EEN VOORBEELD VAN LINEAIRE PROGRAMMERING

§ 1. De gegevens

Er zijn 3 gegevens:

Activiteiten : een activiteit is een reeks getallen, waarin ieder getal aangeeft welk beslag er op een aanwezig produktiemiddel wordt gelegd.

Aanwezige produktiemiddelen : de goederen en diensten die reeds op het bedrijf aanwezig zijn en optimaal dienen te worden benut.

Saldo : het voordeel dat een activiteit bij toepassing brengt, gemeten aan de beloning voor de reeds aanwezige goederen en diensten. Deze beloning is de opbrengst minus de kosten van de voor de toepassing van de activiteit aan te schaffen produktiemiddelen.

De gegevens zijn vermeld in de volgende tabel.

Tabel 1

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
P_1	4	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
P_2	6	5	1	2	3	1	0	1	0	0	0
P_3	8	2	3	3	1	6	0	0	1	0	0
P_4	10	0	2	5	2	3	0	0	0	1	0
S(aldo)	0	8	3	5	6	4	0	0	0	0	1

Er zijn 2 soorten activiteiten:

Neemactiviteiten: deze activiteiten geven het beslag aan dat zij op de produktiemiddelen leggen: zij nemen produktiemiddelen. Van deze activiteiten is A_0 een onproduktieve combinatie. Deze geeft de voorraad produktiemiddelen aan. A_0 is de voorraad activiteit.
Het in voorraad houden levert geen saldo op. De activiteiten A_1 t/m A_5 zijn produktieve combinaties die een saldo opleveren; het zijn de gebruiksactiviteiten.

Geefactiviteiten: deze activiteiten stellen produktiemiddelen beschikbaar; zij geven produktiemiddelen.

§ 2. De probleemstelling

Het probleem dat nu dient te worden opgelost is: hoeveel van welke activiteiten moet worden ontplooid, opdat het saldo maximaal is?

De enige activiteit die in tabel 1 wordt ontplooid is de voorraad activiteit A_0. Deze activiteit kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van de geefactiviteiten. Een activiteitseenheid van A_6 stelt 1 eenheid P_1 ter beschikking en nul eenheden van de overige produktiemiddelen. In een formule uitgedrukt is:

$$A_6 = 1P_1 + 0P_2 + 0P_3 + 0P_4 \text{ met saldo } 0A_{10}$$

$$A_7 = 0P_1 + 1P_2 + 0P_3 + 0P_4 \text{ met saldo } 0A_{10}$$

enz.

De activiteit A_0 wordt nu omschreven als:

$$A_0 = 4A_6 + 6A_7 + 8A_{10} + 10A_9 \text{ met saldo } 0A_{10}$$

In deze formule kunnen de geefactiviteiten volledig worden uitgeschreven:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & (A_6) & & (A_7) & & (A_8) & & (A_9) & & (A_{10}) & \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & (P_1) \\
 & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & (P_2) \\
A_0 = 4 & 0 & +6 & 0 & +8 & 1 & +10 & 0 & +0 & 0 & (P_3) \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & (P_4) \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & (\text{Saldo})
\end{array}$$

of: $A_0 = 4\ P_1 + 6\ P_2 + 8\ P_3 + 10\ P_4 + 0\ S.$

Zoals A_0 is voorgesteld kunnen ook de activiteiten A_1 t/m A_4 worden uitgedrukt als lineaire combinaties van de geefactiviteiten.

§ 3. D e e e r s t e s t a p

Als eerste stap naar de oplossing van het probleem wordt nu de vraag gesteld: als er 1 gebruiksactiviteit wordt ontwikkeld, welke geeft dan het hoogste saldo en hoeveel kan er maximaal van worden ontplooid?

Ter oplossing van deze vraag zal eerst het gedeelte A_0 t/m A_5 van tabel 1 op andere wijze worden geschreven. Wij beginnen met de gebruiksactiviteiten gelijke winstkansen te geven. Wij rekenen uit welk beslag op produktiemiddelen wordt gelegd ter verkrijging van een saldo van 1. Dit wordt berekend door de gebruiksactiviteiten te delen door het saldo, dus de getallen van A_1 door 8, de getallen van A_2 door 3 enz. Het grootste voordeel wordt bereikt door die nieuwe activiteit, die in de grootste omvang kan worden ontplooid. Ter opsporing van deze activiteit delen wij alle rijen door de voorraad produktiemiddelen, dus de getallen van rij P_1 door 4, de getallen van rij R_2 door 6, enz. In tabel 1A ziet men welk deel van de voorraad produktiemiddelen door een activiteit worden gebruikt om een saldo van 1 op te leveren.

Tabel 1A

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
P_1	1	1/32	1/12	1/20	1/24	1/16
P_2	1	5/48	1/18	1/15	1/12	1/24
P_3	1	3/64	1/8	3/40	1/48	3/16
P_4	1	0	1/15	1/10	1/30	3/40
S	0	1	1	1	1	1

De ontplooiing van een activiteit wordt beperkt door dat produktiemiddel dat door die activiteit relatief het meeste wordt gebruikt. Toepassing van de grootst mogelijke omvang van die activiteit geschiedt nl. onder uitputting van de voorraad van dat produktiemiddel. Wij sporen nu voor elke activiteit het beperkende produktiemiddel op, d.w.z. wij zoeken per activiteit het grootste getal op.

De activiteit die men in de grootste mate kan ontplooien is die activiteit die het kleinste getal heeft in de rij van grootste getallen per activiteit.

Tabel 1B

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Grootste getal per activiteit	5/48	1/8	1/10	1/12	3/16
Kleinste getal van deze reeks				1/12	

Uit tabel 1B blijkt dat bij ontplooiing van 1 activiteit A_4 wordt gekozen. Maximale ontplooiing betekent uitputting van produktiemiddel P_2.

Met deze conclusie keren wij terug naar tabel 1. Uitputting van P_2 wordt bereikt met 6/3 = 2 eenheden van A_4. Het saldo is dan 2 x 6 = 12.

De volgende vraag is nu: kan het saldo worden verhoogd door ook andere activiteiten toe te passen? Er is alleen maar plaats voor andere activiteiten als van produktiemiddel P_2 iets beschikbaar wordt gesteld, d.w.z. als iets van activiteit A_4 wordt opgeofferd. Voor de oplossing van dit vraagstuk heeft A_4 een ander karakter gekregen. A_4 is te beschouwen als een activiteit die P_2 ter beschikking stelt, m.a.w. het is de geefactiviteit geworden ter vervanging van A_7.

Zoals boven de neemactiviteiten zijn uitgedrukt als lineaire combinaties van de geefactiviteiten A_6, A_7, A_8, A_9 en A_{10} worden nu de neemactiviteiten uitgedrukt als lineaire combinaties van de geefactiviteiten A_6, A_4, A_8, A_9 en A_{10}. De nieuwe geefactiviteit A_4 zal het uiterlijk van A_7 moeten krijgen d.w.z. $P_1 = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$, $P_4 = 0$, $S = 0$.

Om P_2 gelijk 1 te maken delen wij de rij P_2 door 3. Dit betekent, dat de schaal waarin P_2 staat uitgedrukt verandert. De nieuwe eenheid voor P_2 is de hoeveelheid die door 1 eenheid A_4 wordt gebruikt. Zo heeft A_0 2 nieuwe eenheden P_2, A_1 5/3 nieuwe eenheid P_2 en A_2 1/3 nieuwe eenheid P_2 af vertaald in geefactiviteiten bevat A. 2 A_4, A_1 5/3 A_4 en A_2 1/3 A_4. Nu bestaat A_4 behalve uit P_2 nog steeds uit P_1, P_3, P_4 en S. A_0 bevat op grond van regel P_2: $6/3 \times 1 = 2$ eenheden P_1. In totaal zijn er 4 eenheden P_1, zodat het getal 4 in regel P_1 moet worden veranderd in $P_4 - 2 = 2$. Op analoge wijze wordt P_1 van A_1 : $1 - 5/3 \times 1 = -2/3$. P_1 van A_2 wordt: $1 - 1/3 = 2/3$. In het algemeen kan men deze berekening in letters aangeven als volgt:

	A_0	A_1	A_4
P_1	X_{10}	X_{11}	X_{14}
P_2	X_{20}	X_{21}	X_{24}

Deling van P_2 door X_{24} heeft het volgende resultaat:

	A_0	A_1	A_4
P_1	X_{10}	X_{11}	X_{14}
P_2	X_{20}/X_{24}	x_{21}/X_{24}	1

Op grond van regel P_2 bevat A_0 nu van P_1: $\frac{X20}{X24} \cdot X_{14}$. Er is de hoeveelheid X_{10} aanwezig, zodat X_{10} herzien moet worden:
de nieuwe X_{10} wordt: $X_{10} - \frac{X\ 20}{X\ 24} \cdot X_{14}$.
Zo wordt de nieuwe X_{11}: $X_{11} - \frac{X21}{X24} \cdot X\ 14$.

Ter vergemakkelijking van het rekenwerk voert men deze berekening uit door $X_{10} - \frac{X14}{X24} \cdot X\ 20$ te nemen (evenzo: $X_{11} - \frac{X14}{X24} \cdot X\ 4$).

Deze bewerkingen worden op tabel 1 toegepast, dus:
regel P_1 wordt verminderd met 1/3 regel P_2.
regel P_2 wordt gedeeld door 3.
regel P_3 wordt verminderd met 1/3 regel P_2.
regel P_4 wordt verminderd met 2/3 regel P_2.
regel S wordt verminderd met 6/3 regel P_2.

Het resultaat is in tabel 2 weergegeven. De nullen van de geef-activiteiten A_0 t/m A_{10} zijn niet geschreven.

Tabel 2

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
P_1	2	-2/3	2/3	1/3	0	2/3	1	-1/3			
P_2	2	5/3	1/3	2/3	1	1/3		1/3			
P_3	6	1/3	8/3	7/3	0	17/3		-1/3	1		
P_4	6	-10/3	4/3	11/3	0	7/3		-2/3		1	
S	-12	- 2	1	1	0	2		-2			1

De neemactiviteiten zijn nu te beschouwen als lineaire combinaties van A_6, A_4, A_8, A_9 en A_{10}. Zo is:

$A_0 = 2A_6 + 2A_4 + 6A_8 + 6A_9 - 12A_{10}$.

Herleid tot produktiemiddelen bevat A_0:

$A_0 = 2P_1 + 2\ (1P_1 + 3P_2 + 1P_3 + 2P_4 + 6S) + 6P_3 + 6P_4 = 12S$

$A_0 = 4P_1 + 6P_2 + 8P_3 + 10\ P_4 + 0S$ (zie tabel 1)

Volgens tabel 2 is na ontplooiing van 2 eenheden A_2 uit A_0 af te lezen, dat:

$P_1 = 2A_6$, d.w.z. er zijn nog 2 eenheden P_1 in voorraad.

$P_2 = 2A_4$, d.w.z. er zijn 2 eenheden A_4 ontplooid.

$P_3 = 6A_8$, d.w.z. er zijn nog 6 eenheden P_2 in voorraad.

$P_4 = 6A_9$, d.w.z. er zijn nog 6 eenheden P_3 in voorraad.

$S = -12A_{10}$, d.w.z. bovenstaande combinatie levert een winst van 12 op (door $2A_4$).

Het saldo van -12 is het verschil tussen de ontplooiing van A_0 in tabel 1 en van A_0 in tabel 2. De combinatie A_0 in tabel 1 heeft een saldo van nul, de combinatie A_0 in tabel 2 heeft een saldo van 12, het verschil is 0 - 12 = -12.

Ook de andere neemactiviteiten zijn op een dergelijke wijze te interpreteren.

$A_1 = -2/3\ A_6 + 5/3A_4 + 1/3A_8 - 10/3A_9 - 2A_{10}$.

Om 1 eenheid A_1 te ontplooien moet men 5/3 A_4 opofferen, komt 2/3A_6 vrij, gebruikt men nog 1/3 A_8 en komt 10/3 A_9 vrij.

Het saldo van 1 eenheid A_1 was 8. Het alternatief kost 5/3 x 6 = 10 (opoffering van A_4). Het verschil is 8 - 10 = -2. Het is derhalve niet voordelig iets van A_4 te offeren ter ontplooiing van A_1.

$A_2 = 2/3\ A_6 + 1/3\ A_4 + 8/3\ A_8 + 4/3\ A_9 + 1A_{10}$.

Een eenheid A_2 heeft een saldo van 3. Voor ontplooiing van een eenheid moet nu 1/3 van A_4 opofferen. Dit kost 2, zodat er een extra saldo van 1 wordt verkregen.

Het is kennelijk voordelig iets van A_4 op te offeren voor een van de activiteiten die in tabel 2 een positief saldo hebben. Alvorens na te gaan, welke activiteit naast A_4 een plaats heeft zullen wij eerst iets zeggen van A_7.

$A_7 = -1/3\ A_6 + 1/3\ A_4 - 1/3\ A_8 - 2/3\ A_9 - 2A_{10}$.

D.w.z. ontplooiing van 1 eenheid A_7 (= beschikbaarstelling van $1P_2$) betekent het opofferen van 1/3 A_4 en het vrijkomen van 1/3 P_1. 1/3 P_3 en 2/3 P_4 met een verlies van 2. Verlies van een eenheid P_2 betekent dus een verlies van 2, m.a.w. de grensopbrengst van P_2 is 2.

§ 4. De tweede stap

Nu de vraag hoeveel van welke activiteit verhoogt het saldo maximaal ondanks opoffering van iets van A_4? Wij volgen hetzelfde procédé als bij tabel 1. Wij stellen het saldo van iedere activiteit 1 en drukken het beslag op produktiemiddelen uit als doel van de voorraad. Uiteraard worden nu alleen die neemactiviteiten beschouwd die in tabel 2 een positief saldo hebben.

Tabel 2A

	A_0	A_2	A_3	A_5
P_1	1	½	1/6	1/6
P_2	1	1/6	1/3	1/6
P_3	1	4/9	7/18	17/36
P_4	1	2/9	11/18	7/36
S	-12	1	1	1
Grootste getal per activiteit		4/9	11/18	17/36
Kleinste getal van een reeks		4/9		

De conclusie uit tabel 2A is dat bij toepassing van slechts 2 activiteiten het hoogste saldo wordt bereikt door opoffering van zoveel A_4 dat met uitputting van de voorraad P_3 de activiteit A_2 wordt ontplooid.

Uit tabel 2 blijkt dat hiervoor 6 eenheden P_3 beschikbaar zijn en dat 1 eenheid A_2 beslag legt op 8/3 P_3. Er kan dus 3/8 x 6 = 9/4 A_3 worden ontplooid. Dit levert een saldo op van 9/4 x 5 = 11 1/4. Het hiervoor te brengen offer is: 9/4 x 2/3 A_4 = 3/2 A_4 met een offer van 3/2 x 6 = 9. Als extra saldo wordt verkregen 11¼ - 9 = 2¼. Het totale saldo wordt na deze 2e stap: 12 + 2¼ = 14¼.

Het wordt nu de beurt van A_2 om de rol van geefactiviteit te spelen. A_2 geeft nu P_3. Wij gaan weer volgens dezelfde principes te werk als bij tabel 1:

rij P_1 wordt verminderd met 1/4 van rij P_3
rij P_2 wordt verminderd met 1/8 van rij P_3
rij P_3 wordt gedeeld door 8/3
rij P_4 wordt verminderd met ½ van rij P_3
rij S wordt verminderd met 3/8 van rij P_1

Het resultaat is vermeld in tabel 3.

Tabel 3

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
P_1	1/2	-3/4	0	-1/4	0	-3/4	1	-1/4	-1/4		
P_2	3/4	13/8	0	3/8	1	-3/8		3/8	-1/8		
P_3	18/8	1/8	1	7/8	0	17/8		-1/8	3/8		
P_4	3	-7/2	0	5/2	0	-1/2		-1/2	-1/2	1	
S	-14 1/4	-2 1/8	0	1/8	0	-1/8		-15/8	-3/8		1

De interpretatie van deze tabel gaat op dezelfde wijze als de vorige tabellen. De neemactiviteiten worden uitgedrukt als lineaire combinaties van de geefactiviteiten.

B.v.: A_2 : $A_3 = -1/4\ A_6 + 3/8\ A_4 + 7/8\ A_2 + 5/2\ A_9 + 1/8\ A_{10}$.

§ 5. De derde stap

Voor toepassing van 1 eenheid A_3 offert men 3/8 A_4 en 7/8 A_2 op. De winst hiervan is 5, het offer hiervan is: 3/8 x 6 + 7/8 x 3 = 4 7/8. Het extra voordeel is 1/8. Er is dus plaats voor A_3 naast A_4 en A_2. Het is de enige activiteit die in tabel 3 een positief saldo vertoont.

Hoeveel A_3 kan er komen? Het knelpunt is P_4. Er kan nu 2/5 x 3 = 6/5 eenheid A_3 worden ontplooid.

Na toepassing van de reeds uiteengezette rekenmethode wordt tabel 4:

Tabel 4

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
P_1	4/5	-11/10	0	0	0	-4/5	1	-3/10	-3/10	1/10	
P_2	4/5	43/20	0	0	1	-3/10		9/20	-1/20	-3/20	
P_3	6/5	27/20	1	0	0	23/10		1/20	11/20	-7/20	
P_4	8/5	-7/5	0	1	0	-1/5		-1/5	-1/5	2/5	
S	-14 2/5	-39/20	0	0	0	-1/10		-37/20	-7/20	-1/20	1

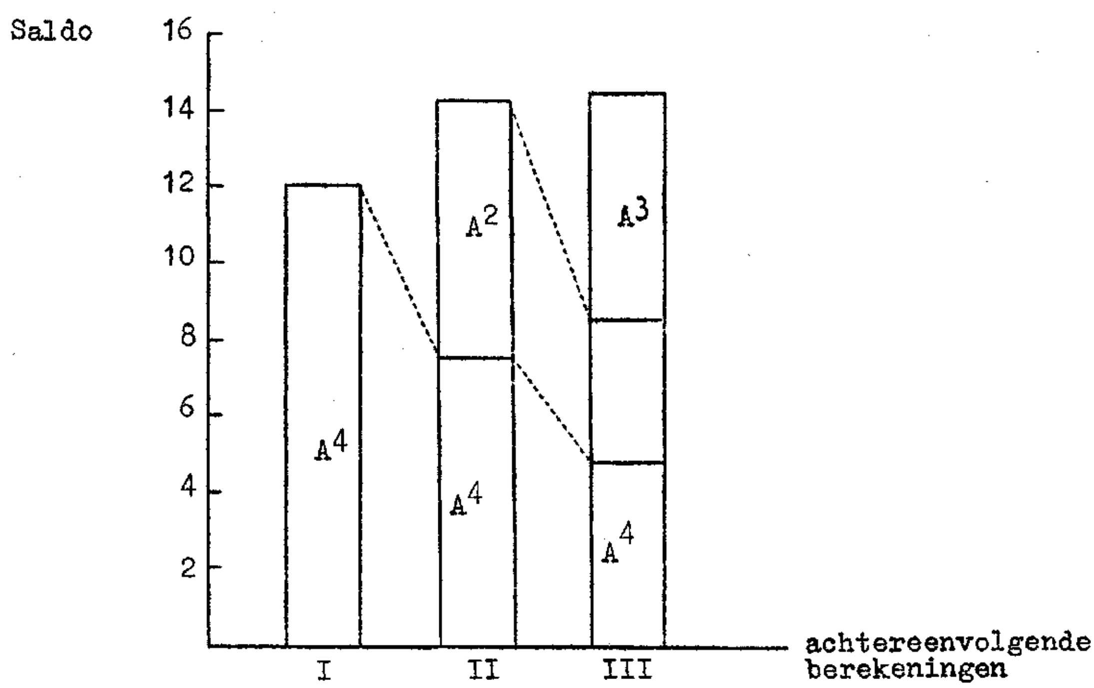
§ 6. D e a f g e l e g d e w e g

Verbetering van het produktieplan is niet meer mogelijk. Langs welke weg is dit resultaat bereikt?

stap 1: $2A_4$ saldo: 12
stap 2: $5/4\ A_4$ " : $7\frac{1}{2}$
$9/4\ A_2$ " : $6\ 3/4$ } totaal: $14\frac{1}{4}$
stap 3: $4/5\ A_4$ " : $4\ 4/5$
$6/5\ A_2$ " : $3\ 3/5$ } totaal: $14\ 2/5$
$6/5\ A_3$ " : 6

In beeld gebracht ziet men het volgende:

Grafiek 1



§ 7. D e r e s u l t a t e n

Wat lezen wij in tabel 4?

a. Het optimale produktieplan en het behaalde voordeel

$A_0 = 4/5\ A_6 + 4/5\ A_4 + 6/5\ A_2 + 6/5\ A_3 - 14\ 2/5\ A_{10}$.

Dit betekent:

1. Er is $4/5\ A_6$ over, dus $4/5$ eenheid van P_1 ligt braak.
2. Er is $4/5\ A_4$, $6/5\ A_2$ en $6/5\ A_3$ ontplooid.
3. Het ermee behaalde (maximale) voordeel is $14\ 2/5$.

De produktierichtingen die niet in het produktieplan voorkomen zijn A_1 en A_9. Wanneer wij stellen dat P_1 de oppervlakte grond is en A_1 t/m A_5 gewassen, dan is het saldo uitgedrukt per ha. Het gewas met het hoogste saldo (A_1) blijkt in het optimale produktieplan niet voor te komen. Toepassing van A_1 snijdt kennelijk betere mogelijkheden af. Een lager saldo per eenheid bij een grotere omvang van de activiteit is hier voordeliger dan een hoger saldo per eenheid bij een kleinere omvang. Door soortgelijke oorzaken zien wij dat het gewas met op 1 na het laagste saldo (A_5) niet in het optimale programma voorkomt, doch het gewas met het laagste saldo (A_2) wel.

b. Do benutting van produktiemiddelen

De produktiemiddelen worden als volgt benut:

Tabel 5

	Beschikbaar	6/5 A_2	6/5 A_3	4/5 A_4	niet gebruikt
P_1	4	6/5	6/5	4/5	9/5
P_2	6	6/5	12/5	12/5	0
P_3	8	18/5	18/5	4/5	0
P_4	10	12/5	6	8/5	0
S	14 2/5	18/5	6	24/5	

De produktiemiddelen P_2, P_3 en P_4 worden volledig benut. Dit zijn de produktiemiddelen die knelpunten vormen bij de organisatie van het bedrijf. In den regel zijn er evenwel knelpunten als er activiteiten worden ontplooid. De lineaire programmering richt hierdoor de aandacht van de studie van de bedrijfsvoering op de belangrijke punten. Voor de niet volledig benutte produktiemiddelen (P_1) kan overwogen worden een activiteit te scheppen die het overschot kan benutten.

c. De grensopbrengst van de produktiemiddelen

$A_7 = -3/10A_6 + 9/20\ A_4 + 1/20\ A_2 - 1/5\ A_3 - 37/20\ A_{10}$.

Uitvoering van een eenheid A_7, d.w.z. beschikbaar stellen van 1 eenheid P_2 leidt tot de volgende veranderingen in het bedrijf.

opofferen : 3/10 A_6, d.w.z. er wordt 3/10 P_1 meer gebruikt, waardoor het saldo niet verandert.

meer ontplooien : 9/20 A_4, waardoor het saldo stijgt met 9/20 x 6 = 2 14/20.

" " : 1/20 A_2, waardoor het saldo stijgt met 1/20 x 3 =3/20.

opofferen : 1/5 A_3, waardoor het saldo daalt met 1/5 x 5 = 1.

Het verschil = saldo wordt - 37/20 A_{10} = - 2 14/20 - 3/20 + 1 = - 1 17/20.

De grensopbrengst van 1 eenheid P_2 is 1 17/20.

Soortgelijke beschouwingen zijn te houden t.o.v. A_8 en A_9. Het blijkt dat de grensopbrengst van 1 P_3 = 7/20 en van 1 P_4 = 1/20. Het grensnut van P_1, dat niet volledig wordt gebruikt is nul (zie A_6).

d. De alternatieve kosten van de niet ontplooide activiteiten

1. A_1 $A_1 = - 11/10\ A_6 + 43/20\ A_4 + 27/20\ A_2 - 7/5\ A_3 - 39/20\ A_{10}$

Deze vergelijking geeft aan wat er in het bedrijf verandert als men 1 eenheid A_1 gaat ontplooien.

Voor 1 eenheid A_1 moet men:

opofferen: 43/20 A_4, waardoor het saldo daalt met 43/20 x 6 = 12 9/10.
" 27/20 A_2, " " " " " 27/20 x 3 = 4 1/20.
er komt vrij: 11/20 A_6, waardoor 11/10 van P_1 braak komt te liggen. Het saldo verandert niet.
meer ontplooien: 7/5 A_3, waardoor het saldo stijgt met 7/5 x 5 = 7.
1 eenheid A, verhoogt het saldo met 8.

Het netto nadelig verschil is -39/20 A_{10} = - 12 9/10 - 4 1/20 + 7 + 8 = - 1 19/20.

Om A_1 in het produktieplan op te nemen moet het saldo van 1 eenheid A_1 ten minste met 1 19/20 stijgen. De alternatieve kosten van 1 eenheid A_1 bedragen voor het onderhavige bedrijf de opbrengst plus 1 19/20.

2. A_5 $A_5 = - 4/5\ A_6 - 3/10\ A_4 + 23/10\ A_2 - 1/5\ A_3 - 1/10\ A_{10}$.

Voor de ontplooiing van 1 eenheid A_5 moet men:

opofferen : 4/6 A_6, dus er wordt 4/6 P_1 meer gebruikt, het saldo verandert niet.
" : 3/10 A_4, waardoor het saldo daalt met 3/10 x 6 = 1 4/5.
meer ontplooien: 23/10 A_2, " " " stijgt " 23/10 x 3 = 6 9/10.
opofferen : 1/5 A_3, " " " daalt " 4/5 x 5 = 1.
1 eenheid A_5 levert een saldo op van 4.
Het netto-nadelig verschil is 1/10 A_{10} = - 1 4/5 + 6 7/10 - 1-4 = -1/10.
De alternatieve kosten van A_5 zijn de opbrengst plus 1/10.

e. De alternatieve kosten van de wel ontplooide activiteiten

De alternatieve kosten van de wel in het optimale plan opgenomen activiteiten kunnen worden berekend. Wij stellen de vraag: "hoeveel moet de opbrengst van een activiteit dalen om net niet in het optimale plan te worden opgenomen? Wij zullen voor de beantwoording van deze vraag de achtereenvolgende saldo's van de tabellen herhalen.

Tabel 6

	Saldo A_2	Saldo A_3	Saldo A_4
Tabel 1	2	5	6
Tabel 2	1	1	0
Tabel 3	0	1/8	0
Tabel 4	0	0	0

1. A_3 Het is duidelijk dat A_3 niet meer in het plan zou zijn opgenomen als er in tabel 3 het saldo nul had gestaan i.p.v. 1/8. Om niet opgenomen te worden moet dus het oorspronkelijke saldo met 1/8 dalen. De alternatieve kosten van A_3 zijn derhalve de opbrengst minus 1/8.

2. A_2 Als A_2 niet zou zijn gekozen, dan had men na tabel 2 direct A_3 moeten kiezen. Blijkens tabel 2A betekent dit dat dan R_4 zou zijn uitgeput. Het saldo van A_2 zou dan in tabel 3 worden: 1 - 3/11. 4/3 = 7/11. Om dan niet gekozen te worden zou er niet 7/11 maar nul moeten staan. De alternatieve kosten van A_2 zijn derhalve de opbrengst minus 7/11.

3. A_4 Als A_4 niet gekozen wordt zou men eerst met A_2 en A_3 moeten beginnen. Nemen wij in tabel 1 eerst A_3 met uitputting van P_4. Daarna A_2 met uitputting van P_3.

Tabel 1^1

	A_2	A_3	A_4	A_7	A_8
P_3	3	3	1	1	
P_4	2	5	2		1
S	3	5	6		

Tabel 2^1

	A_2	A_3	A_4	A_7	A_8
P_3	9/5	0	-1/5	1	-3/5
P_4	2/5	1	2/5		1/5
S	1	0	4		- 1

Tabel 3^1

	A_2	A_3	A_4	A_7	A_8
P_3	1	0	-1/9	5/9	-1/3
P_4	0	1	4/9	-2/9	1/3
S	0	0	4 1/9	-5/9	-2/3

Het saldo van A_4 blijkt 4 1/9 te zijn. De alternatieve kosten van A_4 zijn dus de opbrengst minus 4 1/9.

f. <u>De stabiliteit van het optimale programma</u>

Boven is beschouwd hoe de opbrengst van een activiteit moet veranderen opdat die activiteit niet meer in het bouwplan zou worden opgenomen. Er zijn ook andere vragen mogelijk. Wij willen weten hoe stabiel het optimale programma is. Wij vragen ons al af door welke veranderingen zal een activiteit niet meer in het bouwplan worden opgenomen?

<u>1. A_3</u> De eerste mogelijkheid, nl. verandering van de opbrengst van A_3 is boven onderzocht; deze opbrengst zou met 1/8 moeten dalen.
In tabel 3 lezen wij: $A_3 = -1/4\ A_6 + 3/8\ A_4 + 7/8\ A_2 + 5/2\ A_9 + 1/8\ A_{10}$.
Het saldo van 1/8 kan ook nul worden als de opbrengst van A_4 of A_2 verandert.

1 eenheid A_3 geeft een saldo van 5.
Hiervoor offert men op:

3/8 A_4 met saldo 3/8 . 6 = 2 1/4
7/8 A_2 " " 7/8 . 3 = 2 5/8
Het verschil in saldo is: 5 - 2¼ - 2 5/8 = 1/8.

Deze 1/8 wordt nul als:

Saldo A_3 tot 4 7/8 daalt.
of Saldo A_4 tot 6 1/3 stijgt (3/8 A_4 geeft een saldo van 2 3/8)
of Saldo A_2 tot 3 1/7 stijgt (7/8 A_2 geeft een saldo van 2 6/8)

<u>2. A_2</u> Stellen wij deze vraag voor A_2, dan moeten wij A_2 aflezen in tabel 3 voor het geval dat na tabel 2 A_3 was gekozen i.p.v. A_2. In dat geval zou er in tabel 3 hebben gestaan dat men voor 1 eenheid A_2 moet opofferen 1/11 A_4 en 4/11 A_3.

Het saldo stijgt dan met: 3 - 1/11. 6 - 4/11. 5 = 7/11.
Deze saldostijging kan ongedaan worden gemaakt als Saldo A_2 tot 2 4/11 daalt of Saldo A_4 tot 13 stijgt (1/11 A_4 geeft een saldo van 13/11) of Saldo A_3 tot 6 3/4 stijgt (4/11 A_3 geeft een saldo van 27/11).

<u>3. A_4</u> Wat moet er gebeuren als A_4 niet meer zou worden opgenomen? Uit tabel 3^1 blijkt dat men voor 1 eenheid A_3 1/9 A_2 moet opofferen, doch 4/9 A_3 extra kan ontplooien. Het saldo verandert met:

6 - 1/9 - 3 + 4/9 - 5 = 4 1/9.

Deze 4 4/9 wordt nul indien:
Saldo A_4 daalt tot 1 8/9.

of Saldo A_2 tot 40 stijgt (1/9 A_2 geeft een saldo van 4 4/9)
of Saldo A_3 tot - 12 3/4 daalt (4/9 A_3 geeft een saldo van - 5 2/3)
Voordat de laatste mogelijkheid gerealiseerd wordt zal A_3 reeds uit het plan verdwenen zijn.

4. A_1 In tabel 4 lezen wij:

$$A_1 = -11/10\ A_6 + 43/20\ A_4 + 27/20\ A_2 - 7/5\ A_3 - 39/20\ A_{10}$$

Het netto verlies bij de ontplooiing van 1 eenheid A_1 is:

$$-\ 39/20\ A_{10} = 8 - 43/20 .\ 6 - 27/20\ .\ 3 + 7/5 - 5 = -\ 39/20.$$

Dit verlies zou tot nul worden teruggebracht, indien:

Saldo A_1 stijgt tot 9 19/20
of Saldo A_4 daalt tot 21 9/43 = 5 4/43 (43/20 A_4 geeft een saldo van 219/20) of Saldo A_2 daalt tot 42/27 = 1 15/27 (27/20 A_2 geeft een saldo van 42/20) of Saldo A_3 stijgt tot 179/28 = 6 11/28 (7/5 A_3 geeft een saldo van 179/20)

5. A_5 In tabel 4 lezen wij:

$$A_5 = -\ 4/5\ A_6 - 3/10\ A_4 + 23/10\ A_2 - 1/5\ A_3 - 1/10\ A_{10}.$$

Het netto-verlies bij ontplooiing van 1 eenheid A_5 is:

$$-1/10\ A_{10} = 4 - 3/10 .\ 6 + 23/10\ .\ 3 - 1/5 .\ 5 = -1/10.$$

Dit verlies wordt nul indien:

Saldo A_5 stijgt tot 4 1/10.
of Saldo A_4 daalt tot 17/3 = 5 2/3 (3/10 A_4 geeft een saldo van 17/10)
of Saldo A_2 stijgt tot 70/23 = 3 1/23 (23/10 A_2 geeft een saldo van 70/10)
of Saldo A_3 daalt tot 45/10 = $4\frac{1}{2}$ (1/5 A_3 geeft een saldo van 9/10)

6. De variatieruimte

In tabel 7 zijn de gevonden resultaten samengevat. De linksstaande activiteiten worden niet (A_2, A_3, A_4) of wel (A_1, A_5) in het optimale programma opgenomen als het saldo van een in de kolommen vermelde activiteit de genoemde waarde krijgt, terwijl alle andere saldi gelijk blijven.

Tabel 7

	het saldo wordt:				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1. A_1 komt in het plan als	9 19/20	1 15/27	6 11/28	5 4/43	
A_2 vallen uit als		2 4/11	6 3/4	13	
A_3 vallen uit als		3 1/7	4 7/8	6 1/3	
A_4 vallen uit als		40	-12 3/4	1 8/9	
A_5 komt in het plan als		3 1/23	4 1/2	5 2/3	4 1/10
1. dit geschiedt als slechts 1 saldo verandert en de overige niet veranderen					
Variatieruimte					
laagste grens		2 4/11	4 7/8	5 2/3	
Saldo	8	3	5	6	4
hoogste grens	9 19/20	3 1/23	6 11/28	6 1/3	4 1/10

De variatie ruimte is de ruimte waarbinnen een saldo (ceteris paribus) kan schommelen zonder invloed te hebben op het gevonden optimale produktieplan.

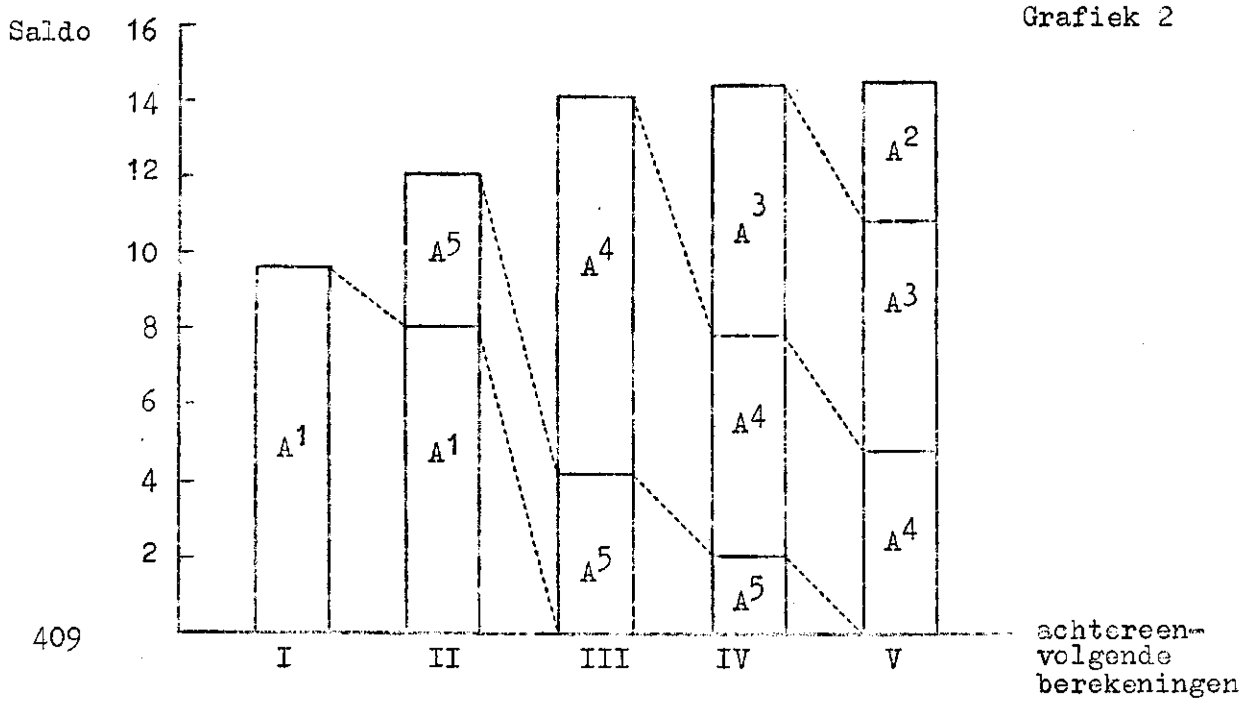
§ 8. Een andere weg met hetzelfde resultaat

De techniek van de lineaire programmering berust op het doen van een voordelige keuze en het zoeken naar een voordeliger keuze. In het bovenstaande is steeds de voordeligste keuze bij de gegeven omstandigheden gedaan. Dit behoeft niet. Het is voldoende als de keuze alleen maar voordeliger is. Het duurt dan wel wat langer om het optimale produktieplan te bereiken. Gesteld dat het saldo is uitgedrukt per ha gewas en dat wij ons in de keuze laten leiden door de grootste winst per ha. Wij zouden dan eerst A_1 hebben gekozen en later ontdekt hebben dat A_1 verdrongen wordt door andere activiteiten. Een berekening langs deze weg benaderde het optimale plan met de volgende stappen:

I	1,2 A_1 (uitputting van P_2),	winst	1,2 x 8 = 9,6	
II	1 A_1	winst	1 x 8 = 8	totaal 12
	1 A_5 (uitputting van P_3)		1 x 4 = 4	
III	1,65 A_4 (uitputting van P_2 en verdringing van A_1)	winst:	1,65 x 6 = 9,90	totaal 14,10
	1,05 A_5		1,05 x 4 = 4,20	
IV	0,95 A_4	winst:	0,96 x 6 = 5,76	totaal 14,3
	0,5 A_5		0,52 x 4 = 2,08	
	1,3 A_3 (uitputting van P_4)		1,3 x 5 = 6,50	
V	0,8 A_4	winst	0,8 x 6 = 4,8	totaal 14,4
	1,2 A_2 (uitputting van P_3 en verdringing van A_5)		1,2 x 3 = 3,6	
	1,2 A_3		1,2 x 5 = 6,0	

Grafisch worden deze stappen voorgesteld als volgt.

Grafiek 2



409

§ 9. Het verband tussen lineaire programmering met produktie- en substitutiefuncties

Het blijkt uit tabel 4 dat bij het optimale produktieplan 4/5 P_1 niet wordt gebruikt. De producent kan nu overwegen of het voordeliger is de verhoudingen in de activiteiten A_2, A_3 en A_4 te veranderen door bij gegeven P_2, P_3 en P_4 weer van P_1 te gebruiken. Het grensnut van P_1 is nul, iedere saldoverhoging is dus voordelig. Als de produktiefuncties, die beschrijven hoe het saldo reageert op meer gebruik van P_1 bij gegeven overige produktiemiddelen bekend is, rijst de vraag welk punt op deze functie beter is dan het reeds gekozen punt.

Hierbij zijn verschillende grenzen. Men kan niet meer dan 4/5 P_2 extra gebruiken. Het extra-gebruik van P_2 heeft geen invloed op het programma indien de stijging van het saldo binnen de variatieruimte blijft. Stijgt het saldo daarboven, dan verandert het programma doordat andere activiteiten uitvallen of nieuwe activiteiten worden ontplooid. Deze veranderingen beïnvloeden het gebruik van de produktiemiddelen. Het probleem van het vinden van de voor het bedrijf optimale verhoudingen tussen produktiemiddelen binnen een activiteit is niet eenvoudig op te lossen.

Voor het onderzoek naar de produktiefuncties stelt de lineaire programmering wel het probleem door aan te geven welke de gegeven en welke de variabele produktiemiddelen zijn. Voor het onderzoek naar substitutiefuncties geldt iets dergelijks. Het kan zijn dat de producent overweegt het ene produktiemiddel minder en het andere meer te gebruiken, b.v. vervanging van arbeid door werktuigen. Hiermede is het probleem voor de vaststelling van substitutiefuncties gesteld. Bij het vinden van de voor het bedrijf optimale verhouding rijzen dezelfde problemen als bij de produktiefuncties.

Maart 1958 A.H.J.Liberg (ec.drs.)