

EEN OPERATIONELE ANALYSE VAN ENIGE WACHTMODELLEN

AN OPERATIONAL ANALYSIS OF SOME
QUEUEING MODELS
(WITH SUMMARY IN ENGLISH)

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DE GRAAD VAN DOCTOR IN
DE TECHNISCHE WETENSCHAPPEN AAN DE TECHNISCHE
HOGESCHOOL EINDHOVEN, OP GEZAG VAN DE
RECTOR MAGNIFICUS, PROF. DR. IR. G. VOSSERS, VOOR
EEN COMMISSIE AANGEWEEZEN DOOR HET COLLEGE
VAN DEKANEN, IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN
OP DINSDAG 18 FEBRUARI 1975 TE 16.00 UUR.

DOOR

BOUKE VAN DER VEEN
NATUURKUNDIG INGENIEUR
GEBOREN TE LEEUWARDEN

Dit proefschrift is goedgekeurd
door de promotoren

PROF. IR. W. MONHEMIUS
EN
PROF. DR. J. WESSELS

De leiding van de ISA-Research van de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken ben ik zeer erkentelijk voor de mij geboden gelegenheid dit werk uit te voeren.

3.2	De prikmethode	72
3.3	Voorbeelden van de gevonden relaties	74
3.3.1	Karweiduren negatief-exponentieel verdeeld	74
3.3.2	Konstante karweiduren	74
3.3.3	Karweiduren gamma-verdeeld	74
3.3.4	Karweiduren hyperexponentieel verdeeld	78
3.4	Variantie van rijlengte en wachttijd	80
3.5	Lengte van de bezette periode	82
3.6	Loket met relatieve prioriteiten	85
3.7	Loket met alternerende prioriteit	88
3.7.1	De gemiddelde rijlengte tijdens een bezette periode die begint met een stochastisch aantal karweien	91
3.7.2	De gemiddelde wachttijd van een i-klant	92
4.	DE BEZETTE PERIODE (M/G/1)	98
4.1	Een kombinatorisch probleem	98
4.2	De tijdsduur bij een gegeven aantal klanten	101
4.3	Het aantal verwerkte karweien in de bezette periode	105
4.4	Lengte van de bezette periode bij een gegeven werkvoorraad	106
5.	GROEPSGEWIJZE AANKOMSTEN OP VASTE TIJDSTIPPEN	108
5.1	Karweiduren genormaliseerd op één tijdseenheid	108
5.1.1	De methode van Kendall	108
5.1.2	De prikmethode	109
5.1.3	Enkele bijzondere gevallen	111
5.2	Karweiduren een geheel veelvoud van de tijdseenheid	113
5.3	Karweiduren willekeurig	114
6.	VAN GROEPSVERWERKING NAAR G/M/1	118
6.1	Een voorraadprobleem	118
6.1.1	Aankomsten van afnemers volgens een Poisson-verdeling	122
6.1.2	Aankomsten van de afnemers binomiaal verdeeld	124
6.1.3	Aankomsten van de afnemers diskreet homogeen verdeeld	125

6.2 Het wachtsysteem G/M/1	126
6.2.1 Aankomsten van het type k-Erlang	127
6.2.2 De verdelingsfunctie van de wachttijd	128
6.2.3 De verdelingsfunctie van het aantal klanten; een expliciete bepaling van de wortel q_1	129
7. EEN VOORBEELD VAN TIME-SHARING	131
7.1 De round-robin discipline	131
7.2 Enkele benaderingen voor het geval $\mu\Theta \ll 1$	137
8. OVER HET AANGROEIEN VAN DE RIJLENGTE	141
8.1 Een inschakelverschijnsel bij een systeem van het type M/M/1	142
8.2 De stochastische wandeling	144
8.3 De maximale rijlengte tijdens de bezette periode	148
9. MODEL EN WERKELIJKHEID	150
9.1 Inleiding	150
9.2 Een proces met gekorreleerde groepsaankomsten	151
9.2.1 Het aankomstproces	152
9.2.2 De lengte van de lege en de bezette periode	154
9.2.3 De aanwezige hoeveelheid werk direct na een aankomst	155
9.2.4 De gemiddeld aanwezige hoeveelheid werk	157
9.3 Over het ontstaan van wachtrijen	159
9.4 Simulatie van het wachtprobleem uit par. 9.2	161
9.5 Het juiste ruwe model	165
DE BEHANDELDE STOF	171
REFERENTIES	175
SUMMARY	178
CURRICULUM VITAE	179

HOOFDSTUK 1

INLEIDING

1.1 Het doel van deze studie

In het begin van deze eeuw ontwikkelde Erlang in Kopenhagen de eerste wachttijdtheoretische modellen. Sindsdien heeft er een voortdurend toenemende stroom gevloeid van artikelen en boeken op het gebied van de wachttijdtheorie. Men kan zich dan ook afvragen of het zin heeft aan deze stroom nog iets toe te voegen, reden waarom een rechtvaardiging van zo'n toevoeging wel op zijn plaats is.

Vele artikelen op dit gebied zijn dermate ingewikkeld dat de niet-wiskundig geschoolde lezer het onderwerp maar laat rusten of door zelf na te denken iets probeert te vinden. Tot de belangrijkste en minst gelezen artikelen behoren die van Pollaczek van wie Runnenburg (ref. 45) in een boekbespreking de volgende karakteristiek geeft: "Pollaczek is een uiterst geslepen rekenaar, die volkomen thuis is in de rekentechnieken van de functietheorie. Hij schrikt er niet voor terug, problemen uit de waarschijnlijkheidsrekening te vertalen in problemen der analyse ook als dat alleen via zeer gecompliceerde formuleringen mogelijk is. Pas daarna gaat hij schaven en ploeteren om tot beter hanteerbare resultaten te komen en zo heeft hij zich in ruim dertig jaar een unieke handigheid verworven." Dat de methode van Pollaczek niet eenvoudig is moge blijken uit een brief van hem zelf aan Syski (ref. 17, pag. 52), waarin hij o.a. schrijft: "The circumstance that this theory employs uniquely analytic methods and dispenses with all resource to classical Probability Calculus, probably accounts for the fact that hitherto my methods have been employed by nobody save myself", hetgeen jammer is gezien het grote belang van zijn werk. Ten onzent heeft Cohen (ref. 12) een standaardwerk geschreven waarin hij ook aandacht besteedt aan de aanpak van Pollaczek; ook het werk van Cohen vereist echter een diepgaande mathematische scholing.

Toegegeven moet worden dat de streng mathematische, abstracte aanpak met hulpmiddelen als contourintegralen, genererende functies, Lapace-Stieltjes transformaties e.d. vaak fraai en algemeen van opzet is, hetgeen echter niet wegneemt dat er bezwaren aan kunnen kleven, nl. van automatisme en abstraktie. Wij zullen hier nader op ingaan.

Het gevaar van automatisme schuilt hierin dat een aanpak, die zijn waarde heeft bewezen,

vaak blindelings wordt nagevolgd, ook in die situaties waarin een andere aanpak meer inzicht geeft of sneller tot een resultaat leidt.

Dit geldt in het bijzonder voor die gevallen waarbij men dan wel in principe iets algemeen heeft opgelost maar in feite toch niet verder komt dan een expliciete oplossing voor enkele speciale gevallen.

"A time-sharing queue" van Adiri en Avi-Itzhak (ref. 1) is een fraai voorbeeld van een standaardmethode die tot een automatisme leidt: iedere vergelijking wordt meteen "Laplace-Stieltjes getransformeerd" (*). Dit gaat zelfs zover dat de schrijvers, met heen en terug transformeren, bewijzen dat, (vrij vertaald), als de kans om met een dobbelsteen "vijf" te gooien $1/6$ is, het dan gemiddeld 6 worpen kost om een "vijf" te gooien; hoewel de uitspraak "dat is nogal wieses" geen bewijskracht heeft, is men wel geneigd tot die uitspraak te komen. De schrijvers gebruiken in het eerste deel van hun artikel 52 genummerde formules, waarvan ongeveer de helft Laplace-Stieltjes transformaties bevat en als tussenformules zijn te beschouwen waaruit door terugtransformeren en limietovergangen de andere helft van de formules, waar het om gaat, wordt afgeleid. Voor de afleiding van die tweede helft is de eerste niet nodig, het geeft niet meer inzicht, het wordt er alleen maar gecompliceerder door en het kost veel rekenwerk. Adiri en Avi-Itzhak, die al zichtbaar veel rekenen, verduisteren het werk achter de schermen niet: "After some rather lengthy algebraic manipulations" en "after a rather lengthy and not painless process" vinden ze formules die ook met enig nadenken zijn te vinden. Ook Morse (ref. 34, pag. 123) schrijft: "Unfortunately, to get further, even with this simple case, we must plow through a lot of algebra" om een simpele formule voor een loket met prioriteiten te vinden. Omdat sommige resultaten van Adiri en Avi-Itzhak niet zo'n simpele vorm hebben wordt een volgend automatisme ingeschakeld, de computer die zorgt voor de numerieke resultaten. De computer was echter niet nodig want de resultaten hadden betrekking op parameterwaarden die eenvoudige benaderende formules toestaan.

Het voorgaande is niet bedoeld om de waarde van de wiskunde of de computer te kleineren, integendeel, het zijn prachtige en onmisbare hulpmiddelen; het bezwaar richt zich echter tegen het klakkeloos gebruik van "zwaar geschut" in die situaties waarin het niet nodig is. Uiteraard kan men van mening verschillen over de vraag waar het al of niet nodig is. Wel is het zo dat een operationeel researcher na een streng mathematische afleiding behoefte heeft de uitkomsten te interpreteren, te doorzien, hetgeen vaak gelukt. Morse schrijft bijvoorbeeld na "the lot of algebra": "The results are not surprising". Hij gaat dan uitleggen waarom de formules er uitzien zoals ze er uitzien, hetgeen, zuiver mathematisch gezien, geen zin heeft.

*) Wel moet worden opgemerkt dat dit automatisme in sommige andere artikelen van deze schrijvers niet of nauwelijks voorkomt, zie ref. 2 en 3; voorts wordt verwezen naar de paragraaf 3.7 en hoofdstuk 7.

De fysikus en operationeel researcher Morse heeft daar toch behoefte aan; de reden ligt in het tweede bezwaar dat reeds genoemd werd, nl. de abstraktie.

De voordelen van de mogelijkheid tot abstraheren zijn dermate evident dat een toelichting nauwelijks nodig lijkt. Door de abstraktie is men in staat te komen tot generalisatie, het opsporen van algemene uitspraken en methoden. Nodig hiervoor is de formele redenering die de puntjes op de i zet.

In het voorwoord van één van zijn studies over wachttijdtheorie wijst Khintchine (ref. 29) nog eens extra op de noodzaak van korrekte bewijsvoering: "The preparation of this monograph was greatly hampered by the fact that all the fundamental literature comes from the pens of workers in the practical field, and is therefore unsatisfactory from a mathematical point of view. To give each explanation a form that was mathematically acceptable I was not able to leave a single discussion in its original state; it was necessary either substantially to supplement the author's reasoning or to reject it altogether and substitute a different argument. Similarly, where new concepts were being introduced it was necessary in many cases to define them differently, since the definitions given by the authors seemed insufficiently precise."

Als Khintchine echter korrekt wiskundig wil definiëren en bewijzen dan raakt hij bij de eerste definitie in zijn studie reeds in moeilijkheden als hij stelt: "We will call a stream of uniform events "simple" if it possesses the following three characteristics", omdat "een stroom van uniforme gebeurtenissen" niet zonder meer een wiskundig bekend begrip is. Khintchine zelf is trouwens ook van mening dat eigenlijk begonnen moet worden met abstrakte definities maar hij stelt dat uit tot hoofdstuk twee, waarin hij echter ook een uitdrukking als "aantal gebeurtenissen" hanteert zonder dit begrip in wiskundige termen te verklaren, hetgeen gemakkelijk kan (zie paragraaf 1.2.1).

Het is niet de opzet om spijkers op laag water te zoeken, het gaat er om te laten zien dat iedere schrijver zich op een abstraktie-niveau bevindt, dat gebonden is aan de tijd en het milieu waarin hij leeft en dat hij als normaal ervaart. Om dit duidelijk te maken keren wij terug tot Morse, die gevonden formules gaat uitleggen. Voor de fysikus of de operationeel researcher heeft het zeker zin de gevonden oplossing terug te vertalen naar de situatie waarvan de wiskundige probleemstelling een abstraktie was; hij doet dit om de oplossing in zijn eigen gedachten — en begrippenwereld te plaatsen. Deze situatie kan op zijn beurt weer een abstraktie zijn van een konkrete technische situatie. In de ene situatie denken wij bijvoorbeeld in begrippen als hoeveelheid werk, loket, karweiduur, terwijl in de andere begrippen worden gehanteerd als draaibank, doorsmeerbeurt e.d. Daarnaast vindt men op een

hoog abstractie-niveau uitdrukkingen als σ -algebra, meetbare verzameling, metrisch transitieve transformatie. Op deze wijze kunnen verschillende abstractie-niveaus worden onderscheiden. Het "terugvertalen" is dan het omzetten van begrippen uit een hoger abstractie-niveau naar het niveau dat iemand normaal vindt in zijn omstandigheden.

Het bezwaar van een ver doorgevoerde abstractie is dat het niveauverschil zo groot kan worden dat het terugvertalen slechts met grote inspanning gelukt; de lezer is dan geneigd het betreffende geschrift opzij te leggen als zijnde abstrakt. Dit is te betreuren als daardoor een stuk nuttige kennis een ontoegankelijk gebied wordt. Voor de schrijver, die zich laat verleiden tot een minder abstracte wijze van behandelen, bestaat echter het gevaar dat dit leidt tot een minder exakte en daarmee in feite tot een niet-korrekte wijze van behandeling, waarmee de lezer ook niet gebaat is.

De vraag rijst nu wanneer een redenering exakt genoeg is om de naam "bewijs" te dragen. Bij de opbouw van een vakwetenschap maakt men gebruik van, door Tarski (ref. 56, pag. 127) zo genoemde, primitieve of ongedefinieerde termen, waarmee bedoeld worden uitdrukkingen in het betreffende vakgebied die onmiddellijk begrijpelijk schijnen en die gebruikt worden zonder de betekenis ervan te verklaren. Andere uitdrukkingen, die specifiek zijn in dat vakgebied, mogen slechts gebruikt worden als hun betekenis met behulp van primitieve termen is verklaard (gedefinieerd), waarbij gebruik gemaakt mag worden van reeds eerder verklaarde uitdrukkingen. Iets dergelijks geldt ten aanzien van uitspraken (stellingen): bij een bewijsvoering mag slechts gebruik gemaakt worden van primitieve uitspraken (axioma's) en reeds bewezen uitspraken. Dit neemt niet weg dat het niet altijd eenvoudig is om na te gaan of hier werkelijk aan voldaan is, omdat sommige uitspraken zo evident lijken dat men zelfs niet op het idee komt dat er nog iets bewezen zou moeten worden. De zuiver wiskundige is hierin kritischer dan de toepasser van de wiskunde, hetgeen zijn oorzaak vindt in het volgende.

Voor de zuiver wiskundige bestaat er, uiteraard slechts binnen zijn vakgebied, geen werkelijkheid tenzij die gedefinieerd is. Om tot betrouwbare uitspraken te komen is dan ook een preciese definiëring van de begrippen en een zorgvuldige bewijsvoering noodzakelijk, d.w.z. men dient nauwkeurig te onderzoeken aan welke voorwaarden bijvoorbeeld een funktie moet voldoen opdat bepaalde operaties zijn toegestaan. De toepasser van de wiskunde daarentegen houdt zich bezig met de kwantitatieve aspecten van een werkelijkheid die ook zonder hem bestaat, hij beschrijft als het ware een gebeuren, ook al betreft het een gedachtenexperiment. De funkties waarmee hij te maken krijgt zijn gewoonlijk "nette" funkties en geen pathologische uitzonderingsgevallen, reden waarom hij zich over allerlei voorwaarden

meestal niet zo veel zorgen maakt. Naast die beschrijving zoekt hij naar een verklaring van het gebeuren door relaties te leggen met reeds bekende verschijnselen, daarbij gebruik makend van modellen. Of het model en de daaruit afgeleide uitspraken goed zijn, d.w.z. de waargenomen of waar te nemen situatie goed beschrijven, wordt bepaald door een experiment. In dit verband past een citaat van Bertels en Nauta (ref. 5, pag. 103) die erop wijzen dat "kenmerkend voor de praktijk der toegepaste wiskunde is dat er met wiskundige grootheden "onexact wordt omgesprongen" -- althans in het oog van de "zuiver wiskundige". Dit komt omdat zowel de theoretische fysicus als de ingenieur het mathematisch arsenaal, dat ze gebruiken, veel specifiekere vullen, veel concreter duiden dan de abstract-structurele interpretatie die een mathematisch systeem, volgens de zuivere theorieën, hoort te hebben. Met andere woorden: voor de wetenschapper en de ingenieur zijn de mathematische systemen geen donk-objecten voor abstracte operaties maar modellen om te komen tot theoretische of praktische conclusies."

Het verschil tussen de zuiver wiskundige en de toepasser is in het voorgaande enigszins zwart-wit geschetst. De zuivere wiskunde is niet zo maar een spel van "definitie, stelling, bewijs"; de beoefenaar heeft ook concrete voorbeelden voor ogen wanneer hij definieert en naar uitspraken zoekt. De uitspraken kunnen ook veelal gekoncretiseerd worden, maar hij het op schrift stellen behoort de zuivere redenering, ontdaan van alle mogelijke voorstellingen, voorop te staan.

Wanneer wij nu komen tot deze studie over wachtproblemen, dan wil de schrijver zich stellen op het niveau van de operationele researcher, de fysikus of de ingenieur met de gebruikelijke wiskundige voorkennis en belangstelling voor de theoretische aspecten van het wachtgebeuren; theoretisch omdat gewerkt wordt met modellen die abstrakties (kunnen) zijn van een werkelijk gebeuren in een technische realiteit.

De opzet is een beschrijving c.q. verklaring te geven van een aantal wachtverschijnselen, daarbij geen begrippen of wiskundige afleidingen gebruikend van een abstraktie-niveau dat hoger is dan strikt noodzakelijk, uiteraard vanuit de gezichtshoek van de schrijver. Het gaat hier vooral om een "operationeel" inzicht in het wachtgebeuren, hetgeen voor de operationeel researcher hetzelfde is als het begrip fysisch inzicht voor de fysikus, het betekent dat naast een mathematische afleiding of een experiment er de behoefte is te voorzien, te begrijpen wat er aan de hand is en dit inzicht in te bouwen in de bewijsvoering. Vooral dit laatste is van belang, het lijkt niet erg zinvol eerst langdurig en moeilijk te rekenen om achteraf te zeggen dat de resultaten gemakkelijk zijn in te zien. Deze benadering van de problematiek zullen wij operationeel noemen. In paragraaf 1.2 zullen wij een voorbeeld geven om het voorgaande te illustreren.

De grens tussen de mathematische aanpak en de operationele is bij schrijvers uiteraard niet altijd even scherp. Midden tussen de Laplace-Stieltjes transformaties merkt Takács (ref. 53, pag. 34) bijvoorbeeld op dat de gemiddelde lengte van de bezette periode ook direkt bepaald kan worden; hij geeft dan een afleiding die even eenvoudig is als die van Cox en Smith (ref. 16, pag. 58), welke laatste te vinden is in par. 3.5 de formules (38) en (39).

Een mooi voorbeeld van een operationele aanpak is te vinden bij Coffman en Kleinrock (ref. 11) in hun analyse van een aantal time-sharing modellen (zie ook hoofdstuk 7). Voorts hebben Wolff (ref. 60) en Stidham (ref. 48 en 49) artikelen geschreven met een fraaie operationele aanpak. Stidham geeft daarbij ook nog strenge bewijzen om te laten zien dat het niet alleen eenvoudig maar ook goed is; deze bewijzen zijn echter niet gemakkelijk. De moeilijkheid schuilt vooral in het vinden van de voorwaarden waaronder bepaalde gemiddelden (en soms langs verschillende wegen berekende gemiddelden) leiden tot, al of niet dezelfde, verwachtingswaarden. Waar dit nodig is zullen wij deze moeilijkheden aanduiden en verwijzen naar meer fundamentele literatuur.

Deze operationele beschouwingen zijn echter min of meer verspreid. Wanneer wij trachten een operationele basis te leggen voor een aantal wachtproblemen dan is dit meer dan een bundeling van wat toegiften volgend uit een abstrakt mathematische beschouwing. De opzet is te laten zien dat een brede basis gelegd kan worden zonder al te grote abstrakties; tenslotte behoeft men het begrip Riemann-integraal ook niet te kennen om de inhoud van een parallellepipedum of het oppervlak van een ellips te bepalen.

Een operationele aanpak betekent niet dat de uitkomsten benaderingen zijn. Tenzij anders vermeld zijn alle uitkomsten exakte oplossingen binnen een gegeven probleemstelling, die zelf in zekere mate een abstraktie is van een technische realiteit.

Niet onvermeld mag hier blijven een werk van Newell (ref. 36), die de wachttijdtheorie weer met beide benen op de grond wil zetten, zij het dat het hem meer om een praktische dan om een operationele aanpak gaat. Newell is van mening dat de literatuur steeds meer groeit in de richting van "zoek een probleem bij een oplossing" in plaats van het omgekeerde. Wiskundigen werken voor hun eigen plezier en problemen die, mathematisch gezien, niet oplosbaar zijn worden opzij gezet. In de praktijk is er echter een enorme berg van problemen die niet elegant opgelost kunnen worden maar desondanks wel geanalyseerd moeten worden, aldus nog steeds Newell. Zijn "engineering approach" maakt gebruik van twee technieken "fluid approximations" en "diffusion approximations", gebaseerd op grafische methoden en elementaire analyse. Het gebruik van benaderingen wordt gemotiveerd door de gedachte dat realistische modellen zelden exakt opgelost kunnen worden en dat als een model een

gedeeltelijke representatie is van de werkelijkheid, het niet erg veel zin heeft dat model in alle exaktheid door te rekenen.

Als wij de operationele aanpak in een kader willen plaatsen dan is dat tussen deze "engineering approach" en de abstrakt mathematische. Een studie van deze aanpak, die exakte oplossingen geeft, maakt een latere verdieping in de abstracte literatuur gemakkelijker omdat "men dingen herkent", hetgeen een voorwaarde is voor een vruchtbare studie. De praktische lezer moge anderzijds ontdekken dat de werkelijkheid meestal ingewikkelder is dan de wachttijdtheoretische modellen, waardoor men waardering krijgt voor iedere poging om ruwe benaderingen te vinden in praktische situaties, waarvoor echter ook een operationeel inzicht nodig is.

Wat de te behandelen stof betreft, het volgende:

In de rest van deze inleiding wordt een aantal begrippen geïntroduceerd, die voor de wachttijdtheorie van belang zijn. In de hoofdstukken 2 t/m 6 komen wachtmodellen aan de orde, die steeds ruimer van opzet worden. In hoofdstuk 7 wordt een model geanalyseerd dat typisch is voor wachttijden in computers. In de hoofdstukken 8 en 9 wordt gebruik gemaakt van simulaties waarbij in het bijzonder de aandacht valt op het aangroeien van rijen en de relatie tussen model en werkelijkheid. In hoofdstuk 9 is dit gedaan voor een wachtproces met gekorrelde aankomsten. In het laatste hoofdstuk wordt tenslotte een overzicht gegeven van de behandelde stof, voorzien van commentaar. In het algemeen beperken wij ons tot het bepalen van verwachtingswaarden in stationaire situaties. Wanneer het echter op eenvoudige wijze mogelijk is, bijvoorbeeld door een beschrijving als Markov-proces, dan worden de kansverdelingen van sommige stochastische variabelen berekend (hoofdstukken 2, 4 en 6).

Resumerend kunnen twee bestaansredenen voor dit werk genoemd worden; het geven van een beschrijving gegrond op de behoefte de problemen operationeel te doorzien en het aantonen dat in heel veel situaties het niet nodig is met het zware geschut van de abstracte wiskunde te beginnen, d.w.z. dat het minder abstrakt kan dan gebruikelijk is.

Wij willen deze paragraaf beëindigen met een citaat van Foster (ref. 22): "The primary purpose (of stochastic modelling) is to gain insight into phenomena: it is not the proving of theorems that is important but the finding out about what is really going on. In a sense it is only after some result has become intuitively obvious that it becomes worthwhile proving it rigorously."

1.2 Enkele aspecten van de vernieuwingstheorie

In deze paragraaf wordt een voorbeeld behandeld als een illustratie van het verschil tussen een abstrakte en een operationele aanpak.

1.2.1 De abstrakte beschrijving

De hieronder gegeven beschrijving is een bijna letterlijke vertaling van enkele stukken uit hoofdstuk 1.6 van Cohen (ref. 12), die beschouwd mogen worden als gematigd abstrakt. De gebruikte notaties zijn van Cohen en kunnen verschillen met die welke wij zullen gebruiken.

$z_1, z_2, \dots$ stelt voor een reeks van onafhankelijk, niet-negatieve stochastische variabelen, waarbij $z_2, z_3, \dots$ dezelfde verdeling bezitten.

De verdelingsfuncties zijn de volgende

$$F_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P \{ z_1 < t \} \\ 0 \end{cases}, F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P \{ z_i < t \}, t > 0, i = 2, 3, \dots \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Ondersteld wordt

$$F_1(0+) = 0, F(0+) = 0,$$

terwijl de verdelingsfuncties continu van links worden beschouwd.

Stel verder

$$s_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, s_n \stackrel{\text{def}}{=} z_1 + \dots + z_n, n = 1, 2, \dots$$

Definitie: Het stochastische proces $\{ \nu_t, t \in [0, \infty) \}$ met

$$\nu_t \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ n : s_n < t \}, \nu_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

heet een algemeen vernieuwingsproces als $F_1(t)$ en $F(t)$ niet identiek zijn; als $F_1(t) \equiv F(t)$ is heet het proces een vernieuwingsproces; ν_t noemt men het aantal vernieuwingen in $[0, t)$.

Teneinde de betekenis van de term vernieuwing toe te lichten stellen we dat z_{n+1} de levensduur voorstelt van de $(n+1)^{\text{e}}$ gloeilamp die in een fitting gedraaid wordt zodra de n^{e} lamp kapot gaat. Als alle lampen dezelfde levensduurverdeling hebben en op tijdstip $t = 0$ een nieuwe lamp werd geïnstalleerd, dan is ν_t het aantal vervangingen gedurende het interval $[0, t)$ en $\{ \nu_t, t \in [0, \infty) \}$ een vernieuwingsproces. Als op $t = 0$ al een lamp funktioneerde dan is de verdeling van de tijd tot aan het uitvallen van deze lamp gewoonlijk anders dan de genoemde levensduurverdeling; $\{ \nu_t, t \in [0, \infty) \}$ is dan een algemeen vernieuwingsproces.

Voorts wordt de vernieuwingsfunctie $m(t)$, $t \geq 0$ gedefinieerd door

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} E \{ \nu_t \}, \quad t \geq 0;$$

de funktie stelt voor het gemiddelde aantal vernieuwingen in $[0, t)$. Berekening van $m(t)$ levert

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n P \{ \nu_t = n \} = \sum_{n=1}^{\infty} n [P \{ \nu_t \geq n \} - P \{ \nu_t \geq n+1 \}] = \sum_{n=1}^{\infty} P \{ \nu_t \geq n \} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_1(t) * F^{n*}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

waarin $F^{n*}(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) de n -voudige konvolutie van $F(t)$ met zichzelf voorstelt; hierbij is per definitie:

$$F^{0*}(t) = U_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Voor iedere gehele $m \geq 1$ geldt

$$\begin{aligned} m(t) &= F_1(t) * U_1(t) + F(t) + \dots + F^{(m-1)*}(t) * \\ &\quad + F^{m*}(t) * F_1(t) * F^{0*}(t) + \dots + F^{(m-1)*}(t) * \sum_{n=0}^{\infty} F^{(nm)*}(t), \end{aligned}$$

zodat voor $t > 0$

$$m(t) = F_1(t) * U_1(t) + F(t) + \dots + F^{(m-1)*}(t) * \int_0^t F^{m*}(t-\tau) dm(\tau)$$

waaruit met $m = 1$ de zogenaamde vernieuwingsvergelijking volgt

$$m(t) = F_1(t) + \int_0^t F(t-\tau) dm(\tau), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Het kan bewezen worden dat de vergelijking, beschouwd als een integraal vergelijking voor $m(t)$, een eenduidige niet afnemende oplossing heeft die gegeven is door (1).

Met de Laplace-Stieltjes transformatie

$$f_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} dF_1(t); \quad f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t), \quad \operatorname{Re} s \geq 0$$

vinden we dan uit (1) of (2):

$$\mu(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{f_1(s)}{1-f(s)}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (3)$$

Een algemeen vernieuwingsproces wordt stationair genoemd als

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} t dF(t) < \infty \quad \text{en} \quad F_1(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1-F(\tau)] d\tau, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Omdat

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1-F(t)}{\mu} dt = \frac{1}{\mu s} \{1 - f(s)\}, \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$$

volgt uit het voorgaande voor een stationair vernieuwingsproces

$$\mu(s) = \frac{1}{\mu s},$$

zodat

$$m(t) = t/\mu, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

De resterende levensduur

De stochastische variabele

$$\overset{\text{def}}{\zeta_t} = s_{v_{t+1}} - t, \quad t > 0, \quad (6)$$

wordt de resterende levensduur op tijdstip t genoemd, het is de tijd tussen t en de eerste vernieuwing daarna. Uit de definitie volgt

$$\{\zeta_t < \varsigma\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{s_n < t, t \leq s_{n+1} < t+\varsigma\}, \quad \varsigma > 0, \quad t > 0,$$

zodat voor $\varsigma > 0$

$$\begin{aligned} P\{\zeta_t < \varsigma\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t P\{t-u \leq z_{n+1} < t+\varsigma-u\} dP\{s_n < u\} = \\ &= F_1(t+\varsigma) - F_1(t) + \int_0^t \{F(t-u+\varsigma) - F(t-u)\} dm(u). \end{aligned}$$

Met de relatie (2) levert dit

$$\begin{aligned} P\{\zeta_t < \varsigma\} &= m(t+\varsigma) - \int_0^{t+\varsigma} F(t+\varsigma-u) dm(u) - m(t) + \int_0^t F(t+\varsigma-u) dm(u) = \\ &= \int_0^{t+\varsigma} \{1 - F(t+\varsigma-u)\} dm(u), \quad (\varsigma > 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Voor een stationair proces levert substitutie van $m(t) = t/\mu$:

$$P\{\zeta_t < \varsigma\} = \begin{cases} 0 & , (\varsigma \leq 0), \\ \frac{1}{\mu} \int_0^{\varsigma} \{1 - F(u)\} du, & (\varsigma > 0). \end{cases} \quad (8)$$

De gemiddelde resterende levensduur voor een stationair vernieuwingsproces is derhalve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_{y=0}^{\infty} y \{1-F(y)\} dy &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} y dy \int_{t=y}^{\infty} dF(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} dF(t) \int_0^t y dy = \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^{\infty} t^2 dF(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Deze duur is dus eindig als het tweede moment van de vernieuwingsverdeling $F(t)$ eindig is.

1.2.2 De operationele beschrijving

Wanneer we ons bezig houden met gebeurtenissen die in de loop van de tijd optreden dan veronderstellen wij dat er tijdstippen zijn aan te wijzen waaraan het predikaat "hier treedt een gebeurtenis op" kan worden toegekend. Bij gebeurtenissen kan men denken aan het binnenkomen van een klant in een wachtsysteem, het uitvallen van een machine, het kapotgaan van een lamp, enz.

Onder de afstand tussen het optreden van twee gebeurtenissen verstaan we het tijdsverschil tussen twee elkaar opvolgende gebeurtenissen; deze afstand zullen we vaak een levensduur noemen, in het bijzonder in die gevallen waarbij een gebeurtenis is het kapotgaan van een ding en het direct daarna vervangen door een nieuw exemplaar.

Aan deze toepassing denkend spreekt men van een vernieuwingsproces, waarbij dan in het bijzonder nog moet gelden dat de achtereenvolgende levensduren onafhankelijke trekkingen zijn uit eenzelfde verdeling, met de kumulatieve verdelingsfunctie $F(s)$ en, zo die bestaat, de kansdichtheid $f(s)$.

Stel dat wij geïnteresseerd zijn in het aantal gebeurtenissen, c.q. vernieuwingen in een tijdsinterval van de lengte τ dan kan het beginpunt van dit interval nog op verschillende tijdstippen gekozen worden. Nemen we het beginpunt $t = 0$, in een vernieuwingspunt, een punt waarin een gebeurtenis optreedt, dan spreken we vanaf $t = 0$ van een gewoon vernieuwingsproces (ook de naam Palmproces is gebruikelijk); wat voordien gebeurd is interesseert ons niet, de eerstvolgende gebeurtenis vindt gemiddeld plaats na een tijd μ , de verwachtingswaarde behorend bij de verdeling $F(s)$, die zowel voor de eerste als de daarop volgende levensduren geldt.

Kiezen wij het punt $t = 0$ volkomen willekeurig, onafhankelijk van het optreden van de gebeurtenissen in het vernieuwingsproces dat aan de gang is, dan noemen wij het proces vanaf $t = 0$ een stationair vernieuwingsproces. Uiteraard zijn er andere mogelijkheden om $t = 0$ te kiezen, we spreken dan van een algemeen vernieuwingsproces.

Wanneer van het beschouwde interval de lengte τ zeer groot is t.o.v. μ , terwijl bovendien de spreiding in de levensduren eindig verondersteld wordt, dan zullen veel vernieuwingspunten optreden in τ ; de preciese keuze van het punt $t = 0$ speelt dan geen rol omdat deze keuze alleen iets zegt over de eerste levensduur.

Stel dat voor een grote $\tau = T$ in het interval $\underline{n}(T) = n$ gebeurtenissen plaatsvinden, waarvan de eerste op tijdstip t_1 en de laatste op t_n . Tussen deze twee tijdstippen vinden we dan $n - 1$ levensduren. Als $T \rightarrow \infty$, dan zal ook $n \rightarrow \infty$, evenals t_n , zodat wegens de sterke wet van de grote aantallen geldt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t_n - t_1}{n - 1} = \mu, \text{ met kans 1.} \quad (10)$$

Daar t_1 onafhankelijk is van n zal t_1/n met toenemende T en dus met toenemende n , met kans 1 tot nul naderen. Voorts stellen we dat evenzo het tijdsverschil $T - t_n$, tussen de laatste gebeurtenis in het interval en het einde van het interval, relatief klein wordt t.o.v. T . Dit betekent dat, met kans 1, de vergelijking (10) geschreven mag worden als

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{\underline{n}(T)} = \mu, \text{ ofwel } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\underline{n}(T)}{T} = \frac{1}{\mu}. \quad (11)$$

Voor de verwachtingswaarde $E \{ \underline{n}(T) \}$ van het aantal vernieuwingen in T geldt dan:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \{ \underline{n}(T) \}}{T} = \frac{1}{\mu}. \quad (12)$$

Opmerking: In het algemeen is het niet juist van een stochastische variabele $\underline{x}(T)$ die met kans 1 nadert tot $1/\mu$, met toenemende T , te veronderstellen dat dan ook zijn verwachting $E \{ \underline{x}(T) \}$ tot $1/\mu$ nadert. Wanneer echter, zoals bij het vernieuwingsproces, de levensduren onafhankelijke trekkingen zijn is de genoemde veronderstelling juist (zie ref. 43, pag. 36 e.v.; ref. 44, pag. 191).

Het stationaire vernieuwingsproces

Zij voor een stationair vernieuwingsproces $\underline{n}_s(\tau)$ het aantal vernieuwingen in een interval dat begint op $t = 0$ en eindigt op $t = \tau$, waarbij τ onafhankelijk van de vernieuwingen is gekozen. Beschouw nu een interval van de lengte τ_1 , dat aansluit op het interval van de lengte τ .

Het beginpunt van het tweede interval ligt wel op het tijdstip $t = \tau$ maar dit tijdstip is verder even willekeurig, even toevallig t.o.v. de reeks gebeurtenissen als het tijdstip $t = 0$, hetgeen betekent dat tijdstip $t = \tau$ even goed beschouwd kan worden als het beginpunt van een stationair proces, d.w.z. dat voor het tweede interval, met de lengte τ_1 , het verwachte aantal vernieuwingen $E\{\underline{n}_s(\tau_1)\}$ bedraagt.

Tenslotte kunnen we nog beschouwen het interval dat de lengte $\tau + \tau_1$ heeft en begint in $t = 0$, met $E\{\underline{n}_s(\tau + \tau_1)\}$ verwachte vernieuwingen. Uit

$$E\{\underline{n}_s(\tau + \tau_1)\} = E\{\underline{n}_s(\tau)\} + E\{\underline{n}_s(\tau_1)\}$$

volgt dat $E\{\underline{n}_s(\tau)\}$ een lineaire functie is van τ . Stellen we dat het verwachte aantal gebeurtenissen in een interval van de lengte nul, gelijk is aan nul, dan geldt de relatie

$$E\{\underline{n}_s(\tau)\} = a\tau,$$

waarbij a is het verwachte aantal vernieuwingen per tijdseenheid, ook wel de intensiteit van het vernieuwingsproces genoemd.

Wegens de relatie (12) is $a = 1/\mu$, zodat voor het verwachte aantal vernieuwingen tot aan tijdstip t bij een stationair vernieuwingsproces geldt:

$$E\{\underline{n}_s(t)\} = t/\mu, \quad (t \geq 0). \quad (13)$$

De eerste levensduur is de tijd die verstrijkt tussen $t = 0$ en het optreden van de eerste gebeurtenis daarna. Bedenken we dat bij het stationaire proces het tijdstip $t = 0$ willekeurig gekozen is in de reeks van gebeurtenissen, dan kunnen we stellen dat het punt $t = 0$ ergens in een aan de gang zijnde levensduur valt. Van deze levensduur is reeds een tijd verstreken terwijl de resterende levensduur gelijk is aan wat wij de eerste levensduur noemden.

Het merkwaardige is dat de levensduur waarin het punt $t = 0$ valt niet een willekeurige, aselekte trekking is uit de verdeling $f(s)$. Dit hangt samen met het feit dat het punt $t = 0$ voorkeur heeft voor grote levensduren: de kans om in een levensduur van de lengte s te komen is niet alleen evenredig met de relatieve frekwentie waarmee deze levensduur voorkomt maar ook met de lengte van die duur. M.a.w. de kansdichtheid $\varphi(s)$ van de levensduren waarin bij toevallig prikken, het nulpunt terecht komt is niet $f(s)$ maar

$$\varphi(s) = \frac{s}{\mu} f(s), \quad \text{met } \mu = \int_0^{\infty} s f(s) ds. \quad (14)$$

Wanneer het nulpunt in de levensduur s valt is gemiddeld de helft daarvan verstreken; de verwachte rest-levensduur ofwel de eerste levensduur is derhalve

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} \frac{s}{2} \varphi(s) ds = \frac{1}{2\mu} \int_0^{\infty} s^2 f(s) ds = \frac{\mu_2}{2\mu} \quad (15)$$

welke duur eindig is als μ_2 , het tweede moment van $f(s)$, eindig is ($0 < \mu < \infty$).

De verdeling van de restlevensduur wordt als volgt bepaald:

Als het nulpunt valt in de duur s , dan is de plaats van dit punt willekeurig, ofwel homogeen verdeeld, d.w.z. dat de kans dat de restlevensduur s_1 ligt tussen x en $x + dx$ gelijk is aan

$$P \{ x < s_1 < x + dx \mid s \} = \frac{dx}{s}, \quad 0 \leq x < s, \\ = 0, \quad \text{elders.}$$

Voor de kansdichtheidsfunctie van de eerste levensduur geldt dan

$$f_1(x) = \int_{s=x}^{\infty} \frac{1}{s} \cdot \varphi(s) ds = \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} f(s) ds = \frac{1}{\mu} \{ 1 - F(x) \}; \quad (16)$$

hierin is $F(x)$ de kumulatieve verdelingsfunctie behorend bij $f(x)$. De verwachte restlevensduur kan uiteraard ook met (16) bepaald worden:

$$E(s_1) = \int_0^{\infty} x f_1(x) dx,$$

hetgeen tot het resultaat (15) leidt.

Opmerkingen:

1. Als de stochastische variabele x een bepaalde waarde a kan aannemen met een kans p die groter is dan nul, dan bestaat in feite de kansdichtheidsfunctie $f(x)$ niet voor $x = a$. Het is dan gebruikelijk met de kumulatieve verdelingsfunctie $F(x)$ te werken (die links-kontinu wordt verondersteld): $F(a + 0) - F(a) = p$, ofwel $dF(x) = p$ voor $x = a$. Formeel levert het geen moeilijkheden als $f(a) = \infty$ gesteld wordt met dien verstande dat dan moet gelden:

$$\int_{a-0}^{a+0} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{a-\Delta}^{a+\Delta} f(x) dx = p.$$

2. Uiteraard geldt de relatie (15) niet slechts voor een willekeurig gekozen nulpunt in de tijd, zoals bij het stationaire vernieuwingsproces, maar voor ieder tijdstip dat onafhankelijk van de vernieuwingen wordt gekozen.

De vernieuwingsvergelijking

In het stationaire geval was $E \{ \underline{n}_s(t) \}$ het verwachte aantal vernieuwingen tot aan tijdstip t . Bij een gewoon vernieuwingsproces zij dit aantal $E \{ \underline{n}_g(t) \}$ en bij een algemeen proces $E \{ \underline{n}(t) \}$; voor de grootte hiervan geldt een relatie die bekend staat als de vernieuwingsvergelijking.

Een algemeen vernieuwingsproces is vanaf het eerste vernieuwingspunt te beschouwen als een gewoon vernieuwingsproces. Als de afstand tot de eerste vernieuwing t_1 bedraagt dan geldt voor het aantal vernieuwingen $\underline{n}(t)$ tot aan tijdstip t :

$$E \{ \underline{n}(t) | t_1 \geq t \} = 0$$

$$E \{ \underline{n}(t) | t_1 < t \} = 1 + \int_{x=0}^t E \{ \underline{n}_g(t-x) \} \frac{dF_1(x)}{F_1(t)},$$

hetgeen leidt tot de vernieuwingsvergelijking

$$E \{ \underline{n}(t) \} = F_1(t) + \int_{x=0}^t E \{ \underline{n}_g(t-x) \} dF_1(x); \quad (17)$$

hierin is

$$\frac{dF_1(x)}{F_1(t)} = f_1(x)dx / \int_0^t f_1(x)dx, \quad (0 \leq x < t),$$

de kans dat de eerste vernieuwing ligt in het interval $[x, x+dx)$ onder de voorwaarde dat de vernieuwing ligt in het interval $[0, t)$.

De vernieuwingsvergelijking (17) kan ook anders geschreven worden. Voor een gewoon vernieuwingsproces is $F_1(t) = F(t)$, zodat uit (17) volgt

$$E \{ \underline{n}(t) \} = F_1(t) + \int_{x=0}^t dF_1(x) \left[F(t-x) + \int_{\tau=0}^{t-x} E \{ \underline{n}_g(t-x-\tau) \} dF(\tau) \right].$$

Partiële integratie van de eerste integraal en omkering van de integratie volgorde van de tweede levert, nogmaals met (17):

$$E \{ \underline{n}(t) \} = F_1(t) + \int_{\tau=0}^t E \{ \underline{n}(t-\tau) \} dF(\tau), \quad (18)$$

welke relatie ook in de vorm (2) geschreven kan worden.

Bij de afleiding van (18) werd de tussenstap gebruikt, verg. (17), van het aantal vernieuwingen in een gewoon vernieuwingsproces. Ook een korte directe afleiding is mogelijk. Wijzig het beschouwde vernieuwingsproces in zoverre dat de eerste en de tweede levensduur worden omgewisseld. Deze verwisseling heeft slechts invloed op de plaats van de eerste vernieuwing. Het gewijzigde proces, met een verwacht aantal vernieuwingen $E \{ \underline{n}'(t) \}$, is dan na de eerste vernieuwing te beschouwen als een algemeen vernieuwingsproces, zodat naar analogie van (17) geldt

$$E \{ \underline{n}'(t) \} = F(t) + \int_0^t E \{ \underline{n}(t-\tau) \} dF(\tau). \quad (19)$$

De tweede term in het rechterlid van (17), zowel als van (19), geeft het verwachte aantal vernieuwingen na een eventuele eerste in het beschouwde interval van het oorspronkelijke

proces, zowel als voor het gewijzigde proces (omdat de tweede en volgende vernieuwingen niet van plaats gewijzigd zijn). De tweede term in het rechterlid van (17) mag dus worden vervangen door die van (19), hetgeen direkt leidt tot de verg. (18).

1.3 Het wachtproces

Wat gebeurt er eigenlijk als we van wachten spreken? Er is een faciliteit waarvan klanten gebruik wensen te maken: een kassa in een supermarkt, een lift in een hotel, een pomp die benzine levert, een kruispunt dat gepasseerd moet worden, een arts die konsulten geeft, een machine waarop een bewerking moet plaatsvinden, enz.

De faciliteit noemen we een loket, datgene wat er moet gebeuren wordt een karwei genoemd en de benodigde tijd daarvoor de karweiduur. In plaats van klanten die met karweien komen, kunnen we ook spreken van binnenkomende karweien. Voorts spreekt men van groepsbehandling ("batchprocessing") als het loket verschillende klanten gelijktijdig kan helpen (zoals bij een lift of autobus).

Als een klant arriveert om van de faciliteit gebruik te maken behoeft het loket niet vrij te zijn. Is er een wachtgelegenheid dan kan de klant besluiten te blijven wachten totdat het loket voor hem beschikbaar is. De tijd die verloopt tussen de aankomst en het in bewerking nemen van het betreffende karwei noemen we de wachttijd. Het aantal klanten dat op een zeker ogenblik van de wachtgelegenheid gebruik maakt vormt de wachtrij. Wanneer het loket een karwei beëindigt kan uit de wachtrij een nieuw karwei gekozen worden; welk karwei dat is hangt af van de rijdiscipline, zijnde de regel die de keuze bepaalt.

In het voorgaande zijn drie zaken genoemd die een belangrijke rol spelen, te weten de aankomsten, de karweiduren en de rijdiscipline; we zullen hier nader op ingaan.

1.3.1 *Het proces van aankomsten*

De wijze waarop de klanten arriveren, het zgn. aankomstproces, moet van geval tot geval worden bekeken. De aankomsten kunnen volkomen deterministisch zijn, zoals dit het geval is als de aankomsten gepland zijn en de planning ook aangehouden kan worden. Een in de theorie veel gebruikt type van aankomsten is dat volgens het Poissonproces (zie par. 1.4.1),

waarbij de kans dat een aankomst plaatsvindt in het komende tijdje Δt onafhankelijk is van de tijd die verstreken is sinds de vorige aankomst.

Gezien dit geheugenverlies voor het verleden geeft het Poissonproces een type van aankomsten dat plezierig rekent. Dit is echter niet het enige bestaansrecht van dit proces. Veel aankomsten zijn inderdaad onafhankelijk van elkaar en kunnen worden beschreven als zuiver toevallig. Vaak is dit een goede benadering als de klanten komen uit een grote populatie terwijl ze elkaar niet beïnvloeden.

Uiteraard zijn er veel verschillende aankomstprocessen mogelijk, de statistische eigenschappen kunnen geheel verschillend zijn. Zo kan het verwachte aantal klanten dat per tijdseenheid arriveert als functie van de tijd nogal variëren; dit is het geval in situaties met piekuren, seizoenseffecten, trendeffecten, e.d. Voorts kunnen de klanten in groepen arriveren ("batch arrivals"), de aankomsten kunnen gekorreleerd zijn met bepaalde toestanden of gebeurtenissen enz. Het is niet de bedoeling, zo dat al mogelijk zou zijn, hier een compleet overzicht te geven van alle facetten van het aankomstproces.

We geven nog twee voorbeelden over de mogelijke invloed van de wachtrij op het aankomstproces. De wachtrij kan afstotend werken: als een klant ziet dat er een lange rij voor het loket staat kan hij besluiten zich niet in de rij aan te sluiten, de aspirant klant is geen binnenkomende klant geworden. Dit treedt onder andere ook op als er meer loketten zijn, zonder dat er een wachtgelegenheid is, een situatie op een parkeerterrein: iedere parkeerplaats is een loket; zijn alle loketten bezet dan is er geen gelegenheid te wachten tot een loket vrijkomt. Er zijn ook situaties denkbaar dat een rij aantrekkelijk werkt. In de tijd van de distributie tijdens de tweede wereldoorlog was een rij vaak de indicatie dat "er iets te halen" was, een reden om ook in de rij te gaan staan.

Tenslotte merken wij op dat de tijdsduur tussen twee aankomsten een aankomstinterval wordt genoemd, of ook wel een tussenaankomsttijd.

1.3.2 *De verdeling van de karweiduren*

Het kan gebeuren dat alle binnenkomende karweien hetzelfde zijn, zodat we kunnen spreken van een vaste, konstante, karweiduur. Dit geval doet zich ook voor wanneer een karwei wordt gesplitst in subkarweien met een vaste duur, zoals bij een lopende band die te beschouwen is als een serieschakeling van loketten. Daarnaast zijn uiteraard vele andere verdelingen mogelijk, waarvan we de negatief-exponentiële verdeling (zie par. 1.4.1) willen noemen. Evenals het aankomstproces kan ook het verwerken van de karweien gekorreleerd zijn met bepaalde toestanden; tijdens piekuren kunnen extra loketten worden ingeschakeld, er kan worden overgewerkt ofwel er wordt werk uitbesteed.

1.3.3 De rijdiscipline

Een veel gebruikte regel om uit de wachtrij het volgende karwei te kiezen is de FIFO regel (first in, first out). Degene die het eerst aangekomen is wordt het eerst geholpen; de klanten stellen zich netjes op in de wachtrij in volgorde van binnenkomst. Wanneer er meer loketten zijn, met één gemeenschappelijke wachtrij, behoeft dit niet te betekenen dat de eerste klant ook het eerst het loket verlaat, hij kan een lang karwei hebben waardoor de volgende klant bij een ander loket toch eerder klaar is.

Een andere discipline is die waarbij de karweien bij binnenkomst in een prioriteitsklasse worden ingedeeld, bijvoorbeeld lange en korte karweien, belangrijke of onbelangrijke. Een karwei van een lagere klasse komt pas aan de beurt als er geen karweien van een hogere klasse meer zijn; binnen een klasse kan de FIFO regel worden gebruikt. De voorrang kan zover gaan dat een karwei wordt onderbroken als een karwei van hogere prioriteit binnenkomt, we spreken dan van absolute prioriteiten. Mag het onderhanden zijnde karwei worden afgemaakt dan wordt gesproken van relatieve prioriteiten.

De prioriteitsregel kan ook dynamisch zijn, d.w.z. dat steeds als het loket vrijkomt beslist wordt welk karwei uit de wachtrij op dat ogenblik het meest urgent is.

Voorts kan het laatst binnengekomen karwei het eerst geholpen worden: LIFO (last in, first out). Dit kan zich voordoen als de karweien als orders op elkaar gestapeld worden, terwijl het bovenste van de stapel het eerst in behandeling wordt genomen.

In het hoofdstuk "Een voorbeeld van time-sharing" wordt de round-robin discipline besproken die aan korte karweien voorrang geeft, zonder dat vooraf het karwei in een prioriteitsklasse ingedeeld behoeft te worden.

1.4 Enkele achtergronden

In deze paragraaf worden volledigheidshalve eerst enige bekende facetten behandeld van het Poissonproces, dat een belangrijke rol speelt in de wachttijdtheorie. Vervolgens komen enkele wetmatigheden aan de orde die voor een operationele beschrijving van fundamentele betekenis zijn.

1.4.1 Het Poissonproces

Het Poissonproces is een vernieuwingsproces waarbij de gebeurtenissen zuiver toevallig optreden. In het volgende wordt toegelicht wat daaronder wordt verstaan.

Onderzocht wordt het optreden van een gebeurtenis G in een interval van de lengte Δt , waarbij we spreken van een Poissonproces als Δt zo klein gekozen kan worden dat de kans op het optreden van G gelijk is aan $\lambda \Delta t$ (plus termen die verwaarloosbaar klein zijn), terwijl de kans dat G meer dan eenmaal optreedt in Δt te verwaarlozen is; hierbij wordt opgemerkt dat de evenredigheidsconstante λ onafhankelijk is van het aantal gebeurtenissen en de plaats daarvan, vóór het interval Δt .

Geven we met $P_n(t)$ aan de kans dat G in een eindig interval met lengte t precies n maal optreedt, dan geldt voor $n > 0$, bij een kleine verlenging Δt van genoemd interval:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_{n-1}(t) \lambda \Delta t; \quad (20)$$

de n gebeurtenissen in $t + \Delta t$ kunnen, behoudens een verwaarloosbare kans, immers slechts op twee, elkaar uitsluitende, manieren gerealiseerd worden:

n malen in t en nul malen in Δt ,

$n-1$ malen in t en éénmaal in Δt .

Opmerking: Noemen wij het beginpunt van het interval, met lengte t , het tijdstip nul dan kunnen we ook stellen dat $P_n(t)$ de kans is dat tot aan tijdstip t de gebeurtenis n malen optreedt.

Door de limietovergang $\Delta t \rightarrow 0$ gaat (20) over in

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t). \quad (21)$$

Voor $n = 0$ is maar één realisatie mogelijk, hetgeen leidt tot

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \quad (22)$$

waaruit volgt, met gebruikmaking van $P_0(0) = 1$,

$$P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

hetgeen, met $P_1(0) = 0$, in (21) gesubstitueerd leidt tot

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Op deze wijze doorgaand wordt gevonden

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \geq 0. \quad (23)$$

De afstand tot de eerstvolgende gebeurtenis is hierbij negatief-exponentieel verdeeld. Immers de kans dat de eerstvolgende gebeurtenis, van $t = 0$ af gerekend, valt na het tijdstip t bedraagt $P_0(t)$, hetgeen betekent dat de kumulatieve verdeling van de genoemde afstand gelijk is aan

$$F(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

(24)

$$\text{zodat } f(t) = \frac{dF}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Dit resultaat is onafhankelijk van het al of niet optreden van G voor of op het tijdstip $t = 0$, d.w.z. dat de vergl. (24) tevens de verdeling geeft van de afstand tussen het optreden van twee gebeurtenissen. Noemen we deze afstand een levensduur (c.q. vernieuwingsduur of intergeneratieinterval) dan is de verdeling van de levensduren identiek met de verdeling van levensduren waarvan reeds een bepaalde tijd is verstreken, kortweg de verdeling van de restlevensduren genoemd.

Het Poissonproces is derhalve, volgens par. 1.2.2, een vernieuwingsproces dat zowel gewoon als stationair is omdat voor de kansdichtheidsfuncties $f(t)$ en $f_1(t)$ geldt:

$$f_1(t) = f(t) \quad \text{en} \quad f_1(t) = \lambda \{1 - F(x)\},$$

hetgeen met de vergelijking (24) direkt te kontroleren is.

Opmerking: Teneinde de notatie, gebruikt in par. 1.2.2, te vereenvoudigen zal veelal de verwachtingswaarde $E\{x\}$ aangegeven worden met $\bar{x}$.

De variantie van x , te weten de waarde $\bar{x}^2 - \bar{x}^2$, wordt aangegeven met σ_x^2 .

Uit (23) en (24) volgen de verwachtingswaarden voor

1) het aantal gebeurtenissen in een tijdsinterval van de lengte t :

$$\bar{n}(t) \equiv E\{n(t)\} = \lambda t, \quad \text{met de bijbehorende variantie } \sigma_n^2(t) = \lambda t = \bar{n}(t), \quad (25)$$

2) de levensduur (c.q. de restlevensduur):

$$\bar{s} \equiv E(s) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{met } \sigma_s^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \bar{s}^2.$$

Dat het Poissonproces vaak een goede beschrijving geeft van het optreden van gebeurtenissen vindt zijn oorzaak in het volgende. Wanneer we N vernieuwingsprocessen, ieder met een eigen levensduurverdeling, superponeren dan verkrijgen we een proces, waarvan de vernieuwingen die van alle samenstellende processen zijn, dat onder betrekkelijk zwakke voorwaar-

den nadert tot een Poissonproces als $N \rightarrow \infty$. Dit geldt als de gemiddelde levensduren van de individuele vernieuwingsprocessen naar oneindig naderen terwijl de gemiddelde levensduur van het proces dat door de superpositie ontstaat eindig is. Voorts moet de kans dat in een eindig interval een vernieuwing van hetzelfde individuele proces meer dan eenmaal optreedt, tot nul naderen. Vrij vertaald betekent dit voor de aankomsten van klanten voor een loket, dat het aankomstproces als een Poissonproces is te beschouwen als de klanten uit een grote populatie komen en onafhankelijk van elkaar naar het loket gaan, terwijl de kans dat in de te beschouwen tijd dezelfde klant meer dan éénmaal komt te verwaarlozen is.

De gedachtengang, die oorspronkelijk van Palm afkomstig is, verloopt als volgt (ref. 20, pag. 355). Stel we superponeren N stationaire vernieuwingsprocessen met gemiddelden μ_i ($i = 1, \dots, N$) en kumulatieve verdelingen $F_{1i}(s)$, voor de eerste levensduur, en $F_i(s)$ voor de volgende levensduren, dan geldt, wegens de stationariteit

$$F_{1i}(x) = \frac{1}{\mu_i} \int_0^x \{1 - F_i(s)\} ds.$$

Zij nu $x \ll \mu_i$ dan zal $F_i(x) \ll 1$ zijn, zodat bij benadering geldt:

$$F_{1i}(x) \approx x/\mu_i \approx 1 - e^{-x/\mu_i}.$$

De kans $P_0(t)$ dat we, van tijdstip nul gerekend, geen enkel vernieuwingspunt vinden van alle processen tot aan tijdstip t is

$$P_0(t) = \prod_{i=1}^N \{1 - F_{1i}(t)\} \approx e^{-\lambda t}, \quad (26)$$

waarin

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_i}.$$

De eerste levensduur van het "superproces" dat door de superpositie ontstaat is dus negatief-exponentieel verdeeld met als verwachtingswaarde $1/\lambda$. Als de eerste vernieuwing een vernieuwing is uit proces k en plaatsvindt op tijdstip t_1 dan zijn alle processen, met uitzondering van proces k , nog als stationair te beschouwen vanaf t_1 , zodat bovenstaande beschouwing ook vanaf t_1 praktisch nog geldt als N voldoende groot is, mits het proces k voorlopig niet meer bijdraagt in de vernieuwingen en t_1 klein is t.o.v. μ_i . Derhalve geldt dezelfde verdeling voor de volgende levensduur van het superproces. Het superproces is daarom te beschouwen als een Poissonproces, mits de tijd waarover we het superproces onderzoeken maar klein blijft t.o.v. μ_i ($i = 1, \dots, N$); deze tijd mag echter wel groot zijn t.o.v. $1/\lambda$ mits $N \rightarrow \infty$.

1.4.2 Het theorema $L = \lambda W$

Als in een wachtsysteem, dat bestaat uit één of meer loketten en wachtgelegenheden, het verwachte aantal aanwezige klanten L is, $\lambda = 1/\lambda$ de verwachte tijd tussen twee aankomsten en W de verwachte verblijftijd in het systeem, dan geldt onder zeer ruime voorwaarden de relatie

$$L = \lambda W. \quad (27)$$

Morse (ref. 34, pag. 75) heeft deze relatie voor een aantal speciale wachtprocessen bewezen. Little (ref. 33) heeft een zeer algemeen bewijs gegeven, waarvan hij zelf later zegt: "the author must be congratulated for the rigor of his presentation, but he might have explained the ideas a little more"; deze uitspraak vermeldt Jewell (ref. 25), die een eenvoudiger bewijs geeft. Over de eisen waaraan voldaan moet zijn opdat de grootheden L en W bestaan wordt later nog een opmerking gemaakt; er zijn geen speciale eisen voor het aantal loketten of de rijdiscipline. Het begrip wachtsysteem is zeer ruim, het kan ook een deelsysteem zijn van een groter geheel, kortom het systeem is iets waar klanten binnengaan en na enige tijd weer uitkomen.

Wat de definitie van L betreft nog het volgende. Enerzijds vindt men in de literatuur, bijvoorbeeld bij Little, L gedefinieerd als "expected number of customers in the system at a random instant of time", anderzijds, bijvoorbeeld bij Stidham (ref. 49) als "limiting time average number of customers". Met de laatste definitie is

$$L = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \underline{n}(t) dt,$$

als $\underline{n}(t)$ is het aantal klanten in het systeem op het tijdstip t . In feite is L in deze definitie nog een stochastische variabele; wij nemen echter aan (ref. 49) dat als $\underline{n}(t)$ zich stationair gedraagt, deze limiet bestaat onafhankelijk van de toevallige realisaties van het stochastisch proces $\underline{n}(t)$ en met kans 1 gelijk is aan de L zoals die door Little is gedefinieerd.

Het bewijs van Little of Jewell van de relatie (27) zullen we hier niet geven. Wel is de relatie gemakkelijk als volgt in te zien:

Beschouw de realisatie van een bezette periode van de lengte $\underline{T} = T$, waarin $\underline{N} = N$ klanten worden afgehandeld, d.w.z. dat de eerste van deze N klanten het systeem leeg aantreft terwijl een tijd T later, na het vertrek van de N^e klant, het systeem voor het eerst weer leeg is. De doorlooptijd (= verblijftijd in het systeem) van klant i zij $\underline{W}_i$ ($i = 1, \dots, N$). De lengte van de bezette periode zal in het algemeen kleiner zijn dan de som van de doorlooptijden, omdat de doorlooptijds-intervallen overlappend zijn als er meer dan één klant in het

systeem is. Het aantal klanten in het systeem op een bepaald tijdstip is gelijk aan het aantal overlappingsen, zodat het gemiddelde aantal klanten ($\underline{L}_b$) in het systeem over de beschouwde periode bedraagt

$$\underline{L}_b = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \underline{w}_i. \quad (28)$$

Als de bezette periode wordt gevolgd door een lege periode van de lengte $t = t$, dan is het gemiddelde aantal aanwezige klanten $\underline{L}$, over de gehele cyclusduur $T_c = T + t$, gelijk aan

$$\underline{L} = \frac{T}{T_c} \underline{L}_b = \frac{1}{T_c} \sum_{i=1}^N \underline{w}_i = \underline{W}/a_c,$$

waarbij $a_c = T_c/N$ het gemiddelde is van precies N aankomstintervallen, terwijl

$$\underline{W} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{w}_i,$$

de gemiddelde doorlooptijd geeft van de N klanten.

De aankomstintervallen zijn individueel bedoeld; komt een groepje klanten gelijktijdig binnen een tijd u na de voorgaande aankomst dan geldt dit als één interval van de lengte u en $g-1$ intervallen van de lengte nul als g de grootte van de groep is.

Eenzelfde beschouwing kan worden opgezet voor een groot aantal cycli; $\underline{L}$ is dan een gemiddelde over een zeer grote tijd, terwijl a_c en $\underline{W}$ dan gemiddelden zijn over grote aantallen van respectievelijk aankomstintervallen en doorlooptijden. Indien het aantal cycli tot oneindig nadert gaan de gemiddelden met kans 1 over in verwachtingswaarden:

$$L = W/a,$$

zodat met $\lambda = 1/a$, de relatie (27) wordt gevonden.

Essentieel in de voorgaande beschouwing, die leidt tot de vergelijking (28), is dat er een N en bijbehorende T bestaat, d.w.z. dat er een tijdsinterval $(0, T)$ is aan te wijzen waarbinnen N , elkaar al of niet overlappende, doorlooptijdsintervallen zijn aan te geven; alle andere doorlooptijdsintervallen die niet tot dit N -tal behoren, eindigen voor of op het tijdstip nul of beginnen op of na het tijdstip T . Anders gezegd: er moeten tijdstippen zijn aan te wijzen waarop het systeem leeg is. Strikt genomen is deze eis niet nodig, er mag een "randeffect" zijn in de vorm van een aantal klanten dat op tijdstip nul al aanwezig is, of op T nog aanwezig is, mits de aanwezigheid van deze klanten op de berekening van de gemiddelden over de grote tijd T geen merkbare invloed heeft. Het is mogelijk, zie ref. 49 van Stidham, aankomstprocessen te konstrueren waarbij dit randeffect niet uitsterft maar ook bij toenemende T van even grote invloed blijft; de verwachtingen λ en W behoeven dan niet te

bestaan, hoewel L wel kan bestaan en eindig kan zijn. Deze pathologische aankomstprocessen zullen wij verder niet beschouwen.

Nog een opmerking moet hierbij worden gemaakt. Verondersteld werd van enige stochastische variabelen dat gemiddelde waarden naderen tot verwachtingswaarden als het "experiment" maar voldoende groot is. Als bijvoorbeeld de aankomstintervallen onafhankelijke trekkingen zijn uit eenzelfde verdeling dan is genoemde veronderstelling juist wegens de wet van de grote aantallen. De doorlooptijd van een klant is echter sterk afhankelijk van het aantal klanten in het systeem, de klanten moeten in het algemeen immers op elkaar wachten hetgeen betekent dat de doorlooptijden zeker niet te beschouwen zijn als onafhankelijke trekkingen uit een verdeling.

Als een dergelijke afhankelijkheid bestaat (eventueel ook voor aankomst intervallen of karweiduren) behoeft dat nog geen bezwaar te zijn mits het gehele wachtsysteem met zekerheid op enig toekomstig tijdstip, d.w.z. op de lange duur vele malen, de gelegenheid krijgt om "opnieuw" te beginnen, bijvoorbeeld met een leeg loket en een aankomstproces zowel als een karweiduurproces dat weer opnieuw start.

Om dit toe te lichten met een simpel voorbeeld: Er zijn twee verdelingen met verwachtingswaarden van 10 en 20. Een trekking van de stochastische variabele x komt nu als volgt tot stand. Met gelijke kansen wordt eerst een verdeling gekozen en vervolgens wordt uit die verdeling de waarde van x getrokken. De verwachtingswaarde van x is dan 15. Kiezen we maar eenmaal de verdeling waarna we daaruit vele malen een trekking doen dan zal het experiment een gemiddelde waarde opleveren die óf ongeveer 10 is óf ongeveer 20. Pas als we vele malen opnieuw beginnen met de keuze van een verdeling zal het gemiddelde over alle experimenten naderen tot 15.

Aan het slot van deze paragraaf kunnen wij opmerken dat er een ware lawine van publikaties over $L = \lambda W$ is verschenen met mooie titels als: "A proof of $L = \lambda W$, A simple proof of, A simpler proof of, A new proof of, A last word on" ; zie bijvoorbeeld de literaturopgave bij ref. 49.

1.4.3 Het theorema $K = N$

Het gebeuren in het wachtsysteem van par. 1.4.2 kan als volgt worden beschreven. Er zijn tijdstippen waarop de toestand, gedefinieerd door het aantal klanten in het systeem, verandert: door een aankomst neemt het aantal klanten toe met één, terwijl door een vertrek

het aantal met één afneemt. Beschouwen we een bezette periode die begint met een aankomst op $t = 0$ en eindigt in toestand nul op $t = T$.

Tegenover iedere overgang van toestand j naar $j + 1$ staat een overgang van $j + 1$ naar j (en omgekeerd), omdat het systeem tenslotte weer in zijn begintoestand terugkeert. Het kan ook zo gesteld worden: als het a maal voorkomt dat een binnenkomende klant j klanten aantreft, dan zal het ook a maal voorkomen dat een vertrekkende klant j klanten achterlaat. Als aan de voorwaarden, genoemd in 1.4.2, voldaan is zal de frekwentieverdeling van het aantal klanten dat een binnenkomende klant dus aantreft gelijk zijn aan de frekwentieverdeling van het aantal dat een vertrekkende klant achter zich laat. Aangezien het bovenstaande geldt voor iedere bezette periode kan het begrip frekwentieverdeling, dat betrekking heeft op een realisatie, worden vervangen door kansverdeling.

In het bijzonder geldt voor de verwachtingswaarden

$$K = N, \quad (29)$$

het verwachte aantal dat achterblijft als een klant vertrekt is gelijk aan het verwachte aantal dat aangetroffen wordt als een klant arriveert.

In het voorgaande werd stilzwijgend verondersteld dat de aankomsten zowel als de vertrekken individueel plaatsvinden. Bij groepsaankomsten kan het binnenkomen van een groep worden opgevat als het snel na elkaar arriveren van enige klanten, waarbij het aantal klanten dat iemand aantreft dan gelijk is aan het aantal klanten dat zijn groep aantrof plus het aantal van zijn groep dat voor hem wordt afgehandeld als we aan een FIFO-rijdiscipline denken; voor de vertrekken bij groepsbehandeling geldt een analoge individuele beschouwing. Wordt de arriverende groep ook als groep afgehandeld dan kan de groep als één klant worden beschouwd.

Zijn de individuele aankomsten volgens een Poissonproces dan komen de klanten volkomen willekeurig binnen, hetgeen betekent dat de verwachtingswaarde N van het aantal aangetroffen klanten gelijk is aan de verwachting L van het aantal aanwezige klanten in het systeem op een willekeurig gekozen tijdstip (zie par. 1.4.2). Voor een wachtsysteem met Poisson-aankomsten geldt derhalve

$$L = K = N. \quad (30)$$

1.4.4 De prikmethode

Over de verdeling van de resterende levensduur, ook wel restlevensduur of eerste levensduur genoemd, werd in par. 1.2.2 reeds gesproken bij de behandeling van het stationaire vernieu-

wingsproces. Wij willen in het bijzonder nog wijzen op het grote belang van formule (15); toepassingen van deze formule, kortweg de prikmethode genoemd, zijn steeds weer te vinden in situaties waar een willekeurig arriverende klant of toeschouwer prikt in een reeks van aansluitende intervallen, levensduren, karweiduren, lengtes van bezette perioden of zelfs groepen van klanten (zoals in hoofdstuk 5).

Wat de naam "prikmethode" betreft het volgende. Wanneer men met een speld dwars door een boek prikt en de gemiddelde lengte van de geprikte woorden bepaald, stemt deze lengte niet overeen met de waarde die men verkrijgt als van de woorden uit het boek een aselekte steekproef wordt genomen. Dit bekende verschijnsel berust erop dat lange woorden een grotere kans hebben om geprikt te worden dan de korte, zodat er geen sprake is van een aselekt gekozen steekproef.

Eén van de eerste toepassingen van deze methode in de wachttijdtheorie is die van Cobham in 1954 (zie ref. 9 en paragraaf 3.6).

HOOFDSTUK 2

WACHTPROBLEMEN VAN HET TYPE M/M/S

2.1 Algemene aanpak

Wanneer een enkel loket niet in staat is alle binnenkomende karweien te verwerken dan kan een aantal loketten naast elkaar geplaatst worden met, bijvoorbeeld, een gemeenschappelijke wachtrij. Het geheel van loket(ten) en wachtrij(en) noemen we een systeem. Wordt de toestand waarin het systeem verkeert bepaald door het aantal karweien dat erin aanwezig is, dan zal het systeem in de loop der tijd een reeks toestanden doorlopen die een stochastisch karakter heeft. Zij gegeven dat het systeem op tijdstip t in toestand n is; wij kunnen nu vragen naar de kans P dat het systeem op tijdstip $t + T$ in toestand m is. Dit is een voorwaardelijke kans, die in het algemeen afhankelijk is van t , T , n , m en de tijd τ dat het systeem reeds in toestand n is, terwijl voorts de reeds doorlopen reeks van toestanden een rol zou kunnen spelen.

Als voor het toekomstige stochastische gebeuren alleen kennis van de huidige toestand van belang is en het verleden irrelevant is, spreken we van een Markovproces; de bovenbedoelde kans is dan slechts een funktie van T , n en m : $P = P_{nm}(T)$.

Indien de aankomsten zijn volgens een Poissonproces en de karweiduren negatief-exponentieel verdeeld, dan hebben we bijvoorbeeld deze situatie; de kans dat in Δt een klant arriveert bedraagt $\lambda \Delta t$, terwijl de kans op een vertrek uit een bezet loket $\mu \Delta t$ bedraagt. Meer algemeen mogen de parameters λ en μ van het aankomstproces en het vertrekproces funkties van n zijn; zij blijven echter wel onafhankelijk van t : de kans dat een klant het systeem binnenkomt of verlaat in een tijdje Δt is $\lambda_n \Delta t$, respektievelijk $\mu_n \Delta t$, waarbij Δt zo gekozen kan worden dat de kans op meer dan één aankomst, of vertrek, verwaarloosbaar klein is, evenals de kans op een aankomst en een vertrek samen. Zijn er voorts S gelijke loketten naast elkaar met een gemeenschappelijke wachtrij dan spreekt men van een systeem van het type M/M/S, waarin de drie symbolen betrekking hebben op het proces van aankomsten, van karweiduren (c.q. vertrekken) en het aantal loketten.

Wat de kans $P_{nm}(T)$ betreft, nog het volgende. In het beschouwde wachtgebeuren dat een

Markov-karakter heeft, zal de afhankelijkheid van T verdwijnen als T voldoende groot is. Wij spreken dan van een stationaire kans. In het volgende wordt verondersteld dat deze stationariteit bestaat; op de voorwaarde waaronder dit het geval is, wordt teruggekommen in paragraaf 2.2. De afhankelijkheid van n zal ook met toenemende T verdwijnen mits alle toestanden van het systeem onderling bereikbaar zijn, m.a.w. als er geen fuiken zijn. (Een fuik is een deelverzameling van toestanden, die het systeem, eenmaal daar binnengekomen, niet meer kan verlaten). Voor een meer gedetailleerde behandeling van deze eigenschappen wordt verwezen naar ref. 7. Van de overgangskans $P_{nm}(T)$ wordt dus verondersteld dat hij onafhankelijk is van T en n als T voldoende groot is. Dit betekent dat informatie over de huidige toestand van geen belang is voor de bepaling van de kans op een toestand in een verre toekomst, anders gezegd, informatie uit een ver verleden is irrelevant voor de kans dat nu of op een toekomstig tijdstip een bepaalde toestand zal worden waargenomen. De stationaire, of invariante, kans wordt in het volgende aangeduid met het symbool P_m , het is de kans dat een willekeurig arriverende waarnemer of (volgens een Poissonproces binnenkomende) klant het systeem in toestand m aantreft ofwel het is de fraktie van de tijd dat het systeem in deze toestand is; hier vinden wij dezelfde twee aspecten terug als bij de definitie van L in paragraaf 1.4.2. Tot dit stationaire geval zullen we ons beperken omdat dit voor vele praktische problemen voldoende inzicht geeft; de eerste regel die Lee (ref. 31, pag.26) formuleert: "time-dependent solutions to queueing-models are either unobtainable or unmanageable", moge misschien iets te sterk zijn, maar speelt in deze beperking ook mee.

Het beschouwde systeem dat op tijdstip t in toestand n is, zal op tijdstip $t + \Delta t$ in een toestand $n + i$ zijn, waarbij i gelijk is aan $+1$, 0 of -1 (dit laatste alleen als $n \geq 1$ is). In Δt zijn er dus alleen overgangen naar toestanden die we direkte burens zouden kunnen noemen.

Gemiddeld genomen, over een grote tijd, of over een groot aantal verschillende realisaties van een systeem, zullen de overgangen tussen twee naburige toestanden even vaak voorkomen in beide richtingen, wanneer we stellen dat het systeem in een stationaire toestand is. De kans op de overgang $n \rightarrow n-1$ zal derhalve even groot zijn als de kans op de overgang $n-1 \rightarrow n$. De kans op de overgang $n \rightarrow n-1$ bedraagt $P_n \mu_n \Delta t$ zijnde het produkt van de kansen om in toestand n te zijn en de kans dat er een vertrek plaatsvindt vanuit toestand n . Evenzo is de kans op de overgang $n-1 \rightarrow n$ gelijk aan $P_{n-1} \lambda_{n-1} \Delta t$, zodat

$$P_n \mu_n \Delta t = P_{n-1} \lambda_{n-1} \Delta t, \quad (n \geq 1)$$

ofwel

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}, \quad (n \geq 1) \tag{1}$$

met

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1. \quad (2)$$

De tweede relatie zegt dat het systeem zich met zekerheid in een toestand bevindt.

De aanpak van problemen van het type M/M/S is nu de volgende. Door de probleemstelling zijn λ_n en μ_n bepaald. Met behulp van de verg. (1) worden de kansen P_n uitgedrukt in P_0 , waarna P_0 berekend wordt met de verg. (2). Hierna kan de verwachte of gemiddelde rijlengte, inclusief de klant (c.q. klanten) die geholpen wordt (c.q. worden), berekend worden met

$$E(\underline{n}) \equiv \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n. \quad (3)$$

Tot zover speelt de rijdiscipline geen rol, mits de discipline niet als criterium de karweiduur heeft. Er mogen prioriteitsklassen zijn als de kans $\mu_n \Delta t$, dat een klant het systeem verlaat, maar uitsluitend een functie is van het totaal aantal aanwezige klanten n en niet afhankelijk van welk karwei nu aan de beurt is, m.a.w. de μ_n 's (en daarmee de karweiduren) mogen niet afhankelijk zijn van de klasse waartoe een karwei behoort.

We geven nu een aantal voorbeelden van dit type.

2.2 Het enkele loket ($S = 1$)

2.2.1 Onbepaalde wachtgelegenheid

Het aankomstproces van de karweien zij een Poissonproces, terwijl de karweiduren negatief-exponentieel verdeeld zijn (aankomsten en karweiduren onafhankelijk van n). Dit betekent

$$\lambda_n = \lambda, \quad (n \geq 0),$$

$$\mu_n = \mu, \quad (n \geq 1),$$

$$\mu_0 = 0.$$

Uiteraard is μ_0 steeds gelijk aan nul.

Substitutie van λ en μ in (1) levert

$$P_n = \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_{n-2} = \dots = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \quad (n \geq 1).$$

Stellen we $\rho = \lambda/\mu$, dan geldt de relatie $P_n = \rho^n P_0$ ook voor $n = 0$. Sommatie van alle kansen geeft

$$P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1,$$

zodat geldt

$$P_0 = 1 - \rho, \quad P_n = \rho^n (1 - \rho), \quad (n \geq 0). \quad (4)$$

De kans P_0 dat op een willekeurig, aselekt gekozen, tijdstip het loket onbezet is geeft tevens de fraktie van de tijd dat het loket niet werkt; derhalve is $1 - P_0$ dus ρ de bezettingsgraad van het loket. Ook op een andere wijze is dit in te zien, door te bedenken dat $1/\lambda$ de gemiddelde afstand tussen twee aankomsten is en $1/\mu$ de gemiddelde karweiduur. Het verwachte aantal aankomsten in een tijd T is daarom λT ; de verwachte hoeveelheid binnenkomend werk in deze tijd houdt het loket gedurende de tijd $\lambda T/\mu$ bezet, zodat λ/μ de fraktie van de tijd geeft dat het loket bezet is.

Opmerking: We hebben de verwachting van het aantal karweien in T vermenigvuldigd met de verwachte duur van een karwei om de totale hoeveelheid binnenkomend werk te bepalen, dit is korrekt als de stochastische variabele die het aantal aankomsten in T geeft onafhankelijk is van de stochastische karweiduren (ref. 58, pag. 57).

De sommatie (2), die hier het sommeren van een meetkundige reeks betreft, levert slechts dan een waarde op voor P_0 en dus ook voor P_1, P_2 enz., als $\rho < 1$ is. Uiteraard moet ρ niet groter zijn dan één, dit zou immers betekenen dat gemiddeld meer werk binnenkomt dan het loket kan verwerken, zodat het voor de hand ligt dat een stationaire oplossing voor de kansen P_n dan niet bestaat: de verwachting is dat de wachtrij voortdurend blijft groeien. Dat ρ ook niet precies gelijk aan één mag zijn, wordt vaak als vreemd ervaren, er komt immers gemiddeld evenveel werk binnen als het loket kan verwerken. Dit moge waar zijn, het loket kan echter het tempo van het binnenkomende werk slechts dan bijhouden als het voortdurend aan het werk blijft, dus nooit onbezet is, hetgeen slechts mogelijk is als de voorraad wachtend werk voldoende groot is om iedere denkbare afstand tussen twee aankomsten te overbruggen, m.a.w. als de wachtrij oneindig groot is.

Het gemiddelde aantal karweien dat in het systeem aanwezig is, de gemiddelde rijlengte

genoemd en aangegeven met $E(n)$ of $\bar{n}$, bedraagt

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad (5)$$

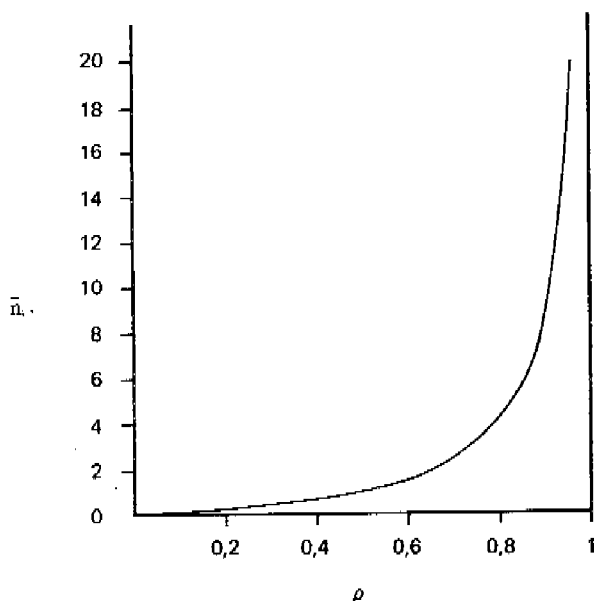
waarbij gebruik gemaakt werd van de formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}. \quad (6)$$

Opmerking: Deze relatie is te bewijzen door gebruik te maken van de stelling dat een machtreeks binnen het convergentie-interval term voor term gedifferentieerd mag worden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n = \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n = \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

In fig. 1 is een grafiek gegeven van $\bar{n}$ als functie van ρ waaruit te zien is dat $\bar{n}$ zeer snel stijgt als ρ de waarde van 1 nadert.



figuur 1 $\bar{n}$ als functie van ρ ; formule (5).

Naast de gemiddelde rijlengte $\bar{n}$ kunnen wij ook geïnteresseerd zijn in de gemiddelde rijlengte als er een rij is, m.a.w. als het loket bezet is ($\underline{n} \geq 1$). De kans dat het loket bezet is en een binnenkomend karwei moet wachten is, omdat de karweien op willekeurige tijdstippen arriveren, gelijk aan

$$P_w = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 - P_0 = \rho, \quad (7)$$

zodat de kans dat de rijlengte de grootte n heeft, onder de voorwaarde dat $\underline{n} \geq 1$ is, gelijk is aan

$$P(\underline{n} = n \mid \underline{n} \geq 1) = \frac{P_n}{P_w} = \rho^{n-1} (1-\rho).$$

De gemiddelde rijlengte onder genoemde voorwaarde is dan

$$E(\underline{n} \mid \underline{n} \geq 1) = \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1} (1-\rho) = \frac{1}{1-\rho}, \quad (8)$$

hetgeen uiteraard voldoet aan de relatie

$$E(\underline{n}) = E(\underline{n} \mid \underline{n} < 1) \cdot P(\underline{n} < 1) + E(\underline{n} \mid \underline{n} \geq 1) \cdot P(\underline{n} \geq 1),$$

als we bedenken dat $E(\underline{n} \mid \underline{n} < 1)$ hetzelfde is als $E(\underline{n} \mid \underline{n} = 0) = 0$.

Aangezien de klanten arriveren volgens een Poissonproces geldt de relatie " $L = K = N$ ", zie par. 1.4.3.

Tenslotte kunnen wij opmerken dat de gemiddelde wachttijd van een binnenkomende klant gelijk is aan

$$\bar{w} = \bar{n} \frac{1}{\mu}, \quad (9)$$

omdat alle klanten die aangetroffen worden nog een verwachte karweiduur $1/\mu$ voor de boeg hebben, ook de klant die al aan de beurt is bij de binnenkomst (zie 1.2.2: de restlevensduur). We kunnen ook gebruik maken van de relatie " $L = \lambda W$ ", omdat " L " = $\bar{n}$ volgt uit (5), terwijl de verwachte doorlooptijd W gelijk is aan $\bar{w} + 1/\mu$ (= wachttijd + karweiduur); dus

$$\bar{n} = \lambda \left(\bar{w} + \frac{1}{\mu} \right) \text{ zodat } \bar{w} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\mu} = \bar{n}/\mu.$$

2.2.2 Beperkte wachtgelegenheid

Het probleem is hetzelfde als dat wat onder 2.2.1 werd behandeld met dien verstande dat het totale aantal karweien in het systeem niet groter kan zijn dan een gegeven waarde N .

Karweien die arriveren als $\bar{n} = N$ is worden niet toegelaten tot de rij.

We kunnen dit ook opvatten als een geval waarbij de klanten (c.q. de karweien) zich niet bij de wachtrij willen voegen als deze te groot is. Hier geldt.

$$\lambda_n = \lambda, \quad (0 \leq n < N),$$

$$\lambda_n = 0, \quad (n \geq N),$$

$$\mu_n = \mu, \quad (n \geq 1),$$

$$\mu_0 = 0.$$

Substitutie in (1) levert, met $\lambda/\mu = \rho$:

$$\begin{aligned} P_n &= \rho^n P_0 & \text{voor} & \quad 0 \leq n \leq N, \\ P_n &= 0 & \text{voor} & \quad n > N. \end{aligned} \quad (10)$$

De sommatie (2) leidt tot

$$\begin{aligned} P_0 &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right\}^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & (\rho \neq 1), \\ P_0 &= \frac{1}{N+1}, & (\rho = 1). \end{aligned} \quad (11)$$

De voorwaarde $\rho < 1$ is hier niet nodig. De sommatie gaat nl. slechts over een eindig aantal termen, te weten $N+1$, zodat ρ iedere eindige waarde mag hebben. De bezettingsgraad is hier dan ook niet gelijk aan ρ , doch gelijk aan $1 - P_0$. De gemiddelde rijlengte bedraagt

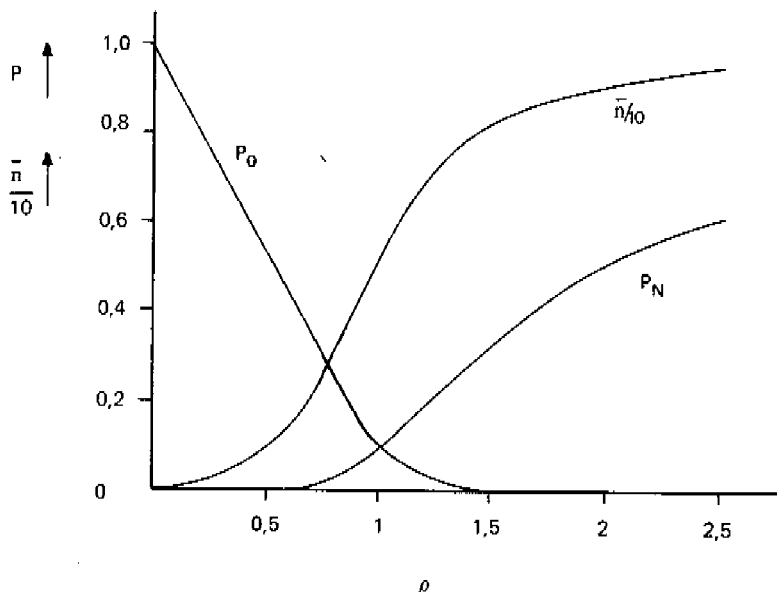
$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = P_0 \sum_{n=1}^N n \rho^n$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-\rho^{N(N+1)+1}}{1-\rho^{N+1}}, & (\rho \neq 1), \\ \bar{n} &= \frac{N}{2}, & (\rho = 1). \end{aligned} \quad (12)$$

Bij benadering geldt voor ρ in de buurt van 1:

$$\bar{n} \approx \frac{N}{2} \left\{ 1 + (\rho-1) \frac{N+2}{6} \right\}, \quad (\rho \approx 1).$$



figuur 2 P_N , P_O en $\bar{n}$ als functie van ρ met $N = 10$; formules (10), (11), (12).

In figuur 2 zijn P_O , P_N en $\bar{n}$ uitgezet als functie van ρ voor het geval $N = 10$. De volgende benaderingen kunnen voorts nog worden gebruikt

$$\rho^N \ll 1 : P_O \approx 1 - \rho, P_N \approx 0, \bar{n} \approx \frac{\rho}{1 - \rho},$$

$$\rho^N \gg 1 : P_O \approx \frac{\rho - 1}{\rho^{N+1}} \approx 0, P_N \approx \frac{\rho - 1}{\rho}, \bar{n} \approx N - \frac{1}{\rho - 1}.$$

Voor $N = 10$ gelden deze benaderingen goed, respectievelijk als $\rho < 0,6$ en $\rho > 1,6$ is. De eerste benadering is duidelijk: als ρ zo klein is dat P_N te verwaarlozen is, dan zal (bijna) geen karwei bemerken dat er maar een beperkte wachtgelegenheid is, zodat het onder 2.2.1 behandelde geval terugkeert.

Wat de tweede benadering betreft: P_N is de kans dat het wachtsysteem vol is en tevens de fraktie van het aantal arriverende karweien welke niet wordt toegelaten. P_N stijgt met toenemende bezettingsgraad en wordt dan onafhankelijk van N , wat wil zeggen dat uitbreiding van het aantal wachtplaatsen geen invloed meer heeft op de teruggestuurde fraktie; het enige effect van de uitbreiding is dat de grotere wachtgelegenheid ook "vol" raakt. Ook dit is duidelijk: ρ zij bijvoorbeeld gelijk aan twee, dit betekent dat de hoeveelheid werk die in principe wordt aangeboden tweemaal zo groot is als de hoeveelheid die het loket kan verwerken; de helft van de karweien wordt dan teruggestuurd. Dit geldt onder de voorwaarde dat ρ voldoende groot is, ofwel bij een konstante ρ , dat N voldoende groot is. Er kan zich dan een voorraad werk vormen die ervoor zorgt, dat het loket behoorlijk bezet blijft (P_0 klein), zodat inderdaad de helft van het aangeboden werk kan worden verricht. Als aan deze voorwaarde is voldaan heeft een verdere uitbreiding van N geen zin meer. Is niet aan de voorwaarde voldaan dan is de verwerkte, dus geaccepteerde portie kleiner, omdat het loket een deel van de tijd niet werkt.

Samengevat geldt gemiddeld:

per tijdseenheid komt werk binnen voor ρ tijdseenheden, terwijl het loket werkt gedurende $1 - P_0$ tijdseenheden, zodat niet geaccepteerd wordt de portie $\rho - (1 - P_0)$. De teruggestuurde fraktie is derhalve

$$P_N = \frac{\rho - 1 + P_0}{\rho}, \quad (13)$$

welke relatie in overeenstemming is met (10) en (11) en geldt voor alle waarden van ρ .

De aspirant-klanten arriveren volgens een Poissonproces; slechts de fraktie $1 - P_N$ wordt geaccepteerd, hetgeen vermoedelijk betekent dat de klanten die het systeem binnengaan niet meer volgens een Poissonproces komen. De relatie " $L = K = N$ " uit par. 1.4.3 geldt hier dan niet; m.a.w. $\bar{n}$ = " L " is de gemiddeld aanwezige rijlengte, maar niet de door een klant aangetroffen rijlengte, zoals in de vorige paragraaf het geval was. De wachttijd wordt nu bepaald met " $L = \lambda W$ ", waarin

" L " = $\bar{n}$, de over de tijd gemiddelde rijlengte en

" λ " = $\lambda(1 - P_N)$, de geaccepteerde klantenstroom is.

De doorlooptijd bedraagt gemiddeld

$$W = \frac{\bar{n}}{\lambda(1 - P_N)} = \frac{\bar{n}/\mu}{\rho(1 - P_N)}$$

Met de formules (12) en (13) is nu W bepaald en daarmee ook de wachttijd $\bar{w} = W - \frac{1}{\mu}$.

Dit leidt met gebruikmaking van (11), tot

$$\bar{w} = \left[\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{N\rho N}{1-\rho N} \right] \cdot \frac{1}{\mu}, \quad (\rho \neq 1),$$

$$\bar{w} = \frac{N-1}{2\mu}, \quad (\rho = 1),$$
(14)

Aangezien de karweiduren negatief-exponentieel verdeeld zijn, hebben alle aangetroffen karweien nog de verwachte duur $1/\mu$, zodat $\bar{w}\mu$ de verwachtingswaarde is van de aangetroffen rij (= "N" uit par. 1.4.3), die niet gelijk is aan de $\bar{n}$ uit vergelijking (12).

2.2.3 Mogelijkheid van sneller werken*)

Het probleem is hetzelfde als bij 2.2.1 met deze verandering echter, dat met een faktor β sneller wordt gewerkt als $\underline{n}$ een waarde N overschrijdt:

$$\lambda_n = \lambda, \quad (n \geq 0),$$

$$\mu_n = \mu, \quad (1 \leq n \leq N),$$

$$\mu_n = \beta\mu, \quad (n > N),$$

$$\mu_0 = 0.$$

Met $\rho = \lambda/\mu < \beta$ vinden wij uit (1) en (2)

$$P_n = \rho^n P_0 \quad \text{voor} \quad 0 \leq n \leq N,$$

$$P_n = \rho^n \frac{P_0}{\beta^{n-N}} \quad \text{voor} \quad n > N.$$
(15)

De waarde van P_0 bedraagt:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^N \rho^n + \beta^N \sum_{n=N+1}^{\infty} (\rho/\beta)^n \right\}^{-1} = \frac{(1-\rho)(\beta-\rho)}{(\beta-\rho) - (\beta-1)\rho^{N+1}}, \quad (\rho \neq 1),$$

$$P_0 = \frac{\beta-1}{N(\beta-1) + \beta}, \quad (\rho = 1).$$
(16)

Voor $\beta = 1$ ($\rho < 1$) of $N \rightarrow \infty$ vinden we de vergelijkingen (4) weer terug.

*) Dit is een bijzonder geval van een meer-lokettenprobleem met overwerk, ref. 57.

De fraktie van de tijd, ofwel de kans, dat er sneller gewerkt moet worden is

$$P(\underline{n} > N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n = \frac{\rho^{N+1}}{\beta - \rho} P_0. \quad (17)$$

Het volgende kan hierbij worden opgemerkt.

Stel de tijdseenheid één uur en noem de door het loket verrichte hoeveelheid werk in die tijd, bij normaal tempo, één loketuur; bij het verhoogde tempo is die hoeveelheid dan β loketuren. Per uur komt (gemiddeld) een hoeveelheid werk binnen van ρ loketuren, terwijl het loket de fraktie P_0 van de tijd niet werkt, gedurende de fraktie $P(\underline{n} > N)$ met verhoogd tempo werkt en gedurende de rest van de tijd met normaal tempo. In het stationaire geval wordt de aangeboden hoeveelheid werk ook verricht, derhalve geldt:

$$\rho = P_0 \cdot 0 + P(\underline{n} > N) \cdot \beta + \{1 - P_0 - P(\underline{n} > N)\} \cdot 1;$$

zodat, in overeenstemming met (16) en (17) de volgende relatie bestaat:

$$P(\underline{n} > N) = \frac{\rho - 1 + P_0}{\beta - 1}. \quad (18)$$

De gemiddelde rijlengte wordt gevonden met

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = P_0 \sum_{n=0}^N n \rho^n + P_0 \beta^N \sum_{n=N+1}^{\infty} n (\rho/\beta)^n,$$

hetgeen met $\rho' = \rho/\beta < 1$ leidt tot

$$\bar{n} = \frac{P_0 \rho}{(1 - \rho)^2} - P_0 \rho^N \left\{ \frac{\rho (N - \rho N + 1)}{(1 - \rho)^2} - \frac{\rho' (N - \rho' N + 1)}{(1 - \rho')^2} \right\}, \quad (\rho \neq 1), \quad (19)$$

$$\bar{n} = P_0 \frac{N(N+1)}{2} + \frac{1}{\beta - 1}, \quad (\rho = 1).$$

Van dit geval geven wij enkele numerieke voorbeelden. Stel dat er een loket is zoals onder 2.2.1 werd behandeld en dat de bezettingsgraad zeer hoog is, bijna gelijk aan één. In het stationaire geval zou $\bar{n}$ zeer groot worden, hetgeen in de praktijk uiteraard betekent dat het zover niet komt omdat het loket sneller gaat werken, karweien gaat afstoten of zijn klanten ziet verdwijnen. Stel dat het eerste gebeurt: het loket gaat 20% sneller werken als de rij de waarde N overschrijdt; gemakshalve stellen wij ρ precies gelijk aan één.

De vergelijkingen (16) en (17) worden toegepast.

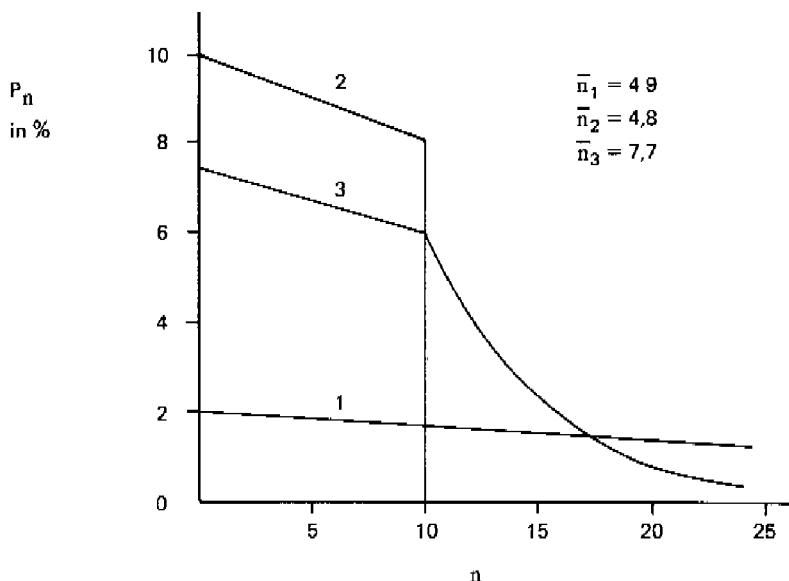
$$P(\underline{n} > N) = \frac{P_0}{\beta - 1} = \frac{1}{N(\beta - 1) + \beta}, \quad (\rho = 1), \quad (20)$$

$$\begin{array}{llll} \beta = 1,2 & N = 10: & P(\underline{n} > N) = 0,3125 & P_0 = 0,0625 \quad \bar{n} = 8,4 \\ & N = 20: & P(\underline{n} > N) = 0,1923 & P_0 = 0,0385 \quad \bar{n} = 13,1 \end{array}$$

Wanneer de kans op overwerk bijvoorbeeld niet meer dan 10% mag bedragen, geeft de vergelijking (20): $N \geq 44$. Voor P_0 en $\bar{n}$ geldt dan:

$P_0 \leq 0,02$, $\bar{n} \geq 24,8$. Wij zien dat door het overwerken $\bar{n}$ klein gehouden kan worden. Dit blijkt ook uit fig. 1: $\bar{n}$ stijgt zeer snel als de bezettingsgraad de waarde 1 nadert; omgekeerd hebben dan ook maatregelen die de bezettingsgraad verlagen veel effect.

In fig. 3 is ter illustratie P_n als functie van n uiteengezet voor de drie behandelde gevallen.



figuur 3 P_n als functie van n ; $\rho = 0,98$

1. onbeperkte wachtgelegenheid; formule (4)
2. beperkte wachtgelegenheid ($N = 10$); formules (10) en (11)
3. mogelijkheid van sneller werken als $n > N = 10$; $\beta = 1,2$; formules (15) en (16).

2.3 Meer-loketten problemen

2.3.1 Zonder wachtgelegenheid

Dit probleem, dat teruggaat tot Erlang, doet zich bijvoorbeeld bij telefoonlijnen en parkeerplaatsen voor. In het eerste geval is iedere lijn een loket, de gespreksduur is de karweiduur. Als deze duren negatief-exponentieel verdeeld zijn is de kans dat een bepaalde bezette lijn vrijkomt in Δt gelijk aan $\mu \Delta t$; zijn er n lijnen bezet dan is de kans dat één van deze lijnen vrijkomt in Δt gelijk aan $n\mu \Delta t$. Zijn alle S lijnen bezet dan wordt een binnenkomend gesprek niet geaccepteerd: er is geen wachtgelegenheid. Het aankomstpatroon wordt weer volgens een Poissonproces verondersteld met een konstante λ . Hier zijn λ_n en μ_n gegeven door:

$$\lambda_n = \lambda, \quad (0 \leq n < S),$$

$$\lambda_n = 0, \quad (n \geq S),$$

$$\mu_n = n\mu, \quad (n \geq 0).$$

Substitutie in (1), geeft met $\lambda/\mu = \rho$:

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0, \quad (0 \leq n \leq S), \quad (21)$$

$$P_n = 0, \quad (n > S),$$

sommatie van alle kansen levert:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^S \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}. \quad (22)$$

De formule voor P_S , die uit (21) en (22) volgt is bekend als de Erlang B-formule waarbij B staat voor blokkeren. Palm en Kosten (ref. 27) hebben aangetoond dat de relaties (21) en (22) onafhankelijk zijn van de karweiduurverdeling, bij dezelfde gemiddelde karweiduur $1/\mu$.

De gemiddelde rijlengte, ofwel het gemiddelde aantal bezette loketten, bedraagt in dit geval

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^S n P_n = \sum_{n=1}^S n P_n = \rho \sum_{m=0}^{S-1} P_m = \rho(1 - P_S). \quad (23)$$

We kunnen hierbij opmerken dat per uur gemiddeld een hoeveelheid werk aangeboden wordt van ρ loketuren, waarvan de fraktie P_S niet wordt geaccepteerd. De geaccepteerde portie is dus $\rho(1 - P_S)$ loketuren per uur, zodat dit getal tevens geeft het gemiddeld aantal bezette loketten.

De bezettingsgraad, die in de vorige voorbeelden bij een enkel loket de waarde $1 - P_0$ had, kan hier gedefinieerd worden als de geaccepteerde hoeveelheid werk gedeeld door de mogelijk te verrichten hoeveelheid, dat is dus hier

$$\rho(1 - P_S) / S = \bar{n} / S.$$

Vaak zal men de eis stellen dat de kans P_S , dat een nieuw karwei niet wordt geaccepteerd, kleiner moet zijn dan een zekere waarde α .

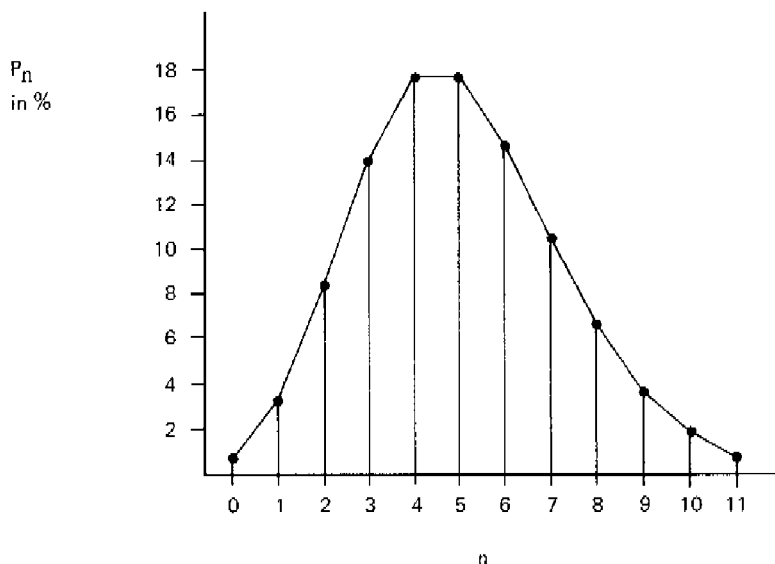
Bij bekende ρ is het dan eenvoudig een ondergrens voor S te bepalen:

$$P_S = \frac{\rho^S}{S!} / \sum_{n=0}^S \frac{\rho^n}{n!} < \alpha.$$

S	$\rho^S/S!$	$\sum_{n=0}^S \rho^n/n!$	P_0	P_S
0	1,00	1,00	1,000	1,000
1	5,00	6,00	0,167	0,833
2	12,50	18,50	0,054	0,676
3	20,83	39,33	0,025	0,530
4	26,04	65,37	0,015	0,398
5	26,04	91,41	0,011	0,285
6	21,70	113,11	0,009	0,192
7	15,50	128,61	0,008	0,121
8	9,69	138,30	0,007	0,070
9	5,38	143,68	0,007	0,037
10	2,69	146,37	0,007	0,018
11	1,22	147,59	0,007	0,008
12	0,51	148,10	0,007	0,003
13	0,20	148,30	0,007	0,001

Tabel 1 $\rho = 5$; formules (21) en (22)

Voorbeeld: $\rho = 5$, $\alpha = 0,01$ (d.w.z. $\bar{n} \approx 5$). Uit tabel 1 blijkt dat voor $S = 11$ aan de voorwaarde is voldaan. Wordt deze waarde genomen dan is $P_0 = 0,678\%$; de kansen P_n worden berekend met (21) en tabel 1: zie figuur 4.



figuur 4 P_n als functie van n ; $\rho = 5$, $S = 11$; formules (21) en (22).

Wat P_0 en $\bar{n}$ betreft, levert (bij $\rho = 5$) het aantal van 11 loketten praktisch al dezelfde resultaten als wanneer S oneindig groot is. Immers voor $S \rightarrow \infty$ gaan (22) en (23) over in

$$P_0 = e^{-\rho}, \quad \bar{n} = \rho. \quad (24)$$

Substitutie van $\rho = 5$ geeft $P_0 = 0,674\%$, hetgeen in zeer goede overeenstemming is met de boven berekende waarde, terwijl $\bar{n}$ een relatief verschil geeft van minder dan $\alpha = 0,01$.

2.3.2 Onbeperkte wachtgelegenheid

Er zijn weer S gelijke loketten naast elkaar, de karweiduren negatief-exponentieel verdeeld, terwijl de klanten volgens een Poissonproces arriveren. Zijn alle loketten bezet, dan worden

de klanten in een wachtrij geplaatst. Samenvattend:

$$\lambda_n = \lambda, \quad (n \geq 0),$$

$$\mu_n = n\mu, \quad (0 \leq n \leq S),$$

$$\mu_n = S\mu, \quad (n \geq S).$$

Met de vergelijking (1) wordt dan gevonden (voor $\rho = \lambda/\mu < S$):

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0, \quad (0 \leq n \leq S),$$

$$P_n = \left(\frac{\rho}{S}\right)^{n-S} P_S = \frac{\rho^n P_0}{S^{n-S} S!}, \quad (n \geq S), \quad (25)$$

$$P_0 = \left\{ \frac{\rho^{S+1}}{S!(S-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{\rho^n}{n!} \right\}^{-1},$$

aan welke formules ook de naam van Erlang verbonden is.

De kans dat een binnenkomend karwei moet wachten bedraagt

$$P_w = \sum_{n=S}^{\infty} P_n = \frac{P_S}{1 - (\rho/S)}. \quad (26)$$

Voor de berekening van $\bar{n}$ hebben wij de volgende sommen nodig

$$\sum_{n=0}^S n P_n = \rho(1 - P_w), \quad (27)$$

hetgeen bewezen wordt als bij vergelijking (23) en voorts

$$\sum_{n=S+1}^{\infty} n P_n = \frac{S^S P_0}{S!} \sum_{n=S+1}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{S}\right)^n = P_w \rho \left(1 + \frac{1}{S-\rho}\right), \quad (28)$$

waarbij de "russenstapjes" maar zijn overgeslagen. Uit de twee sommen volgt:

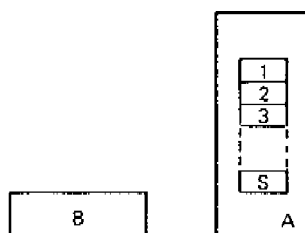
$$\bar{n} = \rho \left(1 + \frac{P_w}{S-\rho}\right). \quad (29)$$

Onder de voorwaarde dat alle loketten bezet zijn, is de gemiddelde rijlengte

$$E(\underline{n} | \underline{n} \geq S) = \sum_{n=S}^{\infty} n \frac{P_n}{P_w} = \frac{S P_S}{P_w} + \frac{1}{P_w} \sum_{n=S+1}^{\infty} n P_n,$$

hetgeen met (26) en (28) leidt tot

$$E(\underline{n} | \underline{n} \geq S) = S + \frac{\rho}{S-\rho}. \quad (30)$$



figuur 5 S loketten (A) met wachtgelegenheid (B).

Ook op een geheel andere manier kan men tot de relaties (29) en (30) komen. In figuur 5 stelt A de combinatie van de S loketten voor, terwijl B de wachtgelegenheid is. De hoeveelheid aangeboden werk is per uur, gemiddeld, ρ loketuren, hetgeen betekent dat er ρ loketten zijn bezet. In A zijn dus gemiddeld ρ klanten (karweien) aanwezig.

Als alle loketten bezet zijn worden de binnenkomende klanten naar B gestuurd. B is dan op te vatten als een enkel loket met wachtgelegenheid; immers de kans dat een nieuwe klant arriveert in het komende tijdje Δt is $\lambda \Delta t$, terwijl een klant B verlaat met de kans $S\mu \Delta t$ (zijnde de kans dat één van de S karweien in A wordt beëindigd). Het enkele loket bij B heeft dus een bezettingsgraad $\rho' = \lambda/\mu S = \rho/S$; de gemiddelde rijlengte in B is derhalve, met verg. (5):

$$\frac{\rho'}{1 - \rho'} = \frac{\rho}{S - \rho},$$

onder de voorwaarde dat alle loketten in A bezet zijn. Als niet alle loketten in A bezet zijn, is het aantal klanten in B uiteraard nul, zodat de (onvoorwaardelijke) gemiddelde rijlengte in B bedraagt $P_w \rho / (S - \rho)$. Het gemiddelde aantal klanten in het gehele wachstelsel (A+B) is daarom

$$\bar{n} = \rho + P_w \frac{\rho}{S - \rho},$$

zijnde de vergelijking (29). Stellen wij de voorwaarde dat alle S loketten bezet zijn, dan kunnen we op deze wijze ook meteen de relatie (30) opschrijven,

Als een klant in B komt treft hij daar gemiddeld $\rho'/(1-\rho')$ karweien aan, die wat duur in B betreft negatief-exponentieel verdeeld zijn met als gemiddelde waarde $1/\mu S$, d.w.z. dat deze

klant een tijd

$$\frac{\rho'}{(1-\rho')\mu S}$$

moet wachten, voordat hij vooraan in de wachtrij staat, waarna "zijn karweiduur voor het enkele loket in B" begint. In B is deze klant dus in totaal aanwezig (gemiddeld) de tijd

$$\frac{1}{\mu S} \left(\frac{\rho'}{1-\rho'} + 1 \right) = \frac{1}{\mu S(1-\rho')}.$$

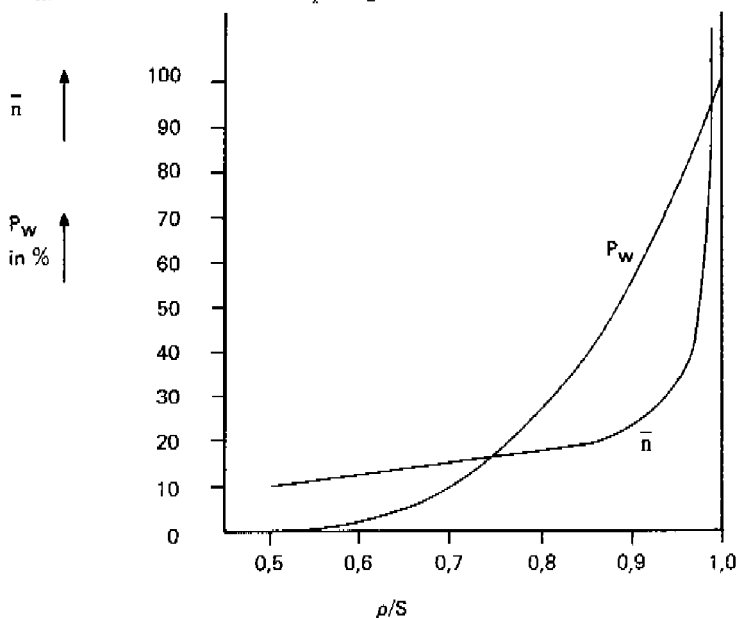
De gemiddelde wachttijd van deze klant is dus

$$\bar{w}' = \frac{1}{\mu(S-\rho)},$$

zodat de gemiddelde wachttijd van alle klanten bedraagt

$$\bar{w} = \frac{P_w}{\mu(S-\rho)}, \quad (31)$$

welke formule ook te vinden is door toepassing van " $L = \lambda W$ ".



figuur 6 P_w en $\bar{n}$ als functie van ρ/S ; $S = 20$; formules (26) en (29).

In fig. 6 is het verloop geschetst van P_w en $\bar{n}$ als funktie van ρ/S in het geval $S = 20$ is. In dit voorbeeld is te zien dat $\bar{n}$ nagenoeg een lineaire funktie is van ρ/S tot dit quotiënt de waarde 0,85 bereikt; $\bar{n}$ is dan ongeveer gelijk aan S , de kans $P_w \approx 40\%$. Voor $\rho/S > 0,85$ stijgt $\bar{n}$ zeer snel en nadert tot oneindig als $\rho/S \rightarrow 1$.

In tabel 2 is P_w gegeven als funktie van ρ/S en S . Met deze tabel is $\bar{n}$ eenvoudig te berekenen: zie (29). Als bovengrens voor $\bar{n}$ kan de formule (30) worden gebruikt die een goede schatting geeft voor grote waarden van ρ/S . Tenslotte mogen wij hier nog opmerken dat $1 - P_w$ de kans is dat één of meer loketten vrij zijn.

ρ/S	$S=5$	$S=10$	$S=15$	$S=20$	$S=25$	$S=30$	$S=35$	$S=40$	$S=45$	$S=50$
0.50	0.130	0.036	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.55	0.179	0.063	0.025	0.010	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
0.60	0.236	0.101	0.048	0.024	0.012	0.007	0.003	0.002	0.001	0.001
0.65	0.303	0.154	0.086	0.050	0.030	0.018	0.011	0.007	0.004	0.003
0.70	0.378	0.221	0.141	0.094	0.064	0.044	0.031	0.022	0.015	0.011
0.75	0.462	0.307	0.218	0.160	0.121	0.092	0.071	0.055	0.043	0.034
0.80	0.554	0.409	0.319	0.256	0.209	0.173	0.144	0.121	0.102	0.087
0.85	0.654	0.530	0.447	0.385	0.336	0.296	0.263	0.235	0.211	0.190
0.90	0.762	0.669	0.603	0.551	0.508	0.471	0.440	0.412	0.386	0.364
0.95	0.878	0.826	0.787	0.755	0.728	0.705	0.683	0.664	0.646	0.629
0.96	0.902	0.859	0.827	0.801	0.779	0.759	0.740	0.724	0.709	0.694
0.97	0.926	0.893	0.869	0.848	0.831	0.815	0.801	0.788	0.776	0.764
0.98	0.950	0.928	0.911	0.897	0.885	0.874	0.864	0.855	0.846	0.838

Tabel 2 P_w als funktie van ρ/S en S ; formule (26).

2.3.3 Het meer-machine bedieningsprobleem

Dit is een probleem van beperkte aanvoer: de klanten komen uit een eindige populatie. Wij stellen dat er N machines zijn die een reparatiebeurt moeten ondergaan wanneer zij uitvallen. Verondersteld wordt dat de tijd dat een machine goed funktioneert negatief-exponentieel verdeeld is met als gemiddelde waarde $1/\lambda$. De reparatieduur is eveneens negatief-exponentieel verdeeld met $1/\mu$ als gemiddelde.

Er zijn S reparateurs beschikbaar ($S \leq N$).

De volgende relaties gelden:

$$\lambda_n = (N-n)\lambda, \quad (0 \leq n \leq N),$$

$$\lambda_n = 0, \quad (n \geq N),$$

$$\mu_n = n\mu, \quad (0 \leq n \leq S),$$

$$\mu_n = S\mu, \quad (n \geq S).$$

Immers: als er n machines in het wachtsysteem zijn ($n \leq N$), in reparatie of in de wachtrij, zijn er nog $N-n$ machines in functie zodat de kans dat in Δt een machine uitvalt gelijk is aan $\lambda_n \Delta t = (N-n)\lambda \Delta t$.

Met de verg. (1) en $\lambda/\mu = \rho$ wordt gevonden

$$P_n = \frac{N! \rho^n P_0}{(N-n)! n!}, \quad (0 \leq n \leq S),$$

$$P_n = \frac{N! \rho^n P_0}{(N-n)! S! S^{n-S}}, \quad (S \leq n \leq N), \quad (32)$$

$$P_n = 0, \quad (n > N).$$

waarbij P_0 weer volgt uit de verg. (2).

Voor de berekening van $\bar{n}$ maken wij gebruik van de oorspronkelijke relaties:

$$n P_n = \rho (N - n + 1) P_{n-1}, \quad (0 \leq n \leq S), \quad (33)$$

$$n P_n = N P_n - \frac{S}{\rho} P_{n+1}, \quad (S \leq n \leq N - 1), \quad (34)$$

die direkt zijn af te leiden uit de verg. (1) na substitutie van λ_n en μ_n .

Uit de vergelijking (33) volgt

$$\sum_{n=1}^S n P_n = \rho N \sum_{n=1}^S P_{n-1} - \rho \sum_{n=1}^S (n-1) P_{n-1},$$

hetgeen leidt tot

$$\sum_{n=1}^S n P_n = \frac{\rho}{1+\rho} \left\{ N \sum_{n=0}^{S-1} P_n + S P_S \right\}. \quad (35)$$

Voorts volgt uit (34)

$$\begin{aligned} \sum_{n=S+1}^N n P_n &= \sum_{n=S+1}^{N-1} n P_n + N P_N = N \sum_{n=S+1}^{N-1} P_n - \frac{S}{\rho} \sum_{n=S+1}^{N-1} P_{n+1} + N P_N = \\ &= N \sum_{n=S+1}^N P_n - \frac{S}{\rho} \sum_{n=S+2}^N P_n. \end{aligned} \quad (36)$$

Zij P_B de kans dat alle loketten bezet zijn,

$$P_B = \sum_{n=S}^N P_n, \quad (37)$$

dan vinden wij met (35) en (36)

$$\bar{n} = \frac{\rho N}{1+\rho} + P_B \left(\frac{N}{1+\rho} - \frac{S}{\rho} \right) + P_S \frac{S}{\rho(1+\rho)}. \quad (38)$$

In het bijzondere geval dat $S = N$ is, wordt $P_B = P_S$ en

$$\bar{n} = \frac{\rho N}{1+\rho}, \quad (N = S), \quad (39)$$

terwijl uit de vergelijking (32) dan volgt:

$$\begin{aligned} P_n &= C_N^n \rho^n P_0, \quad (C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}), \\ P_0 &= \left\{ \sum_{n=0}^N C_N^n \rho^n \right\}^{-1} = (1+\rho)^{-N}, \\ (P_n &= 0 \text{ voor } n > N). \end{aligned} \quad (40)$$

Een opmerking over P_B is hier nog op zijn plaats. De kans dat alle loketten zijn bezet geeft niet, zoals dat in de formules (7) en (26) wel het geval was, de kans dat een binnenkomend karwei moet wachten; de populatie die de klanten levert is eindig. Wij kunnen de invloed zien aan het extreme voorbeeld $S = N$: de kans P_B moge ongelijk aan nul zijn, geen klant behoeft te wachten. De kans dat een klant moet wachten, als $S < N$ is, wordt in het volgende nog bepaald.

Dat een rekenmachine, behalve bij zeer kleine waarden van S en N , noodzakelijk is om P_0 , P_B e.a. numeriek te berekenen moge duidelijk zijn. Peck en Hazelwood (ref. 38) hebben uitvoerige tabellen gemaakt waarbij zij de volgende notatie gebruiken:

H, J en L: respectievelijk het gemiddelde aantal machines dat in reparatie is, dat goed funktioneert, dat wacht op een reparatie;

$$F = \frac{N-L}{N} \quad \text{"efficiency faktor"} \\ (1-F \text{ is de fraktie van het aantal machines dat wacht op reparatie}).$$

$$X = \frac{\rho}{1+\rho} \quad \text{"service factor"}$$

D = kans dat een machine moet wachten op reparatie.

Uit het voorgaande volgt:

$$H + J + L = N, \quad \bar{n} = H + L. \quad (41)$$

Aangezien er gemiddeld H karweien onder handen zijn, worden per tijdseenheid gemiddeld μH karweien beëindigd; in het stationaire geval (dat bestaat voor iedere ρ) is dit aantal gelijk aan het aantal machines dat per tijdseenheid kapot gaat: $\mu H = \lambda J$, hetgeen met $\lambda/\mu = \rho$ geschreven kan worden als $H = \rho J$ ofwel:

$$H = \frac{\rho}{1+\rho} (H+J) = \frac{\rho}{1+\rho} (N-L),$$

zodat, met gebruikmaking van de definities van F en X,

$$\begin{aligned} H &= XFN, \\ J &= (1-X)FN, \\ L &= N(1-F). \end{aligned} \quad (42)$$

Wanneer in de wachtgelegenheid tenminste één klant (karwei) aanwezig is, dan zullen per tijdseenheid μS klanten deze wachtgelegenheid verlaten; dit aantal is nl. gelijk aan het aantal dat de vol-bezette werkplaats verlaat. Als de wachtgelegenheid geen klanten bevat, kunnen er ook geen klanten uit verdwijnen. Het gemiddelde aantal klanten dat per tijdseenheid van de wachtgelegenheid naar de werkplaats gaat is derhalve gelijk aan:

$$\mu S \sum_{n=S+1}^N P_n.$$

Gemiddeld arriveren per tijdseenheid $\lambda J = \mu H$ karweien in de werkplaats; de fraktie

$$\mu S \sum_{n=S+1}^N P_n / \mu H$$

gaat dus via de wachtgelegenheid (de rest rechtstreeks), zodat

$$D = \frac{S}{H} \sum_{n=S+1}^N P_n = \frac{S}{H} (P_B - P_S), \quad (43)$$

de fraktie van de karweien geeft die moet wachten.

Uit de definitie van H,

$$H = \sum_{n=0}^S n P_n + S \sum_{n=S+1}^N P_n, \quad (44)$$

volgt met (35)

$$H = \frac{\rho}{1+\rho} \left\{ N \sum_{n=0}^{S-1} P_n + S P_S \right\} + S \sum_{n=S+1}^N P_n,$$

hetgeen geschreven kan worden als

$$H = XN - P_B (XN - S) - P_S S (1 - X). \quad (45)$$

Uit (42) en (45) volgt voor F:

$$F = 1 - P_B \left(1 - \frac{S}{NX}\right) - P_S \frac{S}{NX} (1 - X), \quad (46)$$

(F = 1 als S = N).

Peck en Hazelwood hebben F en D getabelleerd als functie van N, X en S (in hun notatie M). Teneinde een beetje te spelen met de tabellen kiezen wij een numeriek voorbeeld:

N = 50, $\rho = 2/3$ (d.w.z. X = 0,4).

Als er genoeg loketten zouden zijn om wachten uit te sluiten (S = N) dan zouden er gemiddeld XN = 20 loketten bezet zijn, zoals volgt uit (39) en trouwens ook uit (42) met F = 1.

Als S kleiner is dan N, maar nog voldoende groot t.o.v. XN dan blijft dit nagenoeg gelden. Is S daarentegen klein t.o.v. XN = 20, dan zal de bezettingsgraad H/S van de loketten hoog zijn, nagenoeg gelijk aan één, en zal praktisch ieder karwei moeten wachten, zoals ook uit onderstaand tabelletje blijkt; uit H/S = 1 volgt dan, met (42), F = S/XN. De tabel geeft waarden van F en D in het interval S = 16 t/m 27:

N = 50	S = 27 :	D = 0,024 ,	F = 0,999 ,
X = 0,4	S = 20 :	D = 0,604 ,	F = 0,948 ,
	S = 16 :	D = 0,974 ,	F = 0,798 .

Dit deel van de tabel gaat niet verder dan dit interval, omdat voor

$$S \leq 16 \quad : \quad F \approx \frac{S}{XN}$$

en voor $S \geq 27$: $F \approx 1$ is.

Kiezen wij uit andere voorbeelden met dezelfde waarden XN = 20:

N = 200, X = 0,1	S = 27 :	D = 0,075 ,	F = 0,999 ,
	20 :	0,765 ,	0,960 ,
	18 :	0,965 .	0,896 .
N = 250, X = 0,08	27 :	0,079 ,	0,999 ,
	20 :	0,785 ,	0,963 ,
	18 :	0,976 ,	0,897 .

De grenzen voor S zijn blijkbaar bijna onafhankelijk van N (bij dezelfde XN). Wij hebben hetzelfde onderzocht voor andere waarden van XN in het gebied $XN < 100$ en zo figuur 7 gekonstrueerd. Er zijn drie gebieden in deze figuur:

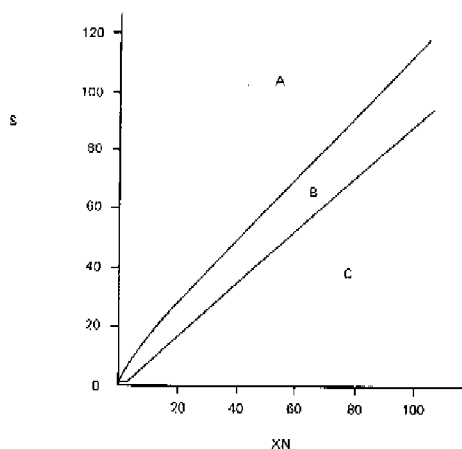
Gebied A. F is praktisch gelijk aan één; de formules (39) en (40) kunnen worden gebruikt en uiteraard ook de formules (42):

$$F = 1, H = XN, J = (1-X) N, L = 0. \quad (47)$$

Gebied C. D is praktisch gelijk aan één, evenals de bezettingsgraad H/S. Met $H = S$ volgt dan uit (42)

$$F = \frac{S}{XN}, H = S, J = \frac{1-X}{X} S, L = N - \frac{S}{X}. \quad (48)$$

Gebied B. Dit is het gebied dat de tabellen van Peck en Hazelwood bestrijken. Wanneer wij deze tabellen niet ter beschikking hebben, kunnen wij ons met figuur 7 behelpen. Wij zullen dit laten zien met een numeriek voorbeeld waarvoor $XN = 20$ is.



figuur 7 Grenzen van S als functie van XN.

Uit figuur 7 volgen de grenzen voor S, nl. 17 en 27, dat wil zeggen:

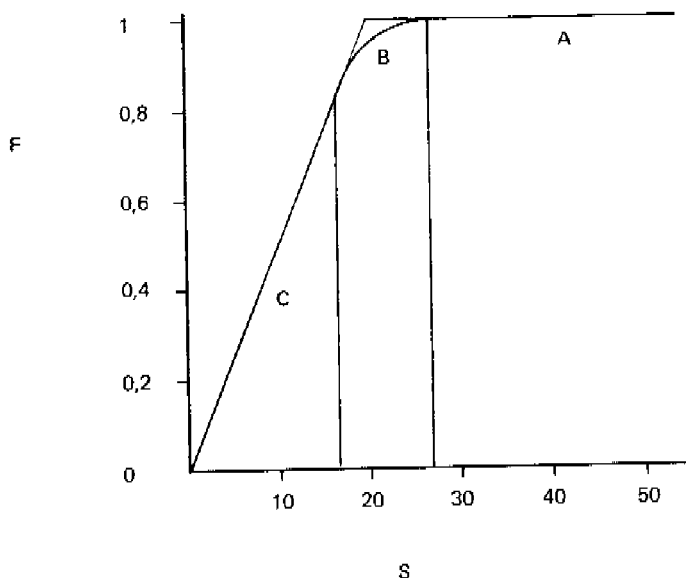
$$\begin{aligned} S \leq 17 & \quad F = S/20 & \text{(gebied C),} \\ S \geq 27 & \quad F = 1 & \text{(gebied A).} \end{aligned}$$

In figuur 8 is het verloop van F als functie van S getekend voor de gebieden C en A. Het boogje B geeft het overgangsgebied. Men kan trachten dit boogje "op het oog" te trekken, waardoor de mogelijke fout in F en derhalve ook in J, van de orde van enige procenten is (bij $XN = 20$); hetgeen nog niet eens zo'n slechte schatting geeft voor het aantal goed funktionerende machines. Wij kunnen ook proberen het boogje te benaderen met, bijvoorbeeld, een e-macht: stel de ondergrens van S bij een bepaalde XN gelijk aan S_1 en de bijbehorende F gelijk aan F_1 , dan geldt in het gebiedje B bij benadering:

$$F = 1 - (1 - F_1) \exp\left(-\frac{S - S_1}{XN - S_1}\right), \quad (49)$$

immers $F(S=S_1) = F_1$ en uit (48):

$$\left. \frac{dF}{dS} \right|_{S_1} = \frac{1}{XN}.$$



figuur 8 F als functie van S; $XN = 20$; formules (47) en (48).

De benaderende formule voor F is in tabel 3 vergeleken met enige exakte waarden. Voor kleine waarden van XN is de benadering in zoverre niet goed dat de e-macht kennelijk niet snel genoeg naar nul nadert. Overigens leveren kleine waarden van XN (en dus ook van S) niet zoveel moeilijkheden bij "rekenen met de hand", zoals wij nog laten zien aan een laatste voorbeeld: $N = 5$, $X = 0,8$ ($\rho = 4$), $S = 4$ uit (32) volgt

$$P_0 = P_0 = P_0,$$

$$P_1 = 5\rho P_0 = 20 P_0,$$

$$P_2 = 10\rho^2 P_0 = 160 P_0,$$

$$P_3 = 10\rho^3 P_0 = 640 P_0,$$

$$P_4 = 5\rho^4 P_0 = 1280 P_0,$$

$$P_5 = \frac{5}{4}\rho^5 P_0 = 1280 P_0.$$

Sommatie van alle kansen geeft de waarde één, zodat

$$P_0 = \frac{1}{3381}, P_S = \frac{1280}{3381}, P_B = P_4 + P_5 = \frac{2560}{3381}.$$

Aangezien hier $S = XN$ gaat (46) over in

$$F = 1 - P_S (1-X) = 0,924.$$

Uit de vergelijkingen (42) en (43) volgt dan nog

$$H = 3,70 \quad J = 0,92 \quad L = 0,38 \quad D = 0,41.$$

	S	F uit (49)	F uit tabel van Peck-Hazelwood (ref. 38)				
XN=4 (S ₁ =2)			N=5 X=0,8	N=10 X=0,4	N=50 X=0,08	N=100 X=0,04	N=250 X=0,016
	2	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
	4	0,82	0,92	0,89	0,92	0,94	0,96
	6	0,92	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00
XN=20 (S ₁ =17)			N=40 X=0,5	N=100 X=0,2	N=200 X=0,1	N=250 X=0,08	
	18	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	
	20	0,95	0,95	0,95	0,96	0,96	
	24	0,99	1,00	0,99	1,00	1,00	
XN=100 (S ₁ =89)			N=125 X=0,8	N=250 X=0,4			
	90	0,90	0,90	0,90			
	100	0,96	0,98	0,98			
	110	0,98	1,00	1,00			

Tabel 3 Benaderende waarde van F vergeleken met die uit een tabel.

2.3.4 Centralisatie van loketten

Dat het zin heeft gelijke loketten bij elkaar te plaatsen moge blijken uit de reeds behandelde gevallen 2.2.1 en 2.3.2. Wij zullen drie situaties a, b en c met elkaar vergelijken.

- a) Stel er zijn S aparte enkel-loketsystemen, zoals in par. 2.2.1, ieder met dezelfde λ_a en μ_a . De gemiddelde rijlengte $\bar{n}_a$ bij ieder loket voldoet aan de vergelijking (5), zodat in totaal aanwezig zijn gemiddeld

$$\bar{n}(a) = S \bar{n}_a = \frac{S \rho_a}{1 - \rho_a}, \quad (\rho_a = \lambda_a / \mu_a). \quad (50)$$

Een binnenkomende klant ziet gemiddeld de rij $\bar{n}_a$ voor zijn loket staan, hetgeen wegens de negatief-exponentieel verdeelde karweiduren betekent dat zijn wachttijd gemiddeld $\bar{n}_a / \mu_a$ bedraagt, zodat zijn doorstroomtijd $\bar{t}_a$ (= wachttijd + karweiduur) gemiddeld $(\bar{n}_a + 1) / \mu_a$ bedraagt, ofwel

$$\bar{t}_a = \frac{1}{\mu_a (1 - \rho_a)}. \quad (51)$$

- b) Wanneer alle klanten van de S systemen naar één enkel-loket werden gestuurd, dat S maal zo snel zou kunnen werken als één van de eerste loketten, dan zou dit ene loket een gemiddelde rij hebben als in vergelijking (5); omdat $\lambda_b = S \lambda_a$ en $\mu_b = S \mu_a$ is, zal $\rho_b = \rho_a$ zijn, zodat voor dit systeem geldt:

$$\bar{n}(b) = \bar{n}_a = \frac{\rho_a}{1 - \rho_a}, \quad \bar{t}_b = \frac{1}{S \mu_a (1 - \rho_a)} = \frac{\bar{t}_a}{S}. \quad (52)$$

Vergeleken met (50) en (51) is dus het totaal aantal aanwezige karweien en de doorlooptijd een faktor S kleiner geworden.

- c) Vaak zal het niet mogelijk zijn een loket te maken dat S maal zo snel werkt. De S loketten kunnen dan naast elkaar worden geplaatst met één gemeenschappelijke wachtrij (centralisatie). Wij krijgen dan geval 2.3.2 met $\lambda_c = S \lambda_a$ en $\mu_c = \mu_a$, zodat $\rho_c = S \rho_a$ is. Het gemiddelde aantal klanten volgt nu uit vergelijking (29)

$$\bar{n}(c) = \rho_a \left(S + \frac{P_w(c)}{1 - \rho_a} \right), \quad (53)$$

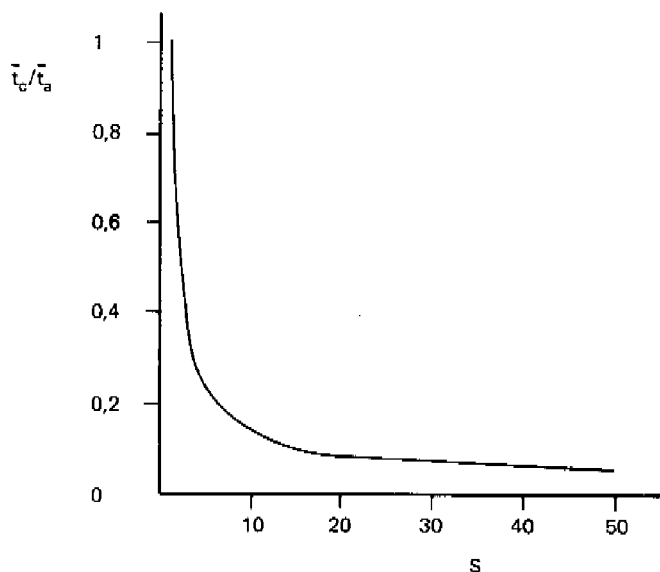
Voor de gemiddelde wachttijd geldt de relatie (31) zodat

$$\bar{t}_c = \frac{1}{S \mu_a} \left(\frac{P_w(c)}{1 - \rho_a} + S \right). \quad (54)$$

Uit de relaties (51) en (54) volgt tenslotte

$$\frac{\bar{t}_c}{\bar{t}_a} = \frac{P_w(c)}{S} + 1 - \rho_a. \quad (55)$$

Voorbeeld: $\rho_a = \rho_c/S = 0,95$ en $S = 5$; met tabel 2 ($P_w(c) = 0,878$) wordt dan gevonden $\bar{t}_c/\bar{t}_a = 0,23$. In figuur 9 is de verhouding van de doorlooptijden getekend als functie van S . Voor grote waarden van S nadert de verhouding tot $1 - \rho_a$, dus hier tot 0,05. Het effect van de centralisatie neemt af naarmate S groter wordt; ter illustratie nog een voorbeeld met $S = 30$. Worden de loketten samengevoegd tot 3 systemen ieder van 10 loketten, dan is de doorlooptijd, volgens figuur 9, slechts 14% van de oorspronkelijke; wanneer de 3 systemen dan nog gecentraliseerd worden tot 1 systeem van 30 loketten, dan daalt de doorlooptijd tot 8% van de oorspronkelijke waarde.



figuur 9 Verhouding van doorlooptijden bij gecentraliseerde en aparte loketten;
 $\rho_a = \rho_c/S = 0,95$; formule (55).

2.4 Terugblik op de vorige paragrafen en een andere aanpak

De behandelde gevallen zijn nadere uitwerkingen van de formules (1) en (2). Men kan uiteraard op deze wijze doorgaan en bijvoorbeeld onderzoeken het gedrag van een meer-loketten systeem met zowel beperkte aanvoer, eindige wachtgelegenheid, als de mogelijkheid van sneller werken enz.

In principe zijn deze varianten eenvoudig, al zal het rekenwerk wel eens wat vervelend zijn; mocht dit laatste het geval zijn dan kan een rekentuig numerieke uitkomsten bepalen direkt met de vergelijkingen (1) en (2) zonder dat het nodig is analytische uitdrukkingen te vinden voor P_n , P_w , $\bar{n}$ enz. Hoewel de methode eenvoudig is, bestaat toch het gevaar van een automatisme: eerst P_n (voor $n > 0$) uitdrukken in P_0 , vervolgens door sommeren P_0 berekenen, dan $\bar{n}$ bepalen enz. Wanneer P_n alleen berekend wordt met het oogmerk om verwachtingswaarden te bepalen, zoals $\bar{n}$ en $\bar{w}$, dan kunnen vaak andere wegen bewandeld worden. Voorbeelden daarvan zijn gegeven bij de formules (13) en (18) en na de formules (23), (29) en (30).

Als de, door een schrijver gekozen, mathematische methode zelf al vrij gekompliceerd is bestaat het gevaar dat men van de mathematische homen het operationele bos niet meer ziet. Een voorbeeld daarvan vinden wij bij P.M. Morse (ref. 34, pag. 121 e.v.) die een loket met relatieve prioriteiten behandelt. Hier een overzicht te geven van alle "algebraic gymnastics" die nodig zijn om tot een oplossing te komen, voert ons te ver. Zelf merkt hij op: "Unfortunately, to get further, even with this simple case, we must plow through a lot of algebra". Van de verwachtingswaarden voor rijlengten en wachttijden die hij tenslotte vindt zegt hij: "They are not surprising", reden waarom we in de volgende paragraaf zullen aantonen dat het ook eenvoudiger kan. Wel moet worden toegegeven dat Morse de opzet zo algemeen houdt dat hij behalve verwachtingswaarden in principe ook de toestandswaarschijnlijkheden kan uitrekenen met behulp van genererende funkties, maar omdat het geheel toch al ingewikkeld genoeg is geworden besluit hij om die waarschijnlijkheden maar niet meer uit te rekenen.

Ook Lee (ref. 31, pag. 43) komt niet verder dan de verwachtingswaarden en dat is al erg genoeg want, schrijft hij: "The algebra involved in manipulating the probability generating functions is very heavy and will not be reproduced here". Hij laat de formules dan ook maar uit de lucht vallen.

2.4.1 Enkel loket met relatieve prioriteiten

Van de binnenkomende karweien behoort de fraktie f tot een urgente groep die voorrang heeft op de gewone karweien, met dien verstande dat een gewoon karwei dat onderhanden is afgemaakt wordt ook al arriveert tijdens deze karweiduur een urgent karwei (relatieve prioriteit). Van beide groepen wordt verondersteld dat de klanten volgens een Poissonproces arriveren en wel met een aankomstsnelheid van $f\lambda$ per tijdseenheid voor de urgente en $(1-f)\lambda$ per tijdseenheid voor de gewone klanten. De karweiduren worden negatief-exponentieel verondersteld met voor beide groepen dezelfde gemiddelde waarde $\bar{s}$. Dit is een bijzonder geval van de meer algemene probleemstelling die behandeld wordt in paragraaf 3.6 en welke afkomstig is van Cobham (ref. 9).

De toekenning van prioriteit aan bepaalde karweien moge plezierig zijn voor die karweien, op de gemiddelde rijlengte en de wachttijd van alle karweien heeft het geen invloed omdat de urgentie niet wordt bepaald door de verwachte karweiduur (zie par. 2.1): de aankomsten blijven Poisson, de karweiduren negatief-exponentieel en de bezettingsgraad $\rho = \lambda\bar{s}$ verandert niet, dus geldt volgens (5) en (9):

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \bar{w} = \bar{n}\bar{s}. \quad (56)$$

Voor de aankomsten van de urgente resp. de gewone karweien geldt $\lambda_u = f\lambda$ respectievelijk $\lambda_g = (1-f)\lambda$. Als een "gewone" arriveert, zal hij gemiddeld $\bar{n}$ karweien aantreffen; zijn wachttijd zij $\bar{w}_g$. In deze tijd zullen gemiddeld $\lambda_u \bar{w}_g$ urgente karweien arriveren (wij komen hierop terug), zodat de genoemde "gewone" $\bar{n} + \lambda_u \bar{w}_g$ karweien afgehandeld ziet voor hij zelf aan de beurt komt. Zijn wachttijd is derhalve gemiddeld

$$\bar{w}_g = (\bar{n} + \lambda_u \bar{w}_g) \bar{s},$$

ofwel

$$\bar{w}_g = \frac{\bar{n}\bar{s}}{1-f\rho} = \frac{\rho\bar{s}}{(1-\rho)(1-f\rho)}. \quad (57)$$

Zij de gemiddelde wachttijd van een urgente $\bar{w}_u$, dan geldt uiteraard voor alle karweien:

$$\bar{w} = f \bar{w}_u + (1-f) \bar{w}_g,$$

zodat uit (56) en (57) onmiddellijk volgt

$$\bar{w}_u = \frac{\rho\bar{s}}{1-f\rho}; \quad (58)$$

er geldt dus de relatie $\bar{w}_u/\bar{w}_g = 1-\rho$.

De gemiddelde rijlengten volgen direct uit de vergelijkingen (57) en (58) met behulp van het theorema " $L = \lambda W$ " (zie par. 1.4.2), dat ook voor de twee aparte groepen geldt: er is een systeem waar urgente klanten binnenkomen en na verloop van tijd weer uitgaan, enz.

Het verwachte aantal gewone resp. urgente karweien in het systeem is:

$$\bar{n}_g = \lambda_g(\bar{w}_g + \bar{s}) = \frac{(1-f)\rho}{(1-\rho)(1-f\rho)} (1-f\rho + f\rho^2), \quad (59)$$

$$\bar{n}_u = \lambda_u(\bar{w}_u + \bar{s}) = \frac{f\rho}{1-f\rho} (1 + \rho - f\rho). \quad (60)$$

Op drie dingen willen wij de aandacht vestigen. Het eerste is dat als $\rho \rightarrow 1$ de gemiddelde wachttijd van de urgente eindig blijft mits $f < 1$ is, terwijl de gewone een wachttijd krijgen waarvan de verwachtingswaarde naar oneindig gaat.

Wat het tweede betreft: Stel eens dat $f = 1$ is; alle karweien zijn dan urgent en het loket is weer een normaal enkel loketsysteem zoals onder 2.2.1 werd behandeld: $\bar{w}_u = \bar{w}$. Stel nu dat er toch één gewoon karwei tussen sluipt en dat dit karwei $\bar{n}$ (urgente) karweien voor zich ziet. De gemiddelde wachttijd van dit gewone karwei zou dan zijn, volgens (57), met $f = 1$:

$$\bar{w}_g = \frac{\bar{n}\bar{s}}{1-\rho} = \frac{\bar{n}^2 \bar{s}}{\rho} = \bar{n}^2/\lambda. \quad (61)$$

In deze tijd zouden arriveren $\lambda\bar{w}_g$ (urgente) karweien, m.a.w. er zouden gemiddeld $\bar{n}^2$ karweien arriveren alvorens de insluiper aan de beurt is en er dus geen (urgente) karweien meer zijn. Anders gezegd: bij het enkele loket met de gemiddelde rij $\bar{n}$ arriveren gemiddeld $\bar{n}^2$ karweien in de tijd dat de rij afneemt tot nul en het loket voor het eerst weer leeg is. Wij komen hier later op terug (zie par. 3.5 en 4.3).

Tenslotte nog het volgende:

Er werd gesteld dat het verwachte aantal urgente aankomsten in $\bar{w}_g$ gelijk is aan $\lambda_u\bar{w}_g$. Dit kan als volgt worden bewezen: $\bar{w}_g$ wordt beschouwd als de som van tijdsintervallen $\bar{t}_k$ ($k = 1, 2, \dots$), waarbij $\bar{t}_1$ de verwachtingswaarde is van de tijd t_1 nodig om alle karweien af te handelen die een binnenkomende gewone klant aantreft. In deze tijd arriveren gemiddeld $\lambda_u\bar{t}_1$ urgente karweien, omdat deze aankomsten per tijdseenheid onafhankelijk zijn van t_1 ; deze karweien hebben een verwachte duur $\bar{t}_2$ gelijk aan $\lambda_u\bar{t}_1 \bar{s}$. Op soortgelijke wijze geldt meer algemeen: $\bar{t}_k = \lambda_u \bar{s} \bar{t}_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots$).

Door sommatie over k kan hieruit ook de relatie (57) worden gevonden, omdat $\bar{t}_1 = \bar{n}\bar{s}$ is; wat ons echter interesseert is dat de lengte van t_k wordt bepaald door de aankomsten in t_{k-1} , d.w.z. dat het aantal aankomsten per tijdseenheid in het interval t_k onafhankelijk is van de grootte van dit interval, zodat het verwachte aantal urgente aankomsten $\lambda_u \bar{t}_k$ is. Sommatie levert voor het totale aantal urgente aankomsten in $\bar{w}_g$, de verwachtingswaarde

$$\lambda_u \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k = \lambda_u \bar{w}_g.$$

2.5 Netwerken van M/M/S-systemen

In par. 2.1 hebben wij gezien dat in een M/M/S-systeem in een tijdsintervalletje Δt , de kans op de overgang van toestand n naar toestand $n-1$ gelijk is aan $P_n \mu_n \Delta t$ (behoudens verwaarloosbare termen). Hieruit volgt dat de kans op een vertrek in Δt gelijk is aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \mu_n \Delta t = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \mu_n \Delta t = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \lambda_n \Delta t, \quad (62)$$

waarbij achtereenvolgens gebruik werd gemaakt van $\mu_0 = 0$ en de vergelijking (1); bij de sommatie werd aangenomen dat de verwaarloosde termen een verwaarloosbare kleine som opleveren (hetgeen bijvoorbeeld zeker korrekt is als μ_n en λ_n vanaf een zekere waarde van n konstanten zijn).

Als nu λ_n onafhankelijk is van n , zoals dat bijvoorbeeld het geval was in de paragrafen 2.2.1, 2.2.3, 2.3.2, dan kan het rechterlid van (62) geschreven worden als

$$\lambda \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \lambda \Delta t.$$

Met andere woorden: als de klanten volgens een Poissonproces een M/M/S-systeem binnenkomen, zodanig dat de parameter van dit proces onafhankelijk is van de toestand, dan lijkt ook het proces van de vertrekkende klanten een Poissonproces met dezelfde parameter te zijn. Dit is inderdaad het geval; deze stelling staat bekend als het theorema van Burke.

Strikt genomen hebben we laten zien dat de onvoorwaardelijke kans op een vertrek in Δt gelijk is aan $\lambda \Delta t$, maar niet aangetoond dat het vertrekproces een Poissonproces is; daarvoor is immers nodig dat ook de voorwaardelijke kans, gegeven de reeks van voorafgaande tijdstippen, hetzelfde oplevert. Wij gaan hier niet verder op in, Burke (ref. 6) heeft hier in 1956 een publikatie aan gewijd. Het geval van beperkte wachtgelegenheid is hierbij dus uitgesloten

omdat daar een deel van de klanten onverrichterzake wordt teruggestuurd.

Een keten of serieschakeling van een aantal M/M/S-systemen die van verschillende aard mogen zijn, zoals in bovengenoemde paragrafen, kan nu zonder meer doorgerekend worden door de beschouwde systemen als onafhankelijk te beschouwen (zie ref. 24).

Hierbij mag dan het laatste systeem in de serie wel een systeem met beperkte wachtgelegenheid zijn, omdat aan het vertrekproces van de klanten die de keten verlaten geen speciale eisen gesteld worden. Voorts mag de keten ook vertakkingen vertonen: na het verlaten van een M/M/S-systeem in een keten mogen de klanten bijvoorbeeld met een kans p naar een systeem A gaan en met een kans $1-p$ naar een systeem B. De klanten komen dan volgens een Poissonproces bij A en B binnen met respectievelijk als parameters $p\lambda$ en $(1-p)\lambda$. De toewijzing aan A en B moet wel stochastisch zijn en niet "om en om", daar anders de aankomsten niet volgens een Poissonproces zijn.

HOOFDSTUK 3

WACHTPROBLEMEN VAN HET TYPE M/G/1

In dit hoofdstuk komen de problemen aan de orde van een enkel loket met aankomsten volgens een Poissonproces, terwijl de karweiduren onafhankelijke trekkingen zijn uit een verdeling waarvan gemiddelde en spreiding bekend zijn.

Kendall (ref. 26) wijst erop dat, wanneer de toestand van het wachtsysteem enkel wordt beschreven door de rijlengte er in het algemeen geen sprake is van een Markovproces: de overgangskansen naar een andere toestand zijn in het algemeen afhankelijk van de tijd dat het systeem zich in die toestand bevindt. Het is echter mogelijk dat er, door Bartlett en Kendall zo genoemde, regeneratiepunten zijn, zodanig dat het proces wel een Markovproces is als uitsluitend gelet wordt op de toestand in die punten; m.a.w. wat er voor het regeneratiepunt gebeurd is speelt geen rol meer, alleen de toestand in het punt is bepalend. Als ieder tijdstip een regeneratiepunt is, dan is er sprake van een (echt) Markovproces; dit was het geval in hoofdstuk 2. In het geval dat hier wordt behandeld zou wat de aankomsten betreft ieder punt een regeneratiepunt zijn en wat de vertrekken betreft alleen de tijdstippen van een vertrek, zodat deze laatste tijdstippen de regeneratiepunten van het gehele proces vormen; men spreekt dan van een "ingebedde Markovketen".

Als zowel de aankomstintervallen als de karweiduren van algemene aard zijn is er alleen sprake van regeneratie als een klant arriveert voor een leeg loket en op de tijdstippen dat een klant arriveert op het moment dat een andere vertrekt. Beide soorten tijdstippen komen te weinig voor om nog tot een zinvolle Markovbeschrijving van het proces te komen: er gebeurt teveel tussen twee regeneratiepunten.

In het volgende worden twee methodes behandeld voor het oplossen van problemen met Poissonaankomsten. In de eerste methode wordt het wachtproces bekeken in de regeneratiepunten (hier: vertrektijdstippen) terwijl in het tweede geval het proces wordt onderzocht vanuit het gezichtspunt van een binnenkomende klant.

3.1 De methode van Kendall

In het kader van een operationele aanpak van wachtproblemen mag zeker niet ontbreken de eenvoudige doch fraaie afleiding die Kendall (ref. 26) heeft gegeven voor wachtproblemen van het type M/G/1. Hij behandelt het probleem op de volgende wijze.

Stel dat na het beëindigen van een karwei de vertrekkende klant in totaal $\underline{k}$ klanten achter zich laat en dat de klant die na hem vertrekt $\underline{k}'$ klanten achterlaat, dan geldt:

$$\underline{k}' = \underline{k} - 1 + \delta + a ; \quad (1)$$

hierin is a het aantal aankomsten tijdens de karweiduur van laatstgenoemde klant en

$$\underline{\delta} = \begin{cases} 0 & \text{als } \underline{k} \neq 0, \\ 1 & \text{als } \underline{k} = 0 \text{ is.} \end{cases} \quad (2)$$

Substitutie van (2) in (1) toont direkt de juistheid van vergelijking (1) aan. Uit de definitie (2) volgt de verwachtingswaarde van δ :

$$E(\delta) = 0 \cdot P(\underline{k} \neq 0) + 1 \cdot P(\underline{k} = 0) = P(\underline{k} = 0). \quad (3)$$

Als er een statistisch evenwicht bestaat zal de kansverdeling van $\underline{k}'$ gelijk zijn aan die van $\underline{k}$, zodat in het bijzonder

$$E(\underline{k}') = E(\underline{k}), \quad E(\underline{k}'^2) = E(\underline{k}^2). \quad (4)$$

Nemen we van het rechter- en linkerlid van verg. (1) de verwachtingswaarde, dan volgt daaruit m.b.v. (4)

$$E(\underline{\delta}) = 1 - E(\underline{a}). \quad (5)$$

Wegens (3) en (5) is $E(\underline{a}) = P(\underline{k} \neq 0)$, d.w.z. dat $E(\underline{a}) \leq 1$ moet zijn.

Als $E(\underline{a}) > 1$ is zal geen statistisch evenwicht bestaan, hetgeen ook wel duidelijk is als we bedenken dat $\underline{a}$ het aantal aankomsten per karweiduur is, zodat $E(\underline{a})$ de bezettingsgraad van het loket is; stel deze laatste gelijk aan ρ (met $\rho < 1$).

Kwadrateren van de vergelijking (1) leidt tot

$$\underline{k}'^2 = \underline{k}^2 + 1 + \underline{\delta}^2 + a^2 - 2\underline{k} + 2\underline{k}\underline{\delta} + 2\underline{k}a - 2\underline{\delta} - 2a + 2\underline{\delta}a \quad (6)$$

Bedenken wij dat uit (2) volgt

$$\underline{\delta}^2 = \underline{\delta}, \quad \underline{k}\underline{\delta} = 0,$$

terwijl $E(\underline{k}^2) = E(\underline{k}^2)$, dan levert de verwachting van linker- en rechterlid van (6):

$$1 - \underline{\delta} + \underline{a}^2 - 2\underline{k} + 2\underline{k}\underline{a} - 2\underline{a} + 2\underline{\delta}\underline{a} = 0.$$

Wegens de Poissonaankomsten is $\underline{a}$ onafhankelijk van $\underline{k}$ en dus ook van $\underline{\delta}$, zodat voorts geldt

$$\underline{k}\underline{a} = \underline{k} \underline{a}, \quad \underline{\delta}\underline{a} = \underline{\delta} \underline{a},$$

hetgeen gesubstitueerd, onder gebruikmaking van (5) de volgende relatie voor $\underline{k}$ geeft:

$$\underline{k} = \frac{\underline{a} - 2\underline{a}^2 + \underline{a}^2}{2(1-\underline{a})}, \quad (\underline{a} = \rho < 1). \quad (7)$$

Daar $\underline{a}$ onafhankelijk is van $\underline{k}$ geldt voor de variantie van het aantal aankomsten in een karweiduur $\underline{s} = s$ de volgende formule (met gebruik van verg. (25) uit hoofdstuk 1):

$$E(\underline{a}^2 | \underline{s} = s) - E^2(\underline{a} | \underline{s} = s) = E(\underline{a} | \underline{s} = s).$$

Met gemiddeld λ aankomsten per tijdseenheid, onafhankelijk van de waarde van $\underline{s}$, gaat deze vergelijking over in

$$\underline{a}^2 = \lambda^2 \underline{s}^2 + \lambda \underline{s};$$

hierbij is $\lambda \underline{s} = \underline{a} = \rho$ het verwachte aantal aankomsten per karweiduur, ofwel de bezettingsgraad. Substitutie hiervan in (7) leidt tot

$$\underline{k} = \frac{\lambda^2 \cdot \underline{s}^2}{2(1-\rho)} + \rho. \quad (8)$$

De klanten die een vertrekkende klant achterlaat zijn binnengekomen gedurende de doorlooptijd (wachttijd + karweiduur) van de klant, zodat

$$\underline{k} = \lambda(\underline{w} + \underline{s}),$$

hetgeen gesubstitueerd in (8), met $\lambda \underline{s} = \rho$ oplevert:

$$\frac{\underline{w}}{\underline{s}} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \cdot \frac{\underline{s}^2}{\underline{s}^2}, \quad (9)$$

zijnde de formule van Pollaczek-Khintchine voor de gemiddelde wachttijd.

In het voorgaande werd het proces onderzocht op de tijdstippen waarop een klant vertrekt. Het is echter ook mogelijk het systeem te onderzoeken op de tijdstippen dat een klant arriveert; dit geval wordt nu behandeld.

3.2 Prikmethode

De naam "prikmethode" werd in par. 1.4.4 ingevoerd. In het volgende wordt de methode toegepast voor stationaire problemen van het type M/G/1.

In feite werd in hoofdstuk 2, o.a. in de paragrafen 2.2.1 en 2.2.4 bij de bepaling van gemiddelde wachttijden, reeds gebruik gemaakt van deze methode in het bijzondere geval van negatief-exponentieel verdeelde karweiduren, waarbij de verwachte resterende karweiduur bij toevallig prikken gelijk is aan de gemiddelde levensduur.

Een volgens een Poissonproces arriverende klant, die voor een bezet loket komt, zal gemiddeld een aantal klanten aantreffen dat wordt aangegeven met $\bar{n}$. Van deze klanten staan er $\bar{n}-1$ in de wachtrij; hun totale verwachte karweiduur bedraagt $(\bar{n}-1)\bar{s}$. Het ene karwei dat onderhanden is heeft een rest-karweiduur waarvan de verwachting gelijk gesteld wordt aan $\alpha\bar{s}$. Als de rijdiscipline onafhankelijk is van de karweiduur dan speelt zij geen rol bij de bepaling van de gemiddelde wachttijd; zonder bezwaar kunnen we dan een FIFO-discipline veronderstellen. De gemiddelde wachttijd van de klant is derhalve:

$$\bar{w} = (\bar{n}-1 + \alpha) \bar{s}.$$

Als er gemiddeld λ klanten per tijdseenheid arriveren is de verwachte hoeveelheid binnenkomend werk per tijdseenheid gelijk aan $\lambda\bar{s}$; dit betekent voor de bezettingsgraad van het loket: $\rho = \lambda\bar{s}$. De waarde ρ geeft, met toepassing van "L = N" (formule (30) uit hoofdstuk 1), de kans dat de klant het loket bezet aantreft; de onvoorwaardelijke gemiddelde wachttijd en rijlengte bedragen daarom, respectievelijk, $\bar{w} = \rho\bar{w}$ en $\bar{n} = \rho\bar{n}$. Hieruit volgt

$$\bar{w} = (\bar{n} - 1 + \alpha) \bar{s}, \tag{10}$$

waarin

$$\alpha = 1 - \rho + \alpha\rho. \tag{11}$$

Toepassing van het theorema " $K = N$ " (formule (29) uit hoofdstuk 1) levert

$$\bar{n} = \lambda(\bar{w} + \bar{s}). \quad (12)$$

Eliminatie van $\bar{w}$ uit (10) en (12) geeft

$$\bar{n} = \frac{\alpha \rho}{1 - \rho}; \quad (13)$$

terwijl eliminatie van $\bar{n}$, samen met (11), leidt tot

$$\frac{\bar{w}}{\bar{s}} = \frac{\alpha \rho}{1 - \rho}. \quad (14)$$

In par. 1.2.2 hebben we gezien dat de restlevensduur van een karwei, waarin door een Poisson-arriverende klant wordt geprikt gelijk is aan $\bar{s}^2/2\bar{s}$, welke tijd wij $\alpha\bar{s}$ genoemd hebben; derhalve geldt:

$$\alpha = \frac{\bar{s}^2}{2\bar{s}^2}. \quad (15)$$

Opmerkingen:

1. Het is dus zo dat de gemiddelde lengte van een aselekt gekozen karwei $\bar{s}$ bedraagt, terwijl de gemiddelde lengte van een karwei tijdens welks uitvoering een klant arriveert $\bar{s}^2/\bar{s}$ bedraagt.
2. Substitutie van (15) in (14) levert direct de formule (9) van Pollaczek-Khintchine.
3. In plaats van de vergelijkingen (10) en (11) kunnen we ook zeggen dat er gemiddeld ρ klanten aan het loket staan en $\bar{n} - \rho$ in de wachtrij, zodat de (verwachte) wachttijd van een nieuwkomer gelijk is aan

$$\bar{w} = (\bar{n} - \rho)\bar{s} + \rho\alpha\bar{s}. \quad (16)$$

Oliver (ref. 37) geeft een soortgelijke afleiding van de formule van Pollaczek-Khintchine.

Hij start met de vergelijking (16) in de volgende vorm (in onze notatie):

$$\bar{w} = \rho \bar{w} + \frac{\lambda \bar{s}^2}{2},$$

waarbij de tweede term in het rechterlid eveneens gebaseerd is op de restlevensduur terwijl de eerste term volgt uit het theorema " $L = \lambda W$ " (par. 1.3.2) toegepast op de wachtrij, waarvoor de doorlooptijd $\bar{w}$ is, met gebruikmaking van $\rho = \lambda \bar{s}$.

3.3 Voorbeelden van de gevonden relaties

3.3.1 *Karweiduren negatief-exponentieel verdeeld*

Het kenmerkende van deze verdeling is dat de tijd die nog aan een onderhanden zijnd karwei moet worden besteed, onafhankelijk is van de tijd die er reeds aan besteed is; anders gezegd: de kans dat het karwei beëindigd wordt in het komende tijdje Δt is op ieder tijdstip dat het karwei nog in behandeling is, even groot. Dus is de waarde van α gelijk aan één.

De vergelijkingen (13) en (14) gaan dan over in:

$$\bar{n} = \frac{\bar{w}}{\bar{s}} = \frac{\rho}{1-\rho}; \quad (17)$$

een relatie die in het tweede hoofdstuk reeds ter sprake kwam.

3.3.2 *Konstante karweiduren*

Het is direkt in te zien, dat volgt trouwens ook uit (15), dat $\alpha = 1/2$ is; substitutie in (10) geeft

$$\alpha = 1 - \frac{\rho}{2},$$

zodat

$$\frac{\bar{w}}{\bar{s}} = \frac{\rho}{2(1-\rho)}, \quad \bar{n} = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}. \quad (18)$$

Door het wegnemen van het toevallig karakter uit de karweiduren is de gemiddelde wachttijd dus met de helft verminderd.

3.3.3 *Karweiduren gamma verdeeld*

De kansdichtheid van de karweiduren is in dit geval

$$f(s) = \frac{\mu(\mu s)^{k-1} \cdot e^{-\mu s}}{\Gamma(k)}, \quad (k > 0); \quad (19)$$

De gemiddelde waarde en de variantie van de verdeling bedragen

$$\begin{aligned} E(s) &= \bar{s} = k/\mu \\ \sigma_s^2 &= \text{Var}(s) = s^2 - \bar{s}^2 = k/\mu^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Opmerkingen:

1. Zijn van een gamma-verdeling $\bar{s}$ en σ_s gegeven dan volgen k en μ uit (19):

$$k = \left(\frac{\bar{s}}{\sigma_s}\right)^2, \quad \mu = \frac{\bar{s}}{\sigma_s^2}. \quad (21)$$

2. de gamma-verdelingen worden ook wel Erlang-verdelingen genoemd (in het bijzonder als k geheel is).

Uit (15) en (20) volgt onmiddellijk dat $\alpha = (k+1)/2k$ is, zodat (14) overgaat in

$$\frac{\bar{w}}{\bar{s}} = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{k+1}{2k}. \quad (22)$$

De rijlengte wordt met (10) en (13)

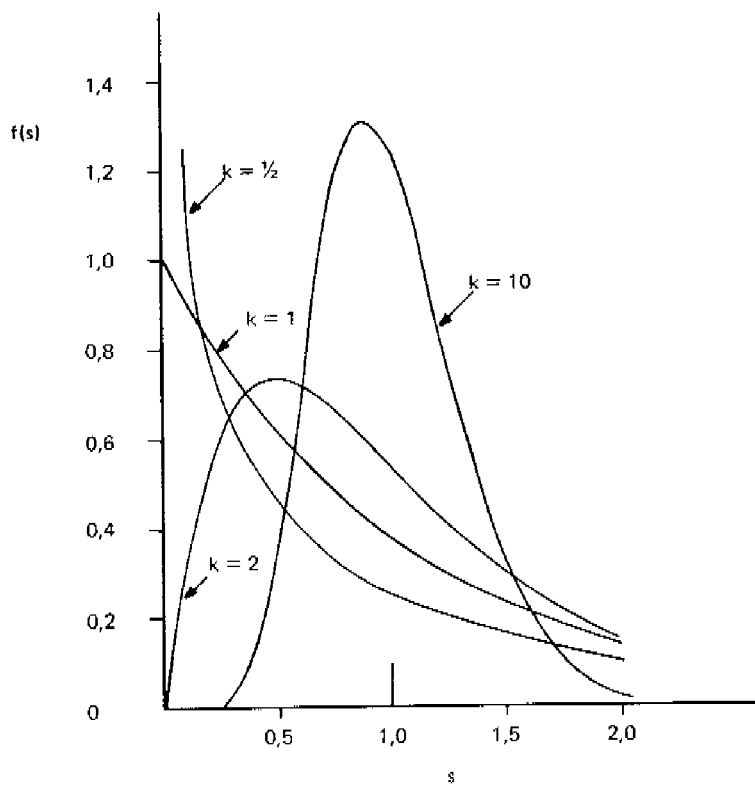
$$\bar{n} = \frac{2k\rho - \rho^2(k-1)}{2k(1-\rho)}. \quad (23)$$

Voor grote waarden van k nadert α tot $1/2$, zodat geval 3.3.2 weer terugkeert. Dit kan ook als volgt worden ingezien. Vergelijken wij gamma-verdelingen met dezelfde gemiddelde waarde $\bar{s}$ maar met verschillende waarden van k , dan zien wij uit de verg. (21) dat bij toenemende k de spreiding σ_s klein wordt t.o.v. de gemiddelde waarde, zodat de gamma-verdeling overgaat in de verdeling van een grootheid die geconcentreerd is om één waarde nl. de gemiddelde (met een zeer kleine spreiding). De waarde van k hoeft niet zo erg groot te zijn, opdat geval 3.3.2 al een redelijke benadering is van 3.3.3.

Voorbeeld: $\bar{s}/\sigma_s = 3$, dus $k = 9$ en $\alpha = 5/9$; de benadering 3.3.2 geeft dan een waarde voor $\bar{w}/\bar{s}$ die ca. 11% te laag is.

Voor $k = 1$ komt geval 3.3.1 terug: de negatief-exponentiële verdeling is een bijzonder geval van de gamma-verdeling.

We merken op dat met de gamma-verdelingen een groot aantal verdelingen kunnen worden beschreven: van zuiver toevallig verdeelde karweiduren tot konstante toe. Zie ter illustratie ook figuur 10, waarin een aantal verdelingen zijn getekend met dezelfde gemiddelde waarde: $\bar{s} = 1$.



figuur 10 Enkele gamma-verdelingen; $\bar{s} = 1$; formule (19).

Bakker (ref. 4, pag. 21) leidt de formule (23) af als voorbeeld van het oplossen van wachtproblemen. Hij gebruikt, evenals Morse (ref. 34, pag. 72), Ferschl (ref. 21, pag. 130) e.a. een fasen-methode voor het oplossen van dit vraagstuk. Bakker beperkt zich tot het geval dat k geheel is, men kan dan de gamma-verdeling van de karweiduren opvatten als te zijn ontstaan door sommatie van k negatief-exponentieel verdeelde duren. Het enkele loket is dan te beschouwen als een serieschakeling van k loketten (k fasen) ieder met negatief-exponentieel verdeelde karweiduren. Pas als een karwei alle fasen heeft doorlopen is het beëindigd terwijl ook pas dan een nieuw karwei tot de eerste fase kan worden toegelaten. Vervolgens wordt ingevoerd de kans P_{nj} , dat het systeem n klanten bevat, waarvan $n-1$ in de wachtrij, terwijl de in bediening zijnde klant zich in fase j bevindt. De overgangsmatrix wordt opgesteld en vervolgens de vergelijking van Chapman-Kolmogorov voor de evenwichtstoestand. Daarna wordt overgegaan op de genererende functies van de kansen P_{nj} en van de kansen P_n dat het systeem in toestand n is. Het voordeel hiervan is dat het dan mogelijk is bijvoorbeeld de gemiddelde waarde van n te bepalen zonder de waarden P_n expliciet te kennen. Na vrij veel rekenwerk wordt dan tenslotte de voortbrengende functie $W(z)$ van P_n gevonden. Als laatste stap vinden we dan

$$\bar{n} = \lim_{z \rightarrow 1} z \frac{dW}{dz},$$

waarbij eerst $W(z)$ nog als een machtreeks van $1-z$ moet worden geschreven om de moeilijkheid van een onbepaalde vorm het hoofd te bieden.

De beschreven gang van zaken, welke sneller is opgeschreven dan uitgevoerd, is kenmerkend voor vele wachtproblemen en als zodanig geschikt om als voorbeeld te dienen.

Wanneer men echter, zoals dat vaak het geval is, met de praktikus, slechts geïnteresseerd is in gemiddelde wachttijden, rijlengten e.d. dan is de geschetste methode veel te zwaar. Voor een expliciete bepaling van de kansen P_n komt men trouwens ook niet veel verder dan het geval $k = 2$ (zie Morse).

Wanneer de waarde van $k < 1$ is, dan is $\alpha > 1$, d.w.z. dat de tijd die aan een onderhanden zijnde karwei (als een klant arriveert) nog moet worden besteed, gemiddeld groter is dan de gemiddelde karweiduur.

$k < 1$ betekent ook dat de spreiding groter is dan de gemiddelde waarde: zie vergelijking (21).

3.3.4 Karweiduren hyperexponentieel verdeeld

Een andere verdeling waarvoor ook $\alpha > 1$ is wordt nu behandeld; het is de z.g. hyperexponentiële verdeling. De verdeling wordt als volgt ingevoerd: er zijn twee (negatief-)exponentiële verdelingen met als gemiddelden:

$$\bar{s}_1 = \frac{1}{2a\mu}, \quad \bar{s}_2 = \frac{1}{2(1-a)\mu}, \quad (0 < a \leq \frac{1}{2}).$$

De hyperexponentieel verdeelde karweiduur wordt nu met een kans a uit de eerste en met een kans $1-a$ uit de tweede verdeling getrokken. De gemiddelde waarde van de karweiduren is daardoor:

$$\bar{s} = a \cdot \frac{1}{2a\mu} + (1-a) \cdot \frac{1}{2(1-a)\mu} = \frac{1}{\mu}.$$

Ieder van de exponentiële verdelingen heeft een standaard-deviatie gelijk aan de gemiddelde waarde (m.a.w. $\bar{s}_1^2 = 2\bar{s}_1^2$ en $\bar{s}_2^2 = 2\bar{s}_2^2$) zodat voor de hyperexponentiële verdeling geldt:

$$\bar{s}^2 = a \cdot 2\bar{s}_1^2 + (1-a)2\bar{s}_2^2 = \frac{1}{2a\mu^2} + \frac{1}{2(1-a)\mu^2} = \frac{1}{2\mu^2 a(1-a)}.$$

De waarde van α uit vergelijking (15) is dus:

$$\alpha = \frac{1}{4a(1-a)},$$

zodat met (14)

$$\frac{\bar{w}}{\bar{s}} = \frac{\rho}{4a(1-a)(1-\rho)}; \quad (24)$$

terwijl met (10) en (13)

$$\bar{n} = \frac{\rho^2 + 4a(1-a) \cdot \rho(1-\rho)}{4a(1-a) \cdot (1-\rho)}. \quad (25)$$

Deze relatie wordt ook door Morse (ref. 34, pag. 82) gegeven, zij het dat hij weer een weg bewandelt als onder 3.3.3 werd geschetst.

Daar de dichtheidsfuncties van de twee exponentiële verdelingen van de volgende gedaante zijn

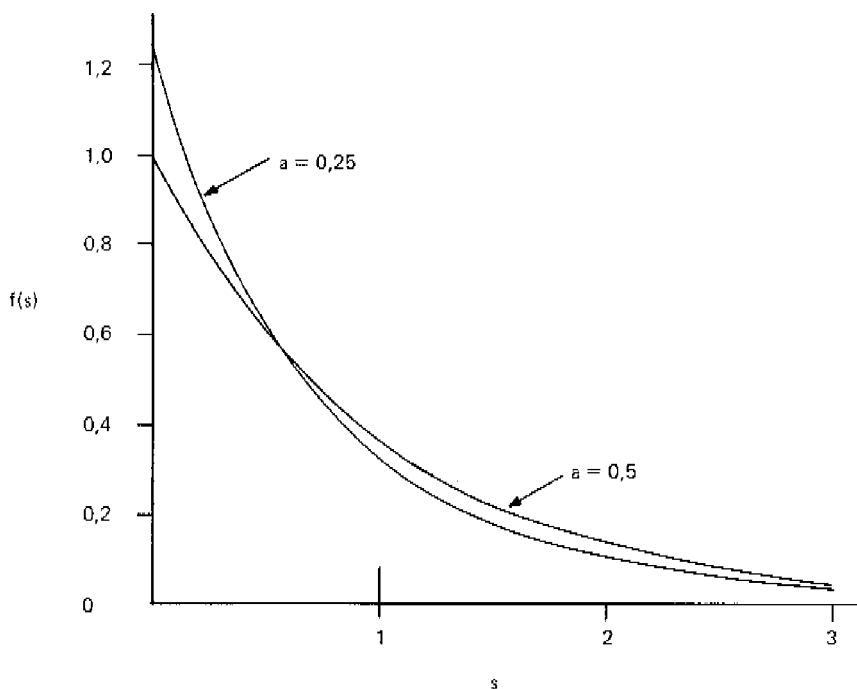
$$2a\mu e^{-2a\mu s} \quad \text{en} \quad 2(1-a)\mu e^{-2(1-a)\mu s},$$

is het duidelijk dat de hyperexponentiële verdeling de volgende dichtheidsfunctie heeft:

$$f(s) = 2a^2 \mu e^{-2a\mu s} + 2(1-a)^2 \mu e^{-2(1-a)\mu s}, \quad (26)$$

Ter illustratie is in figuur 11 een hyperexponentiële verdeling getekend met $a = 0,25$; als vergelijking is in de figuur ook geschetst een exponentiële verdeling ($a = 0,5$).

Wij zien dat de hyperexponentiële verdeling relatief wat meer korte karweien heeft dan de exponentiële; ook de zeer lange karweien komen iets meer voor.



figuur 11 Hyperexponentiële verdeling met $a = 0,25$ en een exponentiële verdeling ($a = 0,5$); $\mu = 1$; formule (26).

3.4 Variantie van rijlengte en wachttijd

De wachttijd van een klant bestaat uit twee delen, namelijk een deel nodig om het karwei dat onderhanden is af te maken (de restkarweiduur) en het deel dat nodig is om de andere karweien uit de wachtrij, die nog voorgaan, af te handelen. Voor de berekening van de gemiddelde wachttijd kunnen de verwachtingswaarden van de twee delen worden opgeteld, zoals in de paragraaf 3.2 is gebeurd. Voor de berekening van de variantie moeten wij echter bedenken dat de twee delen geen onafhankelijke stochastische variabelen zijn; een lange wachtrij kan betekenen dat het onderhanden zijnde karwei erg lang duurt. Deze afhankelijkheid tussen de duur van een karwei en het aantal aankomsten in deze karweiduur wordt bij de methode beschreven in paragraaf 3.1 in rekening gebracht. Wij keren daarom terug naar de methode van Kendall.

Door de relatie (1) te kwadrateren en vervolgens de verwachtingswaarde van het linker- en rechterlid te nemen, werd bij de methode van Kendall de gemiddelde waarde van de "achterblijvende" rij bepaald. Door de derde macht te nemen van de vergelijking (1) is het mogelijk een relatie af te leiden voor de variantie van de rijlengte. Maken wij gebruik van de uit (2) volgende relaties

$$\underline{\delta}^3 = \underline{\delta}^2 = \underline{\delta},$$

$$\underline{k}\underline{\delta}^2 = \underline{k}^2 \underline{\delta} = \underline{k}\underline{\delta} = 0$$

en voorts van de relaties $\bar{\delta} = 1 - \rho$ en $\bar{a} = \rho$, dan leidt de derde macht tot de vergelijking

$$\bar{k}^3(1-\rho) = \bar{k}(1-2\rho+\bar{a}^2) + \rho(\rho-\frac{1}{3}) - \rho\bar{a}^2 + \frac{\bar{a}^3}{3}. \quad (27)$$

Ook hier geldt de in paragraaf 3.1 gebruikte relatie

$$\bar{a}^2 = \lambda^2 \bar{s}^2 + \lambda \bar{s}, \quad (28)$$

terwijl het derde moment van het aantal aankomsten per karweiduur op de volgende wijze wordt bepaald. Voor het aantal klanten dat volgens een Poissonproces in een vaste tijd s arriveert geldt

$$E(a^3 | \underline{s} = s) = E^3(a | \underline{s} = s) + 3E^2(a | \underline{s} = s) + E(a | \underline{s} = s),$$

zodat met $E(a | \underline{s} = s) = \lambda s$, gevonden wordt voor het onvoorwaardelijk derde moment van $\underline{a}$:

$$\bar{a}^3 = \lambda^3 \bar{s}^3 + 3\lambda^2 \bar{s}^2 + \rho. \quad (29)$$

Substitutie van (28) en (29) in (27) leidt tot

$$\bar{k}^2 = \bar{k} \left(1 + \frac{\lambda^2 s^2}{1-\rho} \right) + \lambda^2 s^2 + \frac{\lambda^3 s^3}{3(1-\rho)}. \quad (30)$$

De doorlooptijd van een klant zij $\underline{T}$ ($= \underline{w} + \underline{s}$). Voor het aantal aankomsten van nieuwe klanten in deze tijd geldt, op soortgelijke wijze als in de vergelijking (28),

$$\bar{k}^2 = \lambda^2 \bar{T}^2 + \lambda \bar{T} = \lambda^2 \sigma_T^2 + \bar{k}^2 + \bar{k}. \quad (31)$$

Aangezien de wachttijd van een klant onafhankelijk is van zijn eigen karweiduur is

$$\sigma_T^2 = \sigma_w^2 + \sigma_s^2, \quad (32)$$

zodat uit (31) en (32) volgt

$$\bar{k}^2 = \lambda^2 \sigma_w^2 + \lambda^2 \sigma_s^2 + \bar{k}^2 + \bar{k}. \quad (33)$$

Uit deze vergelijking volgt, na substitutie van (30):

$$\sigma_w^2 = \bar{k} \frac{s^2}{1-\rho} + \frac{\lambda s^3}{3(1-\rho)} + s^2 - \frac{\bar{k}^2}{\lambda^2}, \quad (34)$$

hetgeen met gebruikmaking van de formules (11) t/m (15) overgaat in

$$\sigma_w^2 = \bar{w}^2 + \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{\bar{s}^3}{3\bar{s}}, \quad (35)$$

terwijl de vergelijking (33) geschreven kan worden als

$$\sigma_k^2 = \bar{k} + \lambda^2 (\sigma_w^2 + \sigma_s^2), \quad (36)$$

in welke vergelijking k vervangen mag worden door n .

Wij willen nog het volgende opmerken.

1. De grootheid $\bar{s}^3/3\bar{s}$ die voorkomt in de relatie (35) is het tweede moment van de rest-karweiduur. Uit vergelijking (16) van hoofdstuk 1 volgt immers

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 f_1(x) dx &= \frac{1}{\bar{s}} \int_0^\infty x^2 \int_x^\infty f(s) ds = \frac{1}{\bar{s}} \int_0^\infty f(s) ds \int_0^\infty x^2 dx = \\ &= \frac{1}{3\bar{s}} \int_0^\infty s^3 f(s) ds = \bar{s}^3/3\bar{s}. \end{aligned} \quad (37)$$

2. Uit de relatie (35) blijkt dat de spreiding in de wachttijd groter is dan de gemiddelde wachttijd. Dit betekent dat in praktische gevallen aanzienlijke afwijkingen van de verwachtingswaarde kunnen optreden.

3.5 Lengte van de bezette periode

In een lange tijd T is het loket gedurende de tijd $t = (1-\rho)T$ niet bezet, als ρ de bezettingsgraad is. Deze tijd zal de som zijn van een aantal lege perioden. Hoe groot dit aantal gemiddeld is kan worden bepaald door te bedenken dat een lege periode begint met een vertrek en eindigt met een aankomst. Wanneer de aankomsten volgens een Poissonproces zijn is de afstand tussen een vertrek en de eerstvolgende aankomst gemiddeld gelijk aan $1/\lambda$ zodat dit de gemiddelde lengte van een lege periode is. Het verwachte aantal lege perioden in T bedraagt daarom λt , welk aantal even groot is als dat van de bezette perioden omdat iedere lege periode wordt gevolgd door een bezette en omgekeerd.

In de tijd T is het loket bezet gedurende de tijd ρT , zodat uit bovenstaande volgt dat de gemiddelde lengte $\bar{l}$ van een bezette periode bedraagt $\rho T / \lambda t$, ofwel

$$\bar{l} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\bar{s}}{1-\rho}. \quad (38)$$

Het aantal behandelde karweien m in een bezette periode is gemiddeld $\bar{l}/\bar{s}$:

$$\bar{m} = \frac{1}{1-\rho}. \quad (39)$$

Deze afleiding is te vinden bij Cox en Smith (ref. 16, pag. 58). De afleiding van (38) wordt ook gegeven door Takács (ref. 53, remark 3, pag. 34).

Een andere afleiding van (38) en (39) is de volgende.

De bezette periode begint met één karwei; gedurende de periode arriveren gemiddeld $\lambda \bar{l}$ karweien, zodat het totaal aantal verwerkte karweien gelijk is aan $\bar{m} = 1 + \lambda \bar{l}$, met een totale duur van $\bar{l} = \bar{m} \bar{s}$. De laatste twee gelijkheden leveren onmiddellijk de relaties (38) en (39). Dat het verwachte aantal aankomsten in een bezette periode gelijk is aan $\lambda \bar{l}$ kan op dezelfde wijze worden aangetoond als aan het slot van par. 2.4.1 is gebeurd. In het huidige geval is dan $\underline{t}_1$ de duur van het karwei waarmee de bezette periode begint, $\underline{t}_2$ de totale duur van de karweien die aankomen in $\underline{t}_1$ enz.

Tenslotte nog het volgende: In het stationaire geval is $P_0 = 1-\rho$, d.w.z. dat bij Poisson-aankomsten 1 op de $1/(1-\rho)$ klanten voor een leeg loket komt zodat we kunnen zeggen dat de bezette periode gemiddeld bestaat uit $1/(1-\rho)$ klanten; verg. (39).

Voor de gemiddelde rijlengte geldt

$$\bar{n} \equiv E(\underline{n}) = E(\underline{n} | n = 0) \cdot P(n = 0) + E(\underline{n} | \underline{n} > 0) \cdot P(\underline{n} > 0),$$

waarin $E(\underline{n} | \underline{n} = 0)$ uiteraard nul is, terwijl $P(\underline{n} > 0)$ gelijk is aan ρ .

Met (13) vinden wij dan:

$$E(\underline{n} | \underline{n} > 0) \equiv \bar{n} = \frac{\bar{\alpha}}{1-\rho}. \quad (40)$$

Opmerking: Als de karweien exponentieel verdeeld zijn is $\bar{\alpha} = 1$, zodat dan, wegens (39) en (40)

$$\bar{m} = \bar{n}. \quad (41)$$

Zij bijvoorbeeld $\rho = 0,9$, dan is $\bar{m} = \bar{n} = 10$.

Dit betekent dat in een bezette periode gemiddeld 10 klanten worden afgehandeld terwijl anderzijds een klant die arriveert in zo'n periode gemiddeld 10 klanten aantreft, hetgeen toch wel paradoxaal aandoet. Immers als er precies 10 karweien in een periode worden afgehandeld zal het i^{e} karwei ($i = 2, 3, \dots, 10$) tenminste 1 en ten hoogste $i-1$ klanten aantreffen zodat het gemiddeld aantal aangetroffen klanten zeker minder is dan 10.

Wij zullen hierop nader ingaan.

Wanneer het loket bezet is kan men vragen hoe lang de bezette periode nog zal duren. Om deze vraag te beantwoorden doen wij het volgende gedachten-experiment: op een willekeurig ogenblik in een bezette periode (Poissonaankomst) plaatsen wij een karweiloze klant of toeschouwer achter in de wachtrij. Gemiddeld moet hij $\bar{w}$ (= wachttijd als er een rij is) wachten voor hij aan de beurt is. Zodra dat het geval is gaat hij weer achter in de rij staan om de klanten die na hem zijn binnengekomen voor te laten gaan; het aantal daarvan bedraagt gemiddeld $\lambda \bar{w}$. De toeschouwer moet dus nu een tijd $\lambda \bar{w}$ ofwel $\rho \bar{w}$ wachten alvorens hij weer aan de beurt is; dan gaat hij weer achter in de rij staan, enzovoort. In totaal brengt hij op deze manier gemiddeld voor het loket door de tijd $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \bar{w} + \rho \bar{w} + \rho^2 \bar{w} + \dots = \frac{\bar{w}}{1-\rho}, \quad (42)$$

daarna is er geen rij meer.

In het bovenstaande kwam de toeschouwer aan in een bezette periode. Laten we deze voorwaarde vallen dan wordt de tijd die de toeschouwer gemiddeld moet wachten alvorens het loket geheel leeg is:

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{w}}{1-\rho} = \frac{\alpha \bar{s} \rho}{(1-\rho)^2}. \quad (43)$$

Het verwachte aantal aankomsten in deze tijd is $\lambda \bar{\tau}$, zodat dit aantal gelijk wordt aan $\bar{n}^2$ als de karweiduren exponentieel verdeeld zijn ($\alpha = 1$); dit resultaat werd ook in par. 2.4.1 gevonden. Omdat de toeschouwer gemiddeld $\bar{n}$ karweien aantreft worden er dan $\bar{n}^2 + \bar{n}$

afgehandeld voor het loket leeg is, welk aantal gelijk is aan $\bar{\tau}/\bar{s}$. Zijn de karweiduren niet exponentieel verdeeld dan is het verwachte aantal aankomsten in $\bar{\tau}$

$$\lambda \bar{\tau} = \alpha \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)^2 = \frac{\alpha \bar{n}^2}{\bar{\alpha}^2}. \quad (44)$$

De spreiding van de lengte van de bezette periode kan ook op eenvoudige wijze berekend worden:

Zij de gemiddelde lengte van een bezette periode gelijk aan $\bar{l}$. De toeschouwer komt binnen tijdens de bezette periode die daarna nog een tijd $\bar{\tau}$ duurt, hetgeen we gelijkstellen aan $\beta \bar{l}$. Op grond van eenzelfde overweging als bij formule (15), geldt

$$\beta = \frac{\bar{l}^2}{2\bar{l}^2}, \quad (45)$$

zodat de volgende relatie bestaat

$$\bar{\tau} = \beta \bar{l}, \text{ dus } \frac{\bar{w}}{1-\rho} = \frac{\bar{l}^2}{2\bar{l}}.$$

Bedenken we dan (met (14))

$$\bar{w} = \frac{\bar{w}}{\rho} = \frac{\alpha \bar{s}}{1-\rho},$$

terwijl $\bar{l}$ gegeven is door (38), dan geldt:

$$\bar{l}^2 = \frac{2\alpha \bar{s}^2}{(1-\rho)^2}, \quad (46)$$

hetgeen ook geschreven kan worden als:

$$\sigma_l^2 = \frac{\bar{s}^2}{(1-\rho)^3} (2\alpha - 1 + \rho), \quad (47)$$

ofwel als

$$\frac{\sigma_l}{\bar{l}} = \sqrt{\frac{2\alpha - 1 + \rho}{1 - \rho}}. \quad (48)$$

Uit de vergelijkingen (46), (38) en (45) volgt

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\rho}. \quad (49)$$

Kiezen wij tenslotte een eenvoudig voorbeeld om de formules toe te lichten:

de karweiduren zijn exponentieel verdeeld met als gemiddelde waarde één uur; dit betekent $\alpha = \bar{\alpha} = \bar{s} = 1$. Uit het voorgaande volgt dan, met $\rho = 0,9$:

$$\bar{n} = 9, \quad \bar{w} = 9 \text{ uren,}$$

$$\bar{m} = \bar{n}' = \beta = 10, \quad \bar{l} = \bar{\psi}' = 10 \text{ uren,}$$

$$\bar{\tau} = 90 \text{ uren,} \quad \bar{\tau}' = 100 \text{ uren,}$$

$$\frac{\sigma_l}{l} = 4,36, \text{ dus } \sigma_l = 43,6 \text{ uren.}$$

Terugkerend tot de eerder genoemde paradox; als $\bar{n}' = 10$ is hoe kan $\bar{m}$ dan ook 10 zijn? De oplossing is in feite al gegeven in opmerking 1 na formule (15). De toeschouwer die in een bezette periode prikt treft gemiddeld 10 karweien aan, moet gemiddeld 10 uren wachten alvorens hij aan de beurt zou zijn, hij prikt evenwel in een periode die gemiddeld 200 uren ($= 2\bar{\tau}$) duurt: er wordt weinig geprikt in de vele korte perioden die ervoor zorgen dat $\bar{l}$ en $\bar{m}$ betrekkelijk klein zijn.

Dat er veel korte perioden zijn moge blijken uit het volgende: de kans f dat tijdens de uitvoering van een karwei geen klant arriveert bedraagt

$$f = \int_0^{\infty} f(s) ds e^{-\lambda s}$$

hetgeen bij exponentieel verdeelde karweiduren gelijk is aan $1/(1+\rho)$.

Aangezien iedere bezette periode met één karwei begint bestaat de fraktie f , die groter is dan 0,5, uit perioden die slechts uit één karwei bestaan.

Tenslotte kan de opmerking 2 uit paragraaf 3.4 hier herhaald worden ten aanzien van de spreiding in de lengte van de bezette periode.

3.6 Loket met relatieve prioriteiten

De karweien die volgens een Poissonproces arriveren zijn ingedeeld in r , van elkaar onafhankelijke, groepen of rangorden; de groep met het laagste rangnummer heeft de hoogste prioriteit, d.w.z. dat een karwei van groep j voorrang heeft op één van groep $j+1$. Wel geldt hierbij dat een karwei van lage prioriteit waaraan eenmaal begonnen is, wordt afgehandeld. Binnen een groep is de afhandeling in volgorde van aankomst.

Verondersteld wordt dat de klanten van iedere groep arriveren volgens een Poissonproces; de gemiddelde karweiduren mogen per groep verschillend zijn, evenals de gemiddelde aankomstintervallen.

Wij behandelen dit vraagstuk op een wijze die oorspronkelijk afkomstig is van Cobham (ref. 9) en ook door Ferschl (ref. 21, pag. 159) is beschreven. Overigens is het opmerkelijk dat Ferschl, na alle Laplace-Stieltjes transformaties, in het laatste hoofdstuk van zijn boek deze aanpak introduceert.

Voor groep j ($j = 1, 2, \dots, r$) geldt

s_j : gemiddelde karweiduur,

λ_j : gemiddeld aantal aankomsten per tijdseenheid (Poissonproces),

$\bar{w}_j$: gemiddelde wachttijd,

$\rho_j = \lambda_j \bar{s}_j$: (partiële) bezettingsgraad.

Voorts zij $\bar{s}$ de verwachte karweiduur gemiddeld over alle groepen, terwijl

$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_r$ de bezettingsgraad van het loket is. De wachttijd van een karwei A van groep j bestaat uit drie stukken:

1. Een portie $\alpha \bar{s}$ moet nog besteed worden aan het karwei dat in behandeling is als A arriveert, als er zo'n karwei is. Deze bijdrage is nul als er geen karwei in behandeling is. De gemiddelde bijdrage is derhalve $\rho \alpha \bar{s}$, waarin $\alpha = \bar{s}^2 / 2\bar{s}^2$ en $\rho = \lambda \bar{s}$.
2. A moet alle karweien van de groepen 1 t/m j die bij zijn binnenkomst in de wachtrij stonden (dus exclusief het karwei dat onder handen is), voor laten gaan. Als deze aantallen $\bar{n}_i$ ($i = 1, 2, \dots, j$) zijn, dan is deze bijdrage gemiddeld

$$\sum_{i=1}^j \bar{n}_i \bar{s}_i.$$

Hierbij geldt dat $\bar{n}_i$ tevens is het verwachte aantal aankomsten van groep i in de tijd $\bar{w}_i$, ofwel $\bar{n}_i = \lambda_i \bar{w}_i$, hetgeen direkt volgt uit $L = \lambda W$ en $L = K = N$ (hoofdstuk 1).

3. De karweien van de groepen 1 t/m $j-1$ die in de wachttijd van A binnenkomen, hebben ook nog voorrang. Dit geeft een bijdrage in de wachttijd van (zie slot van par. 2.4.1):

$$\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i \bar{w}_i \bar{s}_i.$$

Sommatie van de drie bijdragen levert

$$\bar{w}_j = \rho \alpha \bar{s} + \sum_{i=1}^j \rho_i \bar{w}_i + \sum_{i=1}^{j-1} \rho_i \bar{w}_j, \quad (50)$$

zodat

$$\bar{w}_{j+1} - \bar{w}_j = \rho_{j+1} \bar{w}_{j+1} + \bar{w}_{j+1} \sum_{i=1}^j \rho_i - \bar{w}_j \sum_{i=1}^{j-1} \rho_i,$$

ofwel

$$\bar{w}_{j+1} \left(1 - \sum_{i=1}^{j+1} \rho_i\right) = \bar{w}_j \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \rho_i\right). \quad (51)$$

Aangezien de derde term in het rechterlid van (50) uiteraard gelijk is aan nul voor $j=1$, geldt

$$\bar{w}_1 = \frac{\rho \alpha \bar{s}}{1 - \rho_1}. \quad (52)$$

Met de rekurrente betrekking (51) kunnen nu de gemiddelde wachttijden van de andere groepen ($j = 2, \dots, r$) worden berekend:

$$\bar{w}_j = \frac{\alpha \rho \bar{s}}{\left(1 - \sum_{i=1}^j \rho_i\right) \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \rho_i\right)}. \quad (53)$$

Hieruit blijkt dat de gemiddelde wachttijd van groep j afhankelijk is van de verdeling van alle karweiduren (nl. door α en $\bar{s}$) en van de partiële bezettingsgraden ρ_i ($i = 1, 2, \dots, j$).

De gemiddelde wachttijd van alle karweien bedraagt:

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^r \frac{\lambda_j}{\lambda} \bar{w}_j. \quad (54)$$

Het bijzondere geval met $r=2$, $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$ en $\alpha=1$ (exponentieel verdeelde karweiduren) werd reeds in par. 2.4.1 behandeld.

Voorts bewijst Fersch uit het voorgaande nog het belangrijke resultaat dat de totale wachtkosten minimaal zijn als de rangorde zo gekozen is dat voor alle j geldt

$$c_j / \bar{s}_j > c_{j+1} / \bar{s}_{j+1}, \quad (55)$$

waarin c_j de wachtkosten per stuk en per tijdseenheid zijn voor groep j .

Door alle c_j gelijk aan elkaar te stellen volgt uit (55) dat de gemiddelde wachttijd $\bar{w}$ minimaal is als $\bar{s}_j < \bar{s}_{j+1}$, d.w.z. als voorrang wordt verleend aan korte karweien. Tevens kan hieraan ook de konklusie verbonden worden dat $\bar{w}$ onafhankelijk is van de aanwezigheid van prioriteiten als alle $\bar{s}_j$ even groot zijn, dus als de prioriteitstoekenning onafhankelijk van de karweiduur is.

Voorbeeld: Voor het geval van twee prioriteitsklassen volgt uit (52), (53) en (54)

$$\bar{w} = \frac{\alpha\rho\bar{s}}{1-\rho} \cdot \frac{1-\lambda_1\bar{s}}{1-\lambda_1\bar{s}_1},$$

zodat $\bar{w}$ onafhankelijk wordt van de prioriteitsregel indien $\bar{s}_1 = \bar{s} = \bar{s}_2$. Als $\bar{s}_1 < \bar{s}$ is zal $\bar{w}$ kleiner zijn dan in het geval $\bar{s}_1 = \bar{s}$: de gemiddelde wachttijd van alle karweien neemt af als voorrang wordt gegeven aan korte karweien.

Steutel (ref. 47) heeft nog het volgende bewezen. Als er niet twee op natuurlijke wijze gegeven groepen zijn, dan kan men de karweiduren van te voren schatten en voorrang verlenen aan alle karweien met een duur die kleiner of gelijk is aan $c\bar{s}$, waarin c een konstante is. Het blijkt dat er een optimale waarde van c te vinden is die groter is dan 1, d.w.z. dat de splitsing boven het gemiddelde moet worden aangebracht. In principe kan men deze verdelingsprocedure voortzetten en steeds aan het kortste karwei voorrang geven, als dat karwei tenminste kan worden aangewezen. Het blijkt echter dat met een splitsing in twee groepen al het grootste deel van de mogelijke vermindering in de gemiddelde wachttijd is te verkrijgen.

3.7 Loket met alternerende prioriteit

Alle karweien, waarvan wij veronderstellen dat de duren trekkingen zijn uit dezelfde willekeurige verdeling, zijn gesplitst in twee groepen. De prioriteitsregel is als volgt: is een karwei van groep 1 onderhanden dan heeft deze groep voorrang op de andere groep. Deze prioriteit blijft bestaan tot er geen karweien van groep 1 meer zijn; als er dan karweien van groep 2 wachten gaat de prioriteit over naar deze groep enz. Na een lege periode bepaalt het eerst binnenkommende karwei de beginprioriteit van de komende bezette periode. Deze prioriteitsregel zou zich kunnen voordoen wanneer een agent het verkeer regelt op een kruising van twee éénrichtingsverkeerswegen, ofwel op een weg met een knelpunt dat slechts door één voertuig gelijktijdig gepasseerd kan worden. Haight (ref. 23, pag. 188) behandelt dit

probleem. Het zou ons te ver voeren een beschrijving te geven van zijn aanpak, die oorspronkelijk van Tanner (ref. 55) afkomstig is. Wij kunnen volstaan met te vermelden dat hij in 4 pagina's tekst de lezer 5 maal de verzekering geeft "it is easy to see, or to find, it is not difficult to show" om dan tenslotte in de Laplace-transformaties te blijven steken na een laatste mededeling dat de oplossing nu in principe bepaald is.

Avi-Itzhak, Maxwell en Miller (ref. 3) behandelen dit probleem deels op een wijze, die operationeel genoemd kan worden en door Takács (ref. 54) als intuïtief wordt bestempeld. Hun aanpak is echter ingewikkeld waardoor het nodige rekenwerk toch nog aanzienlijk wordt.

Stidham, op wiens werk in de inleiding (hoofdstuk 1) de aandacht werd gevestigd, heeft in een uitgebreid artikel (ref. 48) dit probleem op een wijze aangepakt die intuïtief duidelijk gemaakt kan worden. Hij maakt geen gebruik van transformaties of voortbrengende functies. Dat het artikel nogal lang uitvalt komt omdat hij alle voor de hand liggende uitspraken ("obvious results") eerst streng bewijst, waardoor naar zijn zeggen, de eenvoud van de aanpak mogelijk verduisterd wordt. Hij is van mening dat de lezer die in de intuïtieve afleiding is geïnteresseerd het "streng stuk" maar moet overslaan. Helaas is dan het stuk niet echt duidelijk omdat voortdurend wordt verwezen naar de exakte formuleringen die voor de "intuïtieve lezer" niet zo simpel zijn, terwijl voorts de eigenlijke operationele opbouw ontbreekt.

Wij zullen het probleem behandelen op een wijze die verwant is aan die van de vorige paragraaf.

Zij $\bar{n}_{ij}$ het verwachte aantal klanten van groep i in het systeem als groep j prioriteit heeft en $\bar{w}_{ij}$ de verwachte wachttijd van een klant van groep i als groep j prioriteit heeft. In beide definities is dus verondersteld dat het loket bezet is; de indices i en j nemen de waarden 1 en 2 aan. De klanten arriveren volgens onafhankelijke Poissonprocessen met als parameters λ_i ($i = 1, 2$); van de karweiduur-verdelingen worden de momenten $\bar{s}_i$ en $\bar{s}_i^2$ bekend verondersteld. De partiële bezettingsgraden zijn $\rho_i = \lambda_i \bar{s}_i$. Spreken wij gemakshalve van een i -klant en een j -prioriteit, dan geldt voor een i -klant die arriveert in een i -prioriteit wegens paragraaf 3.2:

$$\bar{w}_{ii} = (\bar{n}_{ii} - 1 + \alpha_i) \bar{s}_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{en} \quad \alpha_i \bar{s}_i = \bar{s}_i^2 / 2\bar{s}_i, \quad (56)$$

omdat voor deze klant geldt dat hij alleen op groepsgenoten behoeft te wachten. Als een i -klant arriveert terwijl de andere groep prioriteit heeft ($j \neq i$), dan moet de klant wachten

tot het einde van de prioriteit en vervolgens zijn groepsgenoten die hij aantrof nog voor laten gaan. Naar analogie van (42) wordt de verwachte wachttijd:

$$\bar{w}_{ij}' = \frac{\bar{w}_{ij}'}{1-\rho_j} + \bar{n}_{ij}' \cdot \bar{s}_i, \quad (i \neq j). \quad (57)$$

De kans dat een klant, die voor een bezet loket binnenkomt een j-prioriteit aantreft bedraagt ρ_j/ρ waarin $\rho = \rho_1 + \rho_2$. De gemiddelde wachttijd van een i-klant die arriveert voor een bezet loket is derhalve:

$$\bar{w}_i' = \sum_{j=1}^2 \rho_j \bar{w}_{ij}' / \rho, \quad i = 1, 2. \quad (58)$$

De (onvoorwaardelijke) gemiddelde wachttijd van een i-klant bedraagt $\bar{w}_i = \rho \bar{w}_i'$, zodat voor een i-klant geldt

$$\bar{w}_i = \rho_1 \bar{w}_{i1}' + \rho_2 \bar{w}_{i2}' = \rho_1 (\bar{n}_{i1}' - 1 + \alpha_1) \bar{s}_i + \rho_2 \left(\frac{\bar{w}_{22}'}{1-\rho_2} + \bar{n}_{i2}' \bar{s}_i \right). \quad (59)$$

Bedenken wij dat, met $L = \lambda W$, geldt

$$\lambda_i (\bar{w}_i + \bar{s}_i) = \bar{n}_i = \rho_1 \bar{n}_{i1}' + \rho_2 \bar{n}_{i2}', \quad (60)$$

dan kan (59) geschreven worden als

$$\bar{w}_i (1 - \rho_1) = \rho_1 \alpha_1 \bar{s}_i + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \bar{w}_{22}',$$

hetgeen met de vergelijking (56) overgaat in

$$\bar{w}_i (1 - \rho_1) = \rho_1 \alpha_1 \bar{s}_i + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \alpha_2 \bar{s}_2 + \frac{\rho_2 \bar{s}_2}{1-\rho_2} (\bar{n}_{22}' - 1). \quad (61)$$

Door verwisseling van de indices 1 en 2 verkrijgen wij de overeenkomstige vergelijking voor $\bar{w}_2$.

De vergelijking (61) geeft een relatie tussen $\bar{w}_i$ en $\bar{n}_{jj}$ ($j \neq i$). Wij hebben nog een betrekking nodig tussen $\bar{n}_{jj}$ en $\bar{w}_j$ om uiteindelijk te komen tot een relatie tussen $\bar{w}_i$ en $\bar{w}_j$ ($j \neq i$). Uit deze laatste relatie, die in feite twee relaties geeft ($i = 1, 2$) kunnen dan $\bar{w}_1$ en $\bar{w}_2$ berekend worden.

De grootheden $\bar{n}_{ij}$ ($j \neq i$) kunnen gemakkelijk worden bepaald als functie van de momenten van τ_j , zijnde de tijdsduur van een j-periode, omdat iedere j-periode begint met nul i-klanten, zodat het aantal i-klanten dat aanwezig is in een j-periode in diezelfde periode is gearriveerd. De grootheden $\bar{n}_{jj}$ zijn moeilijker te bepalen omdat de j-periode begint met een stochastisch

aantal j-klanten dat minstens één bedraagt. In het volgende wordt nader op deze problematiek ingegaan.

Daar de klanten volgens een Poissonproces arriveren kan gesteld worden (prikmethode) dat de resterende, c.q. de verstreken duur van de aan de gang zijnde j-prioriteit bedraagt $\bar{\tau}_j^2/2\bar{\tau}_j$, waarbij $\bar{\tau}_j$ en $\bar{\tau}_j^2$ de eerste twee momenten zijn van de prioriteitsduren τ_j . Hieruit volgt onmiddellijk

$$\bar{n}_{12} = \lambda_1 \frac{\bar{\tau}_2^2}{2\bar{\tau}_2}, \quad \bar{n}_{21} = \lambda_2 \frac{\bar{\tau}_1^2}{2\bar{\tau}_1}. \quad (62)$$

Wij zoeken nu een relatie tussen $\bar{n}_{11}$ en $\bar{n}_{12}$ (en ook tussen $\bar{n}_{22}$ en $\bar{n}_{21}$). Een j-prioriteit begint met minstens één karwei van groep j. Wat wij moeten weten is het verwachte aantal klanten van groep j als j prioriteit heeft, terwijl deze prioriteit begint met een stochastisch aantal klanten. Meer algemeen kunnen we dit betrekken op een bezette periode, reden waarom nu een aparte paragraaf wordt ingevoerd.

3.7.1 *De gemiddelde rijlengte tijdens een bezette periode die begint met een stochastisch aantal karweien*

De vergelijking (42) kan ook zo worden geïnterpreteerd dat als op een bepaald ogenblik de aanwezige hoeveelheid werk voldoende is voor een tijd $\bar{w}$, de totale verwachte duur van de bezette periode nog $\bar{w}/(1-\rho)$ bedraagt. Stel nu de gemiddelde rijlengte tijdens een periode die begint met precies m karweien gelijk aan $\bar{q}_m$, dan weten wij reeds, met vergelijking (13), dat

$$\bar{q}_1 = \bar{n}/\rho = \frac{\bar{\alpha}}{1-\rho} = 1 + \frac{\alpha\rho}{1-\rho}, \quad (63)$$

waarbij gebruik werd gemaakt van de verg. (11).

De bezette periode die begint met m karweien ($m > 1$) kunnen we gesplitst denken in twee stukken, namelijk een "kleine periode" die eindigt zodra de rijlengte de waarde m-1 bereikt en de "rest van de bezette periode".

Gedurende de kleine periode is de gemiddelde rijlengte wegens (63), gelijk aan

$$(1 + \frac{\alpha\rho}{1-\rho}) + (m-1) = \frac{\alpha\rho}{1-\rho} + m,$$

omdat deze kleine periode als 't ware een bezette periode is die begint met 1 karwei boven het niveau m-1.

Voor de rest van de periode is de gemiddelde rijlengte $\bar{q}_{m-1}^r$. De kleine periode en de rest periode hebben verschillende verwachte duur, namelijk $\bar{s}/(1-\rho)$ en $(m-1)\bar{s}/(1-\rho)$; derhalve geldt voor de gemiddelde rijlengte over de totale verwachte duur:

$$\bar{q}_m^r = \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha \rho}{1-\rho} + m \right) + \frac{m-1}{m} \bar{q}_{m-1}^r,$$

ofwel

$$m \bar{q}_m^r = (m-1) \bar{q}_{m-1}^r + \frac{\alpha \rho}{1-\rho} + m. \quad (64)$$

Uit deze rekurrente betrekking (64) volgt samen met (63)

$$\bar{q}_m^r = \frac{\alpha \rho}{1-\rho} + \frac{m+1}{2}, \quad m \geq 1. \quad (65)$$

Zij m nu een stochastische variabele $\underline{m}$. Wanneer wij de gemiddelde rijlengte willen bepalen dan moeten we bedenken dat bij de berekening van dat gemiddelde geldt dat de bijdrage van een bezette periode evenredig is met de lengte van die periode:

$$\bar{q}^r = \frac{\alpha \rho}{1-\rho} + \frac{1}{2} + \frac{\bar{m}^2}{2\bar{m}}, \quad (66)$$

welk resultaat verkregen wordt met een variant op de prikmethode.

Keren wij terug tot het probleem van de alternerende prioriteiten.

3.7.2 De gemiddelde wachttijd van een i -klant

De relatie (66) geeft voor het verwachte aantal i -klanten in het systeem als deze groep prioriteit heeft

$$\bar{n}_{ii} = \frac{\alpha_i \rho_i}{1-\rho_i} + \frac{1}{2} + \frac{\bar{m}_i^2}{2\bar{m}_i}, \quad i = 1, 2 \quad (67)$$

waarbij $\bar{m}_i$ is het aantal klanten waarmee de i -prioriteit start.

Van deze grootheid $\bar{m}_i$ moeten wij dus het eerste en tweede moment bepalen, hergeen in het volgende gebeurt.

1. Als de i -prioriteit begint na een lege periode dan heeft $\bar{m}_i$ in ieder geval de waarde 1. De kans op deze gebeurtenis is eenvoudig te bepalen als functie van $\bar{m}_1$. In een grote tijd T is immers de totale lengte van alle i -prioriteiten gelijk aan $\rho_i T$, terwijl de verwachte lengte van één i -prioriteit gelijk is aan $\bar{m}_i \bar{s}_i / (1-\rho)$, zodat het verwachte aantal A_i van de

i-prioriteiten, bedraagt

$$A_i = \frac{\rho_i(1-\rho_i)}{\bar{m}_i \bar{s}_i} T. \quad (68)$$

Het verwachte aantal B van de bezette perioden in T bedraagt, zie ook par. 3.5,

$$B = \frac{\rho T}{\bar{s}(1-\rho)} = \frac{\rho(1-\rho)}{\bar{s}} T \quad (69)$$

waarvan de fraktie λ_i/λ begint met prioriteit i.

Opmerking: De kans dat na een lege periode de eerstvolgende klant van groep i is bedraagt, met $j \neq i$,

$$\int_0^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i t} \cdot e^{-\lambda_j t} dt = \lambda_i \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \lambda_i / \lambda.$$

Het verwachte aantal i-prioriteiten dat een bezette periode begint is dus $\lambda_i B / \lambda$, zodat van alle i-perioden de fraktie $\lambda_i B / (\lambda A_i)$ begint na een lege periode. Anders gezegd: de kans p_i dat een i-prioriteit niet direkt wordt voorafgegaan door een j-prioriteit ($j \neq i$) is, met (68) en (69)

$$p_i = \bar{m}_i \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho_i} \quad (70)$$

2. Wordt de i-prioriteit wel direkt voorafgegaan door een j-prioriteit ($j \neq i$) dan is $\bar{m}_i = 1$ slechts dan als in de j-prioriteit precies één i-klant is gearriveerd, welke kans wij aangeven met $P_{ij}(1)$.

3. In het algemeen kunnen wij dus stellen:

$$\begin{aligned} \bar{m}_i &= 1 && \text{met kans } p_i + P_{ij}(1) \\ \bar{m}_i &= m && \text{met kans } P_{ij}(m), \quad m > 1, \end{aligned} \quad (71)$$

waarbij $P_{ij}(m)$ de kans is dat er m i-klanten zijn gearriveerd in de voorafgaande j-prioriteit. Uit de vergelijking (71) volgt:

$$\bar{m}_i = p_i + \bar{a}_{ij}, \quad (72)$$

$$\bar{m}_i^2 = p_i + \bar{a}_{ij}^2, \quad (i \neq j) \quad (73)$$

waarin $\bar{a}_{ij}$ en $\bar{a}_{ij}^2$ de momenten zijn van a_{ij} , het aantal i-aankomsten in een j-prioriteit ($j \neq i$). Voor dit stochastische aantal aankomsten in een stochastische tijd gelden, wanneer het

aankomstproces onafhankelijk is van de tijdsduur, de volgende formules (al eerder gebruikt in de paragrafen 3.1 en 3.4):

$$\bar{a}_{ij} = \lambda_i \bar{\tau}_j \quad (74)$$

$$\bar{a}_{ij}^2 = \lambda_i \bar{\tau}_j + \lambda_i^2 \bar{\tau}_j^2, \quad (j \neq i), \quad (75)$$

de aankomsten zijn immers volgens een Poissonproces met gemiddeld λ_i per tijdseenheid, met spreiding $\sqrt{\lambda_i}$.

Substitutie van (70) en (74) in (72) levert

$$\bar{m}_i = \bar{m}_i \frac{1-\rho_i}{1-\rho_i} + \lambda_i \bar{\tau}_j,$$

waaruit volgt de relatie:

$$\bar{m}_i = \frac{1-\rho_i}{\rho_i} + \lambda_i \bar{\tau}_j, \quad (j \neq i). \quad (76)$$

Substitutie van (70) en (75) in (73) geeft samen met (76)

$$\frac{\bar{m}_i^2}{\bar{m}_i} = 1 + \frac{\lambda_i \bar{\tau}_j^2}{\bar{\tau}_j} + \frac{\rho_j}{1-\rho_i}, \quad (j \neq i). \quad (77)$$

Hiermee is de tot nu toe onbekende term uit het rechterlid van (67) bepaald.

Substitutie van (77) in (67) leidt tot

$$\bar{n}_{ii} = \frac{\alpha_i \rho_i}{1-\rho_i} + 1 + \frac{\rho_j \lambda_i}{1-\rho_i} + \frac{\bar{\tau}_j^2}{2 \bar{\tau}_j} \quad (78)$$

zodat met (62) geldt (i en j hebben de waarden 1 of 2 met $j \neq i$)

$$\bar{n}_{ii} - 1 = \frac{\alpha_j \rho_i}{1-\rho_i} + \frac{\rho_j}{1-\rho_i} \bar{n}_{ij}, \quad (j \neq i). \quad (79)$$

Vervangen wij in (60) 1 door i en 2 door j, dan volgt uit die vergelijking

$$\bar{n}_{ij}' = \frac{1}{\rho_j} (\lambda_i \bar{w}_i + \rho_i - \rho_i \bar{n}_{ii}'),$$

hetgeen gesubstitueerd in de relatie (79) leidt tot

$$\bar{n}_{ii} - 1 = \alpha_i \rho_i + \lambda_i \bar{w}_i. \quad (80)$$

Wij kunnen nu terugkeren tot de vergelijking (61). Substitutie van (80) in (61) geeft

$$\bar{w}_i(1-\rho_i) = \rho_i \alpha_i \bar{s}_i + \frac{\rho_j(1+\rho_j)}{1-\rho_j} \alpha_j \bar{s}_j + \frac{\rho_j^2}{1-\rho_j} \bar{w}_j, \quad (81)$$

waarin $i = 1, 2$ en $j \neq i$.

Uit de twee vergelijkingen (81) kunnen de twee onbekenden $\bar{w}_1$ en $\bar{w}_2$ worden berekend.

$$\bar{w}_i = \frac{\rho_i \alpha_i \bar{s}_i \{1 - \rho_j - \rho(1 - 2\rho_j)\} + \rho_j(1 - \rho_i) \alpha_j \bar{s}_j}{(1 - \rho)(1 - \rho + 2\rho_i \rho_j)}, \quad (i = 1, 2; j \neq i). \quad (82)$$

Wij geven twee bijzondere gevallen:

– In het geval dat $\rho_2 = 0$, dus $\rho = \rho_1$, volgt uit (82):

$$\bar{w}_1 = \frac{\alpha_1 \bar{s}_1 \rho}{1 - \rho}, \quad \bar{w}_2 = \frac{\alpha_2 \bar{s}_2 \rho}{(1 - \rho)^2}, \quad (83)$$

hetgeen in overeenstemming is met (14), resp. (43).

– Voor het geval dat de twee karweiduur-verdelingen gelijk aan elkaar zijn, volgt uit (82):

$$\bar{w}_i = \frac{\alpha \bar{s}}{1 - \rho} \cdot \frac{\rho(1 - \rho_i) - 2\rho_i \rho_j(1 - \rho)}{1 - \rho + 2\rho_i \rho_j}, \quad (i = 1, 2; j \neq i), \quad (84)$$

terwijl dan voor de gemiddelde wachttijd van alle karweien geldt

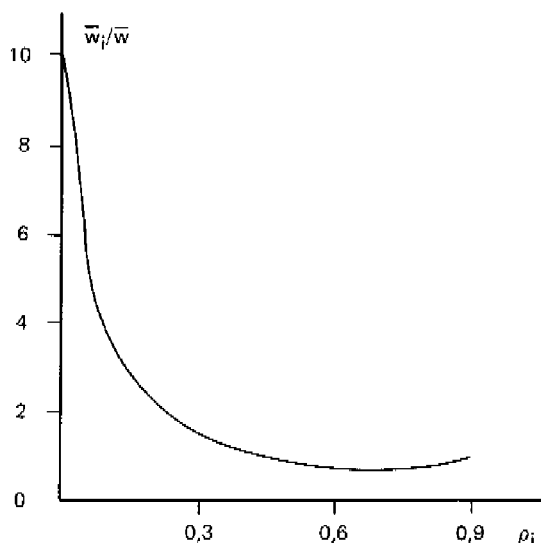
$$\bar{w} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \bar{w}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} \bar{w}_2 = \frac{\alpha \bar{s} \rho}{1 - \rho}, \quad (85)$$

zijnde de formule van Pollaczek-Khintchine.

In figuur 12 is $\bar{w}_i/\bar{w}$ ($i = 1, 2$) uit (84) en (85) geschetst als functie van ρ_i , voor het geval $\rho = \rho_1 + \rho_2 = 0,90$. Wij zien hieruit dat de groep met de kleinste λ_i , de z.g. “minderheids-groep” het langst moet wachten ($\rho_i < 0,45$) en dat de gemiddelde wachttijd van die groep sterk stijgt naarmate de groep kleiner in aantal wordt, dus naarmate het verschil tussen de twee λ_i 's groter wordt. De “meerderheidsgroep” heeft een gemiddelde wachttijd die veel minder varieert ($\rho > 0,45$):

Vergelijken wij nog met geval (zie par. 3.6) dat steeds één groep de prioriteit houdt (groep 1 heeft prioriteit boven groep 2). Uit (52) en (53) volgt dan:

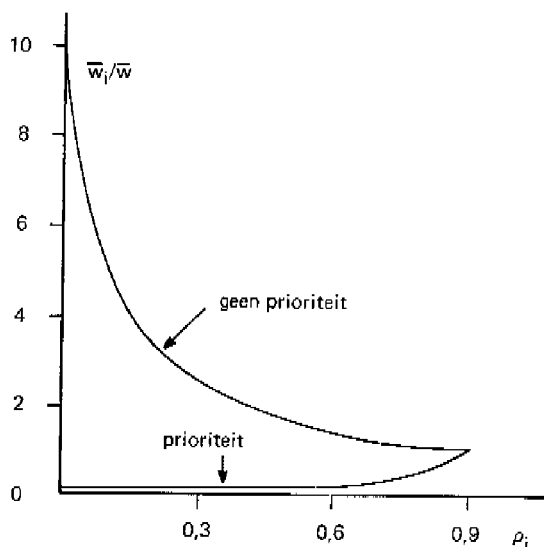
$$\bar{w}_1 = \bar{w} \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho_1}, \quad \bar{w}_2 = \bar{w} \cdot \frac{1}{1 - \rho_1} = \frac{\bar{w}}{1 - \rho + \rho_2}. \quad (86)$$



figuur 12 $\bar{w}_1/\bar{w}$ als functie van ρ_1 ; $\rho_1 + \rho_2 = 0,9$; formules (84) en (85).

In figuur 13 zijn $\bar{w}_1/\bar{w}$ en $\bar{w}_2/\bar{w}$, uit de formules (86), uitgezet als functie van respectievelijk ρ_1 en ρ_2 ($= \rho - \rho_1$) voor $\rho = 0,90$.

Opmerking: bij het lezen van de figuren 12 en 13 moet bedacht worden dat als ρ_1 klein is en ρ_2 groot is en omgekeerd.



figuur 13 $\bar{w}_i/\bar{w}$ als functie van ρ_i , voor het geval dat groep i wel, respectievelijk geen prioriteit heeft; $\rho = 0,9$; formule (86).

HOOFDSTUK 4

DE BEZETTE PERIODE (M/G/1)

In paragraaf 3.5 werden reeds een aantal grootheden berekend die karakteristiek zijn voor de bezette periode. Wij willen hier nu wat dieper op ingaan, omdat het mogelijk is om naast verwachtingswaarden en spreidingen ook kansverdelingen van de lengte van de bezette periode, onder diverse beginvoorwaarden, langs elementaire weg te vinden.

In eerste instantie wordt onderzocht de lengte van de bezette periode als functie van de rijlengte waarmee de periode start. Vaak zal het begin met één karwei zijn, maar er zijn ook situaties waarbij een loket geopend wordt als er meer karweien staan te wachten; denk bijvoorbeeld aan het geval met alternerende prioriteit uit par. 3.7: het tijdstip waarop het loket opengaat voor een groep kan als het begin van een bezette periode worden geïnterpreteerd, hetgeen het ook werkelijk is als het loket voordien leeg was, terwijl het tijdstip van "omslaan" van de prioriteit als het einde kan worden gezien. Uiteraard is het ook zo dat wanneer de rijlengte de waarde r heeft in een regeneratiepunt, deze waarde beschouwd kan worden als de begintoestand voor een nieuwe, nu ingaande, bezette periode.

Bij het begrip lengte van een bezette periode kan men zowel denken aan de tijdsduur als aan het aantal verwerkte karweien. Beide facetten zullen ter sprake komen.

4.1 Een kombinatorisch probleem

Berekend wordt de kans $P(m|r)$ dat in een bezette periode die begint met r karweien, in totaal m karweien worden afgehandeld.

De berekening wordt uitgevoerd voor het geval dat de klanten (karweien) arriveren volgens een Poissonproces. Zullen m klanten worden geholpen, dan dienen nog $m-r$ klanten te arriveren binnen de bezette periode. Deze klanten moeten echter "geschikt" arriveren opdat de bezette periode niet voortijdig afbreekt; tijdens het afhandelen van de eerste r karweien moet

bijvoorbeeld minstens één klant arriveren wil het loket na het r^e vertrek niet leeg zijn. Er zijn dus twee voorwaarden:

- a) $m-r$ aankomsten in m karweiduren ($m \geq r$), welke gebeurtenis wordt aangegeven met het symbool H_m^{m-r} .
- b) rijlengte moet voor het eerst nul worden na het m^e vertrek.

Stel daarom

$$P(m|r) = P(H_m^{m-r}) \cdot f(m,r), \quad (m \geq r), \quad (1)$$

waarin de eerste faktor in het rechterlid de kans op $m-r$ aankomsten geeft in de tijd van m karweiduren, terwijl de tweede faktor de kans geeft dat, onder de voorwaarde H_m^{m-r} , deze aankomsten zodanig zijn dat aan de tweede voorwaarde is voldaan.

Door inductie wordt een relatie voor $f(m,r)$ gevonden.

1. $m = r$; dit geval is maar op één manier te realiseren, nl. door geen aankomsten in de duur van r karweien, dus $f(r,r) = 1$. Anders gezegd als aan de voorwaarde a) is voldaan dan ook aan de voorwaarde b).

2. $m = r+1$; de ene klant die nog moet komen dient in de tijd van de eerste r karweiduren te arriveren en niet in de daaropvolgende duur, anders gezegd: de klant moet arriveren voor zijn eigen karweiduur begint. De kans daarop bedraagt bij Poissonaankomsten $r/(r+1)$ als de karweiduren onafhankelijke trekkingen zijn uit dezelfde verdeling, hetgeen wij daarom zullen veronderstellen. Derhalve is $f(r+1,r) = r/(r+1)$.

Opmerking: In het volgende verstaan we onder T_n de totale duur van n karweien.

3. $m = r+2$; we "schieten" nu twee aankomsten in T_{r+2} nl. van de klanten A en B. Er zijn twee gunstige mogelijkheden: A arriveert in T_r , B mag dan ergens in T_{r+1} aankomen, of A arriveert in de $(r+1)^e$ karweiduur, B moet dan in T_r binnenkomen.

Hieruit volgt:

$$f(r+2,r) = \frac{r}{r+2} \cdot \frac{r+1}{r+2} + \frac{1}{r+2} \cdot \frac{r}{r+2} = \frac{r}{r+2}.$$

Ook een andere formulering van dit geval is mogelijk. De twee karweien arriveren geschikt als in T_r één of twee klanten komen, terwijl in de resterende twee karweiduren één resp. nul klanten geschikt arriveren:

$$f(r+2,r) = P(H_r^1 | H_{r+2}^2) f(2,1) + P(H_r^2 | H_{r+2}^2) f(2,2).$$

Uit 1. en 2. volgt $f(2,2) = 1$ en $f(2,1) = \frac{1}{2}$, zodat na substitutie van $P(H_r^j | H_{r+2}^2)$ ($j = 1, 2$) wordt gevonden

$$f(r+2, r) = \frac{4r}{(r+2)^2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{r}{r+2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{r}{r+2}.$$

Op grond van het voorgaande stellen wij

$$f(r+k, r) = \frac{r}{r+k}, \quad (k \geq 0). \quad (2)$$

De relatie werd reeds bewezen voor $k = 0, 1$ en 2 . Wij zullen aantonen dat als de vergelijking geldt voor k (en kleinere waarden), hij ook geldt als k met 1 wordt verhoogd (bewijs door volledige inductie).

Het "geschikt" arriveren van $k+1$ klanten wordt bereikt als in T_r , de tijd van de eerste r karweiduren, j (≥ 1) klanten arriveren, terwijl in de tijd T_{k+1} van de volgende $k+1$ karweiduren de resterende $k+1-j$ klanten "geschikt" arriveren:

$$f(r+k+1, r) = \sum_{j=1}^{k+1} P(H_r^j | H_{r+k+1}^{k+1}) \cdot f(k+1, j). \quad (3)$$

In het rechterlid van (3) is $k+1-j \leq k$ zodat we gebruik mogen maken van (2):

$$f(r+k+1, r) = \sum_{j=1}^{k+1} P(H_r^j | H_{r+k+1}^{k+1}) \cdot \frac{j}{k+1} = \frac{1}{k+1} E\{j(r)\}, \quad (4)$$

waarin $E\{j(r)\}$ de verwachting is van het aantal aankomsten in T_r onder de voorwaarde H_{r+k+1}^{k+1} . Voor deze verwachting geldt

$$E\{j(r)\} = \frac{r(k+1)}{r+k+1}, \quad (5)$$

omdat, wegens de onderlinge onafhankelijkheid van de karweiduren zowel als van de aankomsten, het verwachte aantal aankomsten per karweiduur, onder de voorwaarde H_{r+k+1}^{k+1} , gelijk is aan $(k+1)/(r+k+1)$.

De uitkomst (5) gesubstitueerd in het rechterlid van (4) levert

$$f(r+k+1, r) = \frac{r}{r+k+1},$$

hetgeen wij wilden bewijzen.

Dit kombinatorische bewijs is, in wat meer abstracte vorm, afkomstig van Takács (ref. 51).

Een bewijs met behulp van contour-integralen en Maclaurin-reeksen wordt gegeven door Haight (ref. 23, pag. 53).

De vergelijkingen (1) en (2) leveren

$$P(m|r) = \frac{r}{m} P(H_m^{m-r}), \quad (m \geq r); \quad (6)$$

waarin de kans $P(H_m^{m-r})$ bepaald wordt door de verdeling van de karweiduren en de aankomstsnelheid van de klanten. Duren, bijvoorbeeld, alle karweien even lang, dan is T_m gelijk aan m maal de karweiduur en het verwachte aantal aankomsten in T_m , gelijk aan $m\rho$ als ρ de bezettingsgraad van het loket is.

Substitutie van de formule van Poisson (zie par. 1.4.1, formule (23)) in het rechterlid van verg. (6) geeft dan:

$$P(m|r) = \frac{r(m\rho)^{m-r}}{m(m-r)!} e^{-m\rho}, \quad (m \geq r), \quad (7)$$

welke kansverdeling bekend staat als die van Borel-Tanner.

4.2 De tijdsduur bij een gegeven aantal klanten

In het voorgaande moet T_m worden gelezen als de duur van m karweien; er is nog geen uitspraak gedaan over de grootte van deze tijd. Wij voeren nu in de kumulatieve verdelingsfunctie $P(m, t \leq T|r)$, zijnde de kans dat, onder de voorwaarde dat de bezette periode start met r karweien,

- a) in deze periode m karweien in totaal worden afgehandeld,
- b) de totale duur van deze periode kleiner of gelijk is aan T .

Uit (6) volgt dan:

$$P(m, t \leq T|r) = \int_{t=0}^T \frac{r}{m} P_{m-r}(t) dF_m(t), \quad (m \geq r), \quad (8)$$

waarin F_m de m -voudige konvolutie is van de verdelingsfunctie der karweiduren, m.a.w. het is de verdelingsfunctie van T_m de totale duur van m karweien, terwijl voorts geldt dat

$P_{m-r}(t) = P(H_m^{m-r} | T_m = t)$ de kans is op $m-r$ aankomsten in de tijd t .

Voor het geval de verdelingsfuncties een dichtheid bezitten kan (8) in de volgende vorm worden geschreven

$$p(m, t|r) = \frac{r}{m} P_{m-r}(t) \cdot f_m(t), \quad (9)$$

welke vorm wij ook zullen gebruiken, met de restriktie uiteraard dat indien de dichtheidsfuncties niet bestaan de overeenkomstige "kumulatieve vorm" moet worden gebruikt.

Aangezien de aankomsten volgens een Poisson-proces waren, volgt uit (9):

$$p(m, t|r) = \frac{r}{m} \frac{(\lambda t)^{m-r} e^{-\lambda t}}{(m-r)!} f_m(t), \quad (m \geq r). \quad (10)$$

Door sommatie over m volgt uit de relatie (10) de dichtheidsfunctie van de duur van de periode ongeacht het verwerkte aantal karweien:

$$p(t|r) = \sum_{m=r}^{\infty} \frac{r}{m} \frac{(\lambda t)^{m-r} e^{-\lambda t}}{(m-r)!} f_m(t). \quad (11)$$

De verwachte duur $\bar{I}_r$ van de bezette periode die start met r karweien kan in principe hieruit berekend worden met

$$\bar{I}_r = \int_{t=0}^{\infty} t p(t|r) dt.$$

Een beschouwing zoals gegeven in par. 3.5 leidt echter sneller tot het doel:

Het verwachte aantal aankomsten in de bezette periode bedraagt $\lambda \bar{I}_r$ zodat in totaal $r + \lambda \bar{I}_r$ karweien worden afgehandeld, welk aantal gelijk is aan $\bar{I}_r / \bar{s}$.

Derhalve geldt:

$$r + \lambda \bar{I}_r = \bar{I}_r / \bar{s}$$

ofwel

$$\bar{I}_r = \frac{r \bar{s}}{1 - \rho}, \quad (\rho < 1). \quad (12)$$

Ter illustratie van formule (11) beschouwen wij het geval van negatief-exponentieel verdeling van de karweiduren met een gemiddelde $1/\mu$; de m -voudige konvolutie is dan een gamma-verdeling

$$f_m(t) = \frac{\mu(\mu t)^{m-1} e^{-\mu t}}{(m-1)!}.$$

Substitutie in (11) levert

$$p(t|r) = r e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{m=r}^{\infty} \frac{\lambda^{m-r} \mu^m t^{2m-r-1}}{m! (m-r)!},$$

hetgeen, met behulp van de gemodificeerde Besselfunctie van de orde r (ref. 35, pag. 1323)

$$I_r(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{r+2l}}{l! (r+l)!},$$

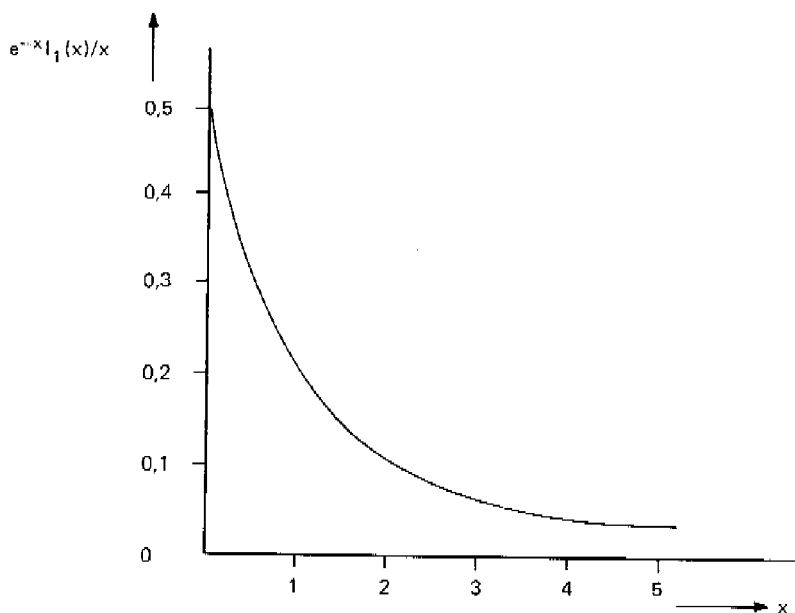
en de substitutie $m-r = l$ en $\lambda/\mu = \rho$, overgaat in

$$p(t|r) = \frac{r}{t(\sqrt{\rho})^r} e^{-(1+\rho)\mu t} I_r(2\mu t\sqrt{\rho}). \quad (13)$$

In figuur (14) is het verloop van de functie $e^{-x} I_1(x)/x$ geschetst. Voor kleine waarden van x geldt bij benadering $I_1(x) \approx x/2$, zodat voor kleine t uit (13) volgt:

$$p(t|1) \approx \mu e^{-(1+\rho)\mu t} = \mu e^{-\mu t} e^{-\lambda t},$$

hetgeen wel duidelijk is: de bezette periode bestaat dan praktisch uit één karwei.



figuur 14 De functie $e^{-x} I_1(x)/x$; bij formule (13).

Voor grote x geldt de asymptotische benadering

$$I_r(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}$$

zodat voor grote t uit (13) volgt

$$p(t|r) \approx \frac{r e^{-(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 t}}{2t \sqrt{\pi \mu t}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{2r+1}{4}}$$

De formule (13) geeft, met $r = 1$, de kansdichtheidsverdeling van de lengte van de bezette periode die met één karwei begint, terwijl de aankomsten volgens een Poissonproces zijn en de karweiduren negatief-exponentieel verdeeld. Lee (ref. 31, pag. 32) wijst erop dat dit ook de verdeling is van de wachttijd als het loket een LIFO-rijdiscipline heeft. Dit is als volgt in te zien. Bij de LIFO-discipline behoeft een binnenkomende klant A niet te wachten op de karweien die nog in de wachtrij staan, hij hoeft alleen te wachten op het karwei dat onderhanden is en voorts op alle karweien die na hem binnenkomen voordat hij aan de beurt is. Gezien de verdeling van de karweiduren is het alsof het onderhanden zijnde karwei zijn karweiduur pas begonnen is op het moment van aankomst van A. Op dit moment is het voor A alsof hij arriveert aan het begin van een bezette periode die start met één karwei, terwijl A pas aan de beurt komt als deze bezette periode eindigt, er zijn dan geen klanten meer in het systeem die na hem zijn binnengekomen.

Zoals reeds gezegd, kunnen (10) en (11) ook in cumulatieve vorm worden geschreven

$$P(m, t \leq T|r) = \int_0^T \frac{r}{m} \frac{(\lambda t)^{m-r} e^{-\lambda t}}{(m-r)!} dF_m(t), \quad (m \geq r), \quad (14)$$

respektievelijk

$$P(t \leq T|r) = \sum_{m=r}^{\infty} \int_0^T \frac{r}{m} \cdot \frac{(\lambda t)^{m-r} e^{-\lambda t}}{(m-r)!} dF_m(t). \quad (15)$$

Takács (ref. 51) leidt formule (14), met $r = 1$, eveneens af met behulp van de relatie (2).

Een afleiding van (15), met Laplace-Stieltjes transformaties, ook met $r = 1$, geeft hij in zijn boek (ref. 53, pag. 58). De formules zijn oorspronkelijk van Prabhu (ref. 39).

Tenslotte volgt uit verg. (11) ook de verdeling $p_c(t)$ van de cyclusduur, het is de afstand tussen de beginpunten van twee op elkaar volgende bezette perioden (met $r=1$):

$$p_c(t) = \int_{x=0}^t p(x|1) e^{-\lambda(t-x)} \lambda dx, \quad (16)$$

zijnde de verdeling van de som van de lengten van een bezette periode en een lege periode.

4.3 Het aantal verwerkte karweien in de bezette periode

Uit de verg. (14) volgt voor $T \rightarrow \infty$

$$P(m|r) = \frac{r}{m} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m-r} e^{-\lambda t}}{(m-r)!} dF_m(t), \quad (m \geq r). \quad (17)$$

De verwachtingswaarde $\bar{m}_r$ van $\underline{m}$ bij gegeven r volgt direct uit de verg. (12) door te bedenken dat $\bar{m}_r = \bar{l}_r / \bar{s}$:

$$\bar{m}_r = \frac{r}{1-\rho}, \quad (\rho < 1), \quad (18)$$

welke relatie voor $r = 1$ identiek is met verg. (39) uit hoofdstuk 3.

Nemen wij ook hier ter illustratie het geval van negatief-exponentieel verdeelde karweiduren:

$$P(m|r) = \frac{r \lambda^{m-r}}{(m-r)! m!} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} t^{2m-r-1} dt, \quad (m \geq r).$$

Maken wij gebruik van de, door partiële integratie te bewijzen, relatie

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} t^l dt = l! / c^{l+1} \quad (l \text{ geheel}, c > 0),$$

dan leidt dit tot:

$$P(m|r) = \frac{(2m-r-1)! r}{m! (m-r)!} \cdot \frac{\rho^{m-r}}{(1+\rho)^{2m-r}}, \quad (\rho = \lambda/\mu). \quad (19)$$

Voor dit geval met negatief-exponentieel verdeelde karweiduren is de gemiddelde rijlengte $\rho/(1-\rho)$. Als een bezette periode met dit aantal start wordt de waarde van $\bar{m}_r$, uit verg. (18):

$$\bar{m}_r = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad (20)$$

wat in overeenstemming is met formule (48) uit hoofdstuk 3.

Nemen wij voor de karweiduren een k-Erlang-verdeling

$$f(t) = \frac{\mu(\mu t)^{k-1} e^{-\mu t}}{(k-1)!}, \quad (21)$$

met

$$f_m(t) = \frac{\mu(\mu t)^{mk-1} e^{-\mu t}}{(mk-1)!}, \quad (22)$$

dan wordt op overeenkomstige wijze gevonden

$$P(m|r) = \frac{\{m(k+1)-r-1\}! r}{m(mk-1)!(m-r)!} \frac{(\lambda/\mu)^{m-r}}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^{m(k+1)-r}}, \quad (m \geq r). \quad (23)$$

waaruit, met $k = 1$, de vergelijking (19) volgt.

De gemiddelde karweiduur bedraagt k/μ , zodat in dit geval $\rho = k\lambda/\mu$ de bezettingsgraad is:

$$P(m|r) = \frac{r}{m(m-r)!} \frac{\{m(k+1)-r-1\}!}{(mk-1)!} \frac{(\rho/k)^{m-r}}{(1+\frac{\rho}{k})^{m(k+1)-r}}, \quad (m \geq r), \quad (24)$$

welke verdeling overgaat in die van Borel-Tanner, vergelijking (7), als k nadert tot oneindig, d.w.z. als alle karweien even lang duren.

4.4 Lengte van de bezette periode bij een gegeven werkvoorraad

Wanneer niet gegeven is het aantal karweien r waarmee de bezette periode start, maar wel de tijd τ waarvoor het loket op dit ogenblik nog werk heeft, gaan wij op overeenkomstige wijze te werk.

Zij $g(m, t|\tau)dt$ de kans dat de bezette periode nu nog een tijd duurt tussen t en $t+dt$, terwijl er nog m klanten bijkomen, gegeven dat er nu nog een werkvoorraad is voor een tijd τ .

Uiteraard is $g = 0$ als $t < \tau$ is.

Deze situatie wordt bereikt door i klanten in de tijd τ te laten arriveren zodat na de tijd τ er een "start" is met i karweien terwijl er dan nog m karweien moeten worden afgehandeld ($m \geq 1$):

$$g(m, t|\tau)dt = \sum_{i=1}^m P_i(\tau) p(m, t-\tau|i)dt, \quad (t \geq \tau) \quad (25)$$

waarbij de funktie $p(m, t-\tau|i)$ gegeven is door de verg. (9):

$$g(m, t|\tau) = \sum_{i=1}^m P_i(\tau) \frac{i}{m} P_{m-i}(t-\tau) f_m(t-\tau) = \frac{f_m(t-\tau) P_m(t)}{m} \sum_{i=1}^m \frac{P_i(\tau) P_{m-i}(t-\tau)}{P_m(t)} i. \quad (26)$$

De som in het rechterlid van deze vergelijking stelt voor de gemiddelde waarde van i onder de voorwaarde dat er m aankomsten zijn in t ; deze waarde bedraagt $\tau m/t$, hetgeen

gesubstitueerd in verg. (26) levert

$$g(m, t | \tau) = \frac{\tau}{t} f_m(t - \tau) P_m(t), \quad (t \geq 1). \quad (27)$$

Deze relatie is analoog aan (9). In (27) moeten m klanten arriveren in de totale tijd t , in (9) zijn dat er $m - r$; de m karweien nemen in (27) de tijd $t - \tau$ in beslag, in (9) de totale t . De voorwaarde voor het "geschikt" arriveren vinden wij in (27) terug door de faktor τ/t , in (9) door t/m .

Opmerking: In de verg. (25) is gesteld dat $m \geq 1$ is. Als $m = 0$ is duurt de bezette periode uiteraard precies de tijd τ ; de kans daarop bedraagt $P_0(\tau)$.

De overeenkomstige kumulatieve vorm van (27) is

$$\begin{aligned} G(m, t \leq T | \tau) &= \tau \int_{t=\tau}^T \frac{P_m(t)}{t} dF_m(t - \tau) \\ &= \frac{\lambda^m \tau}{m!} \int_{t=\tau}^T t^{m-1} e^{-\lambda t} dF_m(t - \tau), \end{aligned} \quad (28)$$

met $G = 0$ voor $T < \tau$. Ook deze formule is van Prabhu (ref. 39).

Uiteraard kan door sommatie over m hieruit worden afgeleid de kans $G(t \leq T | \tau)$ dat de bezette periode hoogstens de tijd T duurt, onder de voorwaarde dat er nu nog werk is voor een tijd τ ; terwijl voorts door T tot oneindig te laten naderen de kans $G(m | \tau)$ dat er nog m karweien komen, kan worden bepaald.

Naar analogie van verg. (12) volgt voor de gemiddelde lengte van de bezette periode die begint met een werkhoeveelheid τ :

$$\bar{l}_\tau = \frac{\tau}{1 - \rho}, \quad (29)$$

immers: in de tijd $\bar{l}_\tau$ arriveren $\lambda \bar{l}_\tau$ karweien met een verwachte duur $\lambda \bar{l}_\tau \bar{s} = \rho \bar{l}_\tau$. De totale duur van de periode is derhalve $\tau + \rho \bar{l}_\tau$ hetgeen gelijk is aan $\bar{l}_\tau$, waaruit onmiddellijk de vergelijking (29) volgt.

Ook een andere interpretatie is mogelijk. Als het loket bezet is vermindert enerzijds de werkhoeveelheid met 1 eenheid per tijdseenheid, terwijl anderzijds de verwachte toename per tijdseenheid gelijk is aan $\lambda \bar{s} = \rho$. De resulterende "afname-snelheid" is dus $1 - \rho$, zodat bij een start met een werkhoeveelheid τ de verwachte tijdsduur $\tau/(1 - \rho)$ is.

HOOFDSTUK 5

GROEPSGEWIJZE AANKOMSTEN OP VASTE TIJDSTIPPEN

De veronderstelling is hier dat de klanten op equidistante tijdstippen in groepen arriveren waarvan de grootte een onafhankelijke stochastische variabele is. Dit geval kan zich voordoen als de karweien in de vorm van orders per post arriveren of als klanten arriveren uit een ander systeem dat slechts op vaste tijdstippen de mogelijkheid geeft het te verlaten, enz. De afstand tussen twee tijdstippen wordt gemakshalve een tijdseenheid genoemd.

Het eerste geval dat wij behandelen is dat van konstante karweiduren genormaliseerd op één tijdseenheid; er is voorts sprake van een enkel loket.

5.1 Karweiduren genormaliseerd op één tijdseenheid

Evenals in hoofdstuk 3 is ook hier een aanpak op verschillende wijzen mogelijk.

5.1.1 *De methode van Kendall*

De methode die Kendall heeft ontwikkeld voor het M/G/1-systeem (par. 3.1) kunnen wij ook voor het huidige geval gebruiken. Dit is als volgt te zien.

Op een willekeurige tijd t zij de rijlengte, inclusief het karwei dat eventueel onderhanden is, gelijk aan n . Eén tijdseenheid later is de rij dan n' :

$$n' = n - 1 + \delta + a, \quad (1)$$

waarin

a is het aantal klanten dat in die tijdseenheid arriveerde (a wordt onafhankelijk van n gedacht), terwijl δ voldoet aan

$$\underline{\delta} = \begin{cases} 0 & \text{als } \underline{n} \neq 0 \\ 1 & \text{als } \underline{n} = 0 \text{ is.} \end{cases} \quad (2)$$

De verdere afleiding is identiek met die uit par. 3.1. In beide gevallen is de stochastische variabele $\underline{a}$ het aantal aankomsten per karweiduur. Voor de beschouwing in par. 3.1 maakt het niets uit of de klanten in een groepje arriveren of individueel. Om de verwachtingen $\bar{a}$ en $\bar{a}^2$ te berekenen werden in par. 3.1 bij een willekeurige verdeling van de karweiduren, de aankomsten volgens een Poissonproces verondersteld. In de huidige paragraaf worden de karweiduren konstant verondersteld, terwijl het aankomstproces willekeurig mag zijn met dien verstande dat $\bar{a}$ en $\bar{a}^2$ per tijdseenheid (= karweiduur) bekend verondersteld worden. Op deze wijze wordt gevonden, formule (7) van hoofdstuk 3,

$$\bar{n} = \frac{\bar{a} - 2\bar{a}^2 + \bar{a}^2}{2(1-\bar{a})}, \quad (3)$$

hetgeen ook geschreven kan worden als

$$\bar{n} = \frac{\bar{a}}{2} + \frac{\sigma_a^2}{2(1-\bar{a})}, \quad (\bar{a} = \rho < 1). \quad (4)$$

Tenslotte nog enige opmerkingen:

Daar in het loket gemiddeld $\bar{a}$ karweien onderhanden zijn ($\bar{a}$ = de bezettingsgraad) is het aantal wachtende klanten $\bar{n}_w$ gelijk aan

$$\bar{n}_w = \bar{n} - \bar{a}. \quad (5)$$

In (4) is vermeld dat $\bar{a}$ kleiner dan één moet zijn: bij de afleiding werd immers gedeeld door $1-\bar{a}$. Als $\sigma_a^2 = 0$ en $\bar{a} = 1$ dan is er ook een stationair geval, zo stationair zelfs dat de rij niet meer fluktueert, maar steeds dezelfde (begin-)waarde behoudt. Formule (3) is dan echter zinloos geworden. Als $\bar{a} < 1$ is zal automatisch σ_a^2 ongelijk zijn aan nul, aangezien slechts "hele" karweien kunnen arriveren, d.w.z. $\underline{a}$ is geheel, of nul.

5.1.2 De prikmethode

Aangezien de klanten in groepjes komen, terwijl hun karweien slechts één voor één worden afgehandeld (enkel loket) is er binnen de groep een wachten op elkaar als de groep uit meer dan één klant bestaat.

Als er precies a (≥ 1) klanten arriveren heeft de eerste van de groep die aan de beurt komt geen groepsgenoten voor zich, de tweede heeft er één en de laatste tenslotte $a-1$; waaruit

volgt dat een klant dan gemiddeld $(a-1)/2$ groepsgenoten voor zich heeft.

Ook hier speelt het prikverhaal van par. 3.2 weer een rol: zijn er evenveel grote als kleine groepen dan behoort toch het grootste deel van de klanten tot een grote groep, met veel groepsgenoten voor zich. Meer formeel gezegd:

Wanneer we een groot aantal N tijdstippen beschouwen, terwijl de kans op a aankomsten op een tijdstip $p(a)$ bedraagt dan zijn er gemiddeld $Np(a)$ tijdstippen met precies a aankomsten, d.w.z. dat er $aNp(a)$ klanten arriveren die behoren tot een groepje van a klanten. Ieder van deze klanten ziet gemiddeld $(a-1)/2$ groepsgenoten voor zich. Gemiddeld voor alle $N\bar{a}$ klanten van alle groepjes, heeft een klant dus voor zich het volgende aantal groepsgenoten:

$$\frac{\sum_{a=0}^{\infty} a N p(a) (a-1)/2}{N\bar{a}} = \frac{\bar{a}^2 - \bar{a}}{2\bar{a}}. \quad (6)$$

De, over een lange tijd, gemiddelde rijlengte zij $\bar{n}$. Op de tijdstippen komen en vertrekken gemiddeld $\bar{a}$ klanten. Dit betekent dat een binnenkomend groepje gemiddeld $\bar{n}-\bar{a}$ klanten aantreft.

Het totale aantal klanten dat een binnenkomende klant derhalve gemiddeld voor zich ziet bedraagt, samen met de bijdrage uit verg. (6):

$$\bar{n} - \bar{a} + \frac{\bar{a}^2 - \bar{a}}{2\bar{a}}.$$

Als deze klanten voor hem worden geholpen, geeft dit aantal tevens zijn gemiddelde wachttijd omdat de karweiduur één tijdseenheid is. De doorlooptijd van de klant, zijnde de som van de wachttijd en de karweiduur, heeft de verwachtingswaarde $\bar{w} + 1$, zodat met het theorema $L = \lambda W$, de gemiddelde rijlengte gelijk is aan

$$\bar{n} = \bar{a} \left(\bar{n} - \bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\bar{a}} - \frac{1}{2} + 1 \right), \quad (7)$$

waaruit onmiddellijk de vergelijking (3) volgt.

De gemiddelde wachttijd van een klant bedraagt, wegens het voorgaande

$$\bar{w} = \frac{\bar{n}}{\bar{a}} - 1 = \frac{\bar{a}^2 - \bar{a}}{2\bar{a}(1-\bar{a})}. \quad (8)$$

Er werd gesteld dat de karweien die een nieuwkomer voor zich ziet ook voor hem worden afgehandeld, hetgeen impliciet een FIFO-rijdiscipline betekent. Mochten toch de karweien

verdeeld zijn in verschillende klassen van prioriteiten, dan heeft dit op de gemiddelde wachttijd van alle karweien geen invloed omdat alle karweien dezelfde duur hebben en voor het loket als zodanig niet te onderscheiden zijn, zodat de snelheid waarmee de karweien worden afgehandeld door voorkeursvolgorden niet verandert.

5.1.3 Enkele bijzondere gevallen

a) Aankomsten binomiaal verdeeld.

De kans op a aankomsten is

$$p(a) = C_N^a p^a (1-p)^{N-a}, \quad 0 \leq a \leq N, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (9)$$

met

$$C_N^a = \binom{N}{a} = \frac{N!}{a!(N-a)!}.$$

Het verwachte aantal aankomsten en de variantie bedragen

$$\begin{aligned} \bar{a} &= Np, \text{ zodat } p = \bar{a}/N, \\ \sigma_a^2 &= Np(1-p) = \bar{a}\left(1 - \frac{\bar{a}}{N}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Substitutie van (10) in (4) geeft

$$\bar{n} = \frac{\bar{a}}{1-\bar{a}} \left(1 - \bar{a} \frac{N+1}{2N}\right). \quad (11)$$

In het bijzondere geval dat $N = 1$ is, d.w.z. als de kans op één aankomst gelijk is aan $p = \bar{a}$ en de kans op geen aankomst $1 - \bar{a}$, gaat (11) over in $\bar{n} = \bar{a}$; alle karweien zijn dan in bewerking, er wordt niet gewacht.

Als $N \rightarrow \infty$ op een zodanige wijze dat $\bar{a}$ konstant blijft en $p = \bar{a}/N \rightarrow 0$, dan gaat (11) over in

$$\bar{n} = \frac{\bar{a}(2-\bar{a})}{2(1-\bar{a})}, \quad (12)$$

hetgeen in overeenstemming is met formule (18) van hoofdstuk 3; onder de genoemde voorwaarden gaat de binomiale verdeling immers over in een Poissonverdeling. De genoemde overeenstemming is maar ten dele: het aantal klanten dat per tijdseenheid arriveert mag een Poissonverdeling hebben, de aankomsten zijn echter niet volgens een Poissonproces, zodat de relatie " $L = K = N$ " hier niet geldt. De gemiddelde waarde $\bar{n}$ uit de vergelijking (12) is

de "L", zoals reeds gesteld werd direkt na formule (6).

Het hier behandelde geval van binomiaal verdeelde aankomsten is analoog aan een probleem dat Bakker behandelt (ref. 4, pag. 51):

Er is een machinefabriek met een groot aantal N produktiecentra; in ieder centrum is de bewerkingsduur genormaliseerd op één tijdseenheid. Een produkt zal in het algemeen verschillende bewerkingen ondergaan die in verschillende centra plaatsvinden. De kans dat een produkt na één bewerking klaar is en de fabriek kan verlaten zij $1/N$, evenals de kans dat het produkt naar één van de andere centra gaat om verder bewerkt te worden. Het gemiddelde aantal bewerkingen is dan N voor een produkt. Stel voorts de kans dat er aan het einde van een tijdseenheid een nieuwe klant in het systeem komt gelijk aan λ ; de bezettingsgraad van het gehele systeem, maar ook van een produktiecentrum is dan λ . Hieruit volgt de kans dat een bepaald centrum een karwei toegestuurd krijgt van een bepaald ander centrum:

$(1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot 1/N = \lambda/N$. Met andere woorden het aantal karweien dat een centrum aan het begin van een nieuwe tijdseenheid ontvangt is binomiaal verdeeld (opmerking: er zijn $N-1$ andere centra, maar ook van buitenaf kan een nieuwe klant komen met een kans λ/N ; er zijn dus toch als het ware N bronnen die ieder een karwei kunnen leveren).

Op de vroeger reeds aangegeven ingewikkelde manier (zie par. 3.3.3) behandelt Bakker verder dit vraagstuk: hij berekent de gemiddelde rijlengte in zo'n produktiecentrum (sub-systeem), hetgeen uiteraard leidt tot de formule (11). De door ons bewandelde weg is veel eenvoudiger en algemener.

b) Aankomsten Poisson verdeeld.

Dit geval is reeds besloten in het voorgaande. Voor de Poisson-verdeling geldt $\sigma_a^2 = \bar{a}$, zodat (12) onmiddellijk wordt gevonden uit (4).

Voor de gemiddelde wachttijd geldt, met verg (8):

$$\bar{w} = \frac{\bar{a}}{2(1-\bar{a})}, \quad (13)$$

wat ook in overeenstemming is met de vergelijking (18) van hoofdstuk 3 als we bedenken dat $\bar{s} = 1$ is.

c) Aankomsten normaal verdeeld.

Ook hier kunnen wij kort zijn. De verdeling heeft twee parameters, waarvoor gewoonlijk gemiddelde waarde en standaardspread worden gebruikt. Deze parameters kunnen direkt in (8) worden gesubstitueerd.

5.2 Karweiduren een geheel veelvoud van de tijdseenheid

Het aantal klanten dat in een tijdseenheid arriveert zij weer $\underline{a}$, terwijl $\underline{s}$ de grootte van een karwei geeft; $\underline{s}$ is een geheel veelvoud van de tijdseenheid, $\underline{a}$ en $\underline{s}$ zijn onafhankelijke stochastische variabelen met gemiddelden $\bar{a}$ en $\bar{s}$. Voor de binnenkomende hoeveelheid werk $\underline{h}$ per tijdseenheid geldt:

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \bar{a}\bar{s} \\ \sigma_h^2 &= \sigma_s^2 \bar{a} + \sigma_a^2 \bar{s}^2,\end{aligned}\tag{14}$$

waarbij gebruik werd gemaakt van de formule voor de variantie van een som van onafhankelijke stochastische variabelen waarbij het aantal termen van de som zelf ook een onafhankelijke stochastische variabele is (zie ref. 58, pag. 57). Interpreteren wij $\underline{h}$ als een aantal karweien van één tijdseenheid, dan zijn van deze "eenheidskarweien" gemiddeld aanwezig, wegens (4),

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{h}}{2} + \frac{\sigma_h^2}{2(1-\bar{h})}.\tag{15}$$

Aangezien $\bar{h}$ de hoeveelheid werk is die per tijdseenheid arriveert (ofwel $\bar{a}\bar{s}$ is het gemiddelde aantal aankomsten per karweiduur) is dit bedrag gelijk aan de bezettingsgraad ρ van het loket:

$$\bar{n}_1 = \frac{\rho}{2} + \frac{\sigma_h^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{2} + \frac{\sigma_s^2 \bar{a} + \sigma_a^2 \bar{s}^2}{2(1-\rho)}.\tag{16}$$

Een willekeurig arriverende toeschouwer moet, volgens formule (10) van hoofdstuk 3, gemiddeld een tijd $(\bar{n}_1 - 1 + \bar{\alpha}_1)$ wachten alvorens al het werk dat hij aantrof is verricht; de symbolen $\bar{n}_1$ en $\bar{\alpha}_1$ hebben hier betrekking op de zojuist ingevoerde "eenheidskarweien". Anderzijds bedraagt de bedoelde wachttijd $(\bar{n} - 1 + \bar{\alpha})\bar{s}$ als $\bar{n}$ en $\bar{\alpha}$ betrekking hebben op de hele karweien. Daarom is

$$(\bar{n}-1+\bar{\alpha})\bar{s} = \bar{n}_1 - 1 + \bar{\alpha}_1,$$

zodat

$$\bar{n} = 1 - \bar{\alpha} + \frac{\bar{n}_1 - 1 + \bar{\alpha}_1}{\bar{s}}.\tag{17}$$

Daar $\bar{\alpha}_1$ betrekking heeft op eenheidskarweien geldt (zie par. 3.3.2):

$$\bar{\alpha}_1 = 1 - \frac{\rho}{2},$$

zodat met (16) en (17) wordt gevonden:

$$\bar{n} = 1 - \bar{\alpha} + \frac{\sigma_h^2}{2(1-\rho)\bar{s}}, \quad (18)$$

waarin $\bar{\alpha}$ bepaald is door de vergelijkingen (11) en (15) van hoofdstuk 3, namelijk

$$1 - \bar{\alpha} = \rho(1 - \alpha) = \rho\left(1 - \frac{\bar{s}^2}{2\bar{s}}\right) = \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{\sigma_s^2}{\bar{s}^2}\right) = \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\alpha}\sigma_s^2}{2\bar{s}}.$$

Substitutie in (18) leidt tot

$$\bar{n} = \frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\alpha}^2 \sigma_s^2 + \bar{s} \sigma_a^2}{2(1-\rho)}. \quad (19)$$

We mogen hierbij opmerken dat de teller van de tweede term in het rechterlid van (19), te weten $\bar{\alpha}^2 \sigma_s^2 + \bar{s} \sigma_a^2$, gelijk is aan de variantie van het aantal aankomsten per karweiduur en verschilt van de σ_h^2 uit (14).

Zijn de aankomsten volgens een Poisson-verdeling met $\sigma_a^2 = \bar{a}$, dan leidt (18), evenals (19), tot de relatie (13) van hoofdstuk 3. Ook hier geldt de opmerking ten aanzien van de overeenstemming die gemaakt werd na formule (12).

Daar werd verondersteld dat ieder karwei één of meer tijdseenheden bedraagt is $\bar{s} \geq 1$.

In dat geval is zeker $\bar{\alpha}$ kleiner dan één, omdat in het stationaire geval $\rho = \bar{\alpha}\bar{s} < 1$ is. Aangezien $\bar{a}$ een geheel getal is of nul, moet σ_a^2 ongelijk aan nul zijn.

Gezien de voorwaarden $\bar{s} \geq 1$ en $\bar{\alpha}\bar{s} < 1$ kunnen we stellen dat het behandelde geval betrekking heeft op de situatie van weinige, maar grote karweien per tijdseenheid indien $\bar{s} \gg 1$. Het beschrijft dan tevens de situatie van willekeurig verdeelde karweiduren omdat de eis dat de uren gehele veelvouden van de tijdseenheid moeten zijn dan nauwelijks een rol speelt.

5.3 Karweiduren willekeurig

In de vorige paragrafen werd de eis gesteld dat de karweiduur één tijdseenheid was of een geheel veelvoud daarvan. Deze eis zullen we nu laten vallen. Het verwachte aantal klanten dat per tijdseenheid arriveert zij weer $\bar{a}$, met een verwachte hoeveelheid werk $\bar{a}\bar{s}$. Wel moet wegens de veronderstelde stationariteit $\bar{\alpha}\bar{s} < 1$ gesteld worden.

Stel de aanwezige hoeveelheid werk vlak voor een mogelijk aankomsttijdstip gemiddeld gelijk aan $\bar{H}_1$ en direkt na een mogelijk aankomsttijdstip aan $\bar{H}_2$. Er geldt dan de relatie:

$$\bar{H}_2 = \bar{H}_1 + \bar{a}\bar{s} = \bar{H}_1 + \rho. \quad (20)$$

Omdat de klanten in groepjes arriveren is er een wachttijd op groepsgenoten waarvan de verwachtingswaarde, wegens (6), gelijk is aan

$$(\frac{\bar{a}^2}{2\bar{a}} - \frac{1}{2})\bar{s},$$

terwijl de gehele groep nog een wachttijd $\bar{H}_1$ heeft als we stellen dat de aangetroffen hoeveelheid werk eerst afgemaakt moet worden. Daar voorts de eigen karweiduur van een klant gemiddeld $\bar{s}$ bedraagt, is de verwachting van de totale doorlooptijd

$$(\frac{\bar{a}^2}{2\bar{a}} - \frac{1}{2})\bar{s} + \bar{H}_1 + \bar{s}.$$

Met het theorema $L = \lambda W$ vinden wij dan voor het gemiddelde aantal klanten in het systeem

$$\bar{n} = \bar{a} \bar{H}_1 + \rho(\frac{\bar{a}^2}{2\bar{a}} + \frac{1}{2}), \quad (\rho = \bar{a}\bar{s}). \quad (21)$$

Voor een willekeurig arriverende (volgens een Poissonproces) toeschouwer geeft (21) het te verwachten aantal aan te treffen klanten. De dan aanwezige werkhoeveelheid ($\bar{H}$) bedraagt, wegens verg. (16) van hoofdstuk 3,

$$\bar{H} = (\bar{n} - \rho)\bar{s} + \rho\alpha\bar{s}, \quad (\text{met } \alpha = \bar{s}^2/2\bar{s}^2). \quad (22)$$

De rijlengte (21) gesubstitueerd in (22) levert

$$\bar{H} = \rho \left\{ \bar{H}_1 + \bar{s}(\frac{\bar{a}^2}{2\bar{a}} - \frac{1}{2} + \alpha) \right\}, \quad (23)$$

hetgeen ook geschreven kan worden als

$$\bar{H} = \rho\bar{H}_1 + \frac{1}{2}(\sigma_h^2 + \rho^2), \quad (24)$$

waarbij σ_h^2 voldoet aan (14). $\bar{H}$ is de, gemiddeld over de tijd, aanwezige hoeveelheid werk. Als de hoeveelheid $\underline{H}_2$, direkt na een aankomsttijdstip, voldoende is voor tenminste één tijdseenheid ($\underline{H}_2 \geq 1$) is de voorwaardelijke verwachting van $\underline{H}$:

$$E(\underline{H}|\underline{H}_2) = \underline{H}_2 - \frac{1}{2}, \quad (\underline{H}_2 \geq 1), \quad (25)$$

omdat de hoeveelheid werk lineair afneemt over een tijdseenheid.

Is $H_2 < 1$ dan is het loket nog bezet gedurende de tijd $\bar{H}_2$, met een gemiddelde hoeveelheid werk $\bar{H}_2/2$ over die tijd, terwijl de rest van de tijdseenheid het loket leeg is:

$$E(\bar{H}|\bar{H}_2) = \frac{\bar{H}_2^2}{2} > H_2 - \frac{1}{2}, \quad (H_2 < 1). \quad (26)$$

Uit het voorgaande volgt dan voor de onvoorwaardelijke verwachting, met gebruikmaking van (20):

$$\bar{H} > \bar{H}_2 - \frac{1}{2} = \frac{\bar{H}_1 + \bar{H}_2}{2} - \frac{1-\rho}{2}. \quad (27)$$

Anderzijds geldt, als H_1 de hoeveelheid werk is aan het eind van de betreffende tijdseenheid:

$$E(\bar{H}|H_1) = H_1 + \frac{1}{2}, \quad (H_1 > 0), \quad (28)$$

$$E(\bar{H}|H_1) \leq H_1 + \frac{1}{2}, \quad (H_1 = 0), \quad (29)$$

zodat voor de onvoorwaardelijke verwachting $\bar{H}$ ook geldt

$$\bar{H} < \bar{H}_1 + \frac{1}{2} = \frac{\bar{H}_1 + \bar{H}_2}{2} + \frac{1-\rho}{2}. \quad (30)$$

Op grond van de ongelijkheden (27) en (30) stellen wij

$$\bar{H} = \frac{\bar{H}_1 + \bar{H}_2}{2} + \epsilon \cdot \frac{1-\rho}{2}, \quad -1 < \epsilon < 1. \quad (31)$$

De vergelijkingen (20), (24) en (31) leveren samen:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= \frac{\sigma_h^2}{2(1-\rho)} - \frac{\rho+\epsilon}{2}, \\ \bar{H} &= \frac{\sigma_h^2}{2(1-\rho)} - \frac{\epsilon\rho}{2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{H}_2 = \frac{\sigma_h^2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho-\epsilon}{2}, \quad \text{met } -1 < \epsilon < 1 \text{ en } \rho < 1.$$

Enkele bijzondere gevallen.

a) In het geval dat $\sigma_h = 0$, zal iedere binnenkomende hoeveelheid werk direct in de daaropvolgende tijdseenheid worden afgewerkt. Daar $\bar{h} = \rho < 1$, geldt dan $\bar{H}_1 = 0$ ofwel $\epsilon = -\rho$.

Als $\sigma_h = 0$ is mag $\rho = 1$ zijn; bij de bedragen voor $\bar{H}$, $\bar{H}_1$ en $\bar{H}_2$ kan dan een vaste begin-

hoeveelheid werk, die altijd aanwezig blijft, worden opgeteld. De formules (32) hebben dan geen betekenis.

- b) Zijn de karweiduren een geheel veelvoud van de tijdseenheid, dan is het loket gedurende een tijdseenheid of geheel bezet of geheel onbezet, zodat dan geldt $\bar{H} = (\bar{H}_1 + \bar{H}_2)/2$, ofwel $\epsilon = 0$. Het resultaat is in overeenstemming met formule (16); immers daar is $\bar{n}_1$ het gemiddelde aantal aanwezige eenheidskarweien over een tijdseenheid, hetgeen identiek is met de werkhoeveelheid aan het begin van de tijdseenheid, m.a.w. $\bar{n}_1 = \bar{H}_2$ (met $\epsilon = 0$).

In de twee genoemde gevallen was ϵ gemakkelijk te bepalen.

Het zoeken naar een algemene oplossing voor ϵ heeft weinig zin omdat de tweede termen in de rechterleden van (32) een werkhoeveelheid voorstellen van, absoluut, minder dan één tijdseenheid. In situaties waarin het wachtprobleem echt een "probleem" is zal dit nauwelijks een rol spelen, zodat gewoongelijk $\epsilon = 0$ gesteld kan worden.

HOOFDSTUK 6

VAN GROEPSVERWERKING NAAR G/M/1

De titel van dit hoofdstuk mag enigszins vreemd klinken, toch past hij goed bij de gang van zaken.

Als vervolg op het vorige hoofdstuk willen wij een geval behandelen van (enkelvoudige) aankomsten op vaste tijdstippen met groepsverwerking, hetgeen wij zullen doen aan de hand van een voorraadprobleem. De resultaten van dit onderzoek zijn gemakkelijk te vertalen naar wachtproblemen van het type G/M/1.

Het predikaat G/M/1 heeft hierbij betrekking op een enkel-loket met negatief-exponentieel verdeelde karweiduren en een aankomstproces van de klanten dat een vernieuwingsproces is.

6.1 Een voorraadprobleem

Zonder in te gaan op zaken die specifiek tot het terrein van de voorraadproblematiek behoren, moge het duidelijk zijn dat er nauwe relaties bestaan tussen "voorraden" en "wachten". In beide gevallen is er sprake van een aankomstproces (goederen klanten of karweien) en een verwerkingsproces (bewerken van goederen, waaronder ook verzenden of verkopen verwerken van karweien). Wanneer de loketbeheerder het (stochastische) aankomstproces min of meer kan beïnvloeden dan zal men vaak spreken van voorraadbeheer (c.q. productiebesturing). In het geval dat de verwerking min of meer bestuurbaar is, bijvoorbeeld door overwerken en het inschakelen van meer loketten zal men geneigd zijn van wachtproblemen te spreken.

Het probleem dat wij willen behandelen is te vinden in ref. 58, vraagstuk II-7:

Op vaste equidistante tijdstippen arriveert een artikel (ofwel een vaste portie) in een magazijn, waar het uit verdwijnt door aankopen van afnemers die volgens één of ander toevallig proces arriveren, met dien verstande dat het aantal afnemers dat tussen twee tijdstippen arriveert een stochastische variabele is waarvan de kansverdeling bekend wordt verondersteld.

De variabelen voor de verschillende intervallen zijn onafhankelijk.

Voorts wordt aangenomen dat iedere afnemer slechts één artikel koopt. Als de voorraad nul is op het ogenblik dat een afnemer arriveert, dan vertrekt hij zonder iets te kopen.

Het vraagstuk kan ook zo gelezen worden dat de verdeling van de vraag in een periode bekend is; hierbij is dan de verkoop gelijk aan de vraag als de voorraad toereikend is. De periode noemen wij ook hier weer de tijdseenheid. Als wij voorts stellen dat wij alleen geïnteresseerd zijn in de grootte van de voorraad direct na binnenkomst van een artikel en niet in het voorraadverloop tussen twee tijdstippen dan doet het er in feite niet toe of de afnemers één voor één komen dan wel als groepje gelijktijdig, dan wel dat er sprake is van één afnemer die meer artikelen koopt.

Voor het systeem, magazijn met voorraad, definiëren wij de toestand als het aantal artikelen dat in voorraad is direct na een tijdstip waarop een nieuw artikel binnenkomt. De toestand "nul" komt derhalve niet voor. Er is hier sprake van een ingebed Markov-proces, omdat de toestand slechts op bepaalde tijdstippen wordt bekeken, terwijl er vaste overgangskansen p_{ij} zijn van toestand i op tijdstip t naar toestand j op tijdstip $t+1$ onafhankelijk van de toestanden die het systeem doorlopen heeft voor het tijdstip t ; dit is immers het geval omdat de aanvoer van de artikelen onafhankelijk is van het voorraadverloop in het verleden en de verkoop tussen t en $t+1$ uitsluitend wordt bepaald door de aankomsten van de afnemers in deze tijdseenheid en de voorraadtoestand op tijdstip t .

Geven wij met a_{ij} aan het aantal afnemers per tijdseenheid dat de overgang van toestand i naar toestand j bewerkstelligt, dan kunnen wij daarvoor de volgende matrix opstellen (gedeeltelijk):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} j \\ \hline \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} i \\ \begin{array}{cccc} 1 & \geq 1 & 0 & - \\ 2 & \geq 2 & 1 & 0 \\ 3 & \geq 3 & 2 & 1 \\ 4 & \geq 4 & 3 & 2 \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{array}
 \quad (1)$$

Voorbeeld: $i = 3$. Komt er geen afnemer in de komende tijdseenheid dan gaat de toestand, door binnenkomst van één artikel, over in $j = 4$; komen er 3 of meer klanten dan is de

volgende toestand $j = 1$. Een liggende streepje betekent dat de betreffende overgang niet mogelijk is; de voorraad kan hoogstens met de eenheid stijgen.

Zij p_i de stationaire kans dat het systeem in toestand i is, ofwel p_i is de relatieve frekwentie waarmee toestand i voorkomt.

Voor de stationaire kansen p_i van het Markov-proces met overgangskansen p_{ij} geldt (ref. 19, hoofdstuk XV):

$$p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1. \quad (2)$$

Geven wij met $P(\underline{a} = m) = P_m$ aan de kans dat het aantal afnemers in een tijdseenheid gelijk is aan m , dan volgt uit (1) voor de overgangskansen p_{ij}

$$p_{ij} = P_{i-j+1}, \quad (j > 1, i \geq j-1), \quad (3)$$

$$p_{ij} = \sum_{k=i}^{\infty} P_k, \quad (j = 1), \quad (4)$$

$$p_{ij} = 0, \quad (j > i+1). \quad (5)$$

Gesubstitueerd in (2) levert dit voor de kansen p_j de volgende relaties

$$p_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} p_i P_{i-j+1}, \quad (j > 1), \quad (6)$$

$$p_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{k=i}^{\infty} P_k, \quad (j = 1), \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1. \quad (8)$$

Om de oplossing van dit stelsel vergelijkingen te bepalen, onderzoeken wij het verschil

$$u_j = p_j - p_{j+1}, \quad (j \geq 1), \quad (9)$$

Door de vergelijking (6) op te schrijven voor j en $j+1$ vinden wij onmiddellijk

$$u_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} u_i P_{i-j+1}, \quad (j > 1), \quad (10)$$

welke vergelijking van dezelfde gedaante is als de overeenkomstige voor p_j ; zie (6).

Met (9) kan p_i geschreven worden als

$$p_i = p_1 - \sum_{k=1}^{i-1} u_k,$$

hetgeen wij gebruiken voor de bepaling van u_1 :

$$u_1 = p_1 - p_2 = p_1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i-1} = p_1 - p_1 \sum_{i=1}^{\infty} p_{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} u_k.$$

Maken wij er gebruik van dat de som van alle p_i gelijk is aan één, dan vinden wij na verwisseling van de twee sommaties in de laatste term van het rechterlid

$$u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \sum_{k=1}^{\infty} p_k. \quad (11)$$

Tenslotte geldt nog de relatie

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j = \sum_{j=1}^{\infty} (p_j - p_{j+1}) = p_1. \quad (12)$$

Vergelijken wij de relaties (6), (7) en (8) met de relaties (10), (11) en (12) dan blijken de grootheden p_j en u_j/p_1 aan dezelfde relaties te voldoen. Dit betekent dat zo er een eenduidige oplossing is voor p_j , dezelfde oplossing voldoet voor de grootheid u_j/p_1 , m.a.w.:

$$p_j = (p_j - p_{j+1})/p_1,$$

ofwel

$$p_{j+1} = p_j(1-p_1),$$

zodat voor de stationaire kansen geldt

$$p_j = p_1(1-p_1)^{j-1}, \quad (j \geq 1). \quad (13)$$

Deze relatie is onafhankelijk van het aankomstproces van de afnemers ofwel de verdeling van de vraag, mits de aankomsten per tijdseenheid onafhankelijk zijn, zoals reeds werd gezegd; wel wordt de waarde van p_1 bepaald door het aankomstproces.

Uit de relaties (6) en (13) volgt immers

$$p_2 = \sum_{i=1}^{\infty} p_1(1-p_1)^{i-1} p_{i-1} = p_1(1-p_1),$$

zodat, met $q_1 = 1-p_1$,

$$q_1 = \sum_{k=0}^{\infty} q_1^k p_k, \quad q_1 = 1-p_1. \quad (14)$$

Aan deze vergelijking voldoet de waarde $q_1 = 1$, omdat de som van de kansen P_k gelijk is aan 1. Deze oplossing ($q_1 = 1, p_1 = 0$) voldoet echter niet aan ons probleem, omdat de sommatie van de kansen p_j uit (13) slechts dan één oplevert als $p_1 > 0$ is.

Voor $q_1 = 0$ is het rechterlid van (14) gelijk aan $\dot{P}_0$, hetgeen betekent dat ($q_1 = 0, p_1 = 1$) een oplossing van ons probleem zou kunnen zijn indien $P_0 = 0$ is, d.w.z. dat in iedere tijdseenheid tenminste één klant komt; de stationaire oplossing is dan $p_1 = 1, p_j = 0$ (voor $j \geq 2$): ieder artikel dat binnenkomt wordt in de komende tijdseenheid met zekerheid afgenomen, de voorraad kan niet groeien.

Als $P_0 > 0$ is, zal het linkerlid van (14) in het punt $q_1 = 0$ dus kleiner zijn dan het rechterlid; in het punt $q_1 = 1$ zijn de twee leden aan elkaar gelijk. Daar het rechterlid een monotoon stijgende functie van q_1 is, evenals zijn afgeleide, kan er nog één snijpunt zijn in het interval $0 < q_1 < 1$, mits de afgeleide van het rechterlid voor $q_1 = 1$ groter dan die van het linkerlid, d.w.z. groter is dan één. Inmers dan is er ook een gebiedje waarvoor het rechterlid kleiner is dan het linkerlid.

Genoemde voorwaarde levert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k P_k > 1,$$

hetgeen betekent dat het verwachte aantal afnemers per tijdseenheid groter dan één moet zijn, wat operationeel gezien een duidelijke zaak is.

Uit (13) volgt nog de gemiddelde voorraad die aanwezig is, direct na binnenkomst van een artikel:

$$\bar{n} = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \frac{1}{p_1}, \quad (15)$$

terwijl voorts de kans dat de voorraad op zo'n tijdstip groter is dan N gelijk is aan

$$P(n > N) = \sum_{j=N+1}^{\infty} p_j = (1 - p_1)^N. \quad (16)$$

We geven nu enige voorbeelden van oplossingen van (14).

6.1.1 Aankomsten van afnemers volgens een Poisson-verdeling

Voor de Poisson-verdeling geldt (formule (23) van hoofdstuk 1):

$$P_k = \frac{E^k}{k!} e^{-E},$$

als E is het verwachte aantal afnemers per tijdseenheid.

Substitutie in (14) geeft

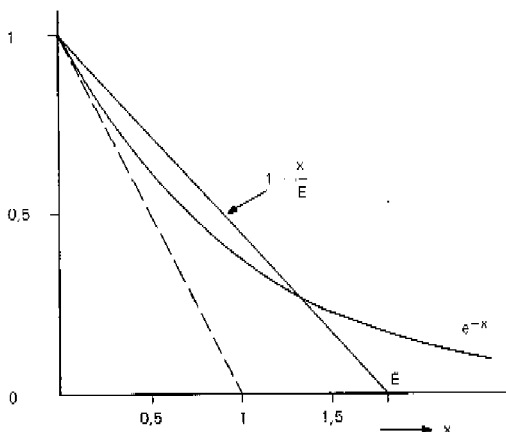
$$q_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Eq_1)^k}{k!} e^{-E} = e^{-E} \cdot e^{Eq_1},$$

zodat q_1 gevonden wordt uit

$$q_1 = e^{-E(1-q_1)}, \text{ ofwel } 1-p_1 = e^{-Ep_1}. \quad (17)$$

Voorbeeld: $E = 1,8$. In figuur 15 zijn getekend als functie van x de lijnen $1 - x/E$ en e^{-x} , het snijpunt waarvan de waarde van $x = Ep_1$ geeft die aan (17) voldoet. Er wordt gevonden $x = 1,32$, zodat $p_1 = 0,73$ is, welke waarde met een numerieke berekening uiterzaard wel nauwkeuriger bepaald kan worden. Omdat de lijn e^{-x} in het punt $x = 0$ raakt aan de lijn $1 - x$ is er alleen een snijpunt buiten $x = 0$ te vinden als $E > 1$ is.

Als $E < 1$ is zullen gemiddeld meer goederen dan afnemers arriveren, zodat de voorraad gemiddeld stijgt met de tijd en een stationaire oplossing ($p_1 = \text{konstant}$) niet te vinden is. Als $E = 1$ is zou een stationaire oplossing mogelijk zijn als de afvoer van artikelen de aanvoer bij zou kunnen houden, hetgeen slechts het geval is als nooit een afnemer voor een leeg magazijn komt, ofwel als $\bar{n} = \infty$ is.



figuur 15 Oplossing van de vergelijking (14) voor het geval van Poisson verdeelde aankomsten; formule (17).

6.1.2 Aankomsten van de afnemers binomiaal verdeeld

Hier wordt de relatie

$$p_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

gesubstitueerd in (14):

$$q_1 = \sum_{k=0}^N C_N^k (pq_1)^k (1-p)^{N-k}.$$

Met het binomium van Newton wordt dan gevonden

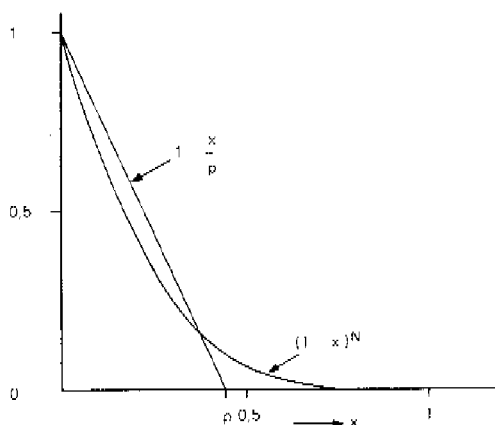
$$q_1 = (1 - p + pq_1)^N$$

ofwel

$$1 - p_1 = (1 - pp_1)^N. \quad (18)$$

Voorbeeld: $E = pN = 1,8$; zij $N = 4$ en $p = 0,45$.

In figuur 16 zijn getekend de lijnen $(1-x)^N$ en $1-x/p$. Het snijpunt ligt bij $x = 0,38$ dus $p_1 = x/p = 0,84$.



figuur 16 Oplossing van de vergelijking (14) voor het geval van binomiaal verdeelde aankomsten; formule (18).

6.1.3 Aankomsten van de afnemers diskreet homogeen verdeeld

De aankomstverdeling is van de gedaante

$$P_k = \frac{1}{N+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

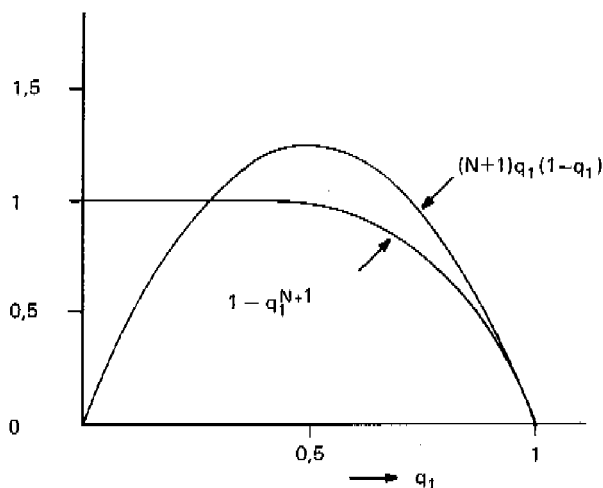
Substitutie in (14) geeft

$$q_1 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N q_1^k,$$

hetgeen leidt tot de vergelijking

$$(N+1)q_1(1-q_1) = 1 - q_1^{N+1}. \quad (19)$$

In figuur 17 zijn de twee lijnen $1 - q_1^{N+1}$ en $(N+1)q_1(1-q_1)$ getekend als functie van q_1 voor $N = 4$. Voor het snijpunt vinden wij $q_1 = 0,27$ dus $p_1 = 0,73$. Het gemiddelde aantal aankomsten per tijdseenheid is hier $E = N/2 = 2$.



figuur 17 Oplossing van de vergelijking (14) voor het geval dat de aankomsten diskreet homogeen verdeeld zijn; formule (19).

6.2 Het wachtsysteem G/M/1

In het behandelde voorraadprobleem kwamen de goederen op vaste tijdstippen binnen. Het kan ook zo gesteld worden dat als er een rij goederen is de voorste in de rij een "bewerking" ondergaat die bestaat uit het wachten op de eerstvolgende afnemer. Als de afnemers bijvoorbeeld volgens een Poissonproces arriveren is deze "bewerkingstijd" negatief-exponentieel verdeeld.

Wij gaan nu een transformatie op het probleem toepassen. Van het feit dat de aankomsten van de goederen equidistant waren hebben wij gebruik gemaakt door te stellen dat de aantallen afnemers in de verschillende intervallen van elkaar onafhankelijke stochastische variabelen zijn. Laten wij de voorwaarde van equidistantie vallen dan zal er in het algemeen een afhankelijkheid ontstaan tussen de aantallen afnemers in de diverse intervallen. Deze afhankelijkheid bestaat niet als de afnemers volgens een Poissonproces binnenkomen: de kansverdeling van het aantal afnemers wordt dan uitsluitend bepaald door de grootte van het beschouwde aankomstinterval van het artikel en niet door het aantal afnemers in het vorige interval.

Wij stellen nu dat de berekeningen zoals die zijn uitgevoerd in paragraaf 6.1 op dezelfde wijze verlopen als de aankomsten op equidistante tijdstippen getransformeerd worden in aankomsten op willekeurige tijdstippen, waarbij de van elkaar onafhankelijke aankomstintervallen een kansdichtheid $f(a)$ hebben, mits de aankomsten van de afnemers in een interval onafhankelijk zijn van die in een ander interval, hetgeen bij Poisson-aankomsten van de afnemers het geval is.

Als het verwachte aantal afnemers per tijdseenheid μ is dan is de kans op precies k afnemers in een interval gelijk aan

$$P_k = \int_{a=0}^{\infty} \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} f(a) da. \quad (20)$$

Deze waarde gesubstitueerd in (14) levert, na verwisseling van sommatie en integratie,

$$q_1 = \int_{a=0}^{\infty} da e^{-\mu a} f(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu a q_1)^k}{k!},$$

hetgeen gelijk is aan

$$q_1 = \int_{a=0}^{\infty} e^{-(1-q_1)\mu a} f(a) da, \quad (q_1 < 1). \quad (21)$$

Deze vergelijking, die een continue versie is van de relatie (14) heeft één wortel $0 < q_1 < 1$

indien het verwachte aantal afnemers, per aankomst-interval van een artikel, groter is dan 1 ($\mu\bar{a} > 1$); zie ook Cohen (ref. 12, pag. 625).

Noemen we de goederen in het volgende klanten dan geldt:

Voor een willekeurig aankomstproces van klanten, met de verdeling $f(a)$ voor de tijd tussen twee aankomsten, en negatief-exponentieel verdeelde karweiduren, met gemiddelde $1/\mu$, gelden de formules (13), (15) en (16) waarbij $q_1 = 1 - p_1$ voldoet aan vergelijking (21), die een uitwerking is van (14). Dit is een wachtproces van het type G/M/1.

De gemiddelde rijlengte $\bar{n}$, uit (15), is de gemiddelde waarde direct na een binnenkomst. Het aantal klanten $\bar{n}'$ dat een binnenkomende klant aantreft in de rij is gemiddeld:

$$\bar{n}' = \bar{n} - 1 = \frac{q_1}{1 - q_1}. \quad (22)$$

Gezien het feit dat de karweiduren negatief-exponentieel verdeeld zijn is de gemiddelde wachttijd van een klant

$$\bar{w} = \bar{n}'/\mu. \quad (23)$$

De kans dat een klant een leeg loket aantreft p'_0 , is gelijk aan de kans dat direct na de binnenkomst het systeem in toestand één is

$$p'_0 = p_1 = 1 - q_1. \quad (24)$$

Omdat de binnenkomsten in het algemeen niet volgens een Poissonproces zijn is $1 - p'_0$ niet de bezettingsgraad; deze laatste is immers gelijk aan

$$\rho = \frac{1}{\bar{a}\mu}. \quad (25)$$

Opmerking: De formules (21) en volgende, leiden tot het M/M/1 geval, van par. 2.2.1, als de aankomsten volgens een Poissonproces zijn, d.w.z. als $f(a)$ een negatief-exponentiële verdeling is. Voor aankomsten op vaste tijdstippen, $f(a)$ is dan een deltafunctie, vinden we het geval van par. 6.1.1 terug.

6.2.1 Aankomsten van het type *k-Erlang*

Tenslotte nog een voorbeeld met gamma-verdeelde tussenaankomsttijden (aankomstproces van het type Erlang):

$$f(a) = \frac{\lambda(\lambda a)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda a}. \quad (26)$$

Substitutie in de verg. (21) geeft

$$q_1 = \int_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda a)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-[(1-q_1)\mu + \lambda]a} da, \quad (27)$$

wat met substitutie $\lambda' = (1-q_1)\mu + \lambda$ overgaat in

$$q_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^k \int_{a=0}^{\infty} \frac{\lambda'(\lambda' a)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda' a} da = \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^k,$$

zodat q_1 opgelost dient te worden uit de volgende vergelijking

$$q_1 \left[(1-q_1) \frac{\mu}{\lambda} + 1 \right]^k = 1, \quad (q_1 < 1). \quad (28)$$

Een aankomstproces van dit type wordt verkregen als klanten die volgens een Poissonproces arriveren meteen doorgestuurd worden naar een reeks van k loketten, waarbij de eerste naar loket 1 gaat, de tweede naar loket 2, ..., de $(k+1)^{\text{e}}$ weer naar loket 1 enz. Voor ieder van deze loketten is dan het aankomstproces van het type k -Erlang. Uiteraard levert (28) de waarde $q_1 = \lambda/\mu$ als $k = 1$ is (Poisson-aankomsten).

6.2.2 De verdelingsfunctie van de wachttijd

Uit het voorgaande kan ook gemakkelijk de kumulatieve verdelingsfunctie van de wachttijd bepaald worden. Immers

$$P(\underline{w} \leq x) = P(w = 0) + P(0 < \underline{w} \leq x) = p_1 + \int_0^x p_w(t) dt, \quad (29)$$

waarin p_1 de kans is dat direkt na een binnenkomst er één klant aanwezig is, hetgeen gelijk is aan de kans dat deze klant niet hoeft te wachten, terwijl voorts $p_w(t)$ de kansdichtheid is van de wachttijd als er gewacht moet worden, wat betekent dat er na de binnenkomst tenminste 2 klanten zijn. Als er dan precies j klanten zijn ($j \geq 2$), m.a.w. als het systeem dan in toestand j is, wordt de wachttijd bepaald door de verdeling van de som van $j-1$ negatief-exponentieel verdeelde karweiduren:

$$p_w(t|j) = \frac{\mu(\mu t)^{j-2}}{(j-2)!} e^{-\mu t}, \quad (j \geq 2). \quad (30)$$

Uit deze vergelijking volgt samen met de vergelijking (13) voor de kansdichtheid $p_w(t)$:

$$\begin{aligned}
p_w(t) &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\mu(\mu t)^{j-2} e^{-\mu t}}{(j-2)!} p_1(1-p_1)^{j-1} = \\
&= \mu p_1(1-p_1) e^{-\mu t} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{[\mu t(1-p_1)]^{j-2}}{(j-2)!} = \\
&= \mu p_1(1-p_1) e^{-\mu t p_1}, \quad (t > 0).
\end{aligned} \tag{31}$$

Aangezien er een van nul verschillende kans is, volgens (29), dat de wachttijd nul voorkomt is in (31) vermeld: $t > 0$.

De vergelijking (31) gesubstitueerd in (29) levert tenslotte:

$$P(\underline{w} \leq x) = 1 - q_1 e^{-\mu x(1-q_1)}, \quad (x \geq 0), \tag{32}$$

waarbij $q_1 = 1 - p_1$ voldoet aan de vergelijking (21).

6.2.3 De verdelingsfunctie van het aantal klanten; een expliciete bepaling van de wortel q_1

De kansverdeling van het aantal klanten in het systeem, direct na een binnenkomst is gegeven door de vergelijking (13), ofwel door (16). Een kombinatorische aanpak als in par. 4.1 werd geschetst kan hier ook gebruikt worden:

De situatie $\underline{n} > N$ is te realiseren op de volgende wijzen:

- in de tijd $\underline{T}_N$ van de laatste N aankomstintervallen is geen klant vertrokken,
- in de tijd $\underline{T}_{N+1}$ is één klant vertrokken; het vertrektijdstip moet dan wel geschikt liggen, nl. in $\underline{T}_N$ en niet in het daaraan voorafgaande interval,
- in de tijd $\underline{T}_{N+2}$ zijn twee klanten vertrokken; de vertrektijdstippen moeten geschikt liggen: 2 in $\underline{T}_N$ en 0 in de daaraan voorafgaande twee intervallen; ofwel 1 in $\underline{T}_N$, 1 in het voorafgaande en 0 in het daaraan voorafgaande interval; enzovoort.

De geschikte keuze van de vertrekpunten is een probleem dat identiek is met dat van de geschikte aankomsten in een bezette periode. Derhalve geldt:

$$P(\underline{n} > N) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N}{N+j} P_j^y(N+j), \tag{33}$$

waarin $P_j^y(N+j)$ is de kans op j vertrekken in $N+j$ aankomstintervallen, terwijl voorts gebruik

gemaakt werd van de vergelijking (2) van hoofdstuk 4. Gezien de negatief-exponentiële verdeling van de karweiduren vertrekken de klanten volgens een Poissonproces, met een verwachting van μ per tijdseenheid, mits het loket bezet is, wat bij bovenstaand vertrekpatroon het geval is. Hieruit volgt:

$$P_j^y(N+j) = \int_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} f_{N+j}(x) dx. \quad (34)$$

In deze vergelijking is $f_i(x)$ de verdelingsfunctie van de som van i aankomstintervallen; het is de i -voudige konvolutie van de kansdichtheid van deze intervallen. Uiteraard kan ook de kumulatieve vorm gebruikt worden waarbij $f_i(x)$ dan wordt vervangen door $DF_i(x)$.

Substitutie van (34) in (33) met gebruikmaking van (16) geeft:

$$P(\underline{n} > N) = q_1^N = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N}{N+j} \int_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} f_{N+j}(x) dx, \quad (35)$$

zodat

$$q_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \int_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x} f_{j+1}(x) dx, \quad (36)$$

waarmee tevens een expliciete uitkomst voor q_1 is gevonden.

De kombinatorische afleiding van (33) is in principe afkomstig van Takács (ref. 52). Ook de relatie (36) is van hem. Het funktietheoretische bewijs daarvan, zoals Cohen dat geeft (ref. 12, appendix 6), heeft nogal wat voeten in de aarde.

HOOFDSTUK 7

EEN VOORBEELD VAN TIME-SHARING

Het probleem dat in dit hoofdstuk ter sprake komt is afkomstig van Adiri en Avi-Itzhak (ref. 1). In de inleiding (par. 1.1) is reeds aangegeven waarom hier een andere versie wordt gegeven. Voor een uitvoeriger behandeling van time-sharing modellen wordt verwezen naar het mooie artikel van Coffman en Kleinrock (ref. 11). Voorts hebben Adiri en Avi-Itzhak nog een time-sharing model met verschillende rijen beschreven (ref. 2) op een veel operationelere wijze dan in hun hierboven aangehaalde publikatie.

7.1 De round-robin discipline

Een methode om kleine karweien een korte doorlooptijd te geven zonder dat bij binnenkomst van een karwei een indeling in een prioriteitsklasse plaatsvindt, is die van de time-sharing welke veelvuldig in computers wordt toegepast. De methode werkt als volgt: Een binnenkomend karwei sluit zich achteraan in de wachtrij, waarvoor een FIFO-regel geldt. Aan een karwei dat in behandeling wordt genomen wordt hoogstens de tijd Θ besteed. Is het karwei in die tijd klaar gekomen dan verlaat dit het systeem, zo niet dan wordt het onvoltooide karwei weer achter in de wachtrij geplaatst en heeft het karwei dat vooraan in de rij staat recht op een bewerkingstijd van hoogstens Θ . Door deze procedure (round-robin discipline) is de wachttijd van een karwei een toenemende functie van de karweiduur.

Het overschakelen van het ene karwei op het andere zal in het algemeen niet tijdloos gebeuren. Bij de time-sharing gebeurt dit overschakelen vele malen vaker dan in de vroeger onderzochte gevallen waarbij een karwei in één keer werd afgehandeld; reden waarom deze inschakeltijd τ (per keer) in het volgende in rekening wordt gebracht.

Verondersteld wordt dat de karweien volgens een Poissonproces arriveren en dat de netto karweiduren negatief-exponentieel verdeeld zijn. De netto karweiduur is de bewerkingstijd

zonder de inschakeltijden die nodig zijn voor, laat ons zeggen, de administratie. Als de netto karweiduur gemiddeld $1/\mu$ bedraagt is er een kans

$$p = e^{-\mu\Theta} \quad (1)$$

dat het karwei langer duurt dan Θ en dus terug moet keren in de wachtrij. Gezien het negatief-exponentiële karakter van de karweiduur-verdeling is deze kans onafhankelijk van het aantal malen dat het karwei al aan de beurt is geweest.

Resumerend kan gezegd worden dat het loket het werk in porties of kwanta hakt, die gedeeltelijk bestaan uit de inschakeltijd τ en uit een echte werktijd die hoogstens Θ bedraagt. Voor de grootte van de kwanta $\underline{q}$ geldt:

$$\begin{aligned} \underline{q} &= \tau + \Theta, & \text{met kans } p, \\ \underline{q} &= \tau + \underline{x}, & \text{met kans } 1-p, \end{aligned} \quad (2)$$

waarin $\underline{x}$ de netto hoeveelheid werk is die in het laatste kwantum van een karwei daaraan nog wordt besteed.

Aangezien per kwantum er een vaste kans $1-p$ is om een karwei te beëindigen zal het gemiddelde aantal kwanta $\bar{r}$, per karwei bedragen

$$\bar{r} = \frac{1}{1-p}, \quad (3)$$

hetgeen betekent dat per kwantum gemiddeld een netto hoeveelheid werk wordt verricht gelijk aan $1/(\mu\bar{r})$. De gemiddelde kwantumgrootte is derhalve

$$\bar{q} = \tau + \frac{1-p}{\mu}. \quad (4)$$

Wanneer bij de netto karweiduren de inschakeltijden worden opgeteld, zijnde per karwei een geheel veelvoud van τ , dan worden de bruto karweiduren verkregen, waarvan de verwachting is

$$\bar{s} = \frac{1}{\mu} + \bar{r}\tau = \frac{\bar{q}}{1-p}. \quad (5)$$

We kunnen het wachtproces nu ook opvatten als een geval van Poisson-aankomsten en willekeurig verdeelde (bruto-)karweiduren; voor de gemiddelde rijlengte op een willekeurig tijdstip geldt dan formule (8) of (13) uit hoofdstuk 3.

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 \bar{s}^2}{2(1-\rho)} \quad (6)$$

$$\text{met } \rho = \lambda \bar{s} \quad (\rho < 1). \quad (7)$$

$\bar{n}$ is het aantal karweien dat een vertrekkend karwei achterlaat ofwel het aantal dat een nieuw binnenkomend karwei gemiddeld aantreft. Voor dit aantal speelt het geen rol dat de bruto karweiduren in stukjes wordt gehakt en dat de karweien onderling "boompje verwisselen". Dit vindt zijn oorzaak hierin dat, gezien de negatief-exponentiële verdeling, alle kwanta gelijkwaardig zijn, d.w.z. vanuit het wachtproces gezien niet van elkaar verschillend zijn; het zijn porties werk die met een kans $1-p$ worden beëindigd. Als het loket bezet is, is de verdeling van de tijd tussen twee definitief vertrekkende klanten dezelfde als van de bruto karweiduren $\underline{s}$.

In het volgende gebruiken we nog de verwachtingen $\bar{q}^2$ en $\bar{s}^2$, reden waarom die eerst berekend worden.

Gezien de negatief-exponentiële verdeling van de netto karweiduren geldt:

$$\bar{q}^2 = \int_0^{\Theta} (\tau + x)^2 \cdot \mu e^{-\mu x} dx + p(\tau + \Theta)^2,$$

ofwel

$$\bar{q}^2 = \frac{2(1-p)}{\mu^2} - \frac{2}{\mu} \{ p \cdot (\Theta + \tau) - \tau \} + \tau^2. \quad (8)$$

Een karwei dat uitgesmeerd wordt over $\underline{r}$ kwanta, heeft een bruto karweiduur van

$$\underline{s}_r = (\underline{r} - 1)(\Theta + \tau) + \tau + \underline{x} = \underline{r}(\Theta + \tau) - \Theta + \underline{x} \quad (9)$$

terwijl de kans P_r , dat het karwei r kwanta heeft, wegens (2), gelijk is aan

$$P_r = p^{r-1} \cdot (1-p). \quad (10)$$

Uit de laatste vergelijkingen volgt:

$$\bar{s}^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \underline{s}_r^2 P_r = \Theta^2 + (\tau + \Theta)^2 \bar{r}^2 + \bar{x}^2 - 2\Theta(\tau + \Theta)\bar{r} + 2\bar{x} \{ (\tau + \Theta)\bar{r} - \Theta \},$$

waarbij we moeten bedenken dat $\underline{x}$ en $\underline{r}$ onafhankelijk van elkaar zijn. Wegens (10) geldt

$$\bar{r}^2 = \frac{1+p}{(1-p)^2} \quad (11)$$

terwijl verder $\bar{x}^2$ volgt uit een voorwaardelijke verdeling:

$$\bar{x}^2 = \int_0^{\Theta} x^2 \cdot \frac{\mu e^{-\mu x}}{1-p} dx = \frac{2}{\mu^2} - \frac{p\Theta^2}{1-p} - \frac{2p\Theta}{\mu(1-p)}. \quad (12)$$

Dit leidt tot

$$s^2 = \frac{2}{\mu^2} + \frac{\tau}{1-p} \left\{ \frac{2}{\mu} + \tau + \frac{2p(\tau+\Theta)}{1-p} \right\}. \quad (13)$$

Na dit intermezzo berekenen we de verwachting van de eerste wachttijd $\bar{w}_1$, ook wel eerste responsietijd $\bar{T}_1$ genoemd. Het is de tijd dat een nieuw binnenkomend karwei moet wachten alvorens voor het eerst aan de beurt te zijn. Het karwei treft gemiddeld $\bar{n}$ karweien aan waarvan $\bar{n}-\rho$ in de wachtrij en ρ karweien als onderhanden werk in het loket.

De eerstgenoemde karweien hebben ieder, in eerste instantie, een gemiddelde duur $\bar{q}$ terwijl de laatstgenoemden een gemiddelde duur $\bar{q}^2/(2\bar{q})$ hebben (zie formule (15) van hoofdstuk 3), derhalve is

$$\bar{T}_1 = \bar{w}_1 = (\bar{n}-\rho) \bar{q} + \rho \cdot \frac{\bar{q}^2}{2\bar{q}}. \quad (14)$$

Als bovengenoemd nieuw binnenkomend karwei aan zijn eerste kwantum begint staan achter hem gemiddeld $\lambda \bar{w}_1$ nieuwe klanten, terwijl van de karweien die hij aantrof een deel weer teruggekeerd is in de wachtrij en dus ook achter hem staan. Wat deze "oude" karweien betreft: de $\bar{n}-\rho$ die hij in de wachtrij aantrof hadden ieder een kans p om terug te keren in de rij. Een karwei in het loket wat reeds een deel van zijn kwantum heeft verbruikt heeft een grotere kans om terug te keren; noemen we deze kans voorlopig p' dan geldt voor het aantal klanten $\bar{k}_1$ dat een karwei dat voor het eerst aan een kwantum begint, achter zich heeft:

$$\bar{k}_1 = \lambda \bar{w}_1 + (\bar{n}-\rho) \cdot p + \rho p'. \quad (15)$$

Wat de kans p' betreft:

van alle kwanta heeft de fraktie p een lengte $\Theta+\tau$ en de fraktie $1-p$ een gemiddelde lengte $\tau+\bar{x}$, samen levert dit een gemiddelde kwantumgrootte $\bar{q}$ op. Een nieuw binnenkomend karwei dat een kwantum in het loket aantreft heeft een kans $(\Theta+\tau) p/\bar{q}$ dat het kwantum van de lengte $\Theta+\tau$ is en alleen dan keert het karwei waarbij dit kwantum behoort terug in de rij. Daarom is

$$p' = \frac{p(\Theta+\tau)}{\bar{q}}. \quad (16)$$

(14) en (16) gesubstitueerd in (15) levert

$$\bar{k}_1 = (\bar{n}-\rho) \left\{ p + \rho(1-p) \right\} + \frac{\rho p(\Theta+\tau)}{\bar{q}} + \lambda \rho \frac{\bar{q}^2}{2\bar{q}} \quad (17)$$

waarbij dan gebruikt werden de relaties (5) en (7):

$$\lambda \bar{q} = \lambda \bar{s}(1-p) = \rho(1-p). \quad (18)$$

Stel, meer algemeen, dat $\bar{k}_i$ het aantal karweien is dat achter het karwei staat dat aan zijn i -de kwantum begint ($i \geq 2$). Sinds het begin van zijn vorige kwantum is een tijd verstreken die uit twee delen bestaat, nl. de tijd $\Theta + \tau$ van kwantum $i-1$ en de tijd $\bar{w}_i$ zijnde de wachttijd die het karwei daarna weer in de rij doorbrengt wachtend op zijn volgend kwantum. Op het moment dat het karwei het $(i-1)$ -de kwantum beëindigt staan achter hem $\bar{k}_{i-1} + \lambda(\Theta + \tau)$ karweien, gemiddeld; immers $\bar{k}_{i-1}$ stonden er aan het begin van kwantum $i-1$ en er zijn nieuwkomers gedurende het kwantum. Dit aantal treft het karwei aan als hij zich weer achter in de rij aansluit. Zijn i -de wachttijd is dan gemiddeld

$$\bar{w}_i = \{ \bar{k}_{i-1} + \lambda(\Theta + \tau) \} \cdot \bar{q}, \quad (i \geq 2). \quad (19)$$

Voorts keert de fraktie p van de klanten die hij aantreft in de rij terug terwijl gedurende het wachten ook nieuwe karweien arriveren. Derhalve geldt:

$$\bar{k}_i = \{ \bar{k}_{i-1} + \lambda(\Theta + \tau) \} \cdot p + \lambda \bar{w}_i, \quad (i \geq 2). \quad (20)$$

De vergelijkingen (19) en (20) leveren samen de rekurrente betrekking

$$\bar{k}_i = \{ \bar{k}_{i-1} + \lambda(\Theta + \tau) \} (p + \lambda \bar{q}), \quad (i \geq 2) \quad (21)$$

waaruit met gebruikmaking van (18) volgt:

$$\bar{k}_i = \bar{k}_1 \{ p + \rho(1-p) \}^{i-1} + \frac{\lambda(\Theta + \tau) \{ p + \rho(1-p) \}}{(1-p)(1-\rho)} [1 - \{ p + \rho(1-p) \}^{i-1}], \quad (i \geq 1). \quad (22)$$

De wachttijd $\bar{w}_1$ die verstrijkt tussen de binnenkomst van een nieuw karwei en het begin van zijn eerste kwantum werd de eerste responsietijd $\bar{T}_1$ genoemd. De i -de responsietijd $\bar{T}_i$, voor een karwei dat dus minstens i kwanta in beslag neemt, is de tijd die verstrijkt tussen het begin van het kwantum $i-1$ en het begin van kwantum i :

$$\bar{T}_i = \Theta + \tau + \bar{w}_i, \quad (i \geq 2). \quad (23)$$

Een karwei met een netto karweiduur d wordt uitgevoerd in r kwanta, waarbij r het kleinste gehele getal is dat groter is dan of gelijk is aan d/Θ . De totale doorlooptijd (verblijfstijd in het systeem) van dit karwei is $\bar{T}_d$ met als verwachting, bij een gegeven d ,

$$\bar{T}_d = \sum_{i=1}^r \bar{T}_i + \tau + x, \quad (24)$$

omdat $\bar{T}_d$ is opgebouwd uit de tijd die verloopt tussen de aankomst van het karwei en het begin van zijn laatste kwantum plus de tijd van dit kwantum; de grootte x is hierbij gelijk

aan

$$x = d - (r-1) \Theta, \quad (25)$$

zijnde de tijd die in het laatste kwantum nog aan het karwei wordt besteed. Substitutie van (23) in (24), levert met (19):

$$\bar{T}_d = \tau + x + \bar{T}_1 + (r-1)(\Theta + \tau)(1 + \lambda \bar{q}) + \bar{q} \sum_{i=2}^r \bar{k}_{i-1}, \quad (26)$$

een vergelijking die dus geldt bij gegeven d . Een verdere uitwerking van (26) met behulp van de voorgaande formules is uiteraard mogelijk maar niet direct noodzakelijk.

De onvoorwaardelijke verwachting $\bar{T}$ van de doorlooptijd kan uit (26) worden berekend door vermenigvuldiging met de kansdichtheid van d (negatief-exponentieel) en te integreren, anderzijds geldt dat de gemiddelde rijlengte wordt opgebouwd in de gemiddelde doorlooptijd (" $L = \lambda W$ "), zodat

$$\bar{n} = \lambda \bar{T}, \text{ ofwel } \bar{T} = \bar{n} / \lambda, \quad (27)$$

waarbij $\bar{n}$ gegeven is door (6). Hierbij kan nog worden opgemerkt dat $\bar{n}$ de gemiddelde rijlengte is op een willekeurig, toevallig gekozen tijdstip. Uit de waarde van $\bar{n}$ kan ook berekend worden de gemiddelde rijlengte $\bar{m}$ bij het begin van een kwantum. Immers als een nieuw karwei arriveert terwijl een kwantum werk onderhanden is dan arriveert dit karwei gemiddeld een tijd $\bar{q}^2 / (2\bar{q})$ na het begin van dat kwantum, zodat de nieuwkomer gemiddeld aantreft

$$\bar{m} + \lambda \frac{\bar{q}^2}{2\bar{q}}$$

karweien. Als het karwei arriveert in een lege periode dan treft hij geen klanten aan. Gemiddeld worden dus aangetroffen

$$\bar{n} = \rho(\bar{m} + \lambda \frac{\bar{q}^2}{2\bar{q}}) + (1-\rho) \cdot 0,$$

zodat

$$\bar{m} = \frac{\bar{n}}{\rho} - \lambda \frac{\bar{q}^2}{2\bar{q}}. \quad (28)$$

7.2 Enkele benaderingen voor het geval $\mu\Theta \ll 1$

Als de maximaal toegestane netto bewerkingstijd Θ per kwantum, klein is t.o.v. de gemiddelde netto karweiduur $1/\mu$ kunnen bovenstaande formules sterk vereenvoudigd worden. De overschrijdingskans p uit (1) is dan bij benadering

$$p \approx 1 - \mu\Theta, \quad (29)$$

terwijl het gemiddelde aantal kwanta per karwei dan

$$\bar{r} \approx \frac{1}{\mu\Theta} \quad (30)$$

bedraagt, hetgeen een gemiddelde kwantumgrootte betekent van

$$\bar{q} \approx \tau + \Theta; \quad (31)$$

er zijn zoveel kwanta van de grootte $\tau + \Theta$ dat het ene kwantum per karwei dat kleiner is nauwelijks een rol speelt. De gemiddelde bruto karweiduur bedraagt, wegens (5),

$$\bar{s} \approx \frac{\tau + \Theta}{\mu\Theta}, \quad (32)$$

waaruit volgt, met (7),

$$\rho \approx \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\tau}{\Theta}\right); \quad (33)$$

de voorwaarde $\rho < 1$ geeft een minimum waarde aan Θ voor het verkrijgen van een stationaire oplossing:

$$\Theta > \Theta_0 = \frac{\lambda\tau}{\mu - \lambda}. \quad (34)$$

Tenzij $\lambda/\mu < 0,5$ betekent dit $\Theta > \tau$; meer algemeen kunnen we wel stellen dat $\tau < \Theta$ moet zijn omdat anders het gebruik van het loket wel erg inefficiënt zou zijn. In onze benadering betekent dat: $\tau < \Theta \ll 1/\mu$.

Voor het tweede moment van de bruto karweiduren vinden wij, met (13) en (29),

$$\bar{s}^2 \approx \frac{2}{\mu^2} \left(1 + \frac{\tau}{\Theta}\right)^2 - \frac{\tau}{\mu} \left(2 + \frac{\tau}{\Theta}\right);$$

aangezien $\tau/\mu \ll 2/\mu^2$ kan de tweede term in het rechterlid worden verwaarloosd t.o.v. de eerste, hetgeen met (32) leidt tot

$$\bar{s}^2 \approx 2\bar{s}^2$$

waardoor (6) overgaat in

$$\bar{n} \approx \frac{\rho}{1-\rho}, \quad (35)$$

zijnde de formule die exakt geldt voor het geval van Poissonaankomsten en negatief-exponentieel verdeelde bruto karweiduren (formule (5) van hoofdstuk 2).

Omdat bij de berekening van $\bar{q}^2$ in deze benadering een paar termen tegen elkaar wegvallen moeten we in het rechterlid van (29) nog toevoegen de term $(\mu\Theta)^2/2$, hetgeen leidt tot

$$\frac{\bar{q}^2}{2\bar{q}} \approx \frac{\Theta+\tau}{2}$$

hetgeen volgens (31) ook wel te verwachten was, omdat praktisch alle kwanta dezelfde grootte hebben. Substitutie in (14) geeft met (35) voor de eerste responsietijd

$$\bar{T}_1 = \bar{w}_1 = \frac{\rho(1+\rho)}{2(1-\rho)} (\Theta+\tau) \approx \frac{\lambda\Theta}{2\mu} \left(1 + \frac{\tau}{\Theta}\right)^2 \cdot \frac{\mu\Theta + \lambda(\Theta+\tau)}{\mu\Theta - \lambda(\Theta+\tau)}. \quad (36)$$

Als $\tau \ll \Theta$ is wordt $\bar{T}_1$ een lineaire functie van Θ :

$$\bar{T}_1 \approx \frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu(\mu-\lambda)} \left\{ \Theta + 2\tau \left(1 + \frac{\lambda\mu}{\mu^2 - \lambda^2}\right) \right\}. \quad (37)$$

Bij de minimum toegestane waarde Θ_0 , verg. (34), is $\rho = 1$ en $\bar{T}_1 = \infty$. Er is dus een waarde van $\Theta (> \Theta_0)$ waarvoor $\bar{T}_1$ een minimum heeft.

Zie figuur 18.

Wegens (31) geldt voor de kans p' uit (16): $p' \approx p$. Substitutie in (15) levert, samen met (35) en (36)

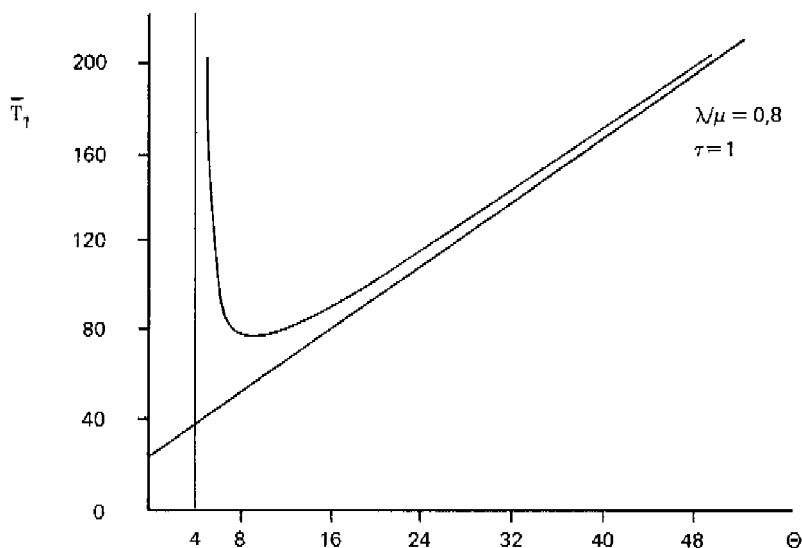
$$k_1 \approx \frac{\rho}{1-\rho} \left\{ 1 - \mu\Theta + \frac{\lambda}{2} (1+\rho)(\Theta+\tau) \right\},$$

wat met (33) overgaat in

$$k_1 = \frac{\rho}{1-\rho} \left\{ 1 - \mu\Theta \left(1 - \frac{\rho(1+\rho)}{2}\right) \right\} \approx \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (38)$$

De rekurrente betrekking (21) kan ook vereenvoudigd worden. Uit (31) en (33) volgt $\lambda\bar{q} \approx \mu\Theta\rho$, zodat met (29) geldt dat

$$p + \lambda\bar{q} \approx 1 - \mu\Theta(1-\rho) \approx 1.$$



figuur 18 De eerste responsietijd $\bar{T}_1$ als functie van Θ ; formule (36).

De twee asymptoten $\Theta = \Theta_0$ en die uit de vergelijking (37) zijn in de figuur getekend.

Om dezelfde reden is $\lambda(\Theta + \tau) \approx \mu\Theta\rho \ll 1$ en derhalve te verwaarlozen t.o.v. $\bar{k}_{i-1}$, zodat de relatie (21) overgaat in

$$\bar{k}_i \approx \bar{k}_{i-1}, \quad (i \geq 2)$$

ofwel

$$\bar{k}_i \approx \frac{\rho}{1-\rho}, \quad (i \geq 1). \quad (39)$$

De vergelijkingen (19) en (23) geven voor de volgende responsietijden

$$\bar{T}_i = (\Theta + \tau) \left\{ 1 + \frac{\rho}{1-\rho} + \rho\mu\Theta \right\} \approx \frac{\Theta + \tau}{1-\rho}, \quad (i \geq 2). \quad (40)$$

Voor de totale gemiddelde doorlooptijd $\bar{T}_d$, van een karwei met nettoduur d , wordt met verg. (26) gevonden:

$$\bar{T}_d \approx \tau + x + \frac{\rho(1+\rho)(\Theta+\tau)}{2(1-\rho)} + (r-1) \frac{\Theta+\tau}{1-\rho},$$

hetgeen met (25) voor het verschil van doorlooptijd en netto bewerkingstijd het volgende resultaat geeft (met $r \approx d/\Theta$)

$$\bar{T}_d - d \approx \frac{r(\tau+\rho\Theta)}{1-\rho} \approx \frac{\mu\tau+\lambda(\Theta+\tau)}{\mu\Theta-\lambda(\Theta+\tau)} d. \quad (41)$$

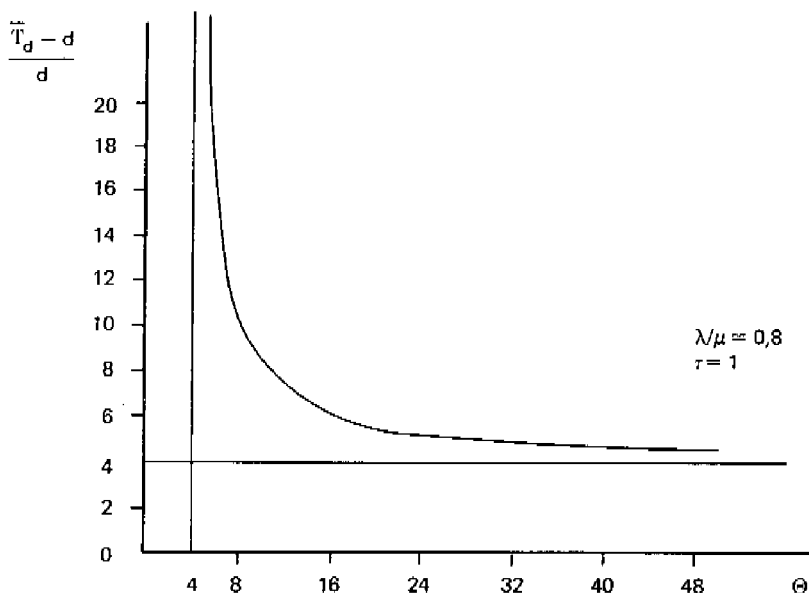
Dit betekent, bij gegeven waarden van λ/μ en τ/Θ , dat de totale wachttijd een lineaire functie is van de netto karweiduur d .

In figuur 19 is de relatieve wachttijd uitgezet als functie van Θ .

De verwachting van de doorlooptijd is wegens (27) en (35):

$$\bar{T} \approx \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \approx \frac{\tau+\Theta}{\mu\Theta-\lambda(\tau+\Theta)}, \quad (42)$$

welke relatie trouwens ook direkt uit (41) afgeleid kan worden door de substitutie $\bar{d} = 1/\mu$.



figuur 19 De verhouding van de wachttijd en de netto bewerkingstijd als functie van Θ ; formule (41).

HOOFDSTUK 8

OVER HET AANGROEIEN VAN DE RIJLENGTE

In hoofdstuk 4 werd onderzocht de vraag hoe lang het zal duren tot het loket, dat nu bezet is, voor het eerst weer leeg zal zijn. Daarnaast is het van belang te weten tot welke waarde de rijlengte kan aangroeien gedurende die bezette periode en hoeveel aankomsten daarvoor nodig zijn.

Voordat we hier verder op ingaan willen we echter de aandacht vestigen op de mogelijkheid tot het doen van experimenten.

Vaak zal het moeilijk of onmogelijk zijn een ingewikkeld wachtsysteem geheel analytisch door te rekenen. Het is mogelijk dan gebruik te maken van een computer om het gedrag van het systeem na te bootsen. Nodig is hiervoor een aselektor, dat is een programma dat getallen genereert die toevallige trekkingen zijn uit een homogene verdeling; door bepaalde transformaties kunnen trekkingen uit andere verdelingen worden verkregen. Het gebeuren in het systeem wordt dan gesimuleerd door het trekken van aankomsten en karweiduren uit de bijbehorende verdelingen, waarbij dan allerlei tellingen betreffende rijlengten en wachttijden worden bijgehouden.

Dit geeft de mogelijkheid tot het doen van experimenten die enerzijds kunnen dienen om een theorie te toetsen, anderzijds om inzicht te geven in het gedrag van systemen die we door hun gekompliceerdheid niet meer in zijn geheel kunnen doorzien.

In het volgende wordt een eenvoudige simulatie behandeld, namelijk die van een inschakelverschijnsel bij een wachtsysteem van het type $M/M/1$. Dit voorbeeld is gekozen omdat het een aspect van het wachten betreft dat in de voorgaande hoofdstukken nauwelijks ter sprake kwam.

Voorts is het bedoeld om te laten zien dat de veelheid van getallen die de computer voortbrengt pas overzichtelijk wordt als ze door een handzame empirische formule of een enkele grafiek kan worden gerepresenteerd.

8.1 Een inschakelverschijnsel bij een systeem van het type M/M/1

Formule (5) van hoofdstuk 2 geeft de gemiddelde rijlengte $\bar{n}$ als functie van de bezettingsgraad ρ voor het M/M/1-systeem. Wanneer het wachtproces begint met bijvoorbeeld de rijlengte nul dan is het interessant te weten hoe lang het duurt alvorens de rijlengte voor het eerst gelijk is aan of groter is dan $\bar{n}$, waarbij dan nog de gemiddelde rijlengte over die tijd uiteraard kleiner is dan $\bar{n}$.

Het proces kan worden gesimuleerd door aankomsten en karweiduren te trekken uit de bijbehorende verdelingen en de telling van de rijlengte bij te houden. Wij kunnen hierbij opmerken dat als x een trekking is uit een homogene verdeling tussen 0 en 1, de groothed

$$y = -a \cdot \log x$$

negatief-exponentieel verdeeld is met a als gemiddelde waarde. Het programma kan in dit bijzondere geval, met Poisson-aankomsten en negatief-exponentieel verdeelde karweiduren, worden vereenvoudigd als we alleen de telling van de rijlengte bijhouden: we behoeven dan geen aankomsttijdstippen en karweiduren te trekken doch bij iedere gebeurtenis, aankomst of vertrek, slechts te vragen wat de eerstvolgende gebeurtenis zal zijn. De kans p dat de eerstvolgende verandering in de rijlengte wordt veroorzaakt door een aankomst en niet door een vertrek, bedraagt indien het loket bezet is

$$p = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu s} ds \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\rho}{1+\rho}, \quad (1)$$

als $1/\mu$ de gemiddelde karweiduur, $1/\lambda$ de gemiddelde tijd tussen twee aankomsten en $\rho = \lambda/\mu$ de bezettingsgraad van het loket is. Als het loket niet bezet is, zal p uiteraard gelijk zijn aan 1. De kans q dat de eerstvolgende verandering in de rijlengte wordt veroorzaakt door een vertrek bedraagt $q = 1-p$.

Als het loket bezet is, behoeft dus slechts één trekking te worden gedaan uit een homogene verdeling om te beslissen of de rij met één toeneemt of afneemt.

De simulatie begint steeds met een leeg loket, de uitkomst is het karweinumnummer k dat voor het eerst de rij gelijk maakt aan, of groter maakt dan $\bar{n}$. De simulatie werd 100 maal verricht voor ieder van de volgende waarden van ρ

$$\rho = 0,95 \ (0,01) \ 0,99.$$

Wij zullen niet alle 500 uitkomsten van k vermelden doch alleen de uitersten, de gemiddelden en de spreidingen als functie van ρ ; zie tabel 4. Het blijkt dat $\bar{k}$ (gemiddeld over 100

onafhankelijke waarnemingen) sterk toeneemt als ρ de waarde 1 nadert, zodat, gezien de formules in de vorige hoofdstukken, het voor de hand ligt te stellen dat $\bar{k}$ evenredig is met een macht van $1/(1-\rho)$. Een exponent 2 levert een evenredigheidsconstante C op die in het beschouwde interval van ρ geen al te gekke sprongen maakt:

$$\bar{k} = \frac{C}{(1-\rho)^2}; \quad (2)$$

de waarde van C is ook in de tabel gegeven.

ρ	min. waarde van k	max. waarde van k	$\bar{k}$	σ	C
0,95	32	1.768	256	240	0,64
0,96	39	1.212	406	292	0,65
0,97	111	3.534	840	730	0,76
0,98	197	7.881	1.807	1.608	0,72
0,99	662	40.589	8.031	7.029	0,80

Tabel 4 Uitkomsten van de simulatie.

Wat de nauwkeurigheid betreft het volgende:

Als σ de spreiding per waarneming is van $\bar{k}$, zal $\sigma/10$ de spreiding zijn in $\bar{k}$ die het gemiddelde is van 100 onafhankelijke waarnemingen. De spreiding in een, met de vergelijking (2) experimenteel bepaalde C is dan

$$\sigma_C = (1-\rho)^2 \sigma/10,$$

wat met de waarden van σ uit tabel 4, in het beschouwde interval een nagenoeg konstante $\sigma_C = 0,06$ oplevert.

Uit tabel 4 blijkt dat voor de 100 simulaties met $\rho = 0,95$ samen 25,6 duizend karweien gearriveerd zijn; in totaal vertegenwoordigt de tabel ruim 1,13 miljoen karweien, waarvan ruim 70% ten behoeve van het geval $\rho = 0,99$.

8.2 De stochastische wandeling

Hoewel inschakelverschijnselen bij stochastische processen tot ingewikkelde formules kunnen leiden, lijkt een theoretische fundering van een eenvoudig resultaat als (2) is niet zo moeilijk te zijn. Het probleem is in feite niet meer dan dat van de bekende "random walk" van een man die bij een ladder staat, met een kans p een stap doet naar boven en met een kans q een stap naar beneden, terwijl hij zich de vraag stelt na hoeveel opwaartse stappen hij de top mag verwachten te bereiken.

Het systeem zij in toestand n (gedefinieerd door het aantal klanten in het systeem); het verwachte aantal klanten dat nog moet arriveren, alvorens de rijlengte voor het eerst de waarde N ($> n$) bereikt, zij $\bar{k}(n, N)$. Met een kans p is de eerstvolgende gebeurtenis een aankomst van een klant waardoor de toestand overgaat in $n+1$, terwijl met een kans $q = 1-p$ de eerstvolgende gebeurtenis een vertrek is waardoor de toestand overgaat in $n-1$, als $n \geq 1$ is. De volgende relatie geldt derhalve, als we alleen het aantal aankomsten tellen:

$$\bar{k}(n, N) = p[1 + \bar{k}(n+1, N)] + q\bar{k}(n-1, N), \quad (n \geq 0) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{waarbij } p + q = 1 \text{ en } p &= \frac{\rho}{1+\rho} \text{ als } n > 0, \\ p &= 1 \quad \text{als } n = 0 \text{ is.} \end{aligned} \quad (4)$$

De waarde van ρ speelt hierbij geen rol, ρ mag groter dan één zijn, in zoverre dat ρ niet negatief kan zijn.

Met

$$\delta_n = \bar{k}(n-1, N) - \bar{k}(n, N) \quad (5)$$

gaat de vergelijking (3), met gebruikmaking van (4), over in

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n}{\rho} + 1, \quad (n > 0), \text{ met } \delta_1 = 1. \quad (6)$$

De rekurrente betrekking levert

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{-i} = \frac{\rho}{1-\rho} \left(\frac{1}{\rho^n} - 1 \right), \quad (\rho \neq 1) \\ \bar{\delta}_n &= n, \quad (\rho = 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Aangezien, per definitie, $\bar{k}(N, N) = 0$ is wordt met (5) en (7) gevonden

$$\bar{k}(n, N) = \sum_{i=n+1}^N \delta_i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \left(\frac{1}{\rho^N} - \frac{1}{\rho^n} \right) - \frac{\rho(N-n)}{1-\rho}, \quad (\rho \neq 1),$$

$$\bar{k}(n, N) = \frac{1}{2}(N-n)(N+n+1), \quad (\rho = 1).$$
(8)

In het bijzonder geldt voor $n = 0$:

$$\bar{k}(0, N) = \frac{C}{(1-\rho)^2}, \quad \text{met } C = \frac{1}{\rho^{N-1}} - \rho[1+N(1-\rho)], \quad (\rho \neq 1),$$

$$\bar{k}(0, N) = \frac{N(N+1)}{2}, \quad (\rho = 1).$$
(9)

Kiezen wij voorts voor N de waarde van $\bar{n} = \rho/(1-\rho)$, zonodig naar boven afgerond op een geheel getal. Deze keuze betekent dat $\rho < 1$ is, omdat anders $\bar{n}$ niet bestaat. Door de afronding geldt dat in het interval

$$\frac{N-1}{N} < \rho \leq \frac{N}{N+1}$$

de bovengrens N een konstante waarde heeft; de grootheid C doorloopt in dit interval waarden van C_1 tot C_2 gegeven door

$$C_1 = \left(\frac{N}{N-1}\right)^{N-1} - 2 \frac{N-1}{N}, \quad C_2 = \left(\frac{N+1}{N}\right)^{N-1} - \frac{N(2N+1)}{(N+1)^2}.$$
(10)

Met toenemende N worden de intervalletjes voor de waarden van ρ , die dezelfde N opleveren, steeds kleiner terwijl C_1 en C_2 beide naderen tot $e-2$, waarbij

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718 \dots$$
(11)

Uit een numeriek onderzoek blijkt tevens, dat $C_2 < e-2 < C_1$.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{llll} N = 19 & 0,947 < \rho \leq 0,950; & C_1 = 0,752 & C_2 = 0,665 \\ N = 20 & 0,950 < \rho \leq 0,952; & C_1 = 0,750 & C_2 = 0,668. \end{array}$$

Wegens het diskontinue karakter van N als functie van ρ is ook C geen continue functie van ρ .

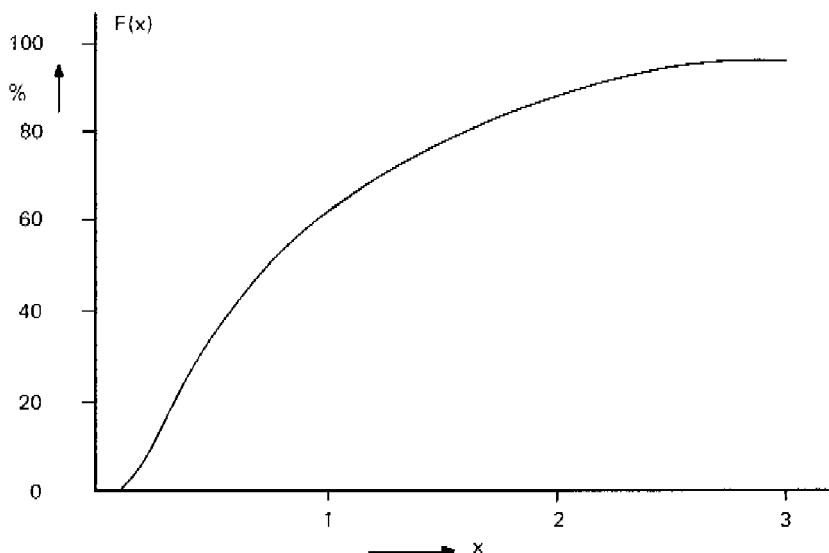
Bij benadering kan gesteld worden dat in het beschouwde interval ($0,95 \leq \rho < 1$) de waarde van C gelijk is aan

$$C = e - 2 \approx 0,72. \quad (12)$$

Voor de beschouwde waarden van $\rho = 0,95(0,01)0,99$ zijn de juiste waarden van C respectievelijk, met (9),

$$0,67 \quad 0,68 \quad 0,69 \quad 0,70 \quad 0,70$$

hetgeen, gezien de spreiding $\sigma_C = 0,06$ (par. 8.1), in goede overeenstemming is met het experiment.



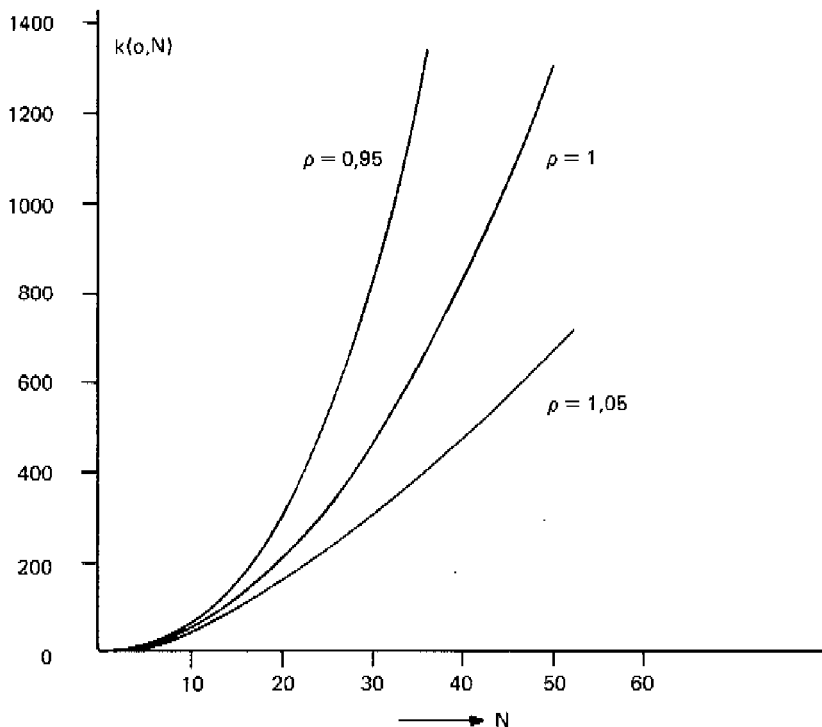
figuur 20 Kumulatieve verdeling van de experimenteel gevonden $\underline{x} = \underline{k}(0,N)/\bar{k}(0,N)$.

Met behulp van alle 500 uitkomsten is in figuur 20 de kumulatieve verdeling $F(x) = P\{\underline{x} \leq x\}$ uitgezet van de stochastische variabele $\underline{x} = \underline{k}(0,N)/\bar{k}(0,N)$. Uit de figuur blijkt dat, bijvoorbeeld, 62% van alle waarnemingen kleiner is dan de verwachtingswaarde, die in de figuur is aangegeven met k_0 , terwijl 4% groter is dan driemaal de verwachting.

In figuur 21 is $\bar{k}(0,N)$ uit de vergelijkingen (9) uitgezet als functie van N voor enkele waarden van ρ . Overigens volgt uit deze figuur ook $\bar{k}(n,N)$ omdat, wegens (8),

$$\bar{k}(n, N) = \bar{k}(0, N) - \bar{k}(0, n). \quad (13)$$

Bij $\rho = 0,95$ moeten bijvoorbeeld gemiddeld ruim 400 karweien arriveren alvorens de rijlengte is gestegen van 30 tot 35; bij $\rho = 1,05$ is dit aantal ca. 80. Wij moeten hierbij bedenken dat dit niet in één bezette periode hoeft te gebeuren: nadat gekonstateerd is dat de rijlengte 30 is kan de rij verschillende keren nul geweest zijn alvorens er een uitschieter tot 35 komt.



figuur 21 $\bar{k}(0, N)$ als functie van N voor enige waarden van ρ ; formules (9).

Om misverstanden te voorkomen nog het volgende. In dit hoofdstuk werd onderzocht hoeveel karweien gemiddeld binnen moeten komen om de rijlengte een bepaalde stijging te geven. De zaak mag niet omgedraaid worden. Bij $\rho = 0,95$ is $\bar{k}(0; 35)$ ruim 1200; hetgeen niet betekent dat de verwachte rijlengte na dit aantal aankomsten 35 bedraagt; de verwachte rij na vele aankomsten is immers $\bar{n} = 19$.

Overigens is het merkwaardig dat uit vergelijking (9), gemakshalve met $\rho = 1$, blijkt dat

$$\bar{k}(N-1, N) = N, \quad (\rho = 1),$$

hetgeen betekent dat naarmate de rij groter wordt een verhoging van de rijlengte steeds meer aankomsten vereist. De reden hiervan is dat met toenemende N de toestand van het systeem steeds verder verwijderd geraakt van de reflecterende grens bij $n = 0$. Hoewel bij $\rho = 1$ met een kans $1/2$ de toename van N naar $N+1$ in één stap kan plaatsvinden, is er een even grote kans dat de eerste stap in de andere richting gaat waarbij het systeem zeer lang kan wandelen in het gebied $n < N$, als N groot is.

8.3 De maximale rijlengte tijdens de bezette periode

Als het systeem in toestand n is zal het ooit wel eens in toestand N ($> n$) komen. Gemiddeld is dit het geval na $\bar{k}(n, N)$ aankomsten, zoals in de vorige paragraaf bleek. We kunnen nu vragen naar de kans dat in een bezette periode, beginnend met één aankomst, de rijlengte minstens de waarde N bereikt; deze kans zij $F(N)$.

Noemen we een bezette periode waarin de rijlengte minstens de waarde N bereikt een succes en één waarin de rijlengte kleiner blijft dan N een fout. Stel het aantal verwerkte karweien in een foutperiode gemiddeld gelijk aan $\bar{m}_f$ en die in een succesperiode aan $\bar{m}_s$. Beide populaties samen vormen de populatie van alle bezette periodes met gemiddeld $\bar{m}$ verwerkte karweien. Uit het voorgaande volgt dan:

$$\bar{m} = (1-F) \bar{m}_f + F \bar{m}_s, \quad \text{met } F = F(N), \quad (14)$$

welke vergelijking geschreven kan worden als:

$$\frac{\bar{m}}{F} = \frac{1-F}{F} \bar{m}_f + \bar{m} + \bar{m}'', \quad (15)$$

waarin $\bar{m}_s$ werd vervangen door $\bar{m} + \bar{m}''$. Hierin is

$\bar{m}'$ het aantal aankomsten in de succesperiode, inclusief de eerste die deze periode opent, dat nodig is om de rijlengte voor het eerst op N te brengen, en $\bar{m}''$ het aantal aankomsten in de rest van deze bezette periode.

Volgens vergelijking (18) van hoofdstuk 4 is voor $\rho < 1$:

$$\bar{m} = \frac{1}{1-\rho} \quad \text{en} \quad \overline{m'} = \frac{N}{1-\rho} - N = \frac{N\rho}{1-\rho}. \quad (16)$$

Bedenken wij voorts dat de kans op een succes F is en dat gemiddeld genomen een succes wordt voorafgegaan door $(1-F)/F$ fouten, wat betekent dat er $(1-F)\bar{m}_f/F$ karweien verwerkt worden alvorens een succesperiode begint, dan geldt

$$\frac{1-F}{F} \bar{m}_f + \overline{m'} = k(0, N). \quad (17)$$

Substitutie van (16) en (17) in de vergelijking (15) levert samen met (9) de volgende waarde voor $F = F(N)$:

$$F(N) = \frac{\rho^{N-1} - \rho^N}{1 - \rho^N}. \quad (18)$$

De kans dat de maximale rijlengte kleiner is dan N bedraagt derhalve

$$1 - F(N) = \frac{1 - \rho^{N-1}}{1 - \rho^N}, \quad (19)$$

terwijl de kans dat deze rijlengte gelijk is aan N bedraagt

$$F(N) - F(N+1) = \frac{\rho^{N-1}(1-\rho)^2}{(1-\rho^N)(1-\rho^{N+1})}. \quad (20)$$

Bij $\rho = 0,95$ en $N = \bar{n} = 19$ is $F(19) = 3,2\%$, wat wil zeggen dat bijna 97% van alle bezette periodes een maximale rijlengte heeft die kleiner is dan $\bar{n}$. In par. 3.5 zagen we reeds dat in het $M/M/1$ geval meer dan de helft van alle bezette periodes uit slechts één karwei bestaat. Deze fractic is gelijk aan $1 - F(2) = 1/(1+\rho)$ omdat, als de rijlengte in een periode nooit groter is dan één, die periode slechts uit één karwei kan bestaan.

Cohen (ref. 12, pag. 192), die overigens een geheel andere afleiding geeft van de vergelijking (18), wijst erop (pag. 631) dat $F(N)$ ook gevonden kan worden als oplossing van het klassieke "gamblers ruin problem" (zie ref. 19, hfdst. XIV): Jan, die slechts één gulden bezit speelt een serie spelletjes tegen Piet die er $N-1$ bezit. De winstkansen zijn respectievelijk $p = \rho/(1+\rho)$ en $q = 1-\rho$; per spel betaalt de verliezer één gulden aan de winnaar. Het spel eindigt als één van de spelers geen geld meer heeft. In deze situatie is $F(N)$ de kans dat Jan de uiteindelijke winnaar is.

HOOFDSTUK 9

MODEL EN WERKELIJKHEID

9.1 Inleiding

In het bekende boek van Churchman, Ackoff en Arnoff (ref. 8) worden de volgende fasen in de operationele research onderscheiden:

- formuleer het probleem
- konstrueer een (mathematisch) model
- analyseer het model
- implementeer de oplossing.

Wanneer in een fabriek een opeenhoping van werk ontstaat met lange doorlooptijden, dan kan men overwegen de wachttijdtheorie ter hand te nemen om tot een oplossing van het probleem te komen. De vier fasen zullen dan alle aan de beurt komen. Voor het formuleren van het probleem en het konstrueren van een model zal statistisch cijfermateriaal verzameld moeten worden, terwijl na de analyse het invoeren van de oplossing ook het nodige werk met zich brengt. Voor de eerste twee fasen is het herkennen of doorzien van de situatie van belang: kennis en inzicht in een aantal min of meer gestyleerde modellen is hierbij noodzakelijk.

De formulering van het probleem en het konstrueren van een model gaan veelal hand in hand. Tijdens het formuleren maakt men een beeld van de situatie waarbij zaken die niet relevant zijn of lijken, uit het beeld of model worden weggelaten. Het probleem wordt in het kader van het model geformuleerd en getoetst aan het werkelijke probleem, wat weer aanleiding kan geven tot veranderingen in het model.

Als echter niet één specifieke situatie het onderwerp van studie is, maar het verkrijgen van inzicht in een vakgebied, dan valt de nadruk op de derde fase, de analyse van verschillende modellen. Aan de lezer wordt dan overgelaten zich een specifieke situatie voor te stellen waarop het model betrekking zou kunnen hebben zoals in een postkantoor, fabriek, supermarkt of op een vliegveld. Voorts wordt door de auteur al of niet opzettelijk, aan de lezer gesuggereerd dat de beschreven modellen met de bijbehorende uitkomsten, behalve

theoretisch interessant, ook bruikbaar zijn in konkrete situaties.

De vraag rijst nu: heeft de wachttijdtheorie praktische betekenis? Het antwoord op deze vraag is in wezen gegeven door het antwoord op de vragen: is het model goed en wat verwacht de toepasser?

Op deze vraag willen wij aan de hand van een laatste voorbeeld, paragraaf 9.2 e.v., terugkomen in paragraaf 9.5.

In het vorige hoofdstuk werd een eenvoudige simulatie gebruikt. Wij willen weer van dat hulpmiddel gebruik maken om de praktische waarde van bepaalde formules te onderzoeken. Dat wij naar een "laboratorium experiment" grijpen en niet naar een "echt experiment" heeft twee redenen. De simulatie geeft de mogelijkheid tot het doen van zeer veel experimenten in een betrekkelijk korte tijd, terwijl voorts tijdens het experiment het model zichzelf niet wijzigt. De computer is, om in menselijke taal te spreken, rustig bereid af te wachten wat er gaat gebeuren, hij wordt niet zenuwachtig als er een grote rij wachtenden is; het model blijft korrekt tijdens de simulatie.

In een werkelijke situatie met mensen en machines moeten wij er altijd op bedacht zijn dat een model dat een goede beschrijving gaf van de realiteit gedurende een bepaalde tijd, bij een hoge of misschien juist een lage bezettingsgraad, of onder welke omstandigheden dan ook, die realiteit niet meer korrekt beschrijft omdat het werkelijke systeem zoals het funktioneert, zich heeft gewijzigd, zich aangepast heeft aan gewijzigde omstandigheden.

Het voorbeeld dat nog behandeld wordt heeft betrekking op een facet van het wachten dat nog niet ter sprake kwam, namelijk de afhankelijkheid in een aankomstproces.

9.2 Een proces met gekorreleerde groepsaankomsten

De formules (32) uit hoofdstuk 5 hebben betrekking op de hoeveelheid werk in een wachtsysteem waarbij de klanten op vaste equidistante tijdstippen (kunnen) arriveren. Het aantal klanten dat op een tijdstip binnenkomt is een trekking uit een verdeling waarvan gemiddelde en spreiding bekend zijn; de trekkingen zijn van elkaar onafhankelijk. De hoeveelheid werk (de karweiduur) die iedere klant meebrengt is eveneens een trekking uit een verdeling met bekende eerste en tweede momenten; ook deze trekkingen zijn van elkaar onafhankelijk.

Voor de gemiddelde aanwezige hoeveelheid werk is van belang het gemiddelde ($\bar{h} = \rho$) en de variantie (σ_h^2) van de totale hoeveelheid werk (h) die op een tijdstip binnenkomt.

Aangezien de vorm van de verdeling van h geen rol speelt, kiezen wij een eenvoudige alternatieve verdeling:

$$\begin{aligned} h &= 0 \quad \text{met kans } p_0, \\ h &= K \quad \text{met kans } p_K = 1 - p_0, \end{aligned} \quad (1)$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$\rho = \bar{h} = K p_K, \quad \text{waarbij } \rho < 1 \text{ wordt gesteld,} \quad (2)$$

$$\sigma_h^2 = K^2 p_K (1 - p_K) = K p_0 \rho = \rho(K - \rho); \quad (3)$$

hierbij werd in de relatie (3) gebruik gemaakt van (2).

Als wij veronderstellen dat K een geheel getal is, dan is de ϵ uit de formules (32) van hoofdstuk 5, gelijk aan nul, zodat na substitutie van de relatie (3) geldt

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= \frac{\rho(K - \rho)}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho(K - 1)}{2(1 - \rho)}, \\ \bar{H} &= \frac{\rho(K - \rho)}{2(1 - \rho)}, \\ \bar{H}_2 &= \frac{\rho(K - \rho)}{2(1 - \rho)} + \frac{\rho}{2} = \frac{\rho(K + 1 - 2\rho)}{2(1 - \rho)}. \end{aligned} \quad (4)$$

In dit model wordt op ieder van de tijdstippen, onafhankelijk van het gebeurde op voorgaande tijdstippen en van de aanwezige hoeveelheid werk, door middel van een trekking uit de verdeling beslist of er wel of geen portie werk van de grootte K binnenkomt.

9.2.1 Het aankomstproces

Het boven beschreven model wordt nu gewijzigd in die zin dat er een korrelatie wordt ingevoerd tussen twee opvolgende trekkingen, m.a.w. als op een tijdstip een portie is binnengekomen stijgt (bij positieve korrelatie) of daalt (bij negatieve korrelatie) de kans op een binnenkomst op het volgende tijdstip. De volgende kansen worden ingevoerd:

p_{00} = kans dat "geen aankomst" wordt gevolgd door "geen aankomst",

p_{0K} = kans dat "geen aankomst" wordt gevolgd door "aankomst",

p_{KO} = kans dat "aankomst" wordt gevolgd door "geen aankomst",

p_{KK} = kans dat "aankomst" wordt gevolgd door "aankomst".

Uiteraard geldt dat

$$p_{OO} + p_{OK} = p_{KO} + p_{KK} = 1. \quad (5)$$

Het aankomstproces kan als een Markovproces worden beschouwd door twee toestanden (O en K) te onderscheiden waarin het proces zich op de mogelijke aankomsttijdstippen kan bevinden.

Dit Markovproces moet wel onderscheiden worden van de Markov-input zoals die bijvoorbeeld in hoofdstuk 2 aan de orde kwam. Daar werd de toestand gedefinieerd door het aantal klanten in het systeem en werd de kans op een binnenkomst mede bepaald door dit aantal en niet door het tijdstip van de vorige aankomst.

Voor de stationaire kansen p_O (= onvoorwaardelijke kans op geen aankomst op een tijdstip) en p_K (idem op een aankomst) van dit Markovproces geldt:

$$p_O = p_O p_{OO} + p_K p_{KO}, \quad (6a)$$

$$p_K = p_O p_{OK} + p_K p_{KK}. \quad (6b)$$

Uit de relatie (6a) of (6b), samen met $p_O + p_K = 1$, volgt

$$p_O = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta}, \quad p_K = \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}; \quad (7)$$

hierin is

$$\alpha \equiv p_{OO} \quad \text{en} \quad \beta \equiv p_{KO}. \quad (8)$$

Voor gemiddelde en variantie van de binnenkomende hoeveelheid werk blijven de relaties (2) en (3) gelden.

De korrelatiecoëfficiënt R tussen twee op elkaar volgende toestanden ($\underline{h}$ en $\underline{h}'$) is, per definitie,

$$R = \frac{\overline{hh'} - \bar{h}\bar{h}'}{\sigma_h \sigma_{h'}}. \quad (9)$$

Aangezien, met gebruikmaking van (2), geldt

$$\bar{h}\bar{h}^T = K^2 p_K p_{KK} = K\rho(1-\beta), \quad (10)$$

terwijl de waarden van $\bar{h}\bar{h}^T = \bar{h}^2$ en $\sigma_h \sigma_h^T = \sigma_h^2$ volgen uit de vergelijkingen (2) en (3), vinden wij voor R:

$$R = \frac{K\rho(1-\beta)-\rho^2}{K\rho_O\rho} = \frac{(1-\beta)-(1-p_O)}{p_O} = 1 - \frac{\beta}{p_O},$$

hetgeen met behulp van de eerste vergelijking (7) overgaat in

$$R = \alpha - \beta. \quad (11)$$

Voor de afstand tussen twee aankomsten (de "tussenaankomsttijd" τ_a) geldt de volgende verdeling:

$$\tau_a = 1 \quad \text{met kans } p_{KK} = 1 - \beta, \quad (12)$$

$$\tau_a = i \quad \text{met kans } p_{KO} p_{OO}^{i-2} \cdot p_{OK} = \beta(1-\alpha)\alpha^{i-2}, \quad (i \geq 2).$$

De gemiddelde waarde $\bar{\tau}_a$ kan hieruit worden berekend, maar ook uit p_K (met gebruik van (2)):

$$\bar{\tau}_a = \frac{1}{p_K} = \frac{K}{\rho}. \quad (13)$$

Voorts volgt uit (12):

$$\bar{\tau}_a^2 = 1 - \beta + \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha^2} \sum_{i=2}^{\infty} i^2 \alpha^i = 1 + \frac{\beta(3-\alpha)}{(1-\alpha)^2}. \quad (14)$$

9.2.2 De lengte van de lege en de bezette periode

De waarde van K werd in het voorgaande geheel verondersteld. Het is duidelijk dat als $K = 1$ is, er geen "wachprobleem" is omdat iedere portie dan verwerkt is voordat een volgende portie arriveert. Daarom wordt $K \geq 2$ verondersteld.

Aangezien K geheel is eindigt een bezette periode vlak voor een mogelijk aankomsttijdstip. Omdat $K \geq 2$ is, zal zeker op het laatste tijdstip dat in de bezette periode valt geen werk binnengekomen zijn zodat de lengte (L_O) van de lege periode de volgende verdeling heeft

$$P\{L_O = i\} = \alpha^i(1-\alpha), \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Voor de verwachtingswaarden $\bar{l}_0$ en $\bar{l}_0^2$ volgt hieruit

$$\bar{l}_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad (16)$$

$$\bar{l}_0^2 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^2}. \quad (17)$$

Met behulp van $\bar{l}_0$ kan de verwachte lengte ($\bar{l}$) van de bezette periode worden bepaald (zie ook het begin van par. 3.5). In een grote tijd T is immers het systeem leeg gedurende de tijd $(1-\rho)T$. Het aantal lege periodes in T bedraagt dan, gemiddeld, $(1-\rho)T/\bar{l}_0$, welk aantal gelijk is aan dat van de bezette periodes. De gemiddelde lengte ($\bar{l}$) van de bezette periode is derhalve

$$\bar{l} = \frac{\rho T}{(1-\rho)T/\bar{l}_0} = \frac{\bar{l}_0 \rho}{1-\rho} = \frac{\alpha \rho}{(1-\rho)(1-\alpha)}. \quad (18)$$

Het aantal verwerkte porties K in een bezette periode is gemiddeld gelijk aan $\bar{l}/K$. Slechts één van deze porties (nl. de eerste) arriveert in een lege periode; de, onvoorwaardelijke, kans π_0 dat een portie van de grootte K voor een leeg loket aankomt is derhalve

$$\pi_0 = \frac{1}{\bar{l}/K} = \frac{(1-\rho)(1-\alpha)K}{\alpha \rho}. \quad (19)$$

9.2.3 De aanwezige hoeveelheid werk direct na een aankomst

De methode van Kendall die eerder werd gebruikt om het aantal klanten in een systeem te bepalen kan, met een kleine variant, ook worden toegepast op de aanwezige hoeveelheid werk.

Stel dat direct na de aankomst van een portie werk op tijdstip t de totaal aanwezige hoeveelheid werk $\underline{H}^X(t)$ bedraagt dan geldt voor de hoeveelheid werk direct na de eerstvolgende aankomst, op tijdstip $t + \tau_a$:

$$\underline{H}^X(t + \tau_a) = \underline{H}^X(t) + K - \tau_a + \underline{\delta}, \quad (20)$$

waarbij $\underline{\delta} = 0$ als $\underline{H}^X(t) \geq \tau_a$,

$$\underline{\delta} = \tau_a - \underline{H}^X(t) \text{ als } \underline{H}^X(t) < \tau_a. \quad (21)$$

De stochastische variabele $\underline{\delta}$ is te beschouwen als het tekort aan werk dat zou ontstaan als de aanwezige hoeveelheid werk lineair met de tijd zou blijven dalen ook nadat deze hoeveelheid nul geworden is. Als er zo'n tekort is dan is dat gelijk aan de lengte van de lege periode

die aan het tijdstip $t + \tau_a$ voorafgaat. De gemiddelde waarde van $\underline{\delta}$ kan nu eenvoudig worden berekend.

Immers, als er een tekort is dan bedraagt dit gemiddeld,

$$E(\underline{\delta} | \delta > 0) = \bar{l}_0 \quad (22)$$

terwijl, uiteraard $E(\underline{\delta} | \delta = 0) = 0$ is.

De kans dat er een tekort is op $t + \tau_a$, is gelijk aan π_0 uit (19), zijnde de kans dat een aankomst in een lege periode plaatsvindt, zodat

$$\bar{\delta} = \pi_0 \bar{l}_0 = \frac{K(1-\rho)}{\rho}. \quad (23)$$

De waarde van $\bar{\delta}$ kan ook gevonden worden uitgaande van de gedachte dat in de stationaire situatie de verwachtingswaarde van $\underline{H}^x$ onafhankelijk is van het tijdstip. Uit (20) volgt dan door de verwachting te bepalen van het linker- en het rechterlid:

$$\bar{\delta} = \bar{\tau}_a - K, \quad (24)$$

hetgeen hetzelfde oplevert als de vergelijking (23).

Om dezelfde reden als bij (22) en (23) geldt ook, met gebruikmaking van (17) en (19):

$$E(\underline{\delta}^2 | \delta > 0) = \bar{l}_0^2$$

$$\bar{\delta}^2 = \pi_0 \bar{l}_0^2 = \frac{(1-\rho)(1+\alpha)K}{\rho(1-\alpha)}. \quad (25)$$

Door linker- en rechterlid van de vergelijking (20) te kwadrateren en vervolgens van beide leden de verwachtingswaarde te bepalen vinden wij, in de stationaire situatie

$$0 = \overline{K^2} + \overline{\tau_a^2} + \bar{\delta}^2 + 2 \overline{H^x K} - 2 \overline{H^x \tau_a} + 2 \overline{H^x \delta} - 2 K \bar{\tau}_a + 2 K \bar{\delta} - 2 \bar{\tau}_a \bar{\delta}. \quad (26)$$

De verdeling van τ_a is gegeven in (12) en is onafhankelijk van de waarde van $\underline{H}^x(t)$ zodat

$$\overline{H^x \tau_a} = \overline{H^x} \cdot \bar{\tau}_a. \quad (27)$$

Uit de relatie (21) volgt dat de stochastische variabele $(\underline{H}^x - \tau_a) \underline{\delta}$ steeds dezelfde numerieke waarde heeft als de variabele $-\delta^2$, wat betekent dat

$$\overline{H^x \delta} - \bar{\tau}_a \bar{\delta} = \overline{(H^x - \tau_a) \delta} = -\bar{\delta}^2. \quad (28)$$

Substitutie van (27) en (28) in de vergelijking (26) geeft

$$0 = K^2 + \tau_a^2 - \delta^2 + 2H^x(K - \tau_a) - 2K(\tau_a - \delta),$$

hetgeen met de relatie (24) leidt tot

$$\overline{H^x} = \frac{\tau_a^2 - \delta^2 - K^2}{2(\tau_a - K)}. \quad (29)$$

9.2.4 De gemiddeld aanwezige hoeveelheid werk

Beschouw een bezette periode waarin $\underline{n}$ porties werk worden afgehandeld. Zij de voorraad werk direct na een aankomst, achtereenvolgens A_i ($i = 1, 2, \dots, \underline{n}$). Wij merken hierbij op dat de eerste portie arriveert in een lege periode en dat $A_1 = K$ is.

De totale lengte van deze periode is $\underline{n}K$. Voor de berekening van het rekenkundig gemiddelde van alle waarden die $\underline{H}_2$ over deze periode aanneemt moeten wij de $\underline{n}K$ waarden die $\underline{H}_2$ aanneemt kennen, $\underline{n}$ waarden kennen we reeds nl. de A_i . De andere waarden zijn gemakkelijk te bepalen als wij bedenken dat naast de waarde A_i ergens in de periode ook de waarden A_{i-1} , A_{i-2} , ..., A_{i-K+1} voorkomen. Het rekenkundig gemiddelde van $\underline{H}_2$ over deze bezette periode is daarom

$$\frac{1}{\underline{n}} \sum_{i=1}^{\underline{n}} (A_i - \frac{K-1}{2}) = \frac{1}{\underline{n}} \sum_{i=1}^{\underline{n}} A_i - \frac{K-1}{2}.$$

Gemiddeld over één bezette periode geldt dus de relatie

$$H_2(\text{gemiddeld}) = H^x(\text{gemiddeld}) - \frac{K-1}{2}.$$

Beschouwen wij N bezette perioden met resp. n_j aankomsten ($j = 1, \dots, N$), waarbij de periode-gemiddelden worden aangegeven met $H_2(j)$ en $H^x(j)$, dan geldt voor de gemiddelden over alle N perioden:

$$H_2(\text{gem.}) = \frac{\sum_{j=1}^N n_j H_2(j)}{\sum_{j=1}^N n_j} = \frac{\sum_{j=1}^N n_j H^x(j)}{\sum_{j=1}^N n_j} - \frac{K-1}{2} = H^x(\text{gem.}) - \frac{K-1}{2}.$$

De gevonden relatie voor één bezette periode geldt dus ook als gemiddeld wordt over N perioden. Voor $N \rightarrow \infty$ gaan de gemiddelden met kans 1 over in verwachtingswaarden, zodat in een bezette periode geldt:

$$\bar{H}_2 = \bar{H}^x - \frac{K-1}{2}.$$

In een lege periode is de verwachting van H_2 gelijk aan nul, zodat voor de onvoorwaardelijke verwachting geldt:

$$\bar{H}_2 = \rho(\bar{H}^{\bar{x}} - \frac{K-1}{2}),$$

waaruit volgt:

$$\bar{\Pi}_1 = \bar{\Pi}_2 - \rho = \rho(\bar{H}^{\bar{x}} - \frac{K+1}{2}), \quad (30)$$

$$\bar{H} = \bar{H}_2 - \frac{\rho}{2} = \rho(\bar{H}^{\bar{x}} - \frac{K}{2}).$$

In deze formules in $\bar{H}^{\bar{x}}$ gegeven door de vergelijking (29). De grootheden die in het rechterlid daarvan staan zijn in principe functies van de parameters α , β en K . In het voorgaande werd ook, als dat meer voor de hand lag, het drietal ρ , K en α gebruikt. Daar de bezettingsgraag een belangrijke rol speelt in de gehele wachttijdtheorie en wij bovendien de invloed van de korrelatie in de aankomsten willen onderzoeken, gaan wij de formules voor de verwachtingswaarden $\bar{H}_1$, $\bar{H}_2$ en $\bar{H}$ verder uitwerken als functie van de variabelen ρ , R en K .

Met $R = \alpha - \beta$ volgt uit (7):

$$P_K = \frac{1-\alpha}{1-R}$$

terwijl uit (2) volgt

$$P_K = \frac{\rho}{K}$$

$$\text{zodat } \alpha = 1 - \frac{\rho(1-R)}{K}$$

$$\text{en } \beta = \alpha - R = (1-R)(1 - \frac{\rho}{K}). \quad (31)$$

Deze waarden gesubstitueerd in de vergelijking (14) en (25) leiden tot:

$$\bar{\tau}_d^2 = \frac{K}{\rho^2(1-R)} \{ 2K - \rho(1+R) \} \quad , \quad (32)$$

$$\bar{\delta}^2 = \frac{K(1-\rho)}{\rho^2(1-R)} \{ 2K - \rho(1-R) \} \quad . \quad (33)$$

Gebruikmakend van de relaties (13), (32) en (33) volgt uit (29):

$$\bar{H}^{\bar{x}} = \frac{K-1}{2(1-\rho)} \cdot \frac{1+R}{1-R} + \frac{K+1}{2} \quad , \quad (34)$$

hetgeen gesubstitueerd kan worden in de formules (30)

$$\bar{H}_1 = \frac{\rho(K-1)}{2(1-\rho)} \cdot \frac{1+R}{1-R}, \quad (35)$$

$$\bar{H} = \bar{H}_1 + \frac{\rho}{2}, \quad \bar{H}_2 = \bar{H}_1 + \rho.$$

De invloed van de korrelatie, is duidelijk te zien door vergelijking met de relaties (4).

Opmerkingen:

1. Bij de keuze van α , β en K als parameters moet rekening worden gehouden met de eis dat $\rho < 1$ moet zijn:

$$\rho = K\rho_K < 1, \quad \text{dus } K < 1 + \frac{\beta}{1-\alpha}. \quad (36)$$

2. Door de keuze van ρ , R en K zijn met de formules (31) de waarden van α en β bepaald.

Daar $K \geq 2$ is levert iedere waarde van R in het interval $-1 \leq R \leq 1$ een toelaatbare waarde voor de kans α op. Wat β betreft is dan ook voldaan aan de eis $\beta \geq 0$. Echter moet ook $\beta \leq 1$ zijn, zodat voldaan moet zijn aan de voorwaarde:

$$(1-R)(1-\frac{\rho}{K}) \leq 1, \quad \text{ofwel } R \geq \frac{-\rho}{K-\rho}. \quad (37)$$

9.3 Over het ontstaan van wachtrijen

De bezettingsgraad van een loket speelt een belangrijke rol in de gehele wachttijdtheorie, maar zeker niet de enige rol. De fluktuaties in rijlengten en wachttijden ontstaan in feite door wat men kongestie noemt of, met een anglo-nederlands woord, clustervorming. De klanten komen niet mooi regelmatig binnen maar in wolkjes bij elkaar: perioden waarin de aankomsten verre de verwerkingscapaciteit van het loket overtreffen worden afgewisseld door perioden waarin bijna geen werk binnenkomt. Ten aanzien van de karweiduren geldt iets dergelijks.

Met het voorbeeld uit paragraaf 9.2 kan de invloed van de opeenhoping duidelijk gedemonstreerd worden omdat deze met behulp van R continu regelbaar is bij konstante ρ en K . De laagste waarde van $\bar{H}_1$, formule (35), wordt verkregen als $\beta = 1$ is; de bijbehorende R is dan, zie ook de relatie (37):

$$R = \frac{-\rho}{K-\rho},$$

hetgeen voor $\bar{H}_1$ oplevert

$$\min_R \bar{H}_1 = \frac{\rho(K-1)}{2(1-\rho)} \cdot \frac{K-2\rho}{K}. \quad (38)$$

Met toenemende R wordt $\bar{H}_1$ steeds groter, waarbij de relatieve stijging van $\bar{H}_1$ ook nog toeneemt:

$$\frac{1}{\bar{H}_1} \cdot \frac{d\bar{H}_1}{dR} = \frac{2}{1-R^2}. \quad (39)$$

De gemiddelde afstand tussen twee aankomsten blijft hetzelfde, $\bar{\tau}_a = K/\rho$, maar de variantie van de tussenaankomsttijd τ_a neemt toe met R ; uit (13) en (32) volgt immers

$$\sigma_{\tau_a}^2 = \overline{\tau_a^2} - \bar{\tau}_a^2 = \frac{K(K-\rho)}{\rho^2} \cdot \frac{1+R}{1-R}. \quad (40)$$

De toenemende spreiding betekent dat de aankomsten in wolkjes bij elkaar zijn, gevolgd door lange perioden zonder aankomsten, wat ook gedemonstreerd kan worden aan de hand van lengte van de lege periode waarvoor geldt, zie (16) en (31),

$$\bar{l}_0 = \frac{K}{\rho(1-R)} - 1. \quad (41)$$

De verhouding van de verwachte lengten van de bezette en de lege perioden wordt uitsluitend bepaald door ρ , formule (18); $\bar{l}$ en $\bar{l}_0$ nemen in dezelfde mate toe.

In het extreme geval ($\alpha=1, \beta=0; R=1$) is $p_{OO}=p_{KK}=1$, zie relatie (8); er zijn dan twee mogelijkheden:

- er komt geen enkele portie binnen; het loket is en blijft leeg;
- op ieder tijdstip komt een portie K binnen; een stationaire oplossing is dan alleen nog mogelijk als $K=1$ is.

In beide gevallen hebben de ontwikkelde formules geen zin meer.

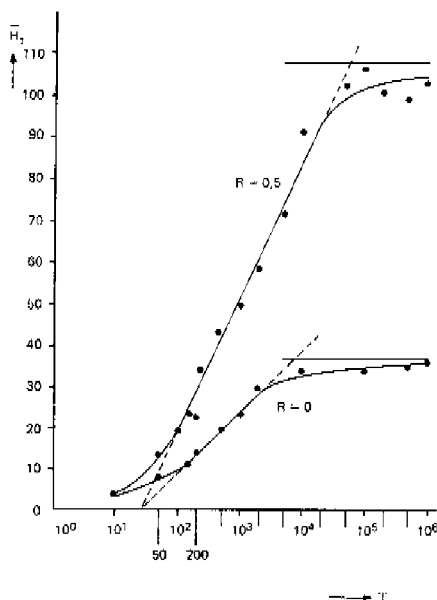
9.4 Simulatie van het wachtprobleem uit par. 9.2

Het wachtproces dat beschreven is in par. 8.2 is met een computer gesimuleerd voor de waarden

$$\rho = 0,9, \quad K = 9, \quad R = 0 \quad \text{en} \quad R = 0,5. \quad (42)$$

De gemiddelde waarden van $\bar{H}_1$ en $\bar{H}_2$ werden per simulatie gemeten. Begonnen werd met de waarden $\bar{H}_1 = \bar{H}_2 = 0$. Op ieder mogelijk aankomsttijdstip werd door middel van een loting bepaald of er wel of geen portie werk binnenkwam. Het aantal van deze tijdstippen bedroeg T , variërend van 10 tot 10^6 . Iedere simulatie werd een groot aantal malen gedaan om een indruk te krijgen van de mogelijke variaties in de uitkomsten. De resultaten zijn vermeld in tabel 5 en weergegeven in figuur 22.

Gezien de eenvoudige relatie die bestaat tussen $\bar{H}_1$ en $\bar{H}_2$ zijn slechts de uitkomsten die betrekking hebben op $\bar{H}_1$ vermeld.



figuur 22 $\bar{H}_1$ als functie van het aantal tijdstippen T voor $R=0$ en $R=0,5$; zie ook tabel 5.

T	aantal runs	min $\bar{H}_1$	max $\bar{H}_1$	$\mu\bar{H}_1$	$\sigma\bar{H}_1$	σ_μ
10	100	0,0	41,3	3,6	8	0,8
50	100	0,0	58,6	10,2	14	1,4
100	200	0,0	78,9	19,1	17	1,2
150	200	0,5	103,2	22,7	21	1,5
200	50	3,8	75,8	22,0	17	2,4
250	50	2,7	81,2	33,3	20	2,9
500	50	7,1	131,9	42,4	30	4,3
10^3	50	10,8	154,5	49,1	33	4,6
$2 \cdot 10^3$	50	20,9	235,6	58,0	39	5,6
$5 \cdot 10^3$	50	27,4	213,0	71,2	31	4,4
10^4	100	30,3	338,5	91,3	57	5,7
$2 \cdot 10^4$	60	46,9	242,7	94,6	38	4,9
$5 \cdot 10^4$	60	62,2	322,7	102,7	40	5,1
10^5	30	75,0	178,4	106,5	27	5,0
$2 \cdot 10^5$	30	73,9	142,6	101,0	18	3,3
$5 \cdot 10^5$	10	85,2	113,6	99,3	8	2,6
10^6	20	89,3	109,5	102,6	5	1,2
10	100	0,0	18,9	3,4	4	0,4
50	20	0,7	18,6	7,5	5	1,2
100	20	2,3	23,4	9,1	6	1,4
150	20	2,0	28,3	11,3	8	1,7
200	20	2,6	38,4	13,3	9	2,1
250	20	2,3	37,7	14,8	10	2,3
500	50	5,6	53,3	18,8	11	1,6
10^3	50	8,8	55,9	23,0	10	1,5
$2 \cdot 10^3$	50	12,0	111,9	28,7	18	2,5
10^4	10	18,1	55,9	32,5	11	3,5
10^5	10	28,4	39,2	33,5	3	1,0
$5 \cdot 10^5$	10	33,0	37,0	34,8	1,4	0,4
10^6	10	32,5	38,1	35,4	1,8	0,6

R = 0,5

R = 0

Tabel 5 Uitkomsten van de simulatie betreffende $\bar{H}_1$,
voor R=0 en R=0,5. Startwaarden $\underline{H}_1=0$.

De verwachtingswaarden voor de stationaire toestand zijn, met (35) en (42)

$$\bar{H}_1(R=0) = 36, \quad \bar{H}_1(R=0,5) = 108, \quad (43)$$

waarbij

$$\alpha = p_{OO} = \begin{cases} 0,90 \\ 0,95 \end{cases}, \quad \beta = p_{KO} = \begin{cases} 0,90 \\ 0,45 \end{cases}, \quad \text{voor resp. } R = \begin{cases} 0 \\ 0,5 \end{cases}. \quad (44)$$

Opmerking:

In het geval $R=0,5$ werd de eerste trekking gedaan met een kans van $0,9 (= p_O)$ op "geen portie werk".

De stationaire toestand betekent hierbij o.a. het volgende.

Als op het tijdstip $t=0$, voorafgaande aan de eerste loting op $t=1$, de waarde van $\underline{H}_1$ bekend is, zeg gelijk aan a , dan is de verwachtingswaarde van $\underline{H}_1$ op een tijdstip T onafhankelijk van de waarden a en T , mits T voldoende groot is ($T \rightarrow \infty$); in de simulatie was $a=0$. Voor kleine T is genoemde verwachting zeker een functie van T (bij $a=0$).

Ter onderscheiding geven wij met $\bar{H}_1(T)$ aan de verwachtingswaarde van het gemiddelde van $\underline{H}_1$ op de tijdstippen van $t=1$ tot $t=T$, terwijl met $\hat{H}_1(T)$ wordt aangegeven de verwachtingswaarde van $\underline{H}_1$ op het tijdstip T . In tabel 5 en figuur 22 zijn schattingen van de verwachtingswaarden $\bar{H}_1(T)$ gegeven. Verondersteld wordt dat in de stationaire situatie $\bar{H}_1(T) = \hat{H}_1(T)$; eigenschap van ergodiciteit.

Een schatting van $\hat{H}_1(T)$ kan worden verkregen door een simulatie vele malen te herhalen en steeds de waarde van $\underline{H}_1$ op T te bepalen en vervolgens deze waarden te middelen. Dit is niet de weg die wij bewandeld hebben. Toch kunnen wij wel een indruk krijgen van $\hat{H}_1(T)$. Uit de figuur 22 blijkt dat in een groot tijdsinterval $\bar{H}_1$ beschreven kan worden met een lineaire functie van $\log T$:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= 32,2 \cdot {}^{10}\log(T/25) = 14,0 \lg(T/25), \quad (R=0,5; 10^2 < T < 2 \cdot 10^4), \\ \bar{H}_1 &= 14,7 \cdot {}^{10}\log(T/25) = 6,4 \lg(T/25), \quad (R=0; 10^2 < T < 2 \cdot 10^3). \end{aligned} \quad (45)$$

Aangezien de verwachtingswaarde van een som gelijk is aan de som van de verwachtingswaarden, geldt voor de relatie tussen $\bar{H}_1(T)$ en $\hat{H}_1(T)$:

$$\bar{H}_1(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{H}_1(t) \approx \frac{1}{T} \int_1^T \hat{H}_1(t) dt \quad (46)$$

waaruit volgt:

$$\hat{H}_1(T) = \bar{H}_1(T) + T \frac{d\bar{H}_1}{dT}, \quad (47)$$

hetgeen in de genoemde intervallen met (45) leidt tot

$$\begin{aligned} \hat{H}_1(T) &= \bar{H}_1(T) + 14, \quad (R=0,5; 10^2 < T < 2 \cdot 10^4), \\ \hat{H}_1(T) &= \bar{H}_1(T) + 6,4, \quad (R=0; 10^2 < T < 2 \cdot 10^3). \end{aligned} \quad (48)$$

Aan het einde van het "rechte gebied" geldt, zie tabel 5:

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(T) &= 94,6, \quad \text{zodat } \hat{H}_1(T) = 108,6, \quad (R=0,5; T=2 \cdot 10^4), \\ \bar{H}_1(T) &= 28,7, \quad \text{zodat } \hat{H}_1(T) = 35,1, \quad (R=0; T=2 \cdot 10^3). \end{aligned} \quad (49)$$

Dit betekent dat voor deze waarden van T geldt dat $\hat{H}_1(T)$ praktisch al gelijk is aan de verwachtingswaarde in de stationaire situatie.

Om het inschakelverschijnsel uit figuur 22, het aangroeien van $\bar{H}_1(T)$ te vermijden, ligt het voor de hand om als startwaarde te kiezen de verwachtingswaarde voor de stationaire situatie: $\bar{H}_1(T=0) = 108$, voor $R=0,5$; zie formule (43).

Dit leidt echter niet tot het beoogde doel, namelijk om "meteen al in de stationaire toestand te zitten". Om dit aan te tonen is een simulatie uitgevoerd met genoemde startwaarde en wel voor $R=0,5$. De resultaten zijn vermeld in tabel 6.

In eerste instantie neemt $\bar{H}_1(T)$ af, hetgeen als volgt is in te zien. Voor $T=100$, bijvoorbeeld, weten wij zeker dat $\bar{H}_1$ in het interval 0 tot T nooit nul geweest kan zijn: het loket is in ieder geval steeds bezet geweest; de maximale daling van de aanwezige hoeveelheid werk bedraagt 100 in het geval dat er in dit interval geen enkele portie werk is binnengekomen.

T	aantal runs	min $\bar{H}_1$	max $\bar{H}_1$	$\mu \bar{H}_1$	$\sigma \bar{H}_1$	σ_μ
10	100	102,5	138,5	107,2	8	2,3
10^2	100	57,5	155,3	104,5	24	2,4
10^3	200	19,4	390,0	91,8	43	3,1
10^4	50	46,2	321,7	100,8	50	7,1
10^5	60	66,0	141,9	99,0	20	2,5

Tabel 6 Uitkomsten van de simulatie betreffende $\bar{H}_1$ voor $R=0,5$.
Startwaarden $\bar{H}_1=108$.

Als het loket bezet is, dan is de verwachting dat de aanwezige hoeveelheid afneemt, als $\rho < 1$ is. Immers de verwachte toename van de hoeveelheid werk is $p_K TK = 90$, terwijl de zekere afname 100 bedraagt. De resulterende verwachte afname is derhalve 10 voor $T = 100$, m.a.w. $\hat{H}_1(T) = 98$, zodat $\bar{H}_1(T) = 103$; in tabel 6 is de waarde 104,5 gevonden met een mogelijke spreiding van 2,4.

Pas voor $T = 108$ is het mogelijk dat $\underline{H}_1(T)$ gelijk aan nul wordt, zij het met een kleine kans, namelijk de kans op geen enkele aankomst tot dit tijdstip. Wanneer T zo groot geworden is dat de kans $P \{ \underline{H}(T) = 0 \}$ geen functie meer is van T en de limietwaarde $1 - \rho = 0,1$ bereikt heeft is de stationaire toestand bereikt.

Met welke waarde van $\underline{H}_1(T=0)$ wij ook starten, een inschakelverschijnsel wordt steeds gevonden. Dit geldt trouwens niet zo zeer voor de beginwaarde en de tijd die daarna verstreken is; op ieder tijdstip waarop de aanwezige hoeveelheid werk wordt waargenomen begint weer een aanloopverschijnsel, althans voor de voorwaardelijke verwachting van $\underline{H}_1$ gerekend vanaf het betreffende tijdstip.

9.5 Het juiste ruwe model

Het moge duidelijk zijn dat met een juist of korrekt model wordt bedoeld een model dat een goed inzicht geeft in de relaties tussen de verschillende grootheden die in een praktische situatie een rol spelen (aankomstsnelheid van klanten, aantal loketten, rijlengte, karweiduren, prioriteitsregels enz.). Met behulp van deze relaties kunnen voorspellingen worden gedaan over het gedrag van het betreffende systeem. Het model zal niet alle facetten van de werkelijke situatie beschrijven, doch slechts die welke van essentiële betekenis zijn voor de grootheden waarover een uitspraak gedaan moet worden.

Als een essentieel facet over het hoofd wordt gezien of niet belangrijk genoeg geacht wordt, dan kan dit leiden tot volkomen foutieve verwachtingen.

Kiezen wij als voorbeeld een situatie die nauwkeurig overeenstemt met de modelsituatie, geschetst in par. 9.2. De porties werk zijn alle precies van de grootte K , de frequentie van binnenkomst is nauwkeurig bepaald door gedurende een grote tijd de binnenkomsten te

tellen; de gevonden bezettingsgraad ρ komt goed overeen met de verwachtingen. Wanneer echter het aspekt van de afhankelijkheid van de aankomsten over het hoofd is gezien dan kan dit leiden tot grote verschillen tussen de verwachte aanwezige hoeveelheid werk en de werkelijk plaatsvindende gemiddelde hoeveelheid (vergelijk de formules (4) en (35)). De ontdekking van het ontbreken van een belangrijk facet zal meestal leiden tot een ingewikkelder model en een moeizamere analyse, al viel dat in dit voorbeeld nogal mee.

In dit verband kan de aandacht gevestigd worden op de "iron law of mathematical models" die Lee (ref. 32) formuleerde op de zesde internationale IFORS-conferentie in Dublin, 1972: "this law says that the more a mathematical model captures reality, the less likely it is to be capable of practical application". Als oorzaken noemt hij drie dingen:

- te realistische wiskundige modellen leiden niet meer tot expliciete oplossingen ("solutions in analytic terms").

- er zijn teveel gegevens nodig; niet alleen wat betreft het aantal parameters maar ook wat hun onderlinge verbanden betreft,

- de hoeveelheid rekenwerk om tot numerieke resultaten te komen is veel en kostbaar.

Door simuleren kan de eerste moeilijkheid worden geëlimineerd, de tweede blijft echter bestaan terwijl het verwerken en beoordelen van de uitkomsten bij ingewikkelde modellen ook geen eenvoudige zaak is. De waarde van een eenvoudig model ligt hierin dat snel een antwoord gevonden wordt dat vaak nog redelijk goed is ondanks dat de werkelijkheid ingewikkelder is dan het model, mits de essentiële facetten van de werkelijkheid in het model zijn terug te vinden.

Het probleem uit par. 9.2 met $R=0$, zie formule (4), kan bijvoorbeeld benaderend opgelost worden met de formule van Pollaczek-Khintchine. Voor het geval van Poisson-aankomsten en konstante karweiduren (v.q. porties werk) geldt voor de gemiddelde wachttijd, die gelijk is aan de gemiddeld aanwezige hoeveelheid werk, formule (18) van hoofdstuk 3, die geeft

$$\bar{H} = \frac{\rho K}{2(1-\rho)}, \quad \text{zodat } \bar{H}_1 = \frac{\rho K}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho(K-1+\rho)}{2(1-\rho)}. \quad (50)$$

Dit leidt voor $\rho = 0,9$ en $K=9$ tot $\bar{H}_1 = 40$; de juiste waarde is 10% lager; het aankomstproces is echter ook niet een Poissonproces, al is dat bij benadering wel het geval.

Als $\rho \ll K-1$ levert (50) hetzelfde als formule (4), hetgeen te verwachten is aangezien bij toenemende K de kans p_K afneemt bij gelijkblijvende ρ , zie formule (2), waardoor het binomiale aankomstproces overgaat in een Poissonproces.

Wanneer $R > 0$ is kan ook een benaderende oplossing worden gevonden. Door de korrelatie komen de porties werk in groepjes bij elkaar. Zo'n groepje aankomsten op achtereenvolgende tijdstippen beschouwen wij als één aankomst op het eerste van deze tijdstippen.

Dit is een redelijke benadering als de hoeveelheid binnenkomend werk groot is t.o.v. de tijd dat de "binnenkomst duurt" d.w.z. het aantal tijdseenheden waarop achter elkaar de porties K binnenkomen. Wanneer dan ook de afstand tot de binnenkomst van een volgende groepje groot is (α groot) kunnen de groepjes opgevat worden als enkele karweien.

Wat de grootte van de groep betreft het volgende. Als een groep arriveert is de kans op een groep van de grootte n gelijk aan

$$P\{n\} = \beta(1-\beta)^{n-1}, \quad (n \geq 1), \quad (51)$$

waaruit direkt volgt

$$\bar{n} = \frac{1}{\beta} \quad \text{en} \quad \overline{n^2} = \frac{2-\beta}{\beta^2}. \quad (52)$$

Toepassing van de formule van Pollaczek-Khintchine, formule (9) van hoofdstuk 3, levert

$$\bar{H} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \cdot \frac{\overline{n^2}K}{\bar{n}},$$

waaruit met (52) volgt

$$\bar{H}_1 = \bar{H} - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{2-\beta}{\beta} K - 1 + \rho \right\}. \quad (53)$$

Met $\rho = 0,9$, $\beta = 0,45$ en $K = 9$ levert formule (53) de waarde $\bar{H} = 139$; de juiste waarde is 22% lager (zie uitkomst (43)).

In deze benadering werd de korrelatie in de aankomsten in rekening gebracht door de aankomsten in groepjes bij elkaar te voegen en te stellen dat deze groepjes ongekorrleerd binnenkomen en wel volgens een Poissonproces; wat dat laatste betreft: wij hebben immers de formule van Pollaczek-Khintchine toegepast.

Een betere benadering wordt verkregen door bij deze beschouwing uit te gaan van ongekorrleerde groepjes die op equidistante tijdstippen kunnen arriveren; zie (4) en ook de formules (32) uit hoofdstuk 5, waaruit de relaties (4) direkt werden afgeleid.

Voor de hoeveelheid werk die binnenkomt als er een groep binnenkomt (groep in bovenbedoelde zin) geldt, volgens (52),

$$\bar{g} = \frac{K}{\beta}, \quad \bar{g}^2 = \frac{2-\beta}{\beta^2} K^2 \quad (54)$$

als $\bar{g}$ de grootte van zo'n groep is.

Voor de kans p_g op de binnenkomst van een groep op een tijdstip geldt dat voldaan moet zijn aan de eis dat de gemiddeld arriverende hoeveelheid werk gelijk is aan ρ , zodat

$$\rho = p_g \bar{g}, \quad \text{ofwel} \quad p_g = \frac{\rho \beta}{K}. \quad (55)$$

Voor de per tijdstip arriverende hoeveelheid werk $\bar{h}$ geldt dan

$$\bar{h} = \rho \quad \text{en} \quad \bar{h}^2 = p_g \bar{g}^2 = \frac{\rho(2-\beta)}{\beta} K,$$

waaruit volgt

$$\sigma_h^2 = \frac{\rho(2-\beta)K}{\beta} - \rho^2,$$

hetgeen gesubstitueerd in formule (32) van hoofdstuk 5, levert:

$$\bar{H}_1 = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left\{ \frac{\rho(2-\beta)K}{\beta} - \rho^2 - 1 + \rho \right\}. \quad (56)$$

De relatie (56) geeft voor het beschouwde numerieke geval, $\rho = 0,9$, $K = 9$, $\beta = 0,45$ de waarde $\bar{H}_1 = 121$ die 11% te hoog is.

De twee, hierboven gegeven, benaderingen worden beter met toenemende K . Uit de relatie (31) volgt immers

$$\frac{2-\beta}{\beta} \approx \frac{1+R}{1-R}, \quad \text{als } K \gg \rho,$$

zodat de relaties (53) en (56) dan ongeveer hetzelfde opleveren als (35).

Uit het hier gegeven voorbeeld, inclusief de gegeven numerieke waarden, kan het volgende gekonkludeerd worden: Als $R = 0$ is, dan geeft het benaderen van het binomiale aankomstproces door een Poissonproces een benadering die gezien de orde van grootte redelijk goed is; zie relatie (50). Als $R = 0,5$, maar deze korrelatie wordt over het hoofd gezien, dan is de uitkomst een faktor drie fout; zie relatie (43). Kennelijk is de korrelatie een zeer wezenlijk facet van dit probleem. Proberen wij dit facet benaderend in rekening te brengen, dan vinden wij wel uitkomsten die te hoog zijn, maar wat orde van grootte betreft toch redelijk in de buurt komen.

De algemene konklusie die hieruit getrokken kan worden, doet sterk denken aan het intrappen van open deuren, maar mag toch niet achterwege blijven: bij het selekteren van de facetten, van het werkelijke probleem, die in het model in rekening gebracht worden dient zorgvuldig te worden onderzocht welke facetten essentieel zijn en de uitkomsten in belangrijke mate beïnvloeden.

Het beoordelen van de waarde van een benadering is betrekkelijk gemakkelijk als de juiste uitkomst bekend is. Afgezien daarvan, wordt toch uiteindelijk de waarde ofwel de kwaliteit, van een model bepaald door de mate van juistheid waarmee de uitkomsten in een konkrete situatie worden verklaard of voorspeld. Of er sprake is van een (bijna) exakt model en een benaderende oplossing ofwel van een benaderend model met een exakte oplossing speelt hierbij niet zo'n grote rol omdat de onderscheiding in feite wordt bepaald door het tijdstip tijdens het onderzoek waarop de benaderingen worden ingevoerd omdat het helemaal exakt niet meer kan.

Zelfs als het model juist is en ook de berekeningen, dan nog moet de nodige voorzichtigheid in acht genomen worden bij het toepassen van gevonden formules. De toepasser mag niet verwachten dat uitkomsten van te voren precies voorspeld kunnen worden. De uitspraken die gedaan worden zijn immers waarschijnlijkheidsuitspraken; het gaat over kansen, verwachtingswaarden en spreidingen. Zie bijvoorbeeld tabel 5, in het bijzonder de serie van 60 waarnemingsreeksen ieder van $T = 5 \cdot 10^4$ tijdseenheden. Aangezien er sprake is van een inschakelverschijnsel, is de verwachte waarde van $\bar{H}_1$ lager dan 108 en wel ongeveer 100. De eerste reeks leverde echter een gemiddelde waarde van 322,7, zijnde tevens de grootste waarde uit de serie van 60. Aangezien de voorraad aan het begin nul was zijn er in het tijdsinterval van 1 tot $5 \cdot 10^4$ gebieden geweest waar de voorraad nog veel groter geweest is dan 322,7. Aan de andere kant is het ook niet onmogelijk om bij $T = 5 \cdot 10^4$ een reeks te vinden met een gemiddelde van 62,2. Pas als T zeer groot is worden de mogelijke spreidingen gering. In de praktijk zullen echter dergelijke lange reeksen van waarnemingen nauwelijks beschikbaar zijn, zodat gewoonlijk met aanzienlijke spreidingen gerekend moet worden.

Deze spreidingen zijn er de oorzaak van dat veel wachtsystemen in werkelijkheid het karakter van een regelsysteem hebben, wat in paragraaf 9.1 al is aangeduid. Een aantal regelsystemen hebben wij ontmoet bij het loket met beperkte wachtgelegenheid, de mogelijkheid van sneller werken, het inschakelen van meer loketten en het centraliseren van loketten dat beschouwd kan worden als het doorsturen van klanten naar een loket dat (bijna) leeg is. Door maatregelen van deze aard wordt de kans op uitschieters (zeer grote rijlengten en wachttijden) aanzienlijk gereduceerd, zodat modellen die daar geen rekening mee houden tot foutieve verwachtingen leiden.

In het voorgaande is beklemtoond dat het juiste model gehanteerd moet worden, terwijl anderzijds ook is gesteld dat te realistische modellen onhanteerbaar zijn en ruwe benaderingen vaak nog redelijk goede uitkomsten geven. De kunst bij het toepassen van de wachttijdtheorie op praktische situaties is dan ook het vinden van een compromis, namelijk het "juiste ruwe model". Het gevoel, het inzicht dat daarvoor nodig is kan ontwikkeld worden door bij de bestudering van wachtmodellen voortdurend te pogen zich voor te stellen wat er gebeurt, of om met Foster te spreken (zie par. 1.1) "what is really going on". Moge deze studie bijdragen tot het verkrijgen van dat operationele inzicht.

DE BEHANDELDE STOF

Nadat in par. 1.1 is uiteengezet dat deze studie is ontstaan uit de behoefte de wachtproblematiek operationeel te doorzien, zijn in de volgende paragraaf enkele aspecten van de vernieuwingstheorie naar voren gebracht om het verschil te illustreren tussen de mathematische en de operationele beschrijvingswijze.

Par. 1.3 is een inleiding op het wachtproces, die bedoeld is als een terreinverkenning en niet als een uitputtende behandeling van alle mogelijke typen van wachtprocessen. Daar het Poissonproces een belangrijke rol speelt in de wachttijdtheorie, leek het nuttig enkele facetten daarvan, in par. 1.4, te belichten. De gegeven afleiding is die van het Poissonproces als een geboorteprocess.

Dat een operationele aanpak vaak succes heeft is het gevolg van enige zeer algemeen bruikbare stellingen die ook in par. 1.4 genoemd zijn. Voor de stelling $L = \lambda W$, die een relatie legt tussen het aantal klanten in een systeem, het aantal aankomsten per tijdseenheid en de doorlooptijd van de klanten, is een bewijs gegeven dat bijna even eenvoudig is als de stelling zelf. Ook voor het theorema $K = N$ is een eenvoudige afleiding gegeven; dit theorema legt een relatie tussen de achterblijvende en de aangetroffen rijlengte. De prikmethode, par. 1.4.4, is gebaseerd op de verdeling van de resterende levensduur in een stationair vernieuwingsproces. Cobham maakte hiervan reeds gebruik in zijn artikel over wachtproblemen met prioriteitsregels.

Hoofdstuk 2 begint met een algemene aanpak van wachtproblemen van het type M/M/S. De, voor dit type, centrale vergelijking (1) kan meteen worden opgeschreven als gelet wordt op het aantal overgangen, in beide richtingen, tussen twee naburige toestanden, in een stationaire situatie. Meestal wordt eerst de differentiaal vergelijking afgeleid die het tijdsafhankelijke gedrag beschrijft, ook in die situaties waar de schrijver niet van plan is verder op dit gedrag in te gaan.

Van het type M/M/S zijn een aantal voorbeelden doorgerekend omdat inzicht in deze eenvoudige problemen onontbeerlijk is voor een verdere studie. Wat het meer-machine bedieningsprobleem betreft, par. 2.3.3, het volgende. Peck en Hazelwood hebben hiervoor uitvoerige tabellen gemaakt. Aan de hand daarvan is aangegeven hoe de relevante grootheden geschat kunnen worden als de tabellen niet beschikbaar zijn.

Par. 2.4.1 is één van de voorbeelden waaruit blijkt dat een operationele aanpak aanmerkelijk vlugger en vooral eenvoudiger kan gaan dan de gebruikelijke, zoals Morse die bijvoorbeeld geeft. Het prioriteiten-voorbeeld is een bijzonder geval van het probleem van par. 3.6.

In hoofdstuk 3 mocht zeker niet ontbreken de fraaie afleiding van de formule van Pollaczek-Khintchine, zoals die gevonden werd door Kendall. De prikmethode biedt zich praktisch vanzelf aan als een binnenkomende klant, de rij ziende, zich afvraagt hoe lang hij nog zal moeten wachten. De gang van zaken werd geschetst door van der Veen (ref. 58, pag. 16 en vraagstuk II-6, pag. 186). Nadien bleek dat Oliver reeds had aangegeven hoe de formule van Pollaczek-Khintchine op een eenvoudige wijze met behulp van de rest-levensduur kan worden bepaald. Ondanks het feit dat deze formule zeer bekend is, worden vaak nog ingewikkelde afleidingen gebruikt voor speciale gevallen (zie par. 3.3.3 en 3.3.4).

Vervolgens zijn formules afgeleid voor de variantie van de rijlengte en de wachttijd. De beschouwing over de bezette periode (par. 3.5) begint met een simpele afleiding van Cox en Smith, waarop diverse varianten zijn te bedenken. De rest van deze paragraaf wordt besteed aan een paradox, waarin de prikmethode ook een rol speelt.

Aan het eind van het derde hoofdstuk worden een paar gevallen met prioriteiten behandeld. Het "loket met relatieve prioriteiten" is afkomstig van Cobham, die ook nog een andere situatie beschrijft namelijk die van een meer-loketten systeem met relatieve prioriteiten, waarbij dan echter de karweiduren niet meer willekeurig maar negatief-exponentieel verdeeld zijn.

Wat het loket met de alternerende prioriteit betreft (par. 3.7) het volgende. Tanner, wiens naam daar genoemd werd, beschouwt in feite een wat andere probleemstelling, hij denkt niet zo zeer aan een loket als wel aan een knelpunt in een weg met verkeer uit beide richtingen. Het knelpunt is op te vatten als een pijpleiding. Een voertuig kan de pijpleiding binnengaan als er geen verkeer is van de andere richting en als er geen ander voertuig, uit dezelfde richting, naar binnen is gegaan gedurende de afgelopen tijd t_i ($i = 1;2$).

De tijd die het voertuig nodig heeft de pijpleiding in zijn geheel te passeren bedraagt s_i . Voertuigen die zich in dezelfde richting bewegen doen dat dus met minimale tussentijden t_i . Als er geen verkeer meer in de pijpleiding is uit de beschouwde richting kan de prioriteit worden overgenomen door het verkeer uit de andere richting. De situatie die wij beschouwen is die waarbij ieder voertuig pas het knelpunt kan passeren nadat het ontruimd is, zoals dat ook het geval is bij een enkel loket, hetgeen betekent dat $t_i = s_i$ is. De karweiduur s_i is in ons geval geen konstante maar een trekking uit eenzelfde verdeling voor beide categorieën.

Dat met betrekkelijk elementaire beschouwingen niet alleen iets gezegd kan worden over verwachtingswaarden maar ook over sommige kansverdelingen moge blijken uit de behandeling van de bezette periode, hoofdstuk 4, het voorraadprobleem van par. 6.1 en de daaruit

afgeleide beschouwingen over het systeem $G/M/1$, par. 6.2 en tenslotte uit de verdeling van de maximale rijlengte, par. 8.3.

De kansverdelingen in hoofdstuk 4 zijn afkomstig van Prabhu en Takács, al werd de relatie (13), met $r = 1$, reeds door Kendall gegeven. Gemiddelde waarden kunnen ook bij deze voorbeelden zeer snel gevonden worden.

In hoofdstuk 5 wordt afgestapt van de Poissonaankomsten. Een algemener aankomstpatroon kan ingevoerd worden door het geven van de tussenaankomsttijden ofwel door de verdeling van het aantal aankomsten in een vast tijdsinterval. Voor het laatste is hier gekozen. De groepsgewijze aankomsten kunnen met dezelfde methoden worden aangepakt die in hoofdstuk 3 zijn beschreven. Bij de eerste methode wordt het gebeuren beschouwd op de tijdstippen waarop een klant het systeem verlaat. Het eerste deel van deze methode verloopt exakt hetzelfde als in par. 3.1 bij de afleiding van de formule van Pollaczek-Khintchine, reden waarom de naam van Kendall aan de paragraaf is verbonden. De prikmethode kan hier ook worden gebruikt, zij het dat nu geprikt wordt in een groep in plaats van in een interval; in wezen is het echter dezelfde problematiek als bij de rest-levensduur.

Werd in par. 5.1 verondersteld dat alle karweiduren even lang duurden, in par. 5.2 wordt gesteld dat de karweiduren een willekeurig veelvoud van de tijdseenheid mogen zijn, waardoor de probleemstelling al zeer ruim wordt. Door het invoeren van het begrip eenheidskarweien kunnen wij de theorie uit de vorige paragraaf gebruiken. De prikmethode wordt tweemaal toegepast nl. ten aanzien van de eenheidskarweien en de hele karweien.

In par. 5.3 wordt ervan uitgegaan dat de karweiduren geheel willekeurig mogen zijn. De berekeningen berusten op de lineaire afname van de hoeveelheid werk gedurende een tijdseenheid met een toename op de aankomsttijdstippen. We vinden een aantal formules die, afgezien van een kleine korrektieterm, dit algemene geval van willekeurige aankomsten op vaste tijdstippen met een willekeurige karweiduur-verdeling goed beschrijven.

In par. 6.1 wordt een voorraadprobleem behandeld dat de situatie beschrijft van een continue produktie, waarbij per tijdseenheid konstante hoeveelheden aan een magazijn worden geleverd. De afname uit het magazijn is stochastisch. Dit geval leidt tot eenvoudige formules, met behulp waarvan ook het wachtsysteem $G/M/1$ beschreven kan worden; par. 6.2.

In hoofdstuk 7 wordt een andere versie gegeven van een publikatie van Adiri en Avi-Itzhak, waarvan in de inleiding reeds sprake was. De prikmethode kan enige malen met succes worden toegepast. Voorts zijn een aantal benaderende formules gegeven voor het geval dat de netto bewerkingstijd per kwantum bij een round-robin discipline klein is t.o.v. de gemiddelde netto karweiduur.

Werd in hoofdstuk 4 onderzocht hoe lang een bezette periode kan duren, in hoofdstuk 8 gaat het om de vraag tot welke grootte de rij kan aangroeien. Het groeiproces is een stochastische wandeling; een simulatie werd uitgevoerd om te laten zien hoe snel c.q. hoe langzaam dit proces van "vallen en opstaan" kan verlopen. Een eenvoudige vuistformule voor het aangroeien werd gevonden; de precieze formule kan met bekende methoden worden berekend. Tenslotte kan hieruit gemakkelijk de kansverdeling voor de maximale rijlengte bepaald worden, welk probleem identiek is met het "gamblers ruin problem".

In het laatste deel van de studie, hoofdstuk 9, komt de vraag naar de praktische betekenis van de wachttijdtheorie aan de orde. Het antwoord op deze vraag wordt in feite bepaald door de mate waarin het model de praktische werkelijkheid beschrijft en de verwachtingen die de toepasser heeft. Aan de hand van een wachtproces met gekorreleerde aankomsten wordt nader op deze vragen ingegaan.

REFERENTIES

1. Adiri, I. and Avi-Itzhak, B., A time-sharing queue. *Management Science*, 15 (1969), p. 639-657.
2. Adiri, I. and Avi-Itzhak, B., A time-sharing model with many queues. *Operations Research*, 17 (1969), p. 1077-1089.
3. Avi-Itzhak, B., Maxwell, W.L. and Miller, L.W., Queueing with alternating priorities. *Operations Research*, 13 (1965), p. 306-318.
4. Bakker, W., *De levertijd in machinefabrieken, een oriënterend onderzoek*. Waltman, Delft, 1965.
5. Bertels, K. en Nauta, D., *Inleiding tot het modelbegrip*. De Haan, Bussum, 1969.
6. Burke, P.J., The output of a queueing system. *Operations Research*, 4 (1956), p. 699-704.
7. Chung, K.L., *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer Verlag, Berlin, 1967.
8. Churchman, C.W., Ackoff, R.L., Arnoff, E.L., *Introduction to Operations Research*. Wiley, New York, 1958 (third printing).
9. Cobham, A., Priority assignment in waiting line problems. *Operations Research*, 2 (1954), p. 70-76.
10. Cobham, A., Priority assignment — a correction. *Operations Research*, 3 (1955), p. 547.
11. Coffman, E.G., Kleinrock, L., Feedback queueing models for time-shared systems. *Journal of the Association for computing machinery*, 15 (1968), p. 549-576.
12. Cohen, J.W., *The single server queue*. North-Holland Publishing, Amsterdam, 1969.
13. Cox, D.R., *Renewal theory*. Methuen, London, 1962.
14. Cox, D.R., Miller, H.D., *The theory of stochastic processes*. Methuen, London, 1965.
15. Cox, D.R., Smith, W.L., The superposition of several strictly periodic sequences of events. *Biometrika*, 40 (1953), p. 1-11.
16. Cox, D.R., Smith, W.L., *Queues*. Methuen, London, 1961.
17. Cruon, R., ed., *Queueing theory, recent developments and applications*. English Universities Press, London, 1967.

18. Doob, J.L., Stochastic processes. Wiley, New York, 1953.
19. Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, vol. I. Wiley, New York, 2nd ed., 1958.
20. Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, vol. II. Wiley, New York, 1966.
21. Ferschl, F., Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse, Grundlagen und Anwendungen der Theorie der Wartesysteme. Physica, Wien, 1964.
22. Foster, F.G., Stochastic processes. OR'72, North-Holland Publishing, 1973, p. 223-239.
Paper presented at the sixth IFORS conference on OR, Dublin 1972.
23. Haight, F.A., Mathematical theories of traffic flow. Academic Press, New York, 1963.
24. Jackson, J.R., Networks of waiting lines. Operations Research, 5 (1957), p. 518-521.
25. Jewell, W.S., A Simple proof of: $L = \lambda W$. Operations Research, 15 (1967), p. 1109-1116.
26. Kendall, D.G., Some problems in the theory of queues. J. Roy. Stat. Soc. B, 13 (1951), p. 151-185.
27. Kosten, L., Stochastic theory of service systems. Pergamon Press, New York, 1973.
28. Kesten, H., Runnenburg, J.Th., Priority in waiting line problems, I and II. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. A60, Indagationes Math., 19 (1957), p. 312-336.
29. Khintchine, A.Y., Mathematical methods in the theory of queueing. Griffin, London, 1960.
30. Kolmogorov, A.N., Foundations of the theory of probability. Chelsea, New York, 1956.
31. Lee, A.M., Applied queueing theory, Mac Millan, London, 1966.
32. Lee, A.M., Stochastic processes: discussant I. OR'72, North-Holland Publishing, 1973, p. 241-243.
33. Little, J.D.C., A proof for the queueing formula: $L = \lambda W$. Operations Research, 9 (1961), p. 383-387.
34. Morse, P.M., Queues, inventories and maintenance. Wiley, New York, 1958.
35. Morse, P.M., Feshbach, H., Methods of theoretical physics. Mac Graw-Hill, New York, 1953. International student edition, Kōgakusha, Tokyo.
36. Newell, G.F., Applications of queueing theory. Chapman and Hall, London, 1971.
37. Oliver, R.M., An alternate derivation of the Pollaczek-Khintchine formula. Operations Research, 12 (1964), p. 158-159.
38. Peck, L.G., Hazelwood, R.N., Finite queueing tables. Wiley, New York, 1958.
39. Prabhu, N.U., Some results for the queue with Poisson arrivals. J. Royal Stat. Soc., Ser. B, 22 (1960), p. 104-107.

40. Prabhu, N.U., Elementary methods for some waiting time problems. *Operations Research*, 10 (1962), p. 559-566.
41. Prabhu, N.U., Narayan Bhat, U., Further results for the queue with Poisson arrivals. *Operations Research*, 11 (1963), p. 380-386.
42. Prabhu, N.U., *Queues and inventories*. Wiley, New York, 1965.
43. Ross, S.M., *Applied probability models with optimization applications*. Holden-Day, San Francisco, 1970.
44. Ross, S.M., *Introduction to probability models*. Academic Press, New York, 1972.
45. Runnenburg, J.Th., Boekbespreking, *Statistica Neerlandica*, 20 (1966), p. 273.
46. Saaty, T.L., *Mathematical methods of operations research*. Mac Graw-Hill, New York, 1959.
47. Steutel, F.W., De invloed van een prioriteitsregeling op de gemiddelde wachttijd. *Statistica Neerlandica*, 13 (1959), p. 503-513.
48. Stidham, S., Regenerative processes in the theory of queues, with applications to the alternating-priority queue. *Adv. Appl. Prob.*, 4 (1972), p. 542-577.
49. Stidham, S., A last word on $L = \lambda W$. *Operations Research*, 22 (1974), p. 417-421.
50. Takács, L., Transient behaviour of single-server queueing processes with recurrent input and exponentially distributed service times. *Operations Research*, 8 (1960), p. 231-245.
51. Takács, L., The probability law of the busy period for two types of queueing processes. *Operations Research*, 9 (1961), p. 402-407.
52. Takács, L., A single-server queue with recurrent input and exponentially distributed service times. *Operations Research*, 10 (1962), p. 395-399.
53. Takács, L., *Introduction to the theory of queues*. Oxford University Press, New York, 1962.
54. Takács, L., Two queues attended by a single server. *Operations Research*, 16 (1968), p. 639-650.
55. Tanner, J.C., A problem of inference between two queues. *Biometrika*, 40 (1953), p. 58-69.
56. Tarski, A., *Inleiding tot de logica*. Nederlandse bewerking van Beth, E.W. Noord-Hollandse Uitgeversmaatschappij, Amsterdam, 1964.
57. Veen, B. van der, Een meer-loketten probleem met overwerk. *Statistica Neerlandica*, 16 (1962), p. 195-204.
58. Veen, B. van der, *Introduction to the theory of operational research*. Philips technical library, Mac Millan, London, 1967.
59. Veen, B. van der, De problematiek van het wachten. *Informatie*, 13 (1971), p. 152-156.
60. Wolff, R.W., Work-conserving priorities. *J. Appl. Prob.*, 7 (1970), p. 327-337.

SUMMARY

This thesis is born of the need for an operational research approach to queueing. It is easy to ascertain that many papers and books have been written on queueing theory from a purely mathematical viewpoint. Queueing-mathematics is very highly developed, but it gives the non-mathematician little "physical" or "operational" insight into the question: "What is really going on?"

In this study the author describes queueing models from the viewpoint of the operational researcher on a level of abstraction not higher than necessary, with the primary purpose of gaining insight into the phenomena. The analysis is based on the renewal theory and on very general properties of queueing systems, such as the relation $L = \lambda W$.

After an introduction into the basic phenomena, queueing models of the types $M/M/S$, $M/G/1$, $G/M/1$ are treated and models with group arrivals, time-sharing, different queueing priorities etc. are discussed. The growth of queues is demonstrated with a simulation model as well as with the theory of the random walk. In the last chapter the question of the relation between model and reality is treated with the help of some different approaches to a queueing system with interdependent arrivals.

CURRICULUM VITAE

De schrijver van dit proefschrift werd op 9 augustus 1925 geboren te Leeuwarden. In 1943 legde hij het eindexamen H.B.S.-B af aan de Christelijke Hogere Burgerschool te Leeuwarden. Van september 1945 tot februari 1951 studeerde hij aan de Technische Hogeschool te Delft waar hij het diploma natuurkundig ingenieur behaalde met als hoofdrichting de theoretische natuurkunde. Na een tijdelijk assistentschap aan de Hogeschool trad hij in september 1951 in dienst bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Eindhoven als wetenschappelijk medewerker van achtereenvolgens de hoofdindustriegroep Apparaten, de hoofdindustrie-groep Icoma, het Natuurkundig Laboratorium en de afdeling Informatie Systemen en Automatie. Sinds 1958 is zijn werkgebied de operationele research. Hij is schrijver van de "Introduction to the theory of operational research", waarvan vertalingen verschenen in het Pools en Spaans.

STELLINGEN

bij het proefschrift van B. van der Veen

1. Nadler heeft er terecht op gewezen dat uitgangspunt bij het ontwerpen van systemen dient te zijn de functie van het systeem en niet het bestaande systeem. Bij het ontwerpen van informatiesystemen wordt evenwel nog vaak gedacht dat een gedetailleerd onderzoek van het huidige systeem voldoende inzicht geeft in de eisen die aan het te ontwerpen systeem moeten worden gesteld en als zodanig een basis kan zijn voor het ontwerp.

G. Nadler, Ideals – a creative approach to systems, Proceedings international systems meeting, 1968, St. Louis.

2. De afstemmingsproblemen, die ontstaan bij de produktieplanning ten behoeve van de zg. katalogusprodukten (toonbankartikelen) geven aan de planning het karakter van een vicieuze cirkel. Een goede planning vereist een bewuste doorbraak van deze cirkel, waarbij in het bijzonder ook het stochastische karakter van verkoop en produktie tot zijn recht komt. In het IPSO-besturingssysteem bijvoorbeeld, is hieraan voldaan door een procedure in twee fasen, aangeduid met "explosie" en "scheduling".

IPSO-team, IPSO, initiating production by sales orders, Informatie 15 (1973), p. 595-609.

3. Een simulatie-model van een ontworpen besturingssysteem kan nuttig zijn om de werking van het systeem te onderzoeken. Het schrijven van een programma daarvoor kan zelfs nuttig zijn als een computer ontbreekt om de simulatie uit te voeren.
4. Bij het toepassen van modellen op praktische situaties dient onderzocht te worden of het model een redelijke beschrijving van de werkelijkheid geeft. Als Wagner voor een "travelling salesman problem" een model geeft dat tot een optimale oplossing leidt die

door iedere weldenkende handelsreiziger kan worden verbeterd, dan is aan de genoemde voorwaarde niet voldaan.

H.M. Wagner, Principles of Operations Research, Prentice Hall, 1969, p. 471-480.

5. Bij het hanteren van, op zich zeer goed bruikbare, mathematische modellen mag aan intuïtief duidelijke begrippen niet stilzwijgend een andere, c.q. ruimere, betekenis worden toegekend. Het "aantal vertrekkende klanten" zoals Prabhu dat bijvoorbeeld hanteert is zonder toelichting operationeel niet verantwoord.

N. U. Prabhu, Queues and inventories, John Wiley, New York, 1965, p. 6-11.

6. Het doorrekenen van wachtmodellen is bedoeld om inzicht te verkrijgen in het gedrag van relevante grootheden en het daarmee voorspellen van numerieke resultaten. Wegens de kleine relatieve nauwkeurigheid van de voorspellingen bij betrekkelijk korte reeksen van waarnemingen, is het in veel praktische gevallen niet mogelijk zeer nauwkeurige voorspellingen te doen. In dit kader past bijvoorbeeld de opmerking dat, wanneer de karweiduren als normaal verdeeld beschouwd mogen worden, zij in de formule van Pollaczek-Khintchine in de meeste praktische gevallen als konstant beschouwd mogen worden.
7. Het is voor een eerste kennismaking met de operationele research niet nodig dat op details wordt ingegaan, wel echter dient duidelijk gesteld te worden "waar het om gaat". Als evenwel bij de berekening van een veiligheidsvoorraad de bijbehorende figuur duidelijk suggereert dat de kansdichtheid van een normale verdeling slechts in een eindig interval van nul verschilt, dan is niet aan elementaire didactische eisen voldaan. De mededeling dat de standaardspreading de helft is van het lijnstukje dat de twee buigpunten van de kromme verbindt, is in dit verband irrelevant.

M. Euwe, J.D. Albarda, Bedrijfsvoering met de computer II, Samsom, Alphen aan den Rijn, 1969, p. 142.

8. Het inhalen van "achteren naar voren" zoals dat in het bijzonder voorkomt op auto-wegen, met twee banen in dezelfde richting, bij het passeren van langzaam rijdende voertuigen, heeft een sterk verhogende invloed op het aantal inhaalmanoeuvres.

B. van der Veen, De problematiek van het wachten, Informatie 13 (1971), p. 152-156.

9. Sommige wachtproblemen in bergachtige landschappen zouden vermeden kunnen worden indien caravanrijders zich meer bewust waren van de volgende elementaire, doch zeer bruikbare formules:

$$\nu = 19 \cdot 10^{-4} \, n\phi/\alpha, \quad p \approx 10^4 \, \alpha M/\phi G;$$

hierin is

ν = snelheid (in km/uur) waarbij de auto zijn grootste trekkracht heeft,

p = helling (in %) die redelijkerwijs nog genomen kan worden,

n = toerental (in omw./min.) waarbij de motor het maximale koppel M (in kg.m.) levert,

ϕ = diameter (in cm) van de autowielen,

α = de totale overbrenging in de laagste versnelling, zijnde het produkt van de overbrenging in de versnellingsbak en die in de cardan,

G = totale gewicht (in kg) van de combinatie (auto, caravan, inzittenden, bagage).

10. Ook voor de wachttijdtheorie geldt de wet van behoud van ellende.

18 februari 1975.
TH Eindhoven.