

III. DE BEREKENING VAN GRONDWATERSTROMINGEN TUSSEN EVENWIJDIGE OPEN LEIDINGEN

L. F. ERNST

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding

SUMMARY

THE CALCULATION OF GROUND WATER FLOW BETWEEN PARALLEL OPEN CONDUITS

In the case of steady, symmetric drainage, several formulae are known with which the shape of the ground water table, or the difference in elevation between the extreme points of the phreatic surface, can be calculated. The use in practice of a certain formula depends on the conditions in that special case. A general preference for one special formula does not exist.

In asymmetric situations it is possible to make use of a wire-scheme (see fig. 10 for the case of an aquifer consisting of 1 or 2 homogeneous layers). This method implies the use of several constant resistances. The horizontal resistance ($L_j/k_j D_j$) is only of importance for the nearly horizontal flow in coarse-grained layers, the vertical resistance ($c_i = D_i/k_i$) especially for the nearly vertical flow in semi-permeable layers. In the vicinity of the open conduits, the use of a radial resistance w is introduced [see for instance formulae (10) and (11)]. The radial resistance is defined as the difference between the resistances encountered by the flow to the real, imperfect drain and by the equivalent flow to a theoretical, perfect drain (see fig. 3 and 5).

By means of the wire-scheme and using the mentioned resistances, several linear equations can be derived for the ground water flow in each strip between two open conduits. If a large number of open channels is present in the investigated area and more than two, separated, coarse layers are of importance for the ground water flow, the necessarily large number of equations will hamper the application of this method in practice. In cases where the aquifer can be regarded as consisting of one coarse layer with a semi-permeable covering layer, the solution of the given linear equations is very simple, irrespective of the number of open channels.

1. INLEIDING

Bij de berekening van grondwaterstromingen is het gebruikelijk in de pro-

blemen twee hoofdgroepen te onderscheiden, welke respectievelijk betrekking hebben op stromingen met radiale symmetrie en op stromingen tussen evenwijdige open leidingen. Voor toepassingen in de landbouw is vooral laatstgenoemde groep van belang.

In de meeste praktische gevallen zijn de eigenschappen van het medium, de randvorm en de randvoorwaarde niet zo eenvoudig, hetgeen inhoudt dat het probleem door een groot aantal parameters beheerst wordt. Analytische oplossingen van de differentiaalvergelijking van LAPLACE in twee of drie dimensies zijn echter slechts voor een beperkt aantal, meestal zeer eenvoudige gevallen bekend. Dit is de reden geweest, dat men in zeer veel gevallen gebruik heeft gemaakt van het principe van DUPUIT, volgens hetwelk een uitsluitend horizontale stroming wordt aangenomen. Deze veronderstelling geeft vooral een goede benadering als het pakket relatief dun en homogeen is en de drainerende leidingen volkomen zijn, dat wil zeggen dat de bodems van deze leidingen samen vallen met een ondoorlatende laag.

2. SYMMETRISCHE GRONDWATERSTROMING NAAR VOLKOMEN DRAINS IN EEN HOMOGEEN PAKKET

Van de mogelijke grondwaterstromingen tussen evenwijdige open leidingen werden aanvankelijk alleen de symmetrische toestanden in beschouwing genomen. Gaat men uit van de wet van DARCY en de continuïteitsvergelijking en veronderstelt men verder, dat er een stationaire afvoer is van een overtollige neerslag N , met een bij benadering horizontale stroming naar volkomen drains gelegen in een homogeen pakket, dat aan de onderzijde afgesloten is door een horizontale basis, dan volgt hieruit een elliptische grondwaterspiegel (zie fig. 1a). Als formule voor dit geval geldt:

$$[h(0)]^2 - [h(x)]^2 = \frac{Nx^2}{k} \quad (1)$$

Volgens GUSTAFSSON werd deze formule reeds in 1872 door COLDING gevonden, maar onafhankelijk van hem door ROTHE in 1924 opnieuw gepubliceerd. Eerst in het laatste decennium slaagde ENGELUND erin aan te tonen, dat in geval de ontwatering veroorzaakt wordt door met grind gevulde drainsleuven welke in de ondoorlatende laag zijn aangebracht, de elliptische grondwaterspiegel ook volgt uit een oplossing van de differentiaalvergelijking van LAPLACE (zie fig. 1c).

Bij een omkering van de stromingsrichting (zogenaamde infiltratie met $N = R - E < 0$) blijft vergelijking (1) formeel geldig, maar wegens de negatieve waarde van het rechterlid volgt hieruit in plaats van een elliptische grondwa-

terspiegel een hyperbolische grondwaterspiegel. Indien $h(0) = 0$, dan ontgaat de hyperbool in twee snijdende rechte lijnen.

In die gevallen, dat de open leidingen onvolkomen zijn, kan formule (1) voor een redelijke benadering gebruikt worden, mits de natte omtrek B niet zeer klein is ten opzichte van de laagdikte D en D klein is ten opzichte van de afstand tussen de open leidingen (zie fig. 1d).

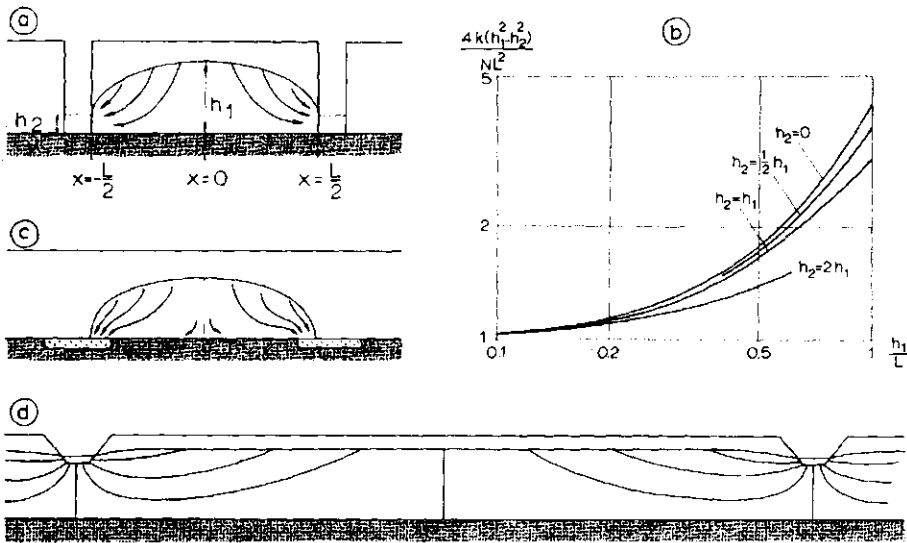


FIG. 1. Symmetrische drainage

- Volkomen drains met verticale taluds
- Fouten welke met formule (2), bij toepassing op de toestand afgebeeld in figuur 1a, kunnen worden gemaakt
- Drainage door met grind gevulde sleuven welke onder een dun, homogeen doorlatend pakket zijn gelegen
- Bij grote slootafstanden mag een constante dikte van de doorstroomde laag in vele gevallen met goede benadering worden verondersteld

FIG. 1. Symmetric drainage

- Perfect drains with vertical tali
- Errors which can be made with formula (2), when used on the situation represented in figure 1a
- Drainage by gravel-filled drain-trenches overlain by a thin layer of homogeneous permeability
- In the case of large distances between the drainage channels a constant thickness of the aquifer may often be assumed

Formule (1) kan door substitutie van $x = \frac{L}{2}$ gebracht worden in de volgende vorm*:

$$h_1^2 - h_2^2 = \frac{NL^2}{4k} \quad (2)$$

In figuur 1b wordt getoond hoe groot de fouten zijn, die ontstaan als formule (2) wordt toegepast op de stroming tussen volkomen drains met verticale taluds bij grote waarden van h_1/L . De fout is te verwaarlozen als $h_1/L < 0,25$. Bij infiltratie is de ontaarding tot twee rechte lijnen voor alle waarden van h_2/L als een exacte oplossing te beschouwen.

Een nog eenvoudiger formule kan men afleiden, indien aangenomen mag worden, dat het verschil tussen h_1 en h_2 relatief zo klein is, dat een constante laagdikte D verondersteld mag worden. Vervangt men $\frac{1}{2} [h(0) + h(x)]$ in formule (1) door D , dan volgt hieruit een parabolische vorm van de grondwater-spiegel. Substitueert men $x = 0,5 L$ en vervangt men h_2 door de aanduiding voor het peil van het open water h_0 , dan ontstaat de volgende formule, welke dikwijls in de praktijk kan worden toegepast:

$$h_1 - h_0 = \frac{NL^2}{8kD} \quad (3)$$

3. SYMMETRISCHE GRONDWATERSTROMING NAAR ONVOLKOMEN DRAINS IN EEN HOMOGEEN PAKKET

Aan de verschillende veronderstellingen, die gedaan zijn om als eerste stap de voorgaande zeer eenvoudige formules af te leiden, wordt in de praktijk slechts zelden voldaan. Een tweede stap bestaat hieruit, dat afgezien wordt van de voorwaarde dat de bodem van de open leidingen met de ondoorlatende basis samenvalt. HOOGHOUDT heeft dit geval opgelost door gebruik te maken van oneindige reeksen. Om deze oplossing voor praktische toepassingen geschikt te maken, heeft HOOGHOUDT twee gevallen naast elkaar gesteld met gelijke door-

* De stijghoogte h is onder de gegeven omstandigheden afhankelijk van x en z (horizontale en verticale coördinaat) en zou dus als volgt kunnen worden geschreven: $h(x, z)$. In een gelaagd pakket met horizontale stromingen in de grove lagen zou dit vervangen kunnen worden door $h_i(x)$, waarbij i het nummer is van de grove laag. Indien alleen bijzondere waarden van x van belang zijn, b.v. $x = 0$ en $x = \pm L/2$, dan kan men hieraan de indices 1 en 2 geven en schrijven $h_{i,1}$ en $h_{i,2}$. Bij een homogeen pakket zal de eerste index weggelaten kunnen worden [zie formule (2)]. Het peil van de open leidingen behoeft niet aan $h_{i,2}$ gelijk te zijn [zie figuur 10 en formule (17)]. Hiervoor zal geschreven worden h_0 . Deze notatie heeft als bezwaar, dat er bij het gesproken woord geen verschil is tussen het peil van het open water h_0 en de grondwaterstand $h(0)$ welke bij het punt $x = 0$ behoort.

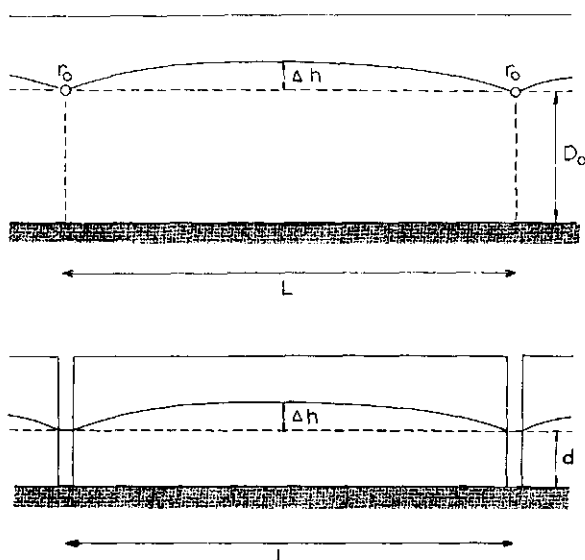


FIG. 2. Vervanging van de werkelijke toestand met onvolkomen drains en laagdikte D_0 onder de drains, door een denkbeeldige toestand met volkomen drains en een slootpeil op een hoogte d boven de ondoorlatende laag

FIG. 2. *The real situation with imperfect drains and a thickness D_0 of the permeable layer below the drains can be replaced by a theoretical situation with perfect drains and a level in the drainage channels at height d above the impermeable layer*

latendheid, gelijke drainafstand en gelijke opbolling van de grondwaterspiegel; in het ene geval echter moeten de open leidingen of drainbuizen hun werkelijke vorm hebben, in het andere geval worden volkomen drains verondersteld. De laagdikten moeten dan verschillend zijn en worden respectievelijk aangeduid door $D_0 + h$ en $d + h$ (zie fig. 2); d wordt genoemd de dikte van de equivalent-laag. Worden de grondwaterstanden gemeten ten opzichte van de waterspiegels in de open leidingen, dan kan formule (2) in de volgende vorm gebracht worden:

$$(h_1 + d)^2 - d^2 = \frac{NL^2}{4k} \quad (4)$$

Bij ontwatering door drainbuizen kan de grondwaterspiegel het verticale vlak door de as van deze buizen snijden op een hoogte, die een bedrag h_2 boven deze as ligt. In plaats van formule (4) krijgt men dan:

$$(h_1 + d)^2 - (h_2 + d)^2 = \frac{NL^2}{4k} \quad (5)$$

De tabellen voor d , welke HOOGHOUT in een van de *Verslagen van Landbouwkundige Onderzoekingen* heeft gepubliceerd, zijn afgeleid bij kleine waarden van h_1 en h_2 , voor verschillende waarden van de drainafstand L , de laag-

dikte D_0 en de straal r_0 van de natte omtrek van de drainerende leidingen. HOOGHOUDT ging van de veronderstelling uit, dat de buizen bij drainage voor de helft met water gevuld zijn. Genoemde tabellen zijn zonder onderscheid geldig voor de formules (4) en (5). Ook bij een omgekeerde stromingsrichting (respectievelijk $h_2 = 0$ en negatieve h_1 of bij $h_1 < h_2$) worden deze formules en de tabellen in praktijk gebracht.

Verder kan hier ter verduidelijking erop gewezen worden, dat bij sloten, kanalen enz. kan gesteld worden, dat h_2 identiek is aan het peil h_0 van het open water; bij drainage door buizen kan h_2 hoger liggen dan de stijghoogte van het water in de buizen; bij infiltratie door buizen moet h_2 altijd lager zijn dan h_0 .

Indien het grondwaterpakket homogeen doorlatend is en de rand van het gebied, waarin de stroming gebeurt, in een vlakke doorsnede gezien een zeer eenvoudige vorm heeft, bij voorkeur een begrenzing door rechte lijnen, kan voor de oplossing van het probleem dikwijls gebruik worden gemaakt van *complexe functies*. De vorm van de grondwaterspiegel is echter in de meeste gevallen niet zo eenvoudig en tevoren onbekend, zodat de rand van het beschouwde gebied in het ζ -vlak (met $\zeta = x + iz$) niet als een gegeven kan worden gebruikt. In dat geval is het in principe mogelijk een uitweg te vinden door in het complexe v -vlak de snelheid uit te zetten, gespiegeld ten opzichte van de horizontale as: $v = v_x - iv_y$. Deze variant op het normale gebruik van complexe functies wordt de *hodograafmethode* genoemd.

Tot nu toe is langs deze weg slechts voor een zeer klein aantal gevallen de oplossing gevonden. Door WEDERNIKOW, GUSTAFSSON, en VAN DEEMTER werd een oplossing van de symmetrische drainage door buizen gegeven. Aan de volgende bijzondere voorwaarden moet hierbij voldaan zijn:

- 1e. de grond is homogeen doorlatend tot oneindig grote diepte,
- 2e. de drainbuis wordt in een verticale doorsnede puntvormig verondersteld met een potentiaal $= -\infty$.

De oplossing, zoals in zijn meest algemene vorm door VAN DEEMTER gegeven voor de vorm van de grondwaterspiegel, luidt als volgt:

$$\frac{2\pi h}{L} = \ln \frac{\beta+1}{\beta-1} + \frac{2N}{k-N} \ln \frac{\beta+1}{2} + \frac{N}{k-N} \ln \frac{s^2+1}{s^2+\beta^2} \quad (6)$$

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{k}{k-N} \operatorname{bgtg} \frac{s}{\beta} - \frac{N}{k-N} \operatorname{bgtg} s \quad (7)$$

s is een parameter, welke nul is op de verticaal door het middelpunt van de drainbuisdoorsnede (laagste punt van de grondwaterspiegel) en oneindig groot halverwege de drainreeksen (hoogste punt van de grondwaterspiegel); β is de

parameter welke afhangt van de stijghoogte van het water in de drainbuizen. Naarmate β groter is, wordt een lagere stand van de grondwaterspiegel gevonden. De maximum waarde van β is gelijk k/N , welke waarde bij praktische toepassingen meestal wel aangenomen mag worden, tenzij de drainbuizen zeer nauw zijn of een zekere verstopping voorkomt.

VAN DEEMTER heeft verder aangetoond, dat bij deze afleiding een omkering van de stromingsrichting is toegestaan. Bovendien heeft VAN DEEMTER de oplossing gegeven voor de symmetrische drainage door een watervrij gehouden sloot met verticale taluds. De uitkomst van laatstgenoemde afleiding heeft echter een nog gecompliceerder vorm dan de formules (6) en (7) en zal wegens de geringe praktische betekenis niet nader besproken worden. Gezien de bijzondere omstandigheden, waarop deze oplossingen betrekking hebben, is in de praktijk slechts een beperkte toepassing mogelijk.

Bij de afleiding van drainageformules voor stationaire toestanden wordt vrijwel altijd aangenomen, dat de overtollige neerslag niet alleen onafhankelijk is van de tijd maar ook onafhankelijk van de plaats. Hieruit volgt, dat als er bij de extreme waarden van de overtollige neerslag slechts weinig verschil in de vorm van de grondwaterspiegel is, ook de stroomlijnen en de equipotentiaal-lijnen slechts weinig in vorm veranderen, zodat het toegestaan is met constante weerstanden te rekenen.

Een horizontale stroming met constante intensiteit, voortgaande over een afstand L , ondervindt een weerstand L/kD . In de nabijheid van open leidingen of drainbuizen ontstaat echter een belangrijke afwijking van de horizontale stromingsrichting, indien de ondoorlatende basis veel dieper ligt dan deze drainbuizen of de bodem van deze open leidingen. Dit heeft tot gevolg, dat de weerstand welke de stroming bij drainage ondervindt — en hetzelfde geldt voor de omgekeerde richting — een bedrag w hoger ligt dan bij een zuiver horizontale stroming.

Uit figuur 3 wordt duidelijk, dat de oplossing welke geldig is voor een toestand met volkomen drains, na toevoeging van de oplossing behorende bij figuur 3c geldig wordt voor een analoge stroming naar onvolkomen drains. Indien de afstand tussen de punten A en B groter is dan D , is de waarde van $h_A'' - h_B''$ slechts zeer weinig afhankelijk van de plaats van A. Hieruit volgt, dat geschreven mag worden:

$$h_A'' - h_B'' = \Delta h_{\text{rad}} = q_0 w \quad (8)$$

De grootheid w wordt de radiale weerstand genoemd. Uit formule (8) volgt onmiddellijk, welke dimensie de radiale weerstand heeft; w kan bijvoorbeeld worden uitgedrukt in dagen/meter.

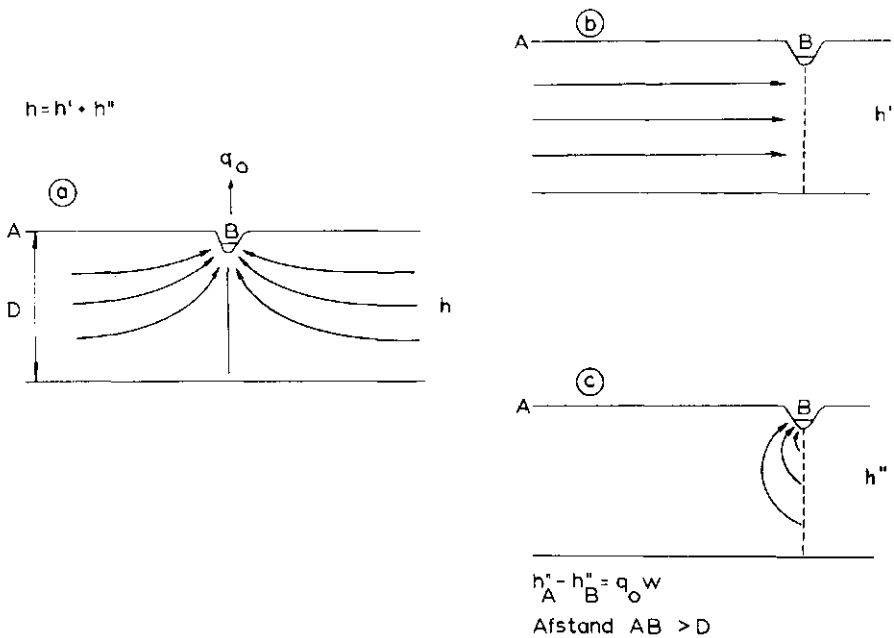


FIG. 3. Ontleding van de symmetrische stroming in een homogeen pakket naar een open leiding (a), in een horizontale stroming naar het verticale vlak door de as van de open leiding, dus naar een volkomen drain (b), en de „radiale” stromingscomponent (c)

FIG. 3. The symmetric flow to a drainage channel in a homogeneous aquifer (a) can be replaced by a horizontal flow to a perfect drain (b) and the so-called 'radial component' of the flow (c)

Bij de symmetrische drainage in een homogeen pakket van constante dikte D volgt uit (3) en (8):

$$h_1 - h_0 = \frac{NL^2}{8kD} + NLw \quad (9)$$

Deze formule houdt in, dat een parabolische vorm van de grondwaterspiegel wordt aangenomen, behalve op afstanden kleiner dan D van de open leidingen. Daar wordt een zekere afwijking van de parabolische vorm merkbaar, welke afwijking moet kunnen worden afgeleid uit de oplossing behorende bij de radiale stromingscomponent afgebeeld in figuur 3c.

Indien de natte omtrek van een open leiding in dwarsdoorsnede gelijk is aan een halve cirkel en het watervoerende pakket homogeen en van constante dikte is, kan voor de radiale weerstand een eenvoudige formule worden afgeleid, welke in de meeste gevallen een zeer goede benadering geeft:

$$w = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{D}{\pi r_0} \quad (10)$$

Indien de open leiding een ander profiel heeft, zou men in de laatste formule πr_o kunnen vervangen door de natte omtrek B . In die gevallen dat de breedte B_w van de open leiding veel groter is dan de diepte van de bodem onder de waterspiegel is het beter formule (11) te gebruiken:

$$w = \frac{1}{\pi k} \ln \frac{4D}{\pi B_w} \quad (11)$$

Dat uit de formules (10) en (11) ook negatieve waarden voor w kunnen volgen, is eenvoudig te begrijpen. Bij een grote natte omtrek van de drainerende open leidingen kan dit oppervlak onder een kleinere weerstand bereikt worden dan een verticaal vlak door de as van deze leidingen.

De formules (10) en (11) kunnen in (9) gesubstitueerd worden; zou men vervolgens voor D/L een zeer grote waarde willen nemen, dan vindt men dat voor oneindig grote D ook $h_1 - h_o$ naar het oneindige gaat. Dit laatste kan niet juist zijn. Bij nadere controle blijkt, dat de combinatie van (9) met (10) of (11) voor $D/L < 0,25$ een zeer goede benadering en voor $0,25 < D/L < 0,5$ nog een redelijke benadering geeft, maar voor grotere waarden van D/L niet kan worden aanbevolen.

4. SYMMETRISCHE GRONDWATERSTROMING IN EEN HETEROGEEN PAKKET

Na de bespreking van de bekende formules voor de symmetrische grondwaterstroming naar volkomen drains in een homogeen pakket en naar onvolkomen drains in een homogeen pakket, zal als derde stap in deze ontwikkeling worden overgegaan op de behandeling van het drainageprobleem bij een heterogeen pakket.

HOOGHOUDT was de eerste onderzoeker, die in de berekening van grondwa-

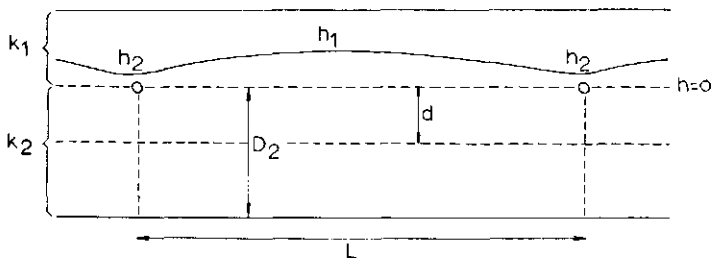


FIG. 4. De symmetrische drainagetoestand waarop de formule van HOOGHOUDT betrekking heeft. Het pakket bestaat uit twee lagen van verschillende doorlatendheid. De assen van de drainbuizen liggen in het scheidingsvlak van deze twee lagen.

FIG. 4. The symmetric situation of drainage to which the formula of HOOGHOUDT refers. The aquifer consists of two layers of different permeabilities. The axes of the drain-tubes are situated in the boundary between these two layers.

terstromingen tussen evenwijdige leidingen zowel de invloed van een zekere gelaagdheid van het pakket, als van de afwijkingen van de horizontale stromingsrichting heeft opgenomen. Voor dit doel werd formule (5) door HOOGHOUT in de volgende vorm gebracht (zie fig. 4):

$$(h_1 + \frac{k_2}{k_1} d)^2 - (h_2 + \frac{k_2}{k_1} d)^2 = \frac{NL^2}{4k} \quad (12)$$

De open leidingen (eventueel drainbuizen) hebben in dwarsdoorsnede een natte doorsnede welke in vorm gelijk is aan een halve cirkel (eventueel aan een gehele cirkel), waarvan het middelpunt op dezelfde hoogte ligt als de grens tussen de bovenlaag met doorlatendheid k_1 en de onderlaag met doorlatendheid k_2 . De stijghoogten h_1 en h_2 worden ten opzichte van deze grenslaag gemeten. De grootte d heeft evenals bij het homogene pakket de betekenis van dikte van de laag, in dit geval met doorlatendheid k_2 , waarin een horizontale stroming dezelfde weerstand ondervindt als de werkelijke stroming in de tweede laag. Voor de bepaling van d worden dezelfde tabellen gebruikt als bij het homogene pakket. HOOGHOUT heeft de termen in formule (12) zo samengevat dat men de formule leest, alsof er in beide lagen een zuiver horizontale stroming is met voor elke verticale doorsnede een constante verhouding tussen de debieten in de eerste en de tweede laag:

$$q_1 : q_2 = \frac{1}{2} k_1 (h_1 + h_2) : k_2 d \quad (13)$$

Bij formule (12) moet tenslotte opgemerkt worden, dat naarmate k_1 lager is, de stroming in de bovenlaag meer verticaal moet zijn gericht. Omdat hiermede in (12) geen rekening is gehouden, moet in werkelijkheid de grondwaterspiegel midden tussen de open leidingen of drainbuizen een bedrag $h_1 N / (k_1 - N)$ hoger liggen dan uit deze formule volgt. Bij lage waarden van k_1 kan deze fout zeker van belang zijn. Bijvoorbeeld zou bij $k_1/N = 3$ uit de formule volgen: $h_1 = 0,40$ m, dan moet de juiste waarde 20 centimeter hoger liggen.

Zou men wegens de zeer grote verschillen in doorlatendheid, welke zoals bekend in eenzelfde pakket kunnen voorkomen, de kleinere verschillen in doorlatendheid buiten beschouwing laten en aannemen dat een indeling in horizontale lagen met een afwisselend goede en slechte doorlatendheid mogelijk is, dan ligt een uitgebreid toepasbare rekenmethode voor de hand. In de watervoerende lagen wordt daartoe een horizontale stroming verondersteld evenals bij homogene pakketten, daarentegen in de semi-permeabele lagen een verticale stroming. Dit laatste is, voorzover bekend, het eerst toegepast door DE GLEE bij de stroming naar slanke verticale putten.

Indien in dergelijke gelaagde pakketten onvolkomen drains voorkomen, moet men — behalve van de kD -waarden van de grove lagen en van de verticale

weerstand ($c = D/k$) van de slechte doorlatende lagen — ook weer van de radiale weerstanden van de drainerende leidingen gebruik maken. Uit hoeveel lagen het pakket ook bestaat, bij een theoretische bepaling van de grootte van de radiale weerstand uit de laagdikten en de doorlatendheden van de verschillende lagen, behoeft slechts het bovenste gedeelte van het pakket in beschouwing genomen te worden. De eerste slecht doorlatende laag, waarvan de bovenkant in diepte ongeveer gelijk ligt met de bodem van de open leidingen of dieper, wordt dan als ondoorlatend beschouwd (zie fig. 5).

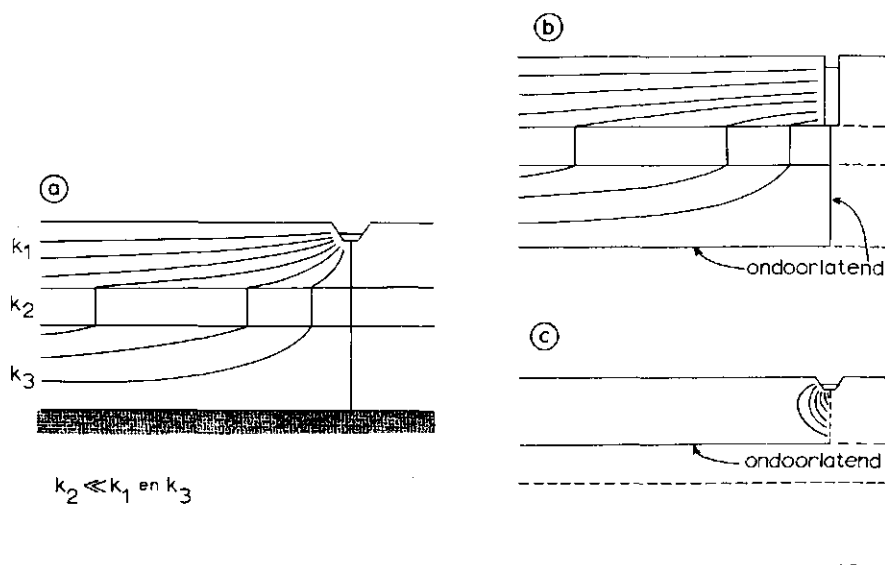


FIG. 5. Ontleding van de symmetrische stroming in een gelaagd pakket naar een open leiding (a), in een stroming naar een denkbeeldige volkomen drain (b), en de „radiale” stromingscomponent (c). Voor de berekening van deze radiale stromingscomponent mag zonder grote fout worden verondersteld, dat de slecht doorlatende laag ondoorlatend is; de stroming in figuur 5c kan dan met dezelfde formule worden berekend als de stroming in figuur 3c.

FIG. 5. Replacement of the symmetric flow in a layered aquifer (a) by a flow to imaginary perfect drains (b) and the radial component of the flow (c). For the calculation of the radial component of the flow it may be assumed without large errors that the semi-permeable layer is impermeable; the flow in figure 5c may therefore be calculated with the same formula as the flow in figure 3c.

Hoewel zich in het bovenste gedeelte van het doorlatende pakket voldoende variaties kunnen voordoen om op het eerste gezicht al een zeer groot aantal mogelijkheden te kunnen onderscheiden, is een meer schematische indeling mogelijk, waaruit een klein aantal standaard-gevallen volgt (zie fig. 6).

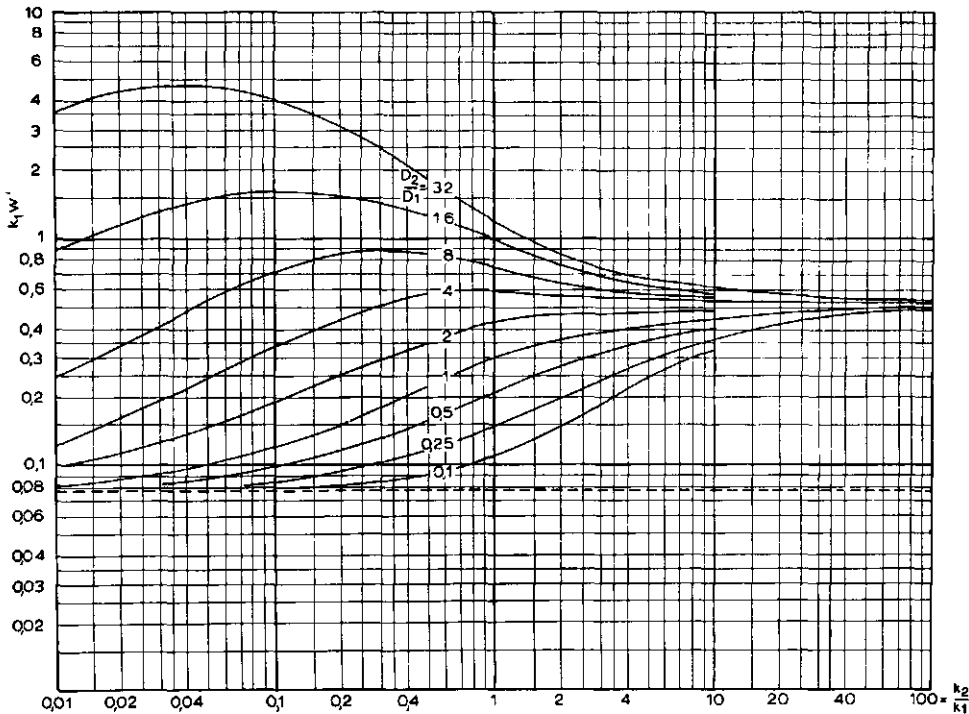


FIG. 7. De radiale weerstand van een open leiding met half cirkelvormige natte omtrek in een watervoerend pakket, bestaande uit twee lagen met doorlatendheden respectievelijk k_1 en k_2 en met dikten D_1 en D_2 . Indien $r'_0 = D_1/4$ kan de bijbehorende waarde voor kw' onmiddellijk uit de grafiek worden afgelezen. Voor andere waarden van r_0 moet vervolgens formule (14) worden gebruikt.

FIG. 7. The radial resistance of an open channel with a half-circular wetted perimeter in an aquifer consisting of two layers with permeabilities of respectively k_1 and k_2 and thicknesses D_1 and D_2 . If $r'_0 = D_1/4$ the corresponding value of kw' can at once be read from the graph. For other values of r_0 the value of kw' has to be substituted in formula (14).

de tweede laag zou in plaats van de dikte van de equivalentlaag ook van de radiale weerstand w gebruik gemaakt kunnen worden.

In alle overige gevallen, waarbij aangenomen mag worden dat een vervanging van de werkelijke toestand door een gedachte toestand met horizontale en verticale stromingsrichting is geoorloofd, kunnen formules analoog aan (9) worden afgeleid. Bijvoorbeeld voor het geval, dat er een slecht doorlatende laag boven een goed doorlatende laag gevonden wordt:

$$h_1 - h_0 = Nc_1 + \frac{NL^2}{8(k_1D_1 + k_2D_2)} + NLw \quad (15)$$

Bij nadere beschouwing blijkt, dat onder c_1 moet worden verstaan het quotiënt

D_1^*/k_1 , waarbij D_1^* de dikte van de eerste laag is midden tussen de open leidingen, maar hoogstens tot een diepte gelijk aan de bodem van deze open leidingen.

Een analoge formule, voor het geval dat de grond is samengesteld uit vier lagen, welke afwisselend goed en slecht doorlatend zijn, met een slechte doorlatendheid in de bovenste laag, kan als volgt geschreven worden:

$$h_1 - h_0 = N_{C1} + \frac{N_{C3}a_{2,3}}{8a} \left\{ a_{4,3}L^2 + \frac{4a_{2,3}L}{\gamma a} \operatorname{tgh} \frac{L\gamma a}{4} \right\} + NLw \quad (16)$$

$$\text{met } a_{2,3} = \frac{1}{k_2 D_{2C3}}, \quad a_{4,3} = \frac{1}{k_4 D_{4C3}} \quad \text{en } a = a_{2,3} + a_{4,3}$$

5. BESCHOUWING VAN HET SYMMETRISCHE DRAINAGEPROBLEEM

Men kan zich nu afvragen aan welke van deze formules de voorkeur moet worden gegeven. De aanneming van constante weerstanden is in principe een benadering. Vooral indien ondiepe lagen oorzaak zijn van het geleidend vermogen voor horizontale stromingen, is het niet toegestaan met constante weerstanden te rekenen wegens de relatief grote variaties in de dikte van de bovenste watervoerende laag.

Bij een constant peil h_0 in de open leidingen of bij constante h_2 is er volgens sommige van de gegeven formules een kwadratisch verband tussen h_1 en N_1 . Daarentegen bestaat er een lineair verband volgens de formules, welke afgeleid zijn uit de veronderstelling dat alle laagdikten en weerstanden onafhankelijk van N als constant aangenomen mogen worden. De vorm van de grondwaterspiegel zou volgens formule (1) elliptisch moeten zijn. In bepaalde gevallen kan de vorm van de grondwaterspiegel met zeer goede benadering echter elliptisch zijn, zonder dat hieraan een dergelijke formule ten grondslag ligt. Dit laatste kan alleen het geval zijn in een zeer dun en homogeen pakket; de radiale weerstand heeft dan weinig betekenis. Formule (3) houdt in dat er een parabolische grondwaterspiegel aangenomen wordt. Bij een constante laagdikte worden de formules (9) en (15) veel gebruikt en daaruit volgt, dat een parabolische vorm wordt aangenomen; behalve dicht bij de open leidingen, waar de radiale stromingscomponent een bijzondere afwijking veroorzaakt. Bij relatief grote radiale weerstanden heeft het praktisch geen zin, voor het midden van de strook tussen twee open leidingen aan te willen tonen of hier aan de benadering door een parabool, dan wel door een ellips de voorkeur moet worden gegeven.

Gezien het feit, dat het probleem door een groot aantal parameters beïnvloed wordt, moet verwacht worden dat er geen algemeen geldige oplossing van eenvoudige vorm kan zijn. Men zal de beslissing inzake keuze van de drainage-

vergelijking kunnen laten afhangen van de praktische toepasbaarheid ofwel afgaan op de resultaten van veldmetingen.

In het veld heeft men vrijwel steeds een ongeveer kwadratisch verband gevonden tussen grondwaterstand en afvoer. Dit kan echter verklaard worden, daar men bij voorkeur onderzoek heeft gedaan naar de ontwatering van kleigrond, waarin men meestal een met de diepte afnemende doorlatendheid heeft gevonden. Ook formules als (3), (9), (15) en (16) behoeven geen lineair verband tussen h_1 en N te geven, als voor D en w op de juiste manier zekere waarden ingevoerd worden, welke afhankelijk zijn van N . Bovendien zijn er gevallen, waarbij het peil van de open leiding een niet-lineair verband met de afvoer heeft en ook h_1 hiervan de invloed moet ondervinden.

Bij een grondige behandeling van het symmetrische drainageprobleem zou tenslotte opgemerkt moeten worden dat de toestand in werkelijkheid zelden stationair is. Dit houdt in, dat feitelijk om te beginnen een statistische bewerking van meteorologische gegevens nodig zou zijn. Bij alle voorkomende verdelingen van neerslag en verdamping zou men moeten nagaan, welk verloop van de grondwaterstand ontstaat bij een gegeven afstand tussen de open leidingen, een gegeven natte omtrek van deze open leidingen en een gegeven gelaagdheid van de bodem. Hieruit zou dan volgen, hoe groot in het gegeven geval de kans op overschrijding van een bepaalde grondwaterstand is.

In de praktijk maakt men gebruik van de ervaring, dat als bij een aangenomen constante overtollige neerslag van 7 mm/dag berekend wordt, welke drainafstand de grondwaterstand niet hoger dan 30 cm onder maaiveld brengt, toepassing van deze drainafstand een bevredigende ontwatering geeft.

Maakt men vervolgens gebruik van het feit, dat in Nederland de drainbuizen meestal gelegd worden op diepten variërend van 80 tot 100 cm onder maaiveld, dan heeft men hiermee twee van de variabelen, welke in alle voorgaande formules voorkomen, al vastgelegd.

Brengt men tenslotte de lineaire formules (3), (9), (15) en (16) in de volgende vorm:

$$h_1 - h_0 = NW \quad (17)$$

waarbij W als de totale weerstand van het drainagesysteem kan worden beschouwd, dan volgt hieruit, dat in de praktijk bij drainage door buizen de totale weerstand ongeveer 70 tot 100 dagen moet bedragen.

6. ASYMMETRISCHE GRONDWATERSTROMINGEN

Hoewel in de meeste gevallen de veronderstelling aanvaardbaar is, dat de grondwaterstroming plaatsvindt tussen equidistante leidingen met constant peil.

gelegen in een gelaagd pakket van constante dikte dat zich in horizontale richting oneindig ver uitstrekt, kan het soms ook van belang zijn de topografische toestand in rekening te brengen. De aanneming van constante horizontale, verticale en radiale weerstanden geeft het voordeel, dat een systeem aangegeven kan worden, waarmee ook asymmetrische grondwaterstromingen langs eenvoudige weg berekend kunnen worden.

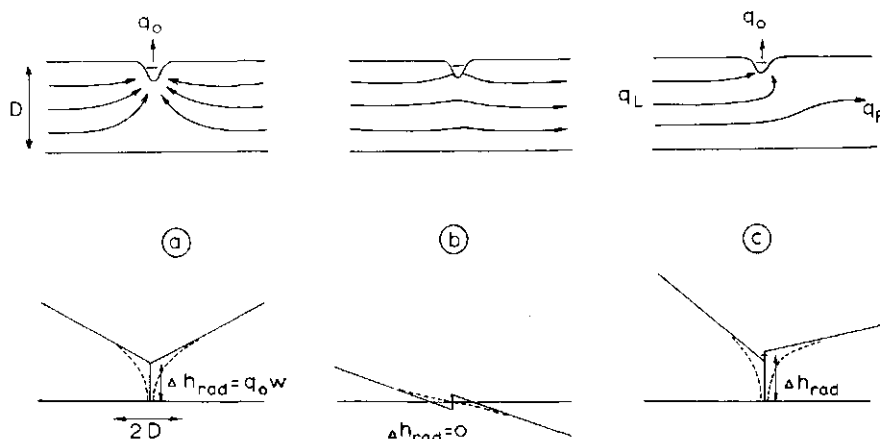


FIG. 8. Samenstelling van willekeurige asymmetrische stromingen (c) in de nabijheid van open leidingen als lineaire combinatie van een symmetrische stroming (a) en een doorgaande stroming (b). In de onderhelft van deze figuur is aangegeven hoe, op afstanden $> D$ verwijderd van de open leiding, de vorm van de grondwaterspiegel kan worden benaderd door lineaire functies.

FIG. 8. Representation of an arbitrary asymmetric flow (c) in the vicinity of open channels as a linear combination of a symmetric flow (a) and a continuing horizontal flow (b). In the lower part of this figure is indicated how at distances $> D$ from the open channel, the shape of the phreatic surface can be approximated by linear functions.

In de voorgaande beschouwingen werden de radiale weerstanden nog alleen gebruikt bij symmetrische drainage en kon de toestand in de nabijheid van de open leidingen afgebeeld worden als in figuur 8a. Beschouwt men vervolgens een doorgaande, vrijwel horizontale stroming (dus geen uitwisseling van water tussen grond en open leiding, zie fig. 8b), dan is onmiddellijk te zien, dat de vorm van de grondwaterspiegel met zeer goede benadering voorgesteld kan worden door een rechte met als vergelijking $h = h_0 - qx/kD$. Door de oplossingen voor de symmetrische en voor de doorgaande stroming met geschikte constanten te vermenigvuldigen en vervolgens te superponeren, kan men de oplossing verkrijgen van elke asymmetrische stroming met willekeurige verdeling van de drie componenten q_L , q_R en q_0 (zie fig. 8c).

In de bovenhelft van deze figuur is aangenomen dat $N = 0$, wat tot gevolg

heeft, dat op een afstand groter dan D van de open leidingen de vorm van de grondwaterspiegel vrijwel lineair is. Het schema in de onderhelft geeft niet anders dan deze rechte lijnen, voortgezet tot in de verticaal door het middelpunt van de open leiding. De helling van elk lineair gedeelte volgt uit $q = -kD \, dh/dx$, de hoogteligging wordt berekend met behulp van de radiale weerstand; immers steeds geldt: $\Delta h_{\text{rad}} = q_0 w$.

Hieruit volgt tevens dat om de grafische voorstellingen in de onderhelft van deze figuur te verkrijgen, men het betrokken gebied steeds kan vervangen door het dradenschema afgebeeld in figuur 9.

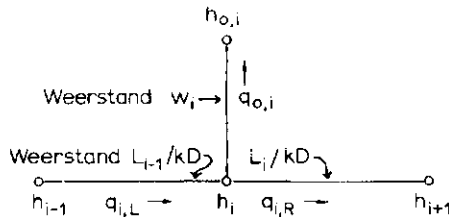


FIG. 9. Dradenschema voor afleiding van de lineaire functies, welke zijn afgebeeld in de onderhelft van figuur 8

FIG. 9. Wire scheme for the derivation of the linear functions which are represented in the lower part of figure 8

Bij de beschouwing van een groter gebied, waarin meer dan één open leiding voorkomt, welke alle in peil en natte omtrek en in onderlinge afstand mogen verschillen, kan van het voorgestelde principe gebruik gemaakt worden. Indien de grond homogeen doorlatend is en in het bijzonder als er een slechter doorlatende laag boven een goed doorlatende laag is, kan men een willekeurige topografische toestand als afgebeeld in figuur 10a in rekening brengen met een dradenschema als afgebeeld in figuur 10b. Er is immers geen bezwaar om aan het dradenschema uit figuur 9 een willekeurige uitbreiding te geven, mits aan de volgende twee voorwaarden voldaan wordt. De totale dikte van het watervoerend pakket moet kleiner zijn dan of hoogstens ongeveer gelijk aan de voorkomende kleinste afstand tussen de open leidingen. Als tweede voorwaarde moet gesteld worden dat aan de oppervlakte geen dunne goed doorlatende laag voorkomt.

Wordt aan de tweede voorwaarde niet voldaan en neemt men bovendien aan dat direct onder deze bovenlaag een ondoorlatende afsluiting gevonden wordt, dan is de oplossing van samengestelde problemen praktisch van geen betekenis, omdat het effect van de radiale stroming zwak is en de invloed van een afwijkend peil van een of meer open leidingen zich niet ver kan uitstreken. Indien

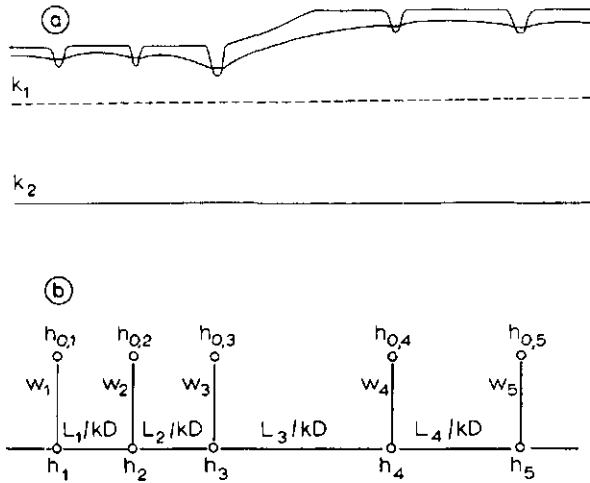


FIG. 10. Asymmetrische grondwaterstroming. De peilen van het open water, de radiale weerstanden en de afstanden tussen de open leidingen kunnen van geval tot geval verschillend zijn. Indien de hoogteverschillen in de grondwaterspiegel relatief klein zijn of $k_1 \ll k_2$, mag de groothed $kD = k_1 D_1 + k_2 D_2 + \dots$ als constant worden beschouwd.

a. Afbeelding van het stroomgebied
b. Dradenschema ter vervanging van figuur 10a

FIG. 10. Asymmetric flow of groundwater. The levels of the open water, the radial resistances and the distances between the drainage channels may be different from case to case. If the differences in height of the phreatic surface are relatively small or if $k_1 \ll k_2$, the magnitude of $kD = k_1 D_1 + k_2 D_2 + \dots$ may be considered as being constant.

a. Cross section of the area
b. Wire scheme replacing figure 10a

aan de eerste voorwaarde niet voldaan wordt, kan de aangegeven oplossingsmethode gehandhaafd worden als de open leidingen met korte onderlinge afstand gelegen zijn in een dunne slecht doorlatende bovenlaag, waarbij de onderkant van deze laag zoveel dieper is gelegen dan de bodem van de open leidingen en de verhouding van de doorlatendheden zodanig is, dat men deze bovenlaag grotendeels als oorzaak kan zien van de radiale weerstand. Gaat het daarentegen om een homogeen pakket, waarin de open leidingen op korte onderlinge afstand van elkaar gelegen zijn, dan is langs deze weg geen bevredigende oplossing te bereiken. Een uitweg kan men dan wel vinden, bijvoorbeeld door van een basisfunctie $h(x)$ gebruik te maken, waarbij onder $h(x)$ verstaan wordt de vorm van de grondwaterspiegel bij symmetrische toestroming vanuit het oneindige als slechts één open leiding aanwezig wordt verondersteld. Het superponeren van n dergelijke functies leidt bij $N = 0$ altijd tot een oplossing, maar deze weg is zoveel omslachtiger, dat dit alleen in het laatstgenoemde geval kan worden aanbevolen.

Uitgaande van een dradenschema als afgebeeld in figuur 10b moet men een aantal algebraïsche vergelijkingen van de eerste graad opstellen, waaruit de stijghoogten in de knooppunten van het schema kunnen worden berekend. Indien de grond uit een of twee lagen is opgebouwd en $N = 0$ wordt gesteld, hebben deze vergelijkingen de volgende vorm:

$$\frac{kD}{L_{i-1}} (h_{i-1} - h_i) + \frac{kD}{L_i} (h_{i+1} - h_i) + \frac{1}{w_i} (h_{o,i} - h_i) = 0 \quad (18)$$

Bij n open leidingen met gegeven peilen $h_{o,i}$ moet men uit n van deze vergelijkingen n onbekenden h_i oplossen. Dit behoeft in principe geen enkele moeilijkheid op te leveren.

Indien $N \neq 0$, wordt het aantal lineaire vergelijkingen twee maal zo groot, daar in elke strook tussen twee open leidingen twee onbekende coëfficiënten van de parabolische vergelijking voor de grondwaterspiegel bepaald moeten worden. De hoeveelheid werk kan in dit geval echter gemakkelijk verminderd worden door van de volgende kunstgreep gebruik te maken. Men zoekt twee deeloplossingen h' en h'' , welke respectievelijk voldoen aan $N = 0$ en $N \neq 0$ en waarvan de som voldoet aan de randvoorwaarden, welke opgelegd worden aan de peilen van de open leidingen of aan de stroomsterkten welke door deze leidingen worden in- of uitgevoerd.

Voor de tweede deeloplossing wordt de eenvoudigste mogelijkheid gekozen, dat wil zeggen in elke strook tussen twee open leidingen een symmetrische parabool: alle $h_i'' = 0$. De bijbehorende peilen van de open leidingen $h_{o,i}''$ en de stroomsterkten $q_{o,i}''$ kunnen onmiddellijk berekend worden en zijn respectievelijk gelijk aan $0,5 N (L_{i-1} + L_i) w_i$ en $0,5 N (L_{i-1} + L_i)$. Hierna blijft dus alleen over het zoeken van de eerste deeloplossing uit n lineaire vergelijkingen met $N = 0$ en overige bekende randvoorwaarden.

Bij asymmetrische stromingen in een pakket bestaande uit meer dan twee lagen, kan men van hetzelfde principe gebruik maken. De vergelijkingen worden nauwelijks gecompliceerder. Het aantal vergelijkingen neemt echter toe: bij m goed doorlatende lagen en n open leidingen ontstaan $2m(n-1)$ vergelijkingen. De kunstgreep, die bij $m = 1$ en $N \neq 0$ werd toegepast, gaat bij grotere m niet meer op.

7. TOEPASSINGSMOGELIJKHEDEN VAN DE THEORIE VOOR ASYMMETRISCHE STROMINGEN

Uit het voorgaande is reeds duidelijk geworden, dat hoewel de voorgestelde rekenmethode voor asymmetrische toestanden in de praktijk van minder belang is dan de formules voor symmetrische drainage, toch in een vrij groot aantal gevallen toepassing van deze rekenmethode mogelijk is.

Een toepassingsmogelijkheid vindt men bijvoorbeeld bij een scheepvaartkanaal met een peil dat afwijkt van het ongestoorde peil van de voor drainage aanwezige sloten of rivieren. Verschillende gevallen zijn bekend, in welke men het vermoeden heeft uitgesproken, dat het lagere peil van een dergelijk kanaal een zodanige verlaging van de grondwaterstand heeft veroorzaakt, dat schade aan de groei van de landbouwgewassen in droge zomers zou zijn toegebracht.

Verder kan gewezen worden op het ontwateringsprobleem van de beekdalen in het zuiden en oosten van Nederland. In de wat hogere ruggen tussen deze beekdalen vindt men weinig of geen open leidingen. In de beekdalen vindt men aan weerszijden van de rivier een meer of minder dicht net van slootjes, dat de afvoer van gedeeltelijk uit het hogere gebied afkomstig grondwater (om die reden soms „kwel” genoemd) moet verzorgen. In een dergelijk gebied is duidelijk zichtbaar, dat in de zomer de ontwatering alleen door de primaire leidingen gebeurt, in de winter door primaire en secundaire leidingen. Uit de voorgestelde rekenmethode volgt in eerste benadering als grafisch verband tussen grondwaterstand en afvoer een éénmaal gebroken rechte lijn; hierbij wordt dan verondersteld dat bij stijgende grondwaterstand de secundaire leidingen plotseling en tegelijk (overgang van de zomertoestand naar de wintertoestand) tot de afvoer gaan bijdragen. Door toevallige onregelmatigheden moet dit verband in de praktijk vrijwel altijd kromlijniig zijn.

Een derde voorbeeld kan men vinden bij twee polders, die met verschillend peil aan elkaar grenzen. De sloten aan de rand van de hoge polder moeten een relatief sterke wegzijging hebben, welke als relatief sterke kwel ontvangen wordt door de sloten aan de rand van de lage polder.

Bij niet-evenwijdige leidingen kan de voorgestelde rekenmethode niet toegepast worden. Invoering van radiale weerstanden maakt het mogelijk bij vrijwel elke soort van modelonderzoek een zekere vereenvoudiging te bereiken, omdat men van een driedimensionale op een tweedimensionale (horizontale) afbeelding kan overgaan.

Ook de relaxatiemethode kan voor de oplossing van grondwaterstromingen in het horizontale vlak gebruikt worden. Welk netwerk men ook toepast (driehoeken, vierkanten of zeshoeken), men zal steeds trachten het werkelijke tracé van de open leidingen te benaderen door gegeven knooppunten op een geschikte manier met elkaar te verbinden. In deze knooppunten kan men een gewijzigde differentie-vergelijking analoog aan formule (18) toepassen.

De uiteenzetting van de rekenmethode voor asymmetrische stromingen is gegeven met de bedoeling aan te tonen, dat men bij niet al te ingewikkelde problemen langs een eenvoudige weg, snel en met weinig kosten tot een resultaat kan komen. Samenvattend kan gezegd worden, dat het gebruik van kD -waarden,

en van radiale en verticale weerstanden hierbij op dezelfde manier gaat als bij de afleidingen van de formules voor symmetrische drainage. De overzichtelijkheid die hiermee verkregen wordt, kan dikwijls een verruiming van inzicht geven. Aanneming van horizontale en verticale stromingsrichtingen en gebruik van gemiddelde (constante) waarden voor de laagdikten en voor de radiale weerstanden kunnen echter tot gevolg hebben, dat grotere fouten ontstaan dan strikt genomen nodig is. Bij een herhaling van de berekening kan men dan een betere benadering verkrijgen door voor de verschillende weerstanden gecorrigeerde waarden in te voeren. In sommige gevallen kan een nadere bestudering van een onderdeel van het stroomgebied gewenst zijn. De praktische ervaring is echter, dat invoering van kleine correcties weinig betekenis heeft, gezien de veel grotere fouten welke aan de bepaling van de geo-hydrologische constanten kleven.

LITERATUUR

- | | |
|--------------------|---|
| DEEMTER, J. J. VAN | Theoretische en numerieke behandeling van ontwaterings- en infiltratiestromingsproblemen. <i>Versl. Landb. Onderz.</i> 56.7, 1950, pag. 1-67. |
| ENGELUND, F. | Mathematical discussion of drainage problems. <i>Trans. Danish Acad. Techn. Sci.</i> , Bull. no. 3, 1951. |
| ERNST, L. F. | Grondwaterstromingen in de verzadigde zone en hun berekening bij aanwezigheid van horizontale evenwijdige open leidingen. <i>Versl. Landb. Onderz.</i> 67.15, 1962. |
| GUSTAFSSON, Y. | Untersuchungen über die Strömungsverhältnisse in gedrännten Böden. <i>Acta Agric. Suecana Stockholm</i> 2, 1946, pag. 1-157. |
| HOOGHOUDT, S. B. | Bijdragen tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van de grond. Deel 7. <i>Versl. Landb. Onderz.</i> 46 (14) B, 1940, pag. 515-707. |
| ROTHER, J. | Die Strangentfernung bei Dränungen. <i>Landw. Jb.</i> 59, 1924, pag. 453-490. |
| WEDERNIKOV, V. V. | Sur la théorie du drainage. <i>C. R. Acad. Sci. URSS</i> , 23, 1939, pag. 335-337. |