

Hantush 'Well-function' in de pocket calculator

Redactie: Servicegroep Methodologie en Statistiek van het KIWA.

Hantush' well function $W(u, \frac{r}{\lambda})$ is lastig, maar niettemin voor de meeste geohydrologen belangrijk. Hij beschrijft de stationaire grondwaterstandsverlaging $s[L]$ door een put die vanaf het tijdstip $t = 0$ een constante volumestroom $Q [L^3/T]$ onttrekt. De put is volkomen en bevindt zich in een oneindig uitgestrekt watervoerend pakket met doorlaatfactor $kD [L^2/T]$ en bergingscoëfficiënt S [dimensieloos]. Aan de boven- en/of onderzijde bevindt zich een scheidelingslaag met weerstand $c [T]$ (respectievelijk c_1 boven en c_2 onder). Aan



IR. T. N. OLSTHOORN
KIWA NV

gene zijde van de scheidelingslaag(en) wordt de grondwaterstijghoogte op de waarde nul gefixeerd (afb. 1).

Volgens Hantush [1955] geldt nu:

$$s = \frac{Q}{4\pi kD} W(u, \frac{r}{\lambda})$$

Met $u = r^2 S / (4kD t)$

en

r = afstand tot de put $[L]$,

$\lambda = \sqrt{kDc}$ respectievelijk

$\sqrt{kD(c_1 c_2 / (c_1 + c_2))}$ wanneer zowel boven als onder een scheidelingslaag aanwezig is.

Voor $W(u, r/\lambda)$ geldt:

$$W(u, r/\lambda) = \int_u^\infty \frac{1}{y} \exp\left(-y - \frac{(r/2\lambda)^2}{y}\right) dy$$

Reeksontwikkeling leidt tot een ingewikkeld produkt van 2 machtreeksen [Hantush, 1956], terwijl numerieke integratie langs een lineaire u - of y -as onpraktisch is door de enorme variatie in orde van grootte van u en r/λ in de praktijk. Een plezierige aanpak wordt verkregen door integratie langs een logarithmische y - of u -as (afb. 2).

$$W(u, \frac{r}{\lambda}) = \int_{\ln(u)}^{\frac{r}{2\lambda}} \exp\left(-y - \frac{(r/2\lambda)^2}{y}\right) d\ln y$$

Het argument onder het integraalteken heeft een fraaie klok-vorm met een maximum voor $y = r/2\lambda$ (zie afb. 2), welke zonder problemen numeriek kan worden geïntegreerd. In mijn programma wordt

eerst geïntegreerd van $\ln(\frac{r}{2\lambda})$ tot ∞ en

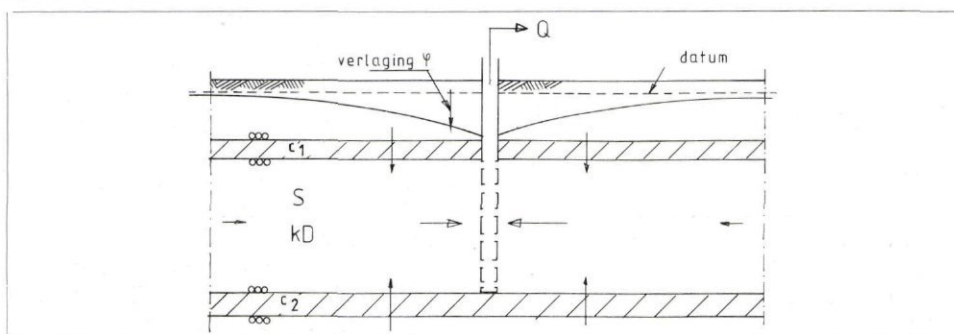
Onlangs deed prof. Huisman in dit blad (H_2O 3/81, pp. 67-70) de suggestie dat het KIWA een rol zou kunnen vervullen bij beheer en verspreiding van calculator-programma's die in de waterleidingbranche van nut zijn. Gezien de grote vlucht die de programmeerbare zakrekenmachine de afgelopen 2 jaren heeft genomen en de daarmee gepaard gaande behoefte aan programmatuur heeft het KIWA de toegeworpen handschoen opgenomen. Hierbij wordt de rubriek 'Zakrekenmachines in de waterleidingindustrie' geopend, waarin nuttige programma's worden gepubliceerd. In dit nummer wordt het eerste artikel van de nieuwe rubriek gepubliceerd. Ook programmeermethodieken, effectieve benaderingen van ingewikkelde functies en dergelijke komen in aanmerking.

De rubriek staat onder redactie van de Servicegroep Methodologie en Statistiek van het KIWA. Naast op nut en bruikbaarheid wordt gelet op een goede gebruiksbeschrijving, terwijl een overzichtelijke flow-chart [zie bijvoorbeeld Picking, 1979], programmalisting en bijbehorende magneetkaartjes voorwaarden zijn voor publicatie. Jaarlijks worden de beschikbare programma's gebundeld en tegen kostprijs beschikbaar gesteld. Op aanvraag kan een kopie van de betreffende magneetkaartjes worden toegestuurd. Hiernaast staat het eerste artikel van de nieuwe rubriek. Programmeurs worden van harte uitgenodigd hun bijdrage te leveren.

Voorbeeld:

Toets	Display	Intypen	Bijvoorbeeld (in m en d)	Opm.
A	R ?	afstand	100	(m)
R/S	L ?	lambda	1000	(m)
R/S	S ?	bergingscoëff.	0.001	
R/S	kD ?	doorlaatfactor	2000	(m ² /d)
R/S	Q ?	onttrekking	20000	(m ³ /d)
R/S	Ko = 2.426			gedurende 3 sec.
R/S	T ?	tijdstip	0.1	(d)
R/S	S = 2.895 M			verlaging in m
R/S	T ?		1	
	S = 3.823 M			
A	R ?			
	etc.			

Afb. 1 - Situatie.



vervolgens van $\ln(u)$ tot $\ln(\frac{r}{2\lambda})$. De eerste integraal is dan gelijk aan $K_0(\frac{r}{\lambda})$, de besselfunctie die opduikt bij stationaire stroming:

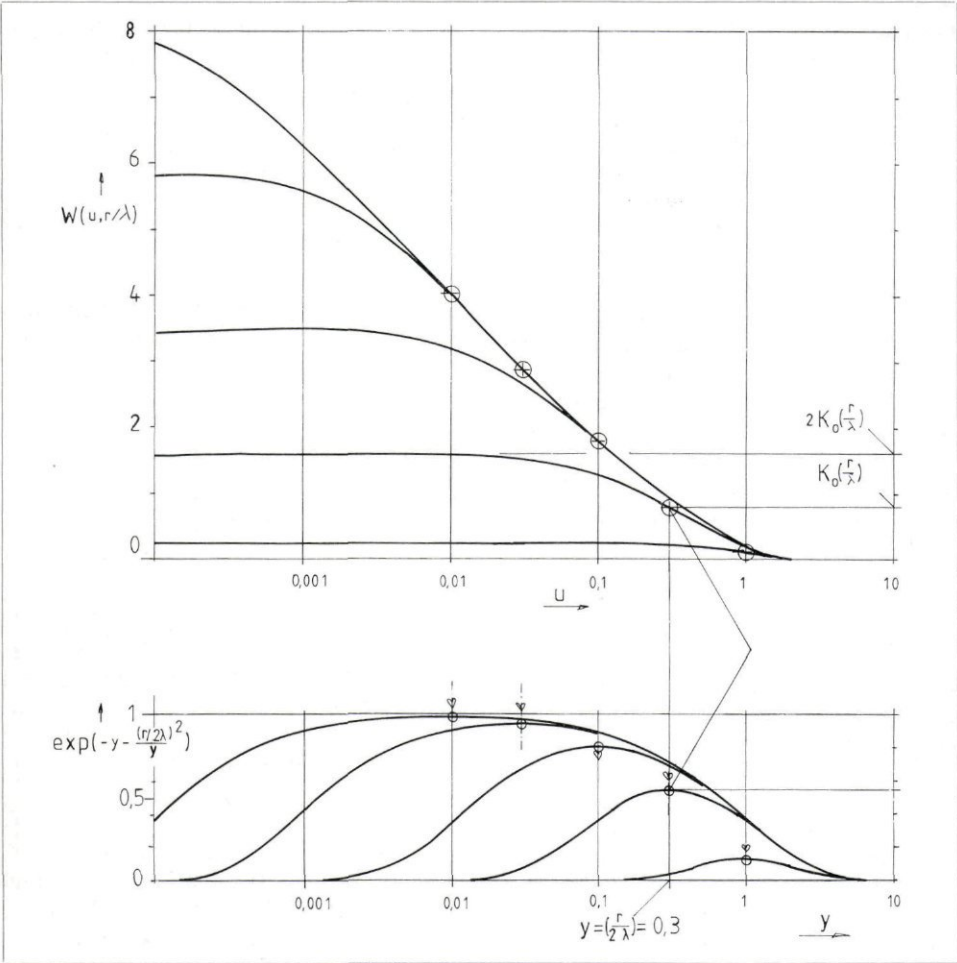
$$W(u, \frac{r}{\lambda}) = \int_{\ln(u)}^{\ln(\frac{r}{2\lambda})} (...) d\ln y + \int_{\ln(\frac{r}{2\lambda})}^{\infty} (...) d\ln y = \int_{\ln(u)}^{\frac{r}{2\lambda}} (...) d\ln y + K_0(\frac{r}{\lambda})$$

Voor zeer grote waarden van t nadert u tot nul en $\ln(u)$ tot $-\infty$, zodat ook de eerste integraal dan de waarde $K_0(\frac{r}{\lambda})$ aanneemt

$$W(u, \frac{r}{\lambda}) = 2 K_0(\frac{r}{\lambda})$$

$u \rightarrow -\infty$

Voor de feitelijke integratie maak ik gebruik van een 10-punts integratieformule, overgenomen uit Abramowitz en Stegun [1972, p. 887]. Met deze 10-puntsformule wordt het gehele integratietraject in één keer overlapt. In plaats van ∞ neem ik als bovengrens de waarde $u = 10$ (zie



Afb. 2 - $W(u, -)$ en $dW(u, r/\lambda)/d\ln y$.

afb. 2). De gebruikte integratieformule:

$$\int_{x_0}^{x_{10}} f(x)dx = \frac{5\Delta x}{299376} 16067 (f_0 + f_{10}) + 106300 (f_1 + f_9) - 48525 (f_2 + f_8) + 272400 (f_3 + f_7) - 260550 (f_4 + f_6) + 427368 (f_5)$$

Gebruik van het programma op de Hewlett & Packard HP41C:

Het programma is interactief en wordt gestart door indrukken van toets A. in de 'display' verschijnt dan een vraag, bijvoorbeeld 'Q?', 'kD?' enz., waarna de getalswaarde van de betreffende variabele moet worden ingetypt en vervolgens de start/stop-toets (R/S-toets) ingedrukt. Nadat alle noodzakelijke gegevens via dit vragen-antwoordspel zijn ingevoerd, begint de berekening. De berekening wordt automatisch gestart voordat het programma om de tijd t heeft gevraagd. Eerst wordt r namelijk via de tweede integraal $K_0(-)$

berekend en deze gedurende 3 seconden in de display getoond. Pas hierna vraagt het programma om t. Na intypen verschijnt de waarde van u in de display. Het programma rekent intussen gewoon door en levert in 13 seconden het gezochte antwoord. Wanneer nu de R/S toets wordt bediend, vraagt het programma om een nieuwe t. Wanneer de A-toets wordt ingetoetst vraagt het programma om een nieuwe set bodemconstanten.

De fout in het resultaat is kleiner dan 3 % en meestal beduidend kleiner dan 1 %. Controle is eenvoudig. Immers wanneer we onderstaande waarden invullen moeten de bekende tabellen worden verkregen.

$$Q = 4\pi \quad r = 1 \\ kD = 1 \quad S = 4$$

Zodat:

$$\frac{Q}{4\pi kD} \frac{r}{\lambda} W(u, -) = W(-, -) \frac{1}{t \lambda}$$

Een dergelijke controle is met enigszins extreme getalswaarden in onderstaande tabel uitgevoerd. Tussen haakjes zijn de waarden uit de tabel van $W(u, r/\lambda)$ geplaatst uit Huisman [1972].

	r/λ	0,01	1
u			
1		0,218 (0,219)	0,186 (0,186)
10-6		9,410 (9,443)	0,868 (0,842)
$\frac{r}{K_0(-)}$		4,720 (4,721)	0,4210 (0,4210)

