfunctie in de druk. Deze druksprong is verkregen met behulp van de schokgolffreflectie in Argon met een zwakke schokgolf en een hoge begindruk waarbij reële gaseffekten zoals relaxatie en warmtegeleiding verwaarloosbaar zijn. Aan de responsie van de opnemer ziet men dat de stijgtijd ongeveer 0,2 μ s is. De ijking van de drukopnemer is geschied met een aantal drukstappen die gegenereerd zijn in Argon. De gemeten responsie bleek bij de spanning van 2,5 kV goed lineair te zijn; de gevoeligheid was 0,82 mV/Torr. Rekening houdend met onnauwkeurigheden in Machgetal, voordruk en elektrische versterking komen tot een onnauwkeurigheid van ca. 5% in deze kalibratiefactor.

De informatie over de warmtestroomdichtheid aan de wand is verkregen via temperatuurmetingen van het wandoppervlak. De temperatuuropnemer bestaat uit een uiterst dun ($\pm 2000 \text{ \AA}$) platina laagje dat via kathode-sputteren aangebracht is op de voorkant van een cilindertje van kwarts met een diameter van 2 cm. Het oppervlak van het laagje is $1 \times 16 \text{ mm}^2$. Het cilindertje, dat met de voorkant "flush" in de achterwand gemonteerd wordt, fungeert lokaal als achterwand. Door het platina laagje (weerstand 800 Ω) wordt een konstante elektrische stroom van enkele mA gestuurd. Gedurende de metingen bedroeg deze stroom 7,6 mA. Na de schokgolffreflectie zal de wand, tengevolge van de warmtestroomdichtheid van gas naar wand, in temperatuur gaan stijgen. De elektrische weerstand van het laagje neemt proportioneel toe met de temperatuurstijging van het wandoppervlak, tengevolge waarvan een evenredige spanningsvariatie over het temperatuurlaagje zal ontstaan. De spanningsvariatie als functie van de tijd wordt, evenals bij de drukmetingen, via een voorversterker zichtbaar gemaakt op het scherm van een oscilloskoop en gefotografeerd. De elektrische schakeling is geschatst in Fig. 7.3. Bij de vergelijking van theorie en experiment is het nu noodzakelijk om de warmtestroomdichtheid $H'(l')$ naar de wand te relateren aan de temperatuurvariatie

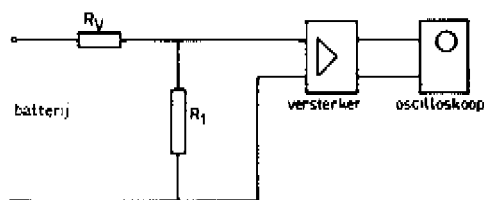


Fig. 7.3 Elektrische schakeling temperaturopnemer. R is de temperaturopnemer, R_v is de voorschakelweerstand.

$\Delta T'_w(t')$. Deze relatie wordt gevonden via de warmte-diffusie-vergelijking, toegepast op een half-oneindig lichaam (zie b.v. Ref. 22). Uitgaande van een uniforme temperatuur op $t' = 0$ in de achterwand komt men tot de volgende uitdrukking voor $\Delta T'_w(t)$:

$$\Delta T'_w(t') = (\rho'_w \lambda'_w c'_w)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{t'} H'(\xi) (t' - \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \quad (7.3-1)$$

Hierbij zijn ρ'_w , λ'_w en c'_w respectievelijk de soortelijke massa, de warmtegeleidingscoëfficiënt en de soortelijke warmte van de achterwand; in dit geval van kwarts. De vergelijking van theorie en eksperiment gebeurt nu door het gemeten temperatuurverloop te vergelijken met de via (7.3-1) verkregen temperatuurvariatie waarbij dan voor $H'(t')$ de theoretisch berekende warmtestroom-dichtheid genomen wordt.

Om deze vergelijking mogelijk te maken zijn naast de integratie in (7.3-1) een tweetal ijkingsen noodzakelijk. Enerzijds moet de temperatuurcoëfficiënt van de weerstand van het laagje bekend zijn om uit de gemeten elektrische spanningsvariatie de temperatuurvariatie af te leiden, terwijl anderzijds λ_{pc} -waarde van het kwarts gegeven moet zijn om het theoretisch temperatuurverloop aan te geven. De bepaling van de temperatuurcoëfficiënt is in principe eenvoudig. De temperaturopnemer wordt in een thermostaatbad geplaatst waarvan de temperatuur gedurende voldoende lange tijd (> 1 uur) op een konstante temperatuur geregeld wordt. Dit gebeurt voor een aantal verschillende temperaturen variërend tussen 15°C en 30°C . Bij elke van deze temperaturen

wordt dan de weerstand van het platina temperatuurlaagje bepaald met behulp van een Wheatstone-brug. De weerstand van het laagje bleek binnen het beschouwde temperatuurgebied lineair te verlopen met de temperatuur. De weerstand bedroeg 1137Ω bij $24,2^\circ \text{C}$ en bleek te veranderen met een waarde van $0,95 \Omega/\text{K}$. Deze waarde is op 1% nauwkeurig. Dat de bepaling van de λ_{pc} -waarde van de ondergrond van de opnemer een minder eenvoudige zaak is blijkt uit Ref. 46. Hierin geeft Maulard een drietal mogelijke manieren met verschillende nauwkeurigheden. Het bleek dat de methode met de op een na de kleinste onnauwkeurigheid binnen redelijke termijn praktisch uitvoerbaar was. Deze methode de z.g. dubbele elektrische methode wordt in Ref. 46 uitgebreid beschreven. In het kort samengevat komt de methode op het volgende neer. De opnemer wordt vanaf $t' = 0$ opgewarmd door middel van de Joule-warmte die in het laagje ontwikkeld wordt met behulp van een konstante elektrische stroom. Dit gebeurt twee maal; een maal wordt de opnemer in lucht geplaatst (omgevingsdruk) en de andere maal in glycerine waarvan de λ_{pc} -waarde bekend is. De weerstandsveranderingen van het laagje vanaf $t' = 0$ zijn in beide gevallen gelijkvormig, alleen zal de weerstandsverandering in lucht groter zijn dan in glycerine. De verhouding van de weerstandsverandering in beide gevallen kan nu gerelateerd worden aan de λ_{pc} -verhouding van glycerine en de opnemer (kwarts) waarna de λ_{pc} -waarde van de opnemer bekend is. Voor de gebruikte opnemer werd een waarde van $(\lambda' \rho' c')^{\frac{1}{2}}$ van $18,8 \cdot 10^2 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-\frac{1}{2}} \text{ K}^{-1}$ gevonden. De onnauwkeurigheid van deze laatste waarde blijkt niet kleiner dan ca. 16% (Ref. 49) te zijn. Men kan deze onnauwkeurigheid aksepteren omdat de λ_{pc} -waarde de absolute temperatuur bepaald terwijl de te bestuderen relaxatieeffecten zich manifesteren als een relatieve verandering op een aanvankelijke temperatuursprong.

Een ander belangrijk aspect van de temperatuuropnemer is de stijgtijd. Deze stijgtijd wordt gedefinieerd als de tijd die nodig is voor het bereiken van een bepaalde fraktie van de evenwichts-

temperatuur die hoort bij een warmtestroomdichtheid die omgekeerd evenredig met de tijd is. Bij een ideale opnemer met een warmtekapaciteit gelijk aan nul is deze tijd namelijk gelijk aan nul zoals uit (7.3-1) blijkt. Fig. 7.4. toont de karak-

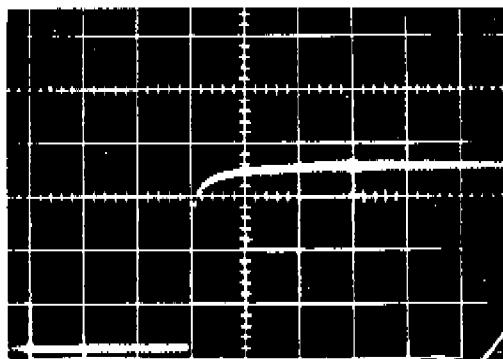


Fig. 7.4 Respons van temperatuuropnemer in de schokbuisachterwand op de schokreflektie in Argon. $p_1^i = 510$ Torr, $M_g = 1.62$, $t_{ijdb.} = 1 \mu s/cm$.

teristische spanningsvariatie over het temperatuurlaagje na de schokreflektie in Argon. De kondities ($M_g = 1,6$ en $p_1 = 510$ Torr) zijn zodanig gekozen dat op een μs -tijdschaal de warmtestroomdichtheid omgekeerd evenredig met de wortel uit de tijd verondersteld kan worden (Ref. 2). Uit de Fig. 7.4. blijkt dat de stijgtijd $\pm 1.5 \mu s$ bedraagt (99% punt).

Tot slot zal nader ingegaan worden op de uitwerking van de integraal (7.2-1). De theoretisch bepaalde warmtestroomdichtheid $H(t)$ is een lineaire combinatie van drie termen. Deze drie termen zijn de nulde-orde energiestroom, de correctie hierop voor de thermische grenslaageffekten in gebied 5 en de warmtefluks-variatie tengevolge van de vibratierelaksatie. De temperatuur die berekend wordt kan dan samengesteld gedacht worden als de som van drie temperaturen die horen bij deze drie warmtefluxen. Omdat bij de drie temperatuurbepalingen

specifieke problemen een rol blijken te spelen zullen deze afzonderlijk worden toegelicht.

a) Nulde-orde temperatuur

De nulde-orde warmtestroomdichtheid is, zoals uit (3.2-12) blijkt omgekeerd evenredig met $\sqrt{t}$. In dit geval is de integratie (7.3-1) analytisch uit te voeren. Omdat er geldt:

$$\sqrt{\pi} = \int_0^{t'} \xi^{-\frac{1}{2}} (t' - \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \quad (7.3-2)$$

vindt men voor H'_0 een temperatuursprong T'_{w0} die verder konstant is in de tijd:

$$\Delta T'_{w0} = H'_0 \sqrt{\pi} (\lambda'_w \rho'_w c'_w)^{-\frac{1}{2}} \quad (7.3-3)$$

b) De grenslaagverstoring

De correctie op de warmtestroomdichtheid tengevolge van de grenslaageffekten in gebied 5 wordt gegeven door (3.3-26)

$$\hat{H}' = H'_0 \left(p^* + \frac{\partial T^*}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) t^{-\frac{1}{2}} \quad (7.3-4)$$

Zoals reeds eerder aangetoond is, is deze correctie evenredig met t^{-1} . Integratie van deze warmtestroomdichtheid volgens (7.3-1) blijkt in dit geval moeilijkheden op te leveren. Het tijdstip $t = 0$ als ondergrens bij de integratie levert geen eindige temperatuur voor $t > 0$. Dit is niet verwonderlijk omdat de totale energie bij een t^{-1} evenredigheid van de fluks ook niet eindig is. Het is echter zonder meer duidelijk dat de berekende correctie op de nulde-orde warmtestroom slechts geldig is voor niet te kleine tijden. Omdat $H'_0 \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ en $\hat{H}' \sim 1/t$ zal de berekende correctie voor kleine tijden groter zijn dan de nulde-orde warmtestroomdichtheid. Bij de berekening van de temperatuurverandering tengevolge van $\hat{H}'$ is de berekende $\hat{H}'$ daardoor slechts toegepast vanaf het tijdstip $t = t_0$. De keuze van het tijdstip t_0 is enigszins arbitrair vastgesteld op dat tijdstip waarop $\hat{H}'$ en H'_0 in absolute waarde aan elkaar gelijk zijn. Uit (7.3-4) volgt:

$$t_o^{\frac{1}{2}} = (p^* + \frac{\partial T^*}{\partial z} / \frac{\partial T_o}{\partial z}) \quad (7.3-5)$$

Integratie van (7.3-4) volgens (7.3-1) vanaf het tijdstip t_o geeft dan voor de temperatuurverandering T'_w tengevolge van de grenslaagverstoreningen:

$$\Delta T_w = \Delta T'_w / \Delta T_{w0} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{t_o}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left\{ \left(\frac{t}{t_o} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{t}{t_o} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (7.3-6)$$

Omdat $t_o^{\frac{1}{2}} \approx (t_o/t)^{\frac{1}{2}} \approx R^{-\frac{1}{2}} \ll 1$ kan men hiervoor schrijven

$$\Delta T_w = \frac{2}{\pi} \left(\frac{t_o}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left\{ 2 \left(\frac{t}{t_o} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (7.3-7)$$

c) Temperatuurvariatie tengevolge van de vibratielerelaxatie

De warmtestroomdichtheid tengevolge van de relaxatie-effecten wordt in het model berekend via numerieke procedures waardoor de warmtefluks op diskrete tijdstippen bekend is. Daarom is de integraal in (7.3-1) eveneens numeriek bepaald. Hierbij is gebruik gemaakt van de methode van Cook en Felderman (Ref. 50).

7.4. De meetresultaten

De druk- en temperatuurmetingen zijn zowel in N_2 als in CO_2 verricht. Omdat de meettijd na de schokgolfreflektie feitelijk door de afmetingen van de schokbuis en de gebruikte opnemers vastligt, zullen de kondities voor beide gasen zodanig gekozen moeten worden dat de relaxatietijden binnen dit gegeven tijdsinterval liggen ($1 - 10 \mu s$). De relaxatietijden in gebied 5 zullen afhankelijk zijn van het Machgetal van de invallende schokgolf en van de voordruk p'_1 . Omdat deze tijden omgekeerd evenredig met de voordruk zijn, is het voldoende de relaxatietijd als functie van het Machgetal bij een voordruk van 1 Torr ($133,32 \text{ N m}^{-2}$) te kennen. Deze relatie is voor beide gebruikte gasen grafisch weergegeven in Fig. 7.5. De kondities die men, althans binnen bepaalde grenzen, onafhankelijk van elkaar kan kiezen zijn de waarden van voordruk en Machgetal. Het Machgetal zal voor namelijk bepaald worden door de aard van het testgas in verband met

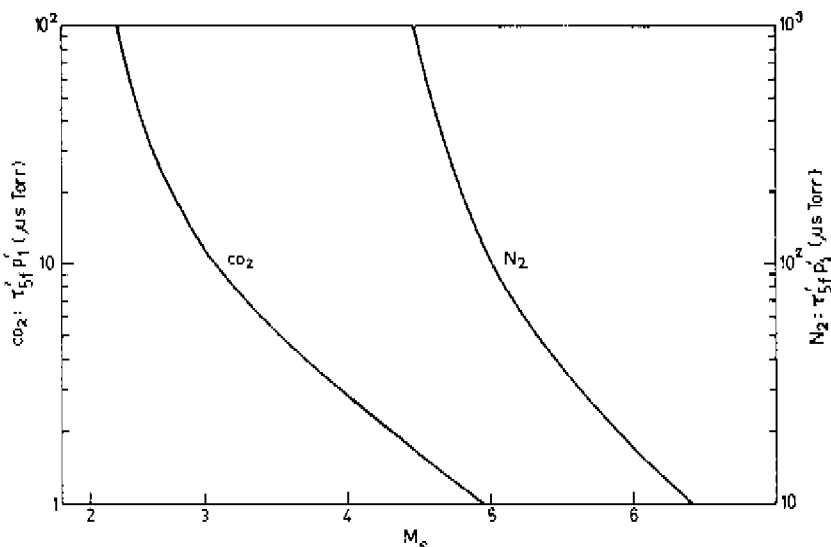


Fig. 7.5 Relaxatievrijden in gebied 5 voor N_2 en CO_2 . $T_1 = 295$ K.

de relatie tussen Machgetal en aandeel van de vibratieënergie in de inwendige energie van gebied 5. Voor N_2 zal dit aandeel pas meetbare effecten geven voor Machgetallen groter dan 5. Voor CO_2 is dit aandeel reeds vrij groot bij lagere Machgetallen. Omdat het theoretisch model zich beperkt tot lineariseerbare vibratielerelaxatieëffecten, zal men zich voor CO_2 moeten beperken tot kleine Machgetallen ($M_s \approx 2$). Uitgaande van gegeven Machgetal en relaxatietijd kan men aan de hand van Fig. 7.5. de voordruk p'_1 bepalen waarbij het experiment verricht dient te worden. Zowel bij druk- als bij de temperatuurmeting is de verwachting dat het meetsignaal zal bestaan uit een aanvankelijke sprong na de schokgolfreflectie, die bepaald wordt door de "frozen" condities in gebied 5, met daarop gesuperponeerd een relatief klein relaxatieëffect. ($< 10\%$). Om dit effect goed te kunnen meten is gebruik gemaakt van een speciaal type oscilloscoopversterker (Tektronix 1 A5) waarmee het mogelijk is uitsluitend de top van een wisselspanningsignaal weer te geven door een negatieve gelijkspanning aan het signaal toe te voegen. De versterking kan dan een aantal malen groter zijn dan wanneer het signaal in zijn geheel op het scherm weergegeven moet worden. Door gebruik te maken van een

dual-beam oscilloscoop was het mogelijk om beide signalen , dus het gehele signaal en korresponderende vergrote top, gelijktijdig weer te geven.

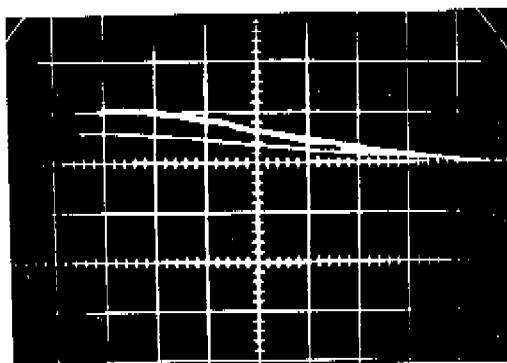


Fig. 7.6a. Gemeten drukverloop aan de schokbuisachterwand na reflectie in N_2 , $p_1' = 10$ Torr, $M_g = 5.3$, tijdab. = 1 $\mu s/cm$, versterking up beam = 4 x versterking low. beam.

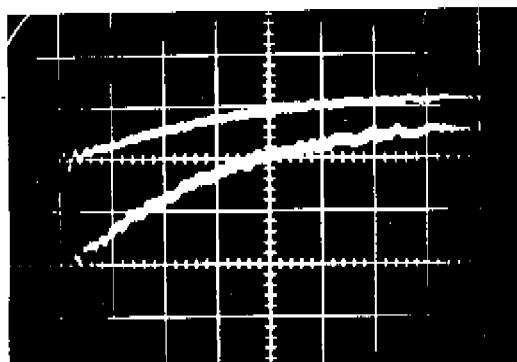


Fig. 7.6b. Gemeten drukverloop aan de schokbuisachterwand na reflectie in CO_2 , $p_1' = 40$ Torr, $M_g = 2.5$ tijdab. = 0.5 $\mu s/cm$, versterking low. beam = 2.5 x versterking up. beam.

In Fig. 7.6 a en b zijn twee typische drukverlopen gegeven, één voor N_2 en één voor CO_2 . Het karakteristieke verschil tussen beide signalen, dat tussen alle N_2 - en CO_2 - metingen optrad, is de

drukafname in N_2 en de toename in CO_2 . Dit verschil is verklaarbaar aan de hand van de verschillende verhoudingen van de relaxatietijden in gebied 2 en 5 voor de beide gassen. Zoals in 6.3 uiteengezet is zal voor CO_2 bij $M_s = 2$ deze verhouding van de grootteorde 1 zijn, zodat de relaxatie-effecten van gebied 2 snel gaan domineren wat resulteert in een druktoename. Voor N_2 bij $M_s > 5$ is deze relaxatietijdenverhouding echter veel groter waardoor in het meetsignaal, op een tijdschaal van τ_{5f}' , de druktoename tengevolge van de relaxatie in gebied 2 nauwelijks merkbaar zal zijn. In Fig. 7.6 demonstreert duidelijk de relatief kleine variatie tengevolge van de vibratiere relaxatie. Zo is in N_2 na 6 μs de afname van het meetsignaal, die correspondeert met de drukval ca. 6 mV terwijl de totale druksprong overeenkomt met ca. 180 mV. Voor CO_2 blijkt de druktoename 3 μs na reflectie te corresponderen met ca. 24 mV terwijl de aanvankelijke druksprong overeenkomt met ca. 100 mV. Tengevolge van de niet-ideale fokussering van het signaal op het oscilloskopscherm (t.g.v. ruis) en elektrische verstoringen van voedingsapparaat en omgeving zullen er afwijkingen in de gemeten drukken ontstaan die overeenkomen met variaties van ca. 1 mV. Het is duidelijk dat tengevolge van deze mogelijke afwijking de nauwkeurigheid bij de CO_2 -metingen ($\pm 4\%$) beter is dan bij N_2 (ca. 16%). De drukmetingen zijn bij een drietal verschillende voordrukken verricht in N_2 en bij twee verschillende voordrukken in CO_2 . Vanwege de te verwachten relaxatietijden is bij CO_2 op een andere tijdschaal (0,5 $\mu s/cm$) gemeten dan bij N_2 (1 $\mu s/cm$). Omdat het relaxatie-effect zich zal manifesteren als een relatieve variatie in de druk en omdat het absoluut drukniveau onder meer afhankelijk is van de nauwkeurigheden waarmee de kalibratie van de opnamer en de meting van Machgetal en voordruk verricht zijn, zijn de drukvariaties dimensieloos weergegeven. Alhoewel het de voorkeur verdient om hierbij als referentiedruk de "frozen" waarde p_{5f}' te nemen is vanwege de onbekendheid van deze druk bij de meting (de opnamer heeft een eindige stijgtijd) een andere waarde genomen. Voor N_2 is dit de druksprong 1 μs na het reflektietijdstip ($p_{5f}'(1)$) en voor CO_2 de druksprong 0,5 μs na het reflektietijdstip ($p_{5f}'(0,5)$). De resultaten zijn weergegeven in de Figuren 7.7 en 7.8. Bij de

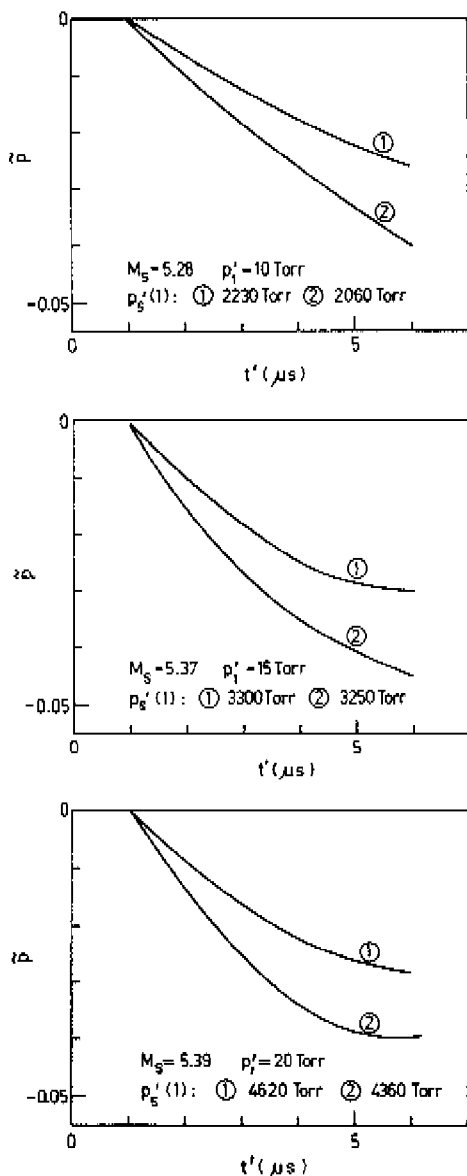


Fig. 7.7 Drukvariatie $\tilde{p}$ aan de schokbuiteachterwand t.o.v. de druk-sprong $p'_{Sf}(1)$ ($1 \mu s$ na reflectie) in N_2 . $T_1 = 293$ K, 1: gemeten, 2: theoretisch.

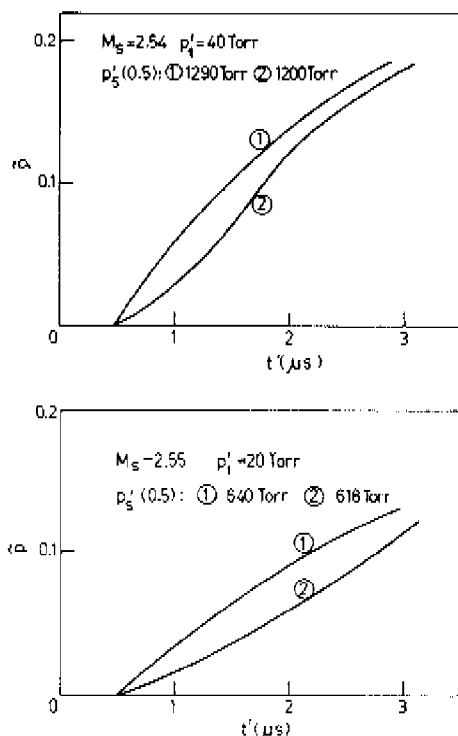


Fig. 7.8 Drukvariatie p aan de schokwaa t , o.v. de druksprong p_1' (0.5) (0.5 μ s na reflectie) in CO_2 . $T_1' = 295 \text{ K}$, 1: gemeten, 2: theoretisch.

gegeven theoretische krommen zijn zowel de relaxatie- als de grenslaaginvloeden meegenomen. Voor N_2 blijken de gemeten drukvariaties allen kleiner en voor CO_2 allen groter dan de berekende waarden te zijn. De afwijkingen bedragen in vrijwel alle gevallen 30 à 40%. Omdat de afwijkingen bovendien systematisch zijn verdient het aanbeveling om na te gaan wat de eventuele reden van de minder goede overeenstemming tussen theorie en experiment zijn. Allereerst moet men zich realiseren dat de theoretische relaxatietijden berekend zijn via empirische relaties die op hun beurt verkregen zijn uit relaxatietijden metingen die onderling een grote spreiding vertonen (zie b.v. Ref. 12) Het is dus aannemelijk dat

de gemeten relaxsatielijden in gebied 5 en 2 niet eksakt overeenstemmen met de berekende waarden. In principe is het nu mogelijk om de relaxsatielijden τ'_{5f} en τ'_{2f} als twee onafhankelijke variabelen in het model te introduceren en vervolgens door een geschikte keuze van τ'_{5f} en τ'_{2f} eksperiment en model aan elksaar aan te passen. Dit heeft echter weinig zin omdat dan de afwijking tussen theorie en eksperiment, binnen de meetnauwkeurigheid, voor twee verschillende interpretaties vatbaar is. De gemeten drukvariatics zijn namelijk allen in positieve zin groter dan de berekende. Dit kan enerzijds te wijten zijn aan een te grote invloed van de relaxsatie in gebied 2, anderzijds kan dit een gevolg zijn van een te klein aandeel van de relaxsatie in gebied 5. De relaxsatielijd in gebied 2 kan dus kleiner zijn dan aangenomen is, terwijl het eveneens mogelijk is dat de relaxsatielijd τ'_{5f} groter is dan berekend werd. Men kan echter wel uit de metingen konkluderen dat de relaxsatie tijdverhouding τ'_{5f}/τ'_{2f} groter is dan de theoretisch voorspelde. Aan de hand van de Figuren 7.7 en 7.8 wordt deze verhouding een faktor 1,5 tot 2 groter geschat dan berekend is, zowel voor N_2 als voor CO_2 . Uit de Refs. 12 en 35 blijkt dat deze faktor niet onwaarschijnlijk is. Naast de afwijking in de relaxsatielijden zouden niet-uniformiteiten in de stroming achter de heengaande schokgolf het drukverloop aan de achterwand kunnen beïnvloeden. Uit Ref. 49 blijkt namelijk dat de ontwikkeling van de stromingsgrenslaag in gebied 2 aan de schokbuiszijwanden een zodanige verstoring in de stroming geeft dat er na de oorspronkelijke druksprong een positieve drukvariatie aan de achterwand ontstaat. Tevens blijkt echter dat de orde van grootte van deze variatie over een tijdsinterval van 10 μs maximaal slechts 0,1 % zal bedragen zodat het onwaarschijnlijk is dat de grenslaagontwikkeling aan de schokbuiszijwanden bij de metingen een rol zal spelen.

De konklusies die uit de metingen getrokken kunnen worden zijn:

- a) Er bestaat een kwalitatieve overeenstemming tussen theorie en eksperiment
- b) De kwantitatieve afwijking tussen berekeningen en metingen tonen de noodzakelijkheid aan van het meten van de relaxsatielijden in

gebied 2 en 5, tegelijk met de drukmetingen. Dit heeft echter alleen zin wanneer de meetnauwkeurigheid vergroot kan worden.

In de Fig. 7.9 zijn twee typische eksperimentele temperatuurverlopen gegeven, een voor N_2 en een voor CO_2 . Evenals bij de drukmeting

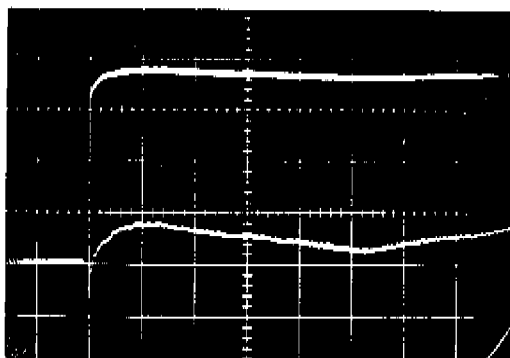


Fig. 7.9a. Gemeten temperatuurverloop aan de schokbuisachterwand na reflectie in N_2 . $p_j' = 20$ Torr, $M_g = 5.26$, tijd.b. = $1 \mu s/cm$, versterking low. beam = 4 x versterking up. beam.

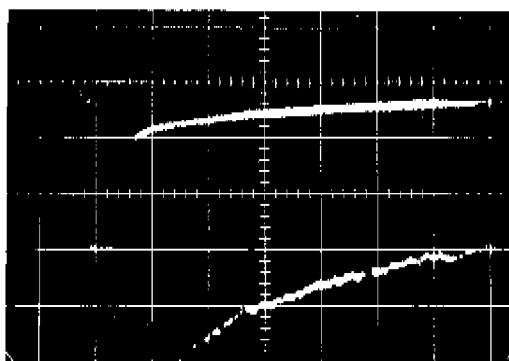


Fig. 7.9b. Gemeten temperatuurverloop aan de schokbuisachterwand na reflectie in CO_2 . $p_j' = 20$ Torr, $M_g = 280$, tijd.b. = $1 \mu s/cm$, versterking low. beam = 5 x versterking up. beam

en ziet men ook hier een karakteristiek verschil in het verloop van beide signalen. Na een aanvankelijke temperatuurstijging gedurende

ongeveer 2 μ s neemt de temperatuur aan de achterwand voor N_2 af, terwijl de temperatuur van de wand voor CO_2 blijft stijgen. De onnauwkeurigheden bij de temperatuurmetingen zijn van dezelfde orde van grootte als bij de overeenkomstige drukmetingen. Voor N_2 zijn deze dus groter dan voor CO_2 .

Vanwege de onbekende akkomodatietoëfficiënt α_v voor de vibratie-energie ligt het voor de hand om de gemeten temperatuurrespons niet met één maar met meerdere theoretische krommen te vergelijken. Zoals namelijk uit het voorafgaande hoofdstuk blijkt zal de warmtestroomdichtheid, dus ook de korresponderende wandtemperatuur, afhankelijk van de waarde van α_v , verlopen tussen twee grenzen die bepaald worden

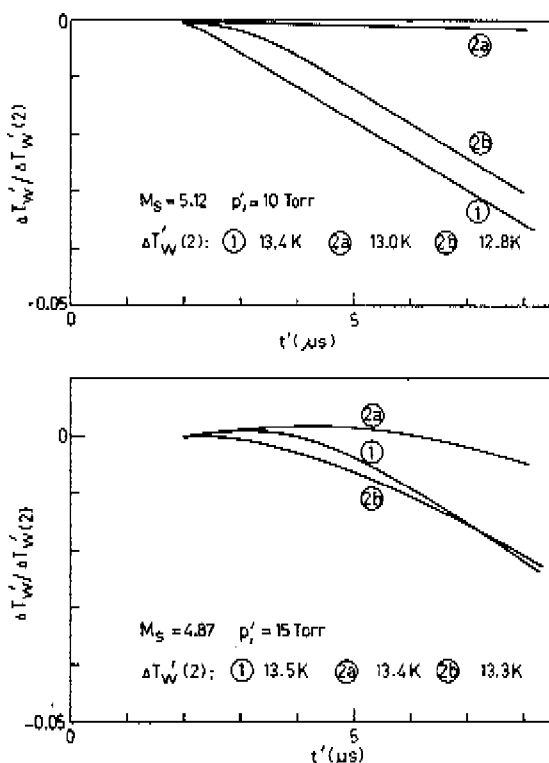


Fig. 7.10 a en b. Temperatuurvariatie van de schokbuisachterwand na schokreflektie in N_2 . $T_1^i = 295$ K, 1: gemeten, 2a: theoretisch $\alpha_v = 1$, 2b: theoretisch $\alpha_v = 0$.

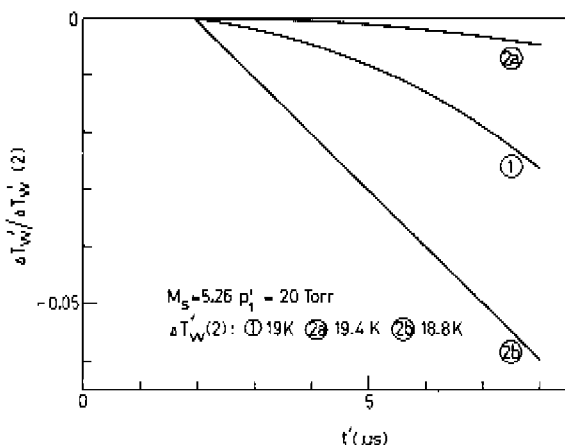


Fig. 7.10 a. Temperatuurvariatie van de schokbuisachterwand na schok-reflexie in N_2 . $T'_1 = 295$ K, 1: gemeten, 2a: theoretisch $\alpha_v = 1$, 2b theoretisch $\alpha_v = 0$.

door $\alpha_v = 0$ en $\alpha_v = 1$. Een eerste vereiste zal dus zijn dat de gemeten temperatuurverlopen binnen deze marge liggen.

In de Figuren 7.10 en 7.11 zijn de gemeten temperatuurverlopen vergeleken met de theoretische verlopen voor CO_2 en N_2 . In het theoretische verloop zijn zowel relaxatie- als grenslaagverstoringen verwerkt. In beide gassen zijn metingen verricht voor 3 verschillende voordrukken. Vanwege de grote ijkonnauwkeurigheid in de λ_{pc} -waarde van de wand en vanwege de primaire interesse in relatieve variaties zijn in de Figuren 7.10 en 7.11 niet de absolute maar de relatieve temperatuurvariatiën gegeven. Als referentietemperatuur is, vanwege de stijgtijd van de opnommer, voor N_2 de temperatuursprong van de wand t.o.v. de begintemperatuur 2 μs na het reflektietijdstip genomen en voor CO_2 1,5 μs na reflectie.

Vanwege de konklusies die getrokken zijn uit de drukmetingen aan de achterwand moet men voorzichtig zijn met de interpretatie van de temperatuurmetingen. Zo zal het, gezien de onzekerheid over de waarden van de relaxatietijden niet mogelijk zijn om aan de hand van vergelijking van theorie en eksperiment tot een eksakte waardebepaling

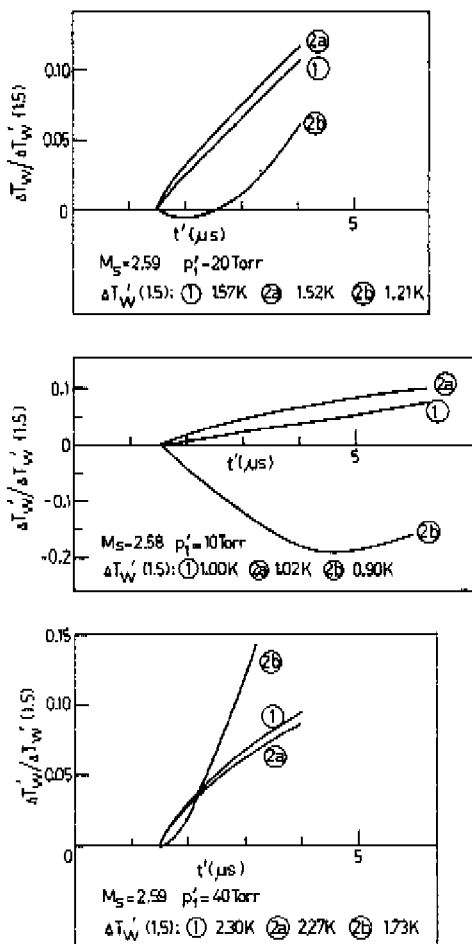


Fig. 7.11 Temperatuurvariatie van de schokbuisachterwand na schok-reflektie in CO_2 . $T'_1 = 297 \text{ K}$, 1: gemeten, 2a: theoretisch $\alpha_v = 1$, 2b: theoretisch $\alpha_v = 0$.

van α_v te komen. De metingen kunnen echter wel een indicatie geven over de grootte-orde van α_v . De afwijkingen tussen de gemeten temperatuurverlopen in N_2 en de korresponderende theoretische waarden blijken in de drie gevallen verschillend van elkaar te zijn. Voor $p_1 = 10 \text{ Torr}$ is de temperatuurafname ten opzichte van de begintempe-

ratuur na reflectie groter dan door de theoretische $\alpha_v = 0$ grens aangegeven is. Voor $p_1 = 20$ Torr ligt het gemeten temperatuurverloop daarentegen tussen de $\alpha_v = 0$ en $\alpha_v = 1$ grens, waarbij het verschil tussen de gemeten temperatuur en de $\alpha_v = 1$ grens zelfs kleiner is dan het verschil tussen gemeten temperatuur en de $\alpha_v = 0$ grens. Uit de drukmetingen is nu gebleken dat de drukafname na het reflektiestip kleiner is dan theoretisch voorspeld. Op grond hiervan kan men verwachten dat de werkelijke temperaturen die corresponderen met de $\alpha_v = 1$ en $\alpha_v = 0$ grenzen eveneens minder snel na reflectie zullen afnemen. Daarom mag men verwachten dat de gemeten temperaturen voor $p_1 = 20$ Torr dicht bij de $\alpha_v = 0$ grens dan bij de $\alpha_v = 1$ grens zal komen te liggen. De konklusie is dan ook gerechtvaardigd dat de metingen een indicatie zijn voor kleine α_v -waarden ($\alpha_v < 10^{-3}$). Vanwege de meetonnauwkeurigheid en de niet eksakt bekend zijnde relaxatietijden is het echter niet mogelijk om een waarde van α_v uit de metingen af te leiden. Voor CO_2 blijken de temperatuurmetingen vrij dicht bij de theoretische $\alpha_v = 1$ grens te liggen. Uit de resultaten van de berekeningen van hfst. 6 blijkt dat de grootte-orde van α_v waarmee de metingen corresponderen 0,1 zal bedragen. Er dient echter wel opgemerkt te worden dat bij een grotere druktoename dan de theoretische, zoals die uit de drukmetingen blijkt, deze waarde van α_v waarschijnlijk kleiner zal zijn, zodat ook hier geen eksakte waarde voor α_v gegeven kan worden. Dat de α_v -waarden van CO_2 en N_2 echter aanzienlijk zullen afwijken is niet onwaarschijnlijk omdat de relaxatietijden voor CO_2 bij kamertemperatuur veel kleiner zijn dan voor N_2 . Dit betekent namelijk dat de energie-uitwisseling tussen vibratie- en translatie-vrijheidsgraden in het gas voor CO_2 sneller verloopt dan voor N_2 . Indien dit eveneens geldt voor de uitwisseling van energie tussen de vibratie-vrijheidsgraden van het gas en de wandmolekulen dan zal de α_v -waarde voor CO_2 groter zijn dan voor N_2 . De konklusies die verder uit de temperatuurmetingen getrokken kunnen worden komen overeen met die uit de drukmetingen. Er bestaat namelijk een kwalitatieve overeenstemming tussen theorie en eksperiment terwijl eveneens blijkt dat voor een goede vergelijking van eksperiment en theorie relaxatietijdmetingen noodzakelijk zullen zijn.

KONKLUSIES

Uit de resultaten van het onderzoek kunnen een aantal konklusies getrokken worden die in eerste instantie betrekking hebben op de warmteoverdracht naar de schokbuisachterwand gedurende de vibratiereleksatie in gebied 5 voor de gassen N_2 en CO_2 . Daarnaast kunnen deze konklusies echter ook van belang zijn voor de voortzetting van het onderzoek naar andere dan vibratie niet-evenwicht verschijnselen in gebied 5 zoals dissociatie en ionisatie.

Op de tijdschaal die correspondeert met de relaxatietijd in gebied 5, buiten de temperatuurgrenslaag, blijken de energiestromen in de temperatuurgrenslaag van enerzijds rotatie- en translatieënergie en anderzijds vibratieënergie zodanig gescheiden te zijn dat het transport van deze energieën relatief eenvoudig beschreven kan worden. De energiestromen kunnen namelijk beiden gerelateerd worden aan de lokale bijbehorende temperatuur-gradiënten. Omdat er aan de wand, op de gekozen tijdschaal, nauwelijks een interactie bestaat tussen de translatie- en vibratievrijheidsgraden van de gasmolekulen, blijkt de akkomodatiecoëfficiënt α_v voor de vibratieënergie een bepalende grootheid voor de variatie in de warmtestroomdichtheid naar de wand tengevolge van de vibratiereleksatie te zijn. Met deze thermische akkomodatiecoëfficiënt wordt namelijk de rechtstreekse energie-uitwisseling beschreven tussen enerzijds de vibratievrijheidsgraden van de gasmolekulen aan de wand en anderzijds de wandmolekulen. De warmtestroomdichtheid naar de wand blijkt, afhankelijk van de waarde van α_v , te variëren tussen twee uiterste grenzen. Een extreem geval, waarbij er totaal geen uitwisseling van vibratieënergie tussen gas en wand optreedt, correspondeert met $\alpha_v = 0$ en het ander waarbij de vibratieënergie van de gasmolekulen aan de wand in thermisch evenwicht verkeert met de wandmolekulen, komt overeen met $\alpha_v = 1$. Wanneer de uitwisseling van vibratieënergie aan de wand langzamer verloopt dan de vibratiereleksatie in gebied 5 blijkt de warmtestroomdichtheid overeen te komen met die voor $\alpha_v = 0$, terwijl bij een uitwisseling die sneller verloopt dan de vibratiereleksatie, de warmtefluks correspondeert met die voor $\alpha_v = 1$. Voor een vibratieënergie-

uitwisselingsproces dat zich op dezelfde tijdschaal afspeelt als de vibratierelaksatie blijkt een zodanige afhankelijkheid van de α_v - waarde in de warmtestroomdichtheid op te treden dat het mogelijk moet zijn om aan de hand van gemeten warmtestroomdichtheden de waarde van α_v te bepalen.

Voorwaarde hiertoe is echter wel dat de waarden van de overige transportcoëfficiënten en relaksatietijden voldoende nauwkeurig bekend zijn. Naast de invloed van de vibratierelaksatie is tevens het tweede-orde effect van de temperatuurgrenslaag bestudeerd dat optreedt tengevolge van de expansiegolven die de grenslaag in gebied 5 genereert. De drukvariatie die hierbij aan de achterwand optreedt blijkt met het toegepaste model beter beschreven te worden dan met de benadering die Baganoff in Ref. 8 gebruikt heeft.

Een aantal van de verrichte experimenten zijn temperatuurmetingen voor N_2 en CO_2 aan de hand waarvan theoretische en werkelijke warmtestroommetingen aan de wand met elkaar vergeleken zijn. Ofschoon er een kwalitatieve overeenstemming is tussen theorie en experiment, blijkt het toch moeilijk om een uitspraak te doen over de α_v - waarden van N_2 en CO_2 . Uit verrichte drukmetingen aan de achterwand blijkt namelijk dat de relaksatietijden in de gebruikte schokbuis voor en achter de gereflekteerde schokgolf niet goed overeenstemmen met de tijden die berekend zijn aan de hand van empirische relaties uit de literatuur, zodat deze tijden in feite als twee bijkomende onbekende parameters in het experiment gezien moeten worden. Vanwege de betrekkelijk grote invloed van deze relaksatietijden op de warmtestroomdichtheid en de nauwelijks te vermijden verontreinigingen in de niet-roestvrije stalen schokbuis die de relaksatietijden beïnvloeden, zal het noodzakelijk zijn om gedurende de warmtestroomdichtheidmetingen eveneens de relaksatietijden vóór en achter de gereflekteerde schokfront te meten. Uit de experimenten blijkt evenwel dat de α_v -waarde aan platina voor CO_2 groter is dan voor N_2 , hetgeen aannemelijk is vanwege de kleine vibratierelaksatietijd van CO_2 dan voor N_2 bij kamertemperatuur.

SAMENVATTING

Dit proefschrift behandelt de warmte-overdracht naar de schokbuis-achterwand na de reflectie van de schokgolf in een meer-atomig gas. Het onderzoek is beperkt tot die situaties waarbij naast de warmte-overdracht nog lineariseerbare vibratielerelaxatieëffekten een rol spelen.

Na een algemene inleiding, hoofdstuk 1, worden in hoofdstuk 2 de algemeen geldige eendimensionale vergelijkingen voor het gebied tussen de gereflekteerde schokgolf en de achterwand gegeven. Deze vergelijkingen worden voor twee afzonderlijke gebieden, te weten de thermische grenslaag aan de wand en het gebied daarbuiten, vereenvoudigd. De randvoorwaarden voor de translatietemperatuur en de vibratieënergie aan de achterwand zijn gegeven met behulp van twee thermische akkomodatiecoëfficiënten; een coëfficiënt voor de translatie- en rotatieënergie en de ander voor de vibratieënergie. In hoofdstuk 3 zijn de vergelijkingen gelineariseerd ten opzichte van de "frozen" toestand. Deze toestand wordt buiten de temperatuurgrenslaag gegeven door een konstante uniforme druk, temperatuur en dichtheid terwijl deze grootheden, uitgezonderd de druk, sterk variëren in de thermische grenslaag. De nulde-orde warmte-fluks aan de wand is gegeven aan de hand van een nulde-orde grenslaagoplossing die numeriek bepaald is. De linearisatie is afzonderlijk toegepast voor twee verschillende invloeden op de nulde-orde oplossing; de invloed van de door de grenslaag geïnduceerde expansiegolven en de invloed van de vibratielerelaxatie.

De akoestische verstoringen buiten de grenslaag ten gevolge van deze invloeden zijn in beide gevallen analitisch bepaald terwijl de effecten op de nulde-orde grenslaagoplossing numeriek gevonden zijn. De relaxatietijden die voor N_2 en CO_2 in de toegepaste Bethe-teller relaxatievergelijking gebruikt zijn, zijn in hoofdstuk 4 gegeven. Tevens zijn in dit hoofdstuk de warmtegeleidingscoëfficiënten voor de rotatie- plus translatieënergie en voor de vibratie-energie gepresenteerd. De numerieke oplossingsmethode voor de grenslaagvergelijking van de vibratielerelaxatieverstoringen is in hoofdstuk 5 beschreven.

In hoofdstuk 6 is het model toegepast bij de bepaling van de warmtestroomdichtheid aan de schokbuisachterwand bij een aantal verschillende kondities. De invloed van de door de grenslaag geïnduceerde snelheid op de druk en warmtestroomdichtheid is voor N_2 en CO_2 van dezelfde orde van grootte als voor het eenatomige gas Argon. Tengevolge van de vibratierelaksatie in gebied 5 neemt de druk aan de achterwand na het reflektietijdstip af terwijl de relaxatie in gebied 5 deze druk daarentegen doet toenemen. De resultaten van de berekeningen zijn in overeenstemming met de konklusie van Johannessen dat voor Machgetallen van de heengaande schokgolf kleiner dan 2 de relaxatie voor de gereflekteerde schokgolf zodanig domineert dat de druk aan de wand meteen na reflectie toeneemt. Het effect van de relaxatie op de warmtestroomdichtheid is afhankelijk van de waarde van de akkomodatietoëfficiënt van de vibratieënergie aan de wand (α_v) die in het model als onbekende parameter beschouwd is.

In hoofdstuk 7 zijn een aantal gemeten drukverlopen aan de wand en temperatuurverlopen van de wand vergeleken met de korresponderende berekende grootheden waaruit blijkt dat theorie en eksperiment kwalitatief met elkaar in overeenstemming zijn. De minder goede kwantitatieve overeenstemming duidt op een verschil in de werkelijke en aangenomen relaxatietijdenverhouding van de relaxatietijd voor en achter het gereflekteerde schokfront. Vanwege de onzekerheid in deze verhouding is het niet mogelijk om eksakte waarden van α_v uit de eksperimenten af te leiden. Het blijkt echter wel dat de akkomodatietoëfficiënt α_v voor CO_2 aan de wand groter is dan die voor N_2 .

SUMMARY

This thesis deals with the heat flux to the end wall of the shock tube after shock wave reflection in a poly-atomic gas. The study is limited to those conditions behind the reflected shock wave which give rise to two non-equilibrium phenomena; the heat flux to the end wall and vibrational relaxation. The relaxation effects are linearised.

After a general introduction, chapter 1, the one-dimensional equations for the region behind the reflected shock wave in front of the end wall are given in chapter 2. These equations are simplified in two separated regions; the thermal boundary layer at the end wall and the region outside this layer. The boundary conditions at the end wall of the energy equation are given separately for the translational temperature and the vibrational energy by defining one thermal accommodation coefficient for translational-vibrational energy and one for vibrational energy. In chapter 3 the equations are linearised with respect to the frozen state. This state is given outside the thermal boundary by a uniform pressure, temperature and density whereas these variables, except the pressure, vary strongly in the boundary layer. The zero order heat flux to the end wall is derived from the zero order boundary layer solution. This solution is determined numerically. The linearisation is applied separately to two different influences upon the zero-order solution; the induced expansion waves by the boundary layer and the vibrational relaxation. Outside the boundary layer the acoustic waves are determined analytically whereas the disturbances in the boundary layer are obtained numerically.

The relaxation times which are used in the applied Bethe-Teller equation for the vibrational relaxation in N_2 and CO_2 are given in chapter 4. The heat conductivities for the translational - rotational energy and the vibrational energy are also presented in this chapter.

The numerical method of solution of the equations for the relaxation effects in the thermal boundary layer is described in chapter 5.

In chapter 6 the model is applied in order to determine the heat flux and pressure at the shock tube end wall for different Mach number. The influence of the induced velocity by the boundary layer upon pressure and heat flux for poly-atomic gases is of the same order of magnitude as for mono-atomic gases. In consequence of the vibrational relaxation behind the reflected shock wave the pressure on the end wall decreases whereas the relaxation in front of the shock wave gives rise to an increase of the pressure. The results of the calculations are in accordance with the conclusion of Johannessen stating that for Machnumbers of the incoming shock wave below 2 the relaxation in front of the shock wave dominates the relaxation behind so that the pressure at the wall increases immediately after reflection. The weight of the relaxation upon the heat flux depends on the magnitude of the thermal accomodation coefficient of the vibrational energy (α_v). This coefficient is considered as an unknown parameter in the model.

In chapter 7 a number of measured pressure and temperature histories on the end wall are compared with the theoretical ones. The experimental results agree qualitatively with the calculations. The quantitative disagreement points to a difference between the theoretical and real ratio of the relaxation times behind and in front of the shock wave. Because of the uncertainty in the exact magnitude of the relaxation times one can not deduce exact values of α_v from the heat flux measurements. However the experiments indicate for CO_2 a value of α_v at the end wall of the order of magnitude of 0.1 and for N_2 a value of less than 10^{-3} .

Reflektie- en transmissiecoëfficiënt aan de gereflekteerde schokgolf.

Met behulp van de standaard-schokrelaties kan men aan de gereflekteerde schokgolf een transmissie- en een reflektiecoëfficiënt voor akoestische verstoringen bepalen. Omdat de stroming vóór de gereflekteerde schokgolf (gebied 2) supersoon is ten opzichte van deze schokgolf en achter deze schokgolf (gebied 5) subsoon, zal een verstoring in gebied 2 uitsluitend getransmitteerd worden terwijl in gebied 5 alleen reflecties zullen optreden.

De schokrelaties worden toegepast ten opzichte van de gereflekteerde schokgolf met snelheid V_r' . De supersonische snelheid $\bar{u}_2'$ voor en de subsonische snelheid u_5' achter de schokgolf voldoen hierbij aan de relaties:

$$\bar{u}_2' = u_2' + V_r' \quad (I.1)$$

$$u_5' = u_5' + V_r'$$

u_2' en u_5' zijn de deeltjessnelheden ten opzichte en in de richting van de achterwand in respectievelijk gebied 2 en gebied 5. De schokrelaties voor de druk- en dichtheidverhoudingen zijn:

$$p_5'/p_2' = \frac{2\gamma M_r^2 - \gamma + 1}{(\gamma + 1)} \quad (I.2)$$

$$\rho_5'/\rho_2' = \frac{(\gamma + 1)M_r^2}{(\gamma - 1)M_r^2 + 2} \quad (I.3)$$

Het bij de gereflekteerde schokgolf behorend Machgetal is gedefinieerd als $M_r = \bar{u}_2'/a_2'$. Door gebruik te maken van de continuïteitsvergelijking over de schokgolf ($\rho_2' u_2' = \rho_5' u_5'$) vindt men via relatie (I.3) de volgende uitdrukking voor het verschil in deeltjes-snelheid in gebied 2 en 5:

$$\bar{u}_2' - u_5' = u_2' - u_5' = \left(1 - \frac{(\gamma - 1)M_r^2 + 2}{(\gamma + 1)M_r^2}\right) M_r a_2' \quad (I.4)$$

Linearisatie van deze relatie voor kleine verstoringen ten opzichte van de frozen toestand (aangeduid met indeks f) in gebied 2 en gebied 5 geeft:

$$\tilde{u}_2' - \tilde{u}_5' = \frac{2a_1'}{\gamma+1} \left(M_{rf} - \frac{1}{M_{rf}} \right) \tilde{a}_2' + \frac{2a_1'}{\gamma+1} \frac{M_{rf}^2+1}{M_{rf}} \tilde{M}_r \quad (1.5)$$

Naast deze relatie kan men eveneens een verband vinden tussen de drukverstoringen in gebied 2 en 5 en de verstoring in het Mach-getal. Linearisatie van 1.2 voor kleine verstoringen geeft namelijk

$$\tilde{p}_5' - \tilde{p}_2'/p_{2f}' = p_{2f}' 4\gamma M_r \tilde{M}_r / (p_{5f}'(\gamma+1)) \quad (1.6)$$

Door eliminatie van $\tilde{M}_r$ uit de relaties (1.5) en (1.6) verkrijgt men dan een verband tussen de druk- en snelheidsverstoringen in gebied 2 en 5 en de verstoring in de geluidssnelheid in gebied 2. De snelheidsverstoring in gebied 5 kan nu met behulp van de akoestische relaties geschreven worden als:

$$\tilde{u}_5' = u_5^+ + u_5^- = (p_5^+ - p_5^-) / \gamma \quad (1.7)$$

zodat men een relatie krijgt tussen de enkelvoudige drukverstoringen in gebied 5, en de snelheids-, druk- en geluidssnelheidsverstoringen in gebied 2. Deze laatste relatie is:

$$\tilde{p}_5^+ = E \tilde{p}_5^- + D \quad (1.8)$$

waarbij E opgevat kan worden als een reflectiecoëfficiënt die gegeven wordt door:

$$E = \frac{A-1}{A+1} ; \quad A = \frac{2M_{rf}^2}{M_{rf}^2+1} \left(\frac{2+(\gamma-1)M_{rf}^2}{2\gamma M_{rf}^2 - \gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

D kan gezien worden als een getransmitteerde verstoring vanuit gebied 2 naar gebied 5:

$$D = \frac{\tilde{p}_2'}{p_{2f}'(\gamma+1)} + \left(\gamma \frac{A}{a_{5f}'} \frac{\tilde{u}_2'}{(\gamma+1)} - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)} \frac{A(M_{rf}^2-1)}{(\gamma+1)(A+1)M_{rf}} \tilde{a}_2' \right) \frac{a_{5f}'}{a_{2f}'}$$

De temperatuurverstoring aan de gereflekteerde schokgolf $\hat{T}'_5$ in gebied 5 kan eveneens via de schokrelaties gerelateerd worden aan de variatie $\hat{T}_2$ aan de schokgolf in gebied 2, en de ter plaatse aanwezige drukverstoringen $\hat{p}'_{5r}$ en $\hat{p}'_{2r}$. Uitgaande van de schokrelatie

$$T'_5/T'_2 = \frac{p'_5}{p'_2} \frac{(\gamma+1)/(\gamma-1) + p'_5/p'_2}{1+(\gamma+1)p'_5/(p'_2(\gamma-1))} \quad (I.9)$$

vindt men door linearisatie voor de verstoringen met behulp van (I.2):

$$\hat{T}_{5r} = C\hat{T}_2 + B\hat{p}_5 - F\hat{p}_2 \quad (I.10)$$

waarbij: $C = :$

$$F = B = \frac{4\gamma(\gamma-1) M_F^4 + 4(\gamma-1)}{2\gamma(\gamma-1) M_F^4 - (\gamma^2 - 6\gamma + 1) M_F^2 - 2(\gamma-1)} \frac{\gamma+1}{4\gamma M_F^1} \frac{2\gamma M_F^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}$$

APPENDIKS II.

De temperatuurvariatie in gebied 2 ter plaatse van de gereflecteerde schokgolf.

Bij verwaarlozing van viscositeit en warmtegeleiding geldt er voor de stationaire situatie ten opzichte van de heengaande schokgolf, achter het schokfront in gebied 2:

$$\frac{1}{2} \hat{u}_2'^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_2' + e_{v2}' = \text{konstant} \quad (\text{II.1})$$

In deze relatie, die volgt uit de energievergelijking, is $\hat{u}_2'$ de deeltjesnelheid t.o.v. het schokfront. In dimensieloze vorm wordt (II.1):

$$\frac{1}{2} (\gamma-1) \hat{u}_2'^2 + T_2' + e_{v2}' (T_{5f}'/T_{2f}') = \text{konstant} \quad (\text{II.2})$$

waarbij de vibratieënergie betrokken is op $c_p T_{5f}'$.

Uitgaande van kleine vibratierelaksatie effecten gaat deze vergelijking over in:

$$(\gamma-1) \hat{u}_{2f}' \hat{u}_2' + \hat{T}_2' + (e_{v2}' - e_{v1}^*) (T_{5f}'/T_{2f}') = 0 \quad (\text{II.3})$$

Wie (3.4-20) volgt voor de snelheidsvariatie $\hat{u}$:

$$\hat{u}_2' = \hat{u}_{2f}' \hat{T}_2' / (1 - \gamma \hat{u}_{2f}'^2) \quad (\text{II.4})$$

zodat men voor het verband tussen $\hat{T}_2'$ en e_{v2}' in de relaksatiezone vindt:

$$\hat{T}_{2r}' = - \frac{T_{5f}'}{T_{2f}'} \frac{1 - \gamma \hat{u}_{2f}'^2}{1 - \hat{u}_{2f}'^2} (e_{v2}' - e_{v1}^*) \quad (\text{II.5})$$

Toepassing van vgl. (3.4-14) geeft dan:

$$\hat{T}_{2r}' = - \frac{T_{5f}'}{T_{2f}'} \frac{1 - \gamma \hat{u}_{2f}'^2}{1 - \hat{u}_{2f}'^2} (e_{v2}^* - e_{v1}^*) (1 - \exp(-t/\tau_{2r}^*)) \quad (\text{II.6})$$

Voorwaarde voor de geldigheid van het energietransportmodel.

Relatie (4.2-8) voor het warmtetransport in de temperatuur-grenslaag is verkregen via de toepassing van de Chapman-Enskog benadering voor een gas met twee inwendige energievormen. De geldigheid van (4.2-8) wordt dus bepaald door de voorwaarden waaronder deze toepassing geldig is.

De Chapman-Enskog procedure voor een gas met een inwendige energievorm is gegeven door Wang-Chang en Uhlenbeck in Ref.24. Het uitgangspunt is hierbij de Boltzmann vergelijking voor de verdelingsfunctie f van het meeratomige gas.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_r f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (\text{III.1})$$

Hierbij is f een functie van de snelheid V van het molekuul, de plaats $\vec{r}$, de tijd t en bovendien van het kwantumgetal i dat de inwendige energietoestand van het molekuul karakteriseert.

De verdelingsfunctie f wordt nu benaderd door $f^0(1 + \phi)$, waarbij f^0 de oplossing van de nulde-orde Boltzmann vergelijking is:

$$\left(\frac{\partial f^0}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (\text{III.2})$$

ϕ , die veel kleiner dan 1 moet zijn, is de oplossing van de eerste-orde Boltzmann vergelijking, ook wel de Chapman-Enskog vergelijking genoemd:

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_r f^0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} f^0 \phi \right)_{\text{coll}} \quad (\text{III.3})$$

De oplossing van deze vergelijking gebeurt in Ref. 24 voor twee verschillende inwendige energievormen. Bij een energievorm verloopt de uitwisseling tussen translatie en inwendige energie

*) In deze appendiks zijn de niet-dimensieloze grootheden, in tegenstelling met het voorafgaande, niet van een aksent voorzien.

gemakkelijk en bij de andere moeilijk. Bij de gemakkelijk uitwisselbare vorm wordt de voorwaarde gesteld dat de inelastische botsingsfrequentie (frequentie van de botsingen waarbij uitwisseling tussen translatie en inwendige energie optreedt) van dezelfde orde van grootte is als de elastische. Bij de moeilijk uitwisselbare energievorm wordt uitgegaan van de voorwaarde dat de grootte-orde van de verhouding van inelastische en elastische botsingsfrequentie kleiner (of gelijk) is dan (aan) de grootte-orde van het kwadraat van de verstoringsterm ϕ . In de temperatuurgrenslaag is nu de rotatie-energie geïdentificeerd met de gemakkelijk uitwisselbare energievorm en de vibratie-energie met de moeilijk uitwisselbare energie. De verdelingsfunctie wordt in dit geval gekarakteriseerd door twee kwantumgetallen, i voor de rotatie- en j voor de vibratie-energie. De oplossing van de Chapman-Enskog vergelijking is in dit geval een lineaire combinatie van de oplossingen waarbij beide energievormen afzonderlijk voorkomen. De voorwaarden waaraan dus voldaan moet zijn, zijn:

$$\begin{aligned} \text{a) } \phi &\ll 1 \\ \text{b) } v_{\text{rot}}/v &\approx 1 \\ \text{c) } v_{\text{vib}}/v &\approx \phi^2 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Hierbij is a) de algemene voorwaarde waaronder de Chapman-Enskog procedure geldig is terwijl aan de overige twee voldaan moet zijn in verband met de benaderingen die toegepast zijn bij de oplossing III.1 (Ref. 24).

Door Smolderen (Ref. 25) is een verhelderende uiteenzetting gegeven over de geldigheid van a) voor een eenatomig gas. De in Ref. 25 gegeven methodiek blijkt eveneens toepasbaar voor de Chapman-Enskog benadering van een gas met twee inwendige energievormen. Hiertoe worden de grootte-orde van de diverse termen die in de Chapman-Enskog vergelijking voorkomen met elkaar vergeleken. Deze Chapman-Enskog vergelijking voor een gas dat gekarakteriseerd wordt met twee inwendige kwantumgetallen en die verkregen wordt via de combinatie van de twee methodes voor een gas met een inwendige energievorm (Ref. 24) luidt:

$$f^0 \left\{ \left(\beta \frac{1}{2} m c^2 - 5/2 \right) \vec{c} \cdot \vec{\nabla} \ln T + \beta (E_i - \bar{E}_i) \vec{c} \cdot \vec{\nabla} \ln T \right.$$

$$\left. + \beta_v (E_j - \bar{E}_j) \vec{c} \cdot \vec{\nabla} \ln T_v + 3m \left(\vec{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{c}} \vec{c} : \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \times \vec{u} \right) + \right. \quad (III.5)$$

$$\left. \frac{2}{3} \left[q \left(\frac{1}{2} \beta m c^2 - \frac{3}{2} \right) + (1-q) (\bar{E}_i - E_i) \right] \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} (f^0 \phi)_{\text{coll}}$$

waarbij

$$f^0 \sim \exp \left(- \beta \left(\frac{1}{2} m c^2 + E_i \right) - \beta_v E_j \right)$$

$$\beta = 1/(kT)$$

$$\beta_v = 1/(kT_v)$$

$$q = c_r / (c_r + c_t)$$

T = translatie- en rotatietemperatuur

T_v = vibratietemperatuur

E_i = energie behorend bij rotatieënergieniveau i

E_j = energie behorend bij vibratieënergieniveau j

m = moleculaire massa

c = thermische snelheid

u = gemiddelde deeltjessnelheid

c_r = soortelijke warmte voor de rotatieënergie

c_v = soortelijke warmte voor de vibratieënergie

In de botsingsintegraal $\frac{\partial}{\partial t} (f^0 \phi)_{\text{coll}}$ wordt gesommeerd over alle botsingen met het molecuul i,j met differentiële werkzame doorsnede $I(ij, i_1 j_1; i' j, i_1' j_1)$. Hierbij verandert de vibratie-energietoestand j niet ten gevolge van voorwaarde c).

De termen in bovenstaande vergelijking kunnen op dezelfde wijze als in Ref. 25 afgeschat worden. De eerste en tweede term, die beiden evenredig zijn met de temperatuurgradiënt, blijken dan van de grootte-orde $(\bar{c}/L) (\Delta T/\bar{T})$ te zijn. $\bar{c}$ is de gemiddelde thermische snelheid, ΔT een karakteristiek temperatuurverschil en $\bar{T}$ een karakteristieke temperatuur. De derde term die evenredig is met de vibratietemperatuurgradiënt, is van de grootte-orde van $(\bar{c}/L) (\Delta T_v/\bar{T}_v)$. ΔT_v is een karakteristiek temperatuurverschil en $\bar{T}_v$ een karakteristieke temperatuur. De vierde term, evenredig met de deformatietensor, en de vijfde, evenredig met

de snelheidsgradiënt, zijn beiden van de grootte-orde $\bar{U}/\bar{L}$. $\bar{U}$ is een karakteristieke snelheid. Zoals uit Ref. 25 blijkt is de grootte-orde van de botsingsintegraal gelijk aan die van $v\phi$. v is de botsingsfrequentie waarvan de grootte-orde overeenkomt met $\bar{c}/\bar{l}$ ($\bar{l}$ is de gemiddelde vrije weglengte). Vergelijking van deze ordes van grootte geeft:

$$(\bar{u}/\bar{c}) (\bar{l}/\bar{L}) \approx M \cdot Kn \leq \phi \ll 1$$

$$(\bar{l}/\bar{L}) (\Delta\bar{T}/\bar{T}) \approx Kn \Delta\bar{T}/\bar{T} \leq \phi \ll 1 \quad (\text{III.6})$$

$$(\bar{l}/\bar{L}) (\Delta\bar{T}_v/\bar{T}_v) \approx Kn \Delta\bar{T}_v/\bar{T}_v \leq \phi \ll 1$$

Hierbij is gebruik gemaakt van het feit dat $\bar{u}/\bar{c}$ van de grootte-orde van het Machgetal M is en $\bar{l}/\bar{L}$ overeenkomt met het getal van Knudsen (Kn). Omdat $\Delta\bar{T}/\bar{T}$ en $\Delta\bar{T}_v/\bar{T}_v$ van de orde 1 zijn en $M < 1$ zal aan (III.5) voldaan zijn indien $Kn \ll 1$. Bovendien is ϕ dan van de grootte-orde Kn . In de temperatuur grenslaag zal de karakteristieke lengte $\bar{L}$ overeenkomen met de grenslaagdikte δ . In hfst. 2 is aangetoond dat de coördinaat η die correspondeert met de dikte δ , op de gekozen tijdschaal τ_{5f} , de grootte-orde $Kn^{-1/2}$ heeft. Dit betekent voor de grenslaagdikte δ :

$$\delta \approx (c_p/\lambda \tau_{5f})^{-1/2}$$

Omdat uit de simpele vrije weglengte theorie aangetoond kan worden (zie Vincenti en Kruger Ref. 28) dat de grootte-orde van de warmtegeleidingscoëfficiënt λ voldoet aan:

$$\lambda \approx c_p \bar{l} c$$

zal de grenslaagdikte δ voldoen aan

$$(\bar{l} c \tau_{5f})^{1/2}$$

Het getal van Knudsen voldoet dan aan de relatie

$$Kn \approx (1/c\tau_{5f})^{\frac{1}{2}} \approx (v_{vib}/v)^{\frac{1}{2}} \quad (III.7)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van het feit dat de inelastische botsingsfrequentie voor vibratieënergie in grootte-orde overeenkomt met de reciproke van de relaxatietijd. Zoals uit Ref. 26 blijkt varieert v_{vib}/v tussen 10^3 en 10^7 zodat $Kn \ll 1$ en zonder meer aan voorwaarde (III.4-a) voldaan is. Bovendien zal, eveneens vanwege III.7, automatisch aan voorwaarde (III.4-c) voldaan zijn. Uit Ref.26 blijkt verder dat het aantal botsingen waarbij een rotatieënergiekwant uitgewisseld wordt 2 à 3 bedraagt zodat de inelastische botsingsfrequentie voor rotatieënergie-overgang van dezelfde orde van grootte is als de inelastische botsingsfrequentie. Aan voorwaarde (III.4-b) zal dus ook voldaan zijn.

SYMBOLENLIJST

1. Niet-dimensieeloze grootheden

p'	druk	$N m^{-2}$
u'	mediumsnelheid t.o.v. stilstaand coördinaatensysteem	$m s^{-1}$
ρ'	soortelijke massa	$kg m^{-3}$
T'	translatie-rotatietemperatuur	K
x'	plaatscoördinaat vanaf de achterwand	m
t'	tijd vanaf het reflektietijdstip	s
τ'	vibratieleraksatietijd	s
e'_v	vibratieënergie per eenheid van massa	$J kg^{-1}$
e'^*_v	evenwichtvibratieënergie	$J kg^{-1}$
h'	enthalpie per massa-eenheid	$J kg^{-1}$
q', q'_v, q'_{tr}	energiestroomdichtheid van respectievelijk translatie+rotatie+vibratie-, vibratie-, translatie- + rotatieënergie	$W m^{-2}$
H'	warmtestroomdichtheid aan de achterwand	$W m^{-2}$
H'_o	nulde-orde warmtestroomdichtheid aan de achterwand	$W m^{-2}$
μ'	viscositeit	$N s m^{-2}$
μ'_B	bulkviscositeit	$N s m^{-2}$
λ'	warmtegeleidingscoëfficiënt voor translatie-rotatieënergie	$W m^{-1} K^{-1}$
λ'_L	warmtegeleidingscoëfficiënt voor translatieënergie	$W m^{-1} K^{-1}$
λ'_r	warmtegeleidingscoëfficiënt voor rotatieënergie	$W m^{-1} K^{-1}$
λ'_v	warmtegeleidingscoëfficiënt voor vibratieënergie	$W m^{-1} K^{-1}$
κ'	warmtegeleidingscoëfficiënt voor vibratieënergie	$kg m^{-1} s^{-1}$
a'	geluidssnelheid	$m s^{-1}$
D'	zelfdiffusiecoëfficiënt	$m^2 s^{-1}$
c_v	soortelijke warmte bij konstant volume	$J kg^{-1} K^{-1}$
c_p	soortelijke warmte bij konstante druk	$J kg^{-1} K^{-1}$

c_t', c_r', c_l'	soortelijke warmte van respectievelijk translatie-, rotatie-, en inwendige vrij- heidsgraden	$J \text{ kg}^{-1} K^{-1}$
R	gaskonstante	$J \text{ kg}^{-1} K^{-1}$
v_j'	snelheid van de heengaande schokgolf	ms^{-1}
v_r'	frozen-snelheid van de gereflekteerde schokgolf	ms^{-1}
$\bar{u}_2'$	mediumsnelheid t.o.v. heengaande schokgolf	ms^{-1}
$\bar{u}_2'$	mediumsnelheid t.o.v. gereflekteerde schokgolf	ms^{-1}
δ'	dikte van de thermische grenslaag	m
u_δ'	mediumsnelheid aan de rand van de grens- laag	ms^{-1}
T_w'	temperatuur van de achterwand	K
$\Delta T_w'$	temperatuurverschil tussen de temperatuur van de achterwand na en voor de schok- reflektie	K
$\Delta T_{wo}'$	nulde-orde temperatuurvariatie van de achterwand ten gevolge van de schokreflektie	K
$\rho_w' c_w' \lambda_w'$	konstantgeleidingsvermogen van de achter- wand	$J m^{-2} K^{-2} s^{-1}$

indices

2	grootheden in gebied 2, achter de heengaande schokgolf
5	grootheden in gebied 2, achter de gereflek- teerde schokgolf
f	grootheden in de frozen toestand

II. Dimensieloze grootheden

p, u, ρ	} grootheden in gebied 5, achter de gereflek- teerde schokgolf, gedefiniëerd op p.6 en p.7.
T, x, t	
r, e_v, λ	
κ, p_r, R	

H	H'/H'_0
a	a'_5/a'_{5f}
a_2	a'_2/a'_{2f}
u_2	u'_2/u'_{2f}
T_2	t'_2/t'_{2f}
P_2	p'_2/p'_{2f}
e_v^*	$e'_v/c_p T'_{5f}$
e_{v2}	$e'_{v2}/c_p T'_{5f}$
e_{v2}^*	$e'_{v2}/c_p T'_{5f}$
u_1	u'_1/u'_{2f}
ρ_1	ρ'_1/ρ'_{2f}
e_{v1}	$e'_{v1}/c_p T'_{5f}$
e_{v1}^*	$e'_{v1}/c_p T'_{5f}$
t_2^*	gedefinieerd op p.30
v_r	v'_r/a'_{5f}
η	$\int_0^x \rho dx.$
ψ	$\eta R^{-\frac{1}{2}}$
z	$\psi t^{-\frac{1}{2}}$
α_t	akkomodatatiecoëfficiënt voor translatie-rotatieënergie(p.10)
α_v	akkomodatatiecoëfficiënt voor vibratieënergie (p.10)
γ	c_p/c_v
$\phi(T)$	$\langle T \rangle/T$
$\phi_v(T)$	$\kappa(T)/T$
$\partial\alpha, \partial\beta$	differentiaal in de karakteristieke richtingen
u^+, u^-	enkelvoudige snelheidsverstoringen langs + en -karakteristiek
p^+, p^-	enkelvoudige drukverstoringen langs + en -karakteristiek
M_r	$\bar{u}'_2/a'_2$

M_s	v'_l/a'_{if}
u_o	nulde-orde snelheid in gebied 5 ($=0$)
p_o	nulde-orde druk in gebied 5
T_o	nulde-orde temperatuur in gebied 5

REFERENTIES

1. Gaydon, A.G. and I.R. Hurle, The Shock Tube in High Temperature Physics, Chapman and Hall, London 1963.
2. Sturtevant, B. and E. Slachmuylders, Phys. Fluids 7 (1964) 1201.
3. Fay, J.A. and M.H. Kemp, J. Fluid Mech, 21 (1965) 659.
4. Fexxon, J.R. and K. Fujimura, Nonlinear Partial Differential Equations, p.203 - 221, Ames, Academic Press, Inc., New York (1967).
5. Collins, D.J. and W.A. Menard, Trans. A.S.M.E. J. Heat Transfer, 89 (1966) 52.
6. Matula, R.A., Trans. A.S.M.E. paper 67-WA/HT-3 (1967)
7. Lauver, M.R., Phys. Fluids, 7 (1964) 611.
8. Baganoff, D., J. Fluid Mech., 23 (1965) 209.
9. Johannessen, N.H., C.A. Bird, and H.K. Zienkiewicz, J. Fluid Mech., 30 (1967) 51.
10. Presley, L.L. and R.K. Hanson, AIAA J., 7 (1969) 2267.
11. Hanson, R.K., Rep. No. 345 Stanford Univ. Dept. of Aeronautics and Astronautics (1968).
12. Appleton, J.P., J. Chem. Phys., 47 (1967) 3231.
13. Dyke, van M.D., ZAMM, 3 (1952) 343.
14. Traugott, S.C., J. Fluid Mech., 13 (1962) 400.
15. Goldsworthy, F.A. J. Fluid Mech., 5 (1953) 164.
16. Kennard, E.H., Kinetic Theory of Gases, Mc. Graw Hill, New York (1938).
17. Flood, S.A., The Solid-Gas Interface, Vol.1 Chap.14, W. Arnold and Co., London (1967).
18. Mirels, H., Attenuation in a Shock Tube due to Unsteady Boundary Layer Action, NASA TN 3278.

19. Fiszdon, W. and J. Lubonski, Prace IPPT (IBPT Reports) 6 (1969) 78.
20. Clarke, J.F., Proc. Roy. Soc. A 229 (1967) 221.
21. Dyke, van M.D., Perturbation in Fluid Mechanics, Academic Press, New York (1964).
22. Carlslaw, H. and J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford (1959).
23. Baganoff, D., Rev. Sci. Instr. 35 (1964) 288.
24. Wang Chang, C.S. and G.E. Uhlenbeck, Transport Phenomena in Polyatomic Gases, Eng. Res. Rept. No. CM-681, Univ. of Michigan (1951).
25. Smolderen, J.J., Progress in Aeronautical Sciences 6, D. Kucheman and L.H.G. Sterne, Pergamon Press, (1965).
26. Herzfeld, K.F. and T.A. Litovitz, Absorption and Dispersion of Ultrasonic Waves, Academic Press, Inc., New York (1959).
27. Mason, E.A. and L. Monchick, J. Chem. Phys., 36 (1962) 1622.
28. Vincenti, W.G. and C.H. Kruger, Introduction to Physical Gas Dynamics, Wiley, New York (1965).
29. Landau, L. and E. Teller, Phys. Z. Sowjet, 10 (1936) 34.
30. Millikan, K.C. and D.R. White, J. Chem. Phys. 39 (1963) 98.
31. Gaydon, A.G. and I.R. Hurlc, Symp. Combust. 8th, Pasadena Calif. 1960 (1962) 309.
32. Blackman, V., J. Fluid Mech., 1 (1958) 61.
33. Taylor, R.L. and S. Bitterman, Rev. Modern Phys. 41 (1969) 26.
34. Herzfeld, K.F., J. Chem. Phys., 47 (1967) 743.
35. Marriott, R., Proc. Phys. Soc., 84 (1964) 877.
36. Johannessen, N.H., H.K. Zienkiewicz, T.A. Blythe, and J.H. Gerrard, J. Fluid Mech., 13 (1962) 213.
37. Simpson, C.J.S.M., K.B. Bridgman, and T.R.D. Chandler, J. Chem. Phys., 49 (1968) 513.

38. Parker, J.G., Phys. Fluids, 2 (1959) 449.
39. Hirschfelder, J.O., C.F. Curtiss, and R.B. Bird, Molecular Theory of Gases and Liquids, John Wiley and Sons, Inc., New York (1954).
40. Hilsenrath, J., et al., Tables of Thermal Properties of Gases, Natl. Bur. Standards, Pergamon Press, London (1960).
41. Forsythe, G.E. and W.R. Wasow, Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, Wiley, New York (1960).
42. Köhne, H., Untersuchung, Vergleich und Fehlerabschätzung numerischer Verfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Preprint T.H. Aken(1967).
43. Ames, W.F., Numerical Methods for Partial Differential Equations, Nelson, London (1969).
44. Douglas, J., Pacif. J. Math., 6 (1956) 35.
45. Lees, M., J. Soc. Indust. Appl. Math., (1959) 167.
46. Maulard, J., Etude du Fluxmetre a Temperature Superficielle pour Mesures dans les Tubes a Choc, Clearinghouse, Springfield, N69-348/5 (1969).
47. Eucken, A., Physik. Z., 14 (1913) 324.
48. Chapman, S. and T.G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press, New York (1952).
49. Kamimoto, G., T. Akamatsu and T. Hasegawa, Effect of Shock Attenuation on Reflected Shock Waves, Kyoto Univ. Rept. of Aeronautical Engineering, CP 2(1962)
50. Cook, W.J. and E.J. Felderman, A.I.A.A. Journal, 4 (1966) 561.

CURRICULUM VITAE

Op aanbeveling van de Senaat volgt hier een korte levensbeschrijving van de schrijver van dit proefschrift. Hij werd geboren te Schaesberg op 1 april 1944. Na de lagere school bezocht hij het St. Bernardinus-College te Heerlen waar in 1962 het eindexamen H.B.S.-b werd afgelegd. Hierna begon hij met de natuurkundestudie aan de Technische Hogeschool te Eindhoven. Zijn afstudeerwerk voerde hij uit in de groep stromingsleer onder leiding van Prof.Dr.Ir. C. Vossers. Het ingenieursexamen werd afgelegd in 1967.

Hierna trad hij als wetenschappelijk medewerker in dienst van de T.H. waar in bovengenoemde groep begonnen werd met het onderzoek dat tot dit proefschrift leidde. Sinds 1 januari 1971 is hij werkzaam op het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium te Amsterdam.

STELLINGEN

I

De bewering van Ferron en Fujimura, dat men met behulp van de door hen gegeven methode een verband tussen warmtegeleidingscoëfficiënt en temperatuur van een gas kan afleiden uit meer dan één temperatuurmeting aan de schokbuisachterwand, is onjuist.

Ferron, J.K. and Fujimura, K., Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press Inc., New York (1967), 203.

II

De door Mirels gestelde voorwaarde van konstante entropie in het gehele veld, bij de bepaling van de akoestische verstoringen achter de heen- gaande schokgolf tengevolge van de zijwandgrenslaag in de schokbuis, is onnodig beperkend.

Mirels, H. Attenuation in a shock tube due to unsteady boundary-layer action, NACA, TN 3278 (1957).

III

Het verdient aanbeveling om bij temperatuurmetingen met dunne laagjes de voorschakelweerstand, ter verkrijging van een kleine elektrische stroom, zo klein mogelijk te nemen.

IV

De vergelijking, die Clarke maakt tussen zijn theorie en de metingen van Sturtevant en Blachmuylders van de gereflekteerde schokgolftertraging, is in strijd met de uitgangspunten van zijn model.

Clarke, J.F. Proc. Roy. Soc., A229 (1967) 221.

V

Indien de stroming in de vloeistofslinger laminair is zal er geen gedampde slingering optreden.

Kaufman, W., Technische Hydro- und Aeromechanik, Springer, Berlin, 3^e druk (1963) 111.

VI

De door Morse uitgevoerde splitsing van de botsingsintegraal voor een gas met inwendige vrijheidsgraden in een elastisch en inelastisch deel is niet korrekt.

Morse, T.F., Phys. Fluids, 7 (1964) 183.

VII

Melvin vergelijkt de door hem bepaalde warmtegeleidingscoëfficiënt voor stikstof ten onrechte met de gemodificeerde Eucken-relatie.

Melvin, A., 4th Symposium on Thermophysical Properties, Proceedings (1968) 314.

VIII

Het is wenselijk dat de gemeentelijke energiebedrijven als eenheid van geleverd gas de Joule in plaats van m^3 gaan hanteren.

IX

Bij de bepaling van warmtegeleidingscoëfficiënten van gassen tot temperaturen van 3300 K door middel van temperatuurmetingen aan de schokbuisachterwand zal de meetnauwkeurigheid beter dan 1% moeten zijn indien men een nauwkeurigheid beter dan 50% in de bepaalde warmtegeleidingscoëfficiënten wil bereiken.

X

De konklusie van Sturtevant en Slachmuylders dat de warmtestroomdichtheid naar de schokbuis achterwand hoofdzakelijk door de warmtegeleidingscoëfficiënt in het buitenste gedeelte van de temperatuurgrenslaag bepaald wordt is onjuist.

Sturtevant, B. and Slachmuylders, E., Phys. Fluids 7 (1964) 1201.

XI

De waarde van de kwaliteitstest bij het vergelijkend warenonderzoek van de konsumentenorganisaties is zeer gering. Derhalve kan deze kwaliteitstest beter achterwege gelaten worden.

XII

De stelling van Baganoff dat de invloed van de temperatuurgrenslaag op het drukverloop aan de achterwand verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de vibratielaksatie invloed, geldt niet voor de door Baganoff verrichte drukmetingen in CO_2 .

Baganoff, D., J. Fluid Mech., 25 (1966) 209.

XIII

In verband met de verontreiniging van de atmosfeer dient het gebruik van dieselmotoren in plaats van benzinemotoren door de overheid gestimuleerd te worden.

XIV

De opvatting van sommigen dat het partikuliere autoverkeer in tegenstelling tot het openbaar vervoer niet gesubsidieerd wordt, is onjuist.